

УДК 530.145

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Г. В. Ефимов

Объединенный институт ядерных
исследований, г. Дубна

Рассмотрена нелокальная квантовая электродинамика. Сформулированы аксиомы квантовой теории взаимодействующих электромагнитного и электронного полей. Построена S -матрица, удовлетворяющая условиям унитарности, причинности, ковариантности, градиентной инвариантности и конечности в каждом порядке теории возмущений. Предлагаемая нелокальная схема описывает взаимодействие протяженного электрона, имеющего форму шара радиуса l , с локальным электромагнитным полем.

A nonlocal quantum electrodynamics is considered. The axioms of the quantum theory of the interacting electromagnetic and fermion fields are formulated. The S -matrix is constructed to satisfy the requirements of unitarity, causality, Lorentz covariance, gauge invariance and the absence of ultraviolet divergences in each perturbation order. The proposed nonlocal scheme describes an interaction of the lengthy electron which is a sphere of radius l with the local electromagnetic field.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наибольший успех в квантовой теории поля выпал на долю квантовой электродинамики, описывающей динамику взаимодействия фотонов и фермионов (электронов, μ -мезонов, протонов и т. д.). Здесь удалось построить непротиворечивым образом S -матрицу, удовлетворяющую всем общим требованиям локальной квантовой теории поля, и дать хороший математический аппарат, позволяющий рассчитывать фактически любые эффекты взаимодействия фотонов с заряженными фермионами.

Более того, квантовая электродинамика блестяще подтвердилась на опыте. Вплоть до сегодняшнего дня экспериментально не найдено ни одного эффекта, который бы не укладывался в рамки локальной квантовой электродинамики.

За последние годы заметно усилился интерес к вопросу, до каких пределов справедлива квантовая электродинамика, где границы ее применимости (см. обзоры С. Бродского и С. Дрелла [1], В. А. Петрунькина на II Международном совещании по нелокальной квантовой теории поля в Азау [2], Л. Д. Соловьева на XV Международной конференции по физике элементарных частиц в Киеве [3]).

Для оценки ожидаемых экспериментальных следствий, связанных с отклонением от локальности квантовой электродинамики, необходимо иметь хорошую непротиворечивую схему построения нелокальной теории, удовлетворяющей всем общим требованиям квантовой теории поля: ковариантности, унитарности, причинности, градиентной инвариантности, конечности.

Обычный способ нелокальной модификации теории состоит в том, что в отдельные структурные элементы диаграмм Фейнмана: пропагаторы, вершины и т. д., вводят форм-факторы. Обычно это функции типа регуляризации Паули — Вилларса. Например, пропагатор фотона изменяется следующим образом:

$$D_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - k^2 - i\epsilon} \right], \quad (1.1)$$

где M — импульс обрезания, связанный с «элементарной» длиной l соотношением $l = 1/M$.

Другой способ предельно прост. Отклонение экспериментально измеренного сечения некоторого процесса от теоретически вычисленного, согласно локальной теории, параметризуется следующим образом:

$$\frac{\sigma_{\text{эксп}}}{\sigma_{\text{теор}}} = 1 + \frac{m^4}{M^4}.$$

Затем находят пределы возможного изменения нового параметра M .

Подобная параметризация, как нам кажется, имеет весьма далекое отношение к непротиворечивому описанию нелокального взаимодействия. Кроме того, параметры M , вообще говоря, должны быть разными в различных экспериментах. И поэтому результаты одного опыта никак не связаны с результатами другого.

Имеющиеся схемы построения внутренне непротиворечивой нелокальной электродинамики основаны на предписаниях, заимствованных из метода регуляризации Паули — Вилларса (см. работы [4—6] и ссылки там на более ранние работы).

Основным источником трудностей, возникающих при построении теории с форм-фактором типа регуляризации Паули — Вилларса (как, например, в (1.1)), является появление дополнительных особенностей в амплитудах физических процессов. Следствием этого является нарушение унитарности и причинности

S -матрицы, а также трудности с выполнением градиентной инвариантности теории. Чтобы спасти положение, приходится прибегать к теориям с индефинитной метрикой [6, 7] и формулировать довольно громоздкие правила вычисления матричных элементов, которые реально могут быть использованы лишь в низших порядках теории возмущений.

Нам кажется, что класс аналитических мероморфных функций, к которому относится регуляризация Паули — Вилларса, не является приемлемым с точки зрения требований, накладываемых на S -матрицу в квантовой теории поля.

В данной работе мы изложим вариант нелокальной квантовой электродинамики, свободный от указанных выше недостатков. Будет предложено ковариантное описание взаимодействия фотонов с протяженным электроном, т. е. электроном, который представляет собой заряженный шар радиуса l с некоторым распределением плотности заряда внутри этого шара.

S -матрица, описывающая это взаимодействие, удовлетворяет всем требованиям квантовой теории поля: ковариантности, унитарности, причинности, градиентной инвариантности, конечности.

С точки зрения описания эксперимента, мы предлагаем в рамках самосогласованной квантовой теории поля некоторую феноменологическую схему, параметрами которой являются l — элементарная длина, на самом деле размер электрона, и некоторая функция, описывающая распределение заряда внутри шара радиуса l . Поскольку l достаточно мало, в формулы, описывающие различные физические процессы, войдут несколько моментов функции распределения заряда. Преимущество предлагаемой схемы состоит в том, что l и параметры, описывающие распределение заряда электрона, будут едины для всей совокупности экспериментов по квантовой электродинамике.

В данной работе мы дадим обзор идей и математических методов построения нелокальной квантовой электродинамики.

Анализ экспериментальной ситуации с новой точки зрения в данной статье отсутствует. Эту работу еще предстоит сделать в дальнейшем.

2. ВВЕДЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОСТИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ

Как известно (см., например, работы [8, 9]), взаимодействие поля заряженных электронов с электромагнитным полем определяется требованием калибровочной инвариантности. Это означает, что при описании электромагнитного поля потенциалами A_μ физическое содержание теории не изменяется при калибровочном преобразовании вида

$$A_\mu^{\prime}(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \quad (2.1)$$

так как тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)$$

инвариантен по отношению к калибровочному преобразованию (2.1).

Обычно требуют, чтобы лагранжиан системы взаимодействующих заряженных полей Φ_j с электромагнитным полем A_μ был инвариантен относительно следующих градиентных преобразований:

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x); \\ \Phi_j(x) &\rightarrow \Phi_j(x) \exp\{iq_j f(x)\}; \\ \Phi_j^*(x) &\rightarrow \Phi_j^*(x) \exp\{-iq_j f(x)\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где q_j означает заряд поля Φ_j . Инвариантность полного лагранжиана $\mathcal{L}(\Phi_j, \Phi_j^*, A_\mu)$ относительно градиентной группы (2.2) приводит к сохранению тока

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$J_\mu(x) = i \sum_j q_j \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi_j^*(x))} \Phi_j^*(x) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi_j(x))} \Phi_j(x) \right\}. \quad (2.4)$$

Следует подчеркнуть, что градиентное преобразование (2.2) уже подразумевает, что взаимодействие электромагнитного поля с заряженными полями является локальным. Единственной электромагнитной характеристикой поля Φ_j является его заряд q_j , который фигурирует в преобразованиях (2.2). Явный вид лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с заряженными полями выбирается обычно, согласно принципу «минимальности», который гласит, что при действии на переменную поля Φ_j оператор ∂_μ заменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Phi_j(x) &\rightarrow \{\partial_\mu - iq_j A_\mu(x)\} \Phi_j(x) \\ \text{и} \quad \partial_\mu \Phi_j^*(x) &\rightarrow \{\partial_\mu + iq_j A_\mu(x)\} \Phi_j^*(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Изложенная общепринятая процедура приводит ко всем трудностям, возникающим в локальной квантовой теории поля (см., например, [8, 9]).

Наше нелокальное обобщение теории электромагнитных взаимодействий состоит в следующем. Мы предполагаем, что вместо группы градиентных преобразований (2.2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x); \\ \Phi_j(x) &\rightarrow \Phi_j(x) \exp \left\{ iq_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) f(x') \right\}; \\ \Phi_j^*(x) &\rightarrow \Phi_j^*(x) \exp \left\{ -iq_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) f(x') \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где $K_j(x/l_j)$ — некоторая вещественная функция, вообще говоря, обобщенная (форм-фактор), нормированная условием

$$\int dx K_j(x/l_j) = 1. \tag{2.7}$$

Параметр l_j (элементарная длина) характеризует размер области нелокального взаимодействия.

Группа преобразований (2.6) отличается от (2.2) изменением фазы преобразования заряженных полей Φ_j . При градиентных преобразованиях с постоянной фазой ($f = \text{const}$) преобразования (2.6) совпадают с общепринятым (2.2), поскольку функция K_j нормирована условием (2.7).

Преобразования (2.6) с произвольной функцией $f(x)$ формально гарантируют сохранение электромагнитного тока заряженных полей (2.3), причем в этом случае имеем:

$$J_\mu(x) = i \sum_j q_j \int dx' K_j\left(\frac{x-x'}{l_j}\right) \times \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi_j^*(x'))} \Phi_j^*(x') - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi_j(x'))} \Phi_j(x') \right\}. \tag{2.8}$$

Локальный вариант получается при $K_j((x-x')/l_j) = \delta^4(x-x')$.

Принцип минимальности электромагнитного взаимодействия в нелокальном случае вместо (2.5) будет выглядеть следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu \Phi_j(x) &\rightarrow \left\{ \partial_\mu - iq_j \int dy K_j((x-y)/l_j) A_\mu(y) \right\} \Phi_j(x); \\ \partial_\mu \Phi_j^*(x) &\rightarrow \left\{ \partial_\mu + iq_j \int dy K_j((x-y)/l_j) A_\mu(y) \right\} \Phi_j^*(x). \end{aligned} \right\} \tag{2.9}$$

Каков физический смысл калибровочных преобразований заряженных полей в (2.6)? Константа q_j определяет заряд поля Φ_j . Нелокальная функция $K_j(x/l_j)$ характеризует распределение заряда поля $\Phi_j(x)$ в x -пространстве. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже (см. разд. 4).

В случае взаимодействия электромагнитного и электрон-позитронного полей полный лагранжиан классических полей имеет вид*:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{em, 0}(x) + \mathcal{L}_{e, 0}(x) + \mathcal{L}_I(x), \tag{2.10}$$

* Нами принята следующая система обозначений:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \partial/\partial x_\mu; \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}; \\ g_{\alpha\beta} &= 0, \quad \alpha \neq \beta; \quad g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1; \\ \hat{p} &= p_\alpha \gamma_\alpha = p_0 \gamma_0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}, \quad p k = p_0 k_0 - \mathbf{p} \mathbf{k}; \\ \hat{\partial} &= \gamma_\alpha \partial_\alpha = \gamma_\alpha \partial/\partial x_\alpha. \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{em, 0}(x) &= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu(x) \partial_\nu A_\mu(x); \\ \mathcal{L}_{e, 0}(x) &= -\bar{\psi}(x) (i\hat{\partial} + m) \psi(x); \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_I(x) = e\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \mathfrak{A}_\mu(l, x). \quad (2.12)$$

Здесь

$$\mathfrak{A}_\mu(l, x) = \int dy K((x-y)/l) A_\mu(y). \quad (2.13)$$

Лагранжиан свободного электромагнитного поля $\mathcal{L}_{em, 0}(x)$ записан с учетом условия Лоренца $\partial_\mu A_\mu(x) = 0$.

Калибровочная группа (2.6) в этом случае записывается

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x); \\ \psi(x) &\rightarrow \psi(x) \exp \left\{ ie \int dy K((x-y)/l) f(y) \right\}; \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) \exp \left\{ -ie \int dy K((x-y)/l) f(y) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Здесь e — заряд электрона, $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ ($\hbar = c = 1$).

Ниже мы рассмотрим только квантовую электродинамику электронов и позитронов.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При изучении лагранжиана (2.10) с калибровочной группой (2.14) возникают следующие проблемы.

1. Как квантовать систему (2.10)? Можно ли построить канонический формализм и полностью провести динамическое описание квантовополовой системы (2.10)?

2. Как построить S -матрицу? Какие условия должны быть на нее наложены? Может ли быть она сделана конечной?

3. Каков физический смысл функции $K(x/l)$? Каково ее происхождение? Может ли быть она выбрана однозначно?

Ответа на первую группу вопросов в настоящее время пока не существует. Это дело дальнейших исследований.

Поэтому S -матрица, которую мы предполагаем построить в квантовой электродинамике, не является следствием решения квантовополовых уравнений Шредингера или Гайзенберга. Мы будем следовать по пути аксиоматического построения теории, предложенному Н. Н. Боголюбовым, Д. В. Ширковым, Б. В. Медведевым и М. К. Поливановым [8, 10]. Этот путь построения теории исходит из предложенной Гайзенбергом [11] программы, в которой рассматриваются только матричные элементы S -матрицы, отвечающие переходам между асимптотическими устойчивыми состоя-

ниями. Совокупность таких матричных элементов в случае квантовой электродинамики можно представить в форме функционального разложения по нормальным произведениям асимптотических невазаимодействующих электромагнитного поля $A_\mu(x)$ и поля электронов $\psi(x)$:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{n, m, l} \frac{1}{n! m! l!} \int dx_1 \dots \int dx_n \int dy_1 \dots \int dy_m \int dz_1 \dots \int dz_l \times \\
 &\quad \times \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_n; \beta_1 \dots \beta_l}^{\mu_1 \dots \mu_n} (x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_m; z_1 \dots z_l) \times \\
 &\quad \times :A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_m}(y_m) \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_l}(z_l): = \\
 &= \sum_{n, m, l} \frac{1}{n! m! l!} \int dk_1 \dots \int dk_n \int dp_1 \dots \int dp_m \int dq_1 \dots \int dq_l \times \\
 &\quad \times \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_n; \beta_1 \dots \beta_l}^{\mu_1 \dots \mu_n} (k_1 \dots k_n; p_1 \dots p_m; q_1 \dots q_l) \times \\
 &\quad \times :A_{\mu_1}(k_1) \dots A_{\mu_n}(k_n) \psi_{\alpha_1}(p_1) \dots \psi_{\alpha_m}(p_m) \bar{\psi}_{\beta_1}(q_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_l}(q_l):, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

где операторы $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют свободным уравнениям

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0, \quad (3.2)$$

$$\square A_\mu(x) = 0 \quad (3.3)$$

с дополнительным условием Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0. \quad (3.4)$$

Рассматриваемый вариант теории основан на следующих физических предположениях.

1. Физические состояния

1. Асимптотические состояния системы содержат бесконечно удаленные невазаимодействующие частицы и описываются амплитудами $|\dots\rangle$, являющимися элементами гильбертова пространства.

2. Релятивистская ковариантность. Под действием группы Лоренца L амплитуды состояний преобразуются с помощью некоторого ее унитарного представления U_L .

3. Существует состояние вакуума, для которого $U_L |0\rangle = |0\rangle$, и оно единственно.

4. Полнота и спектральность. Существует система собственных амплитуд состояний 4-импульса $|n, k_n\rangle$, отвечающих неотрицательным значениям энергии, которая вместе с амплитудой $|0\rangle$ является полной.

5. Асимптотические состояния удовлетворяют условию Лоренца

$$\partial_{\mu} A_{\mu}^{(-)}(x) | \dots \rangle = 0,$$

т. е. среди них отсутствуют продольные и временные фотонные кванты.

II. S-матрица

1. Унитарность $SS^+ = S^+S = 1$.

2. Причинность. Введем операцию «включения» и «выключения» взаимодействия. Пусть функция $e(x)$ со значениями в интервале $(0, e)$ характеризует интенсивность включения взаимодействия. S-матрица является функционалом от функции включения взаимодействия $S[e]$, причем $S[0] \equiv 1$ при $e(x) = 0$. Пусть теперь $e_1(x)$ отлична от нуля в области $G_1 \subset R^4$, а $e_2(x)$ — в области $G_2 \subset R^4$. Если S-матрица соответствует локальной и микропричинной теории, тогда $S[e]$ удовлетворяет условию

$$S[e_1 + e_2] = S[e_1] S[e_2] \quad (3.5)$$

при $G_1 \supseteq G_2$. Это означает, что все точки области G_1 или пространственно подобны всем точкам области G_2 или лежат в будущем относительно всех точек области G_2 .

Если теория нелокальна, но микропричинна, тогда $S[e]$ удовлетворяет условию (3.5) в случае, когда область G_1 лежит в будущем относительно всех точек области G_2 , т. е. $G_1 \supset G_2$. При этом размер области нелокальности будет равен l , если, кроме того, выполнено (3.5) при $G_1 \sim G_2$ и $(x - y)^2 < -l^2$ при $\forall x \in G_1$ и $\forall y \in G_2$.

Окончательно условия причинности в различных вариантах можно записать в таблице.

Построенная нами S-матрица будет удовлетворять условию микропричинности в форме III согласно таблице. Однако доказательство этого факта в данной работе не приведено. Это доказательство будет приведено отдельно.

3. Градиентная инвариантность

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2\mu_r}} \left(\frac{\delta_r S}{\delta A_{\mu_1}(x_1) \dots \delta A_{\mu_r}(x_r)} \right) = 0 \quad (3.6)$$

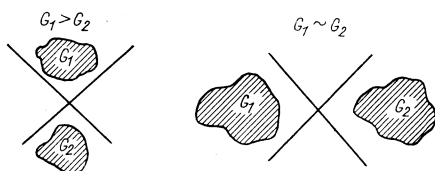
или в разложении (2.1)

$$k_{1\mu_1} \dots k_{r\mu_r} \bar{u}_{\beta_1}(q_1) \dots \bar{u}_{\beta_l}(q_l) \times \\ \times \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} \beta_1 \dots \beta_l (\dots) u_{\alpha_1}(p_1) \dots u_{\alpha_m}(p_m) = 0, \quad (3.7)$$

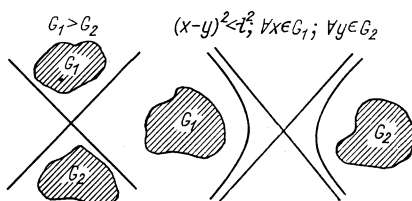
Т а б л и ц а

$S [e_1 + e_2] = S [e_1] S [e_2]$
 при следующих соотношениях между областями

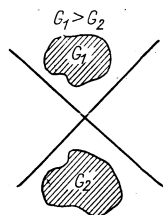
I. Локальная микропричинная теория



II. Микропричинная нелокальная теория
 Размер области нелокального взаимодействия l



III. Микропричинная, нелокальная теория



где $u_\alpha(p)$ — спинор Дирака, удовлетворяющий уравнению

$$(\hat{p} - m) u(p) = 0. \tag{3.8}$$

4. Интегрируемость. Коэффициентные функции $F_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ интегрируемы на некотором подходящем пространстве основных функций.

5. Стабильность. Если $|\alpha\rangle$ -состояние вакуума — одночастичное или другое стабильное состояние, тогда

$$S |\alpha\rangle = |\alpha\rangle.$$

6. Принцип соответствия. При бесконечно малом $\epsilon(x)$ S -матрица должна иметь вид

$$S[e] = 1 + i \int dx \epsilon(x) \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{Y}}(l, x) \psi(x), \quad (3.9)$$

где

$$\hat{\mathcal{Y}}(l, x) = \int dy K((x-y)/l) \hat{A}(y).$$

В этом подходе для построения физически приемлемой теории достаточно указать способ построения S -матрицы, который приводит к матрице рассеяния, удовлетворяющей всем перечисленным выше требованиям.

Наша задача состоит в том, чтобы найти S -матрицу в виде ряда по теории возмущений. Формально, по аналогии с локальной теорией, S -матрица записывается в виде:

$$S[e] = T \exp \left\{ i \int dx \epsilon(x) \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{Y}}(l, x) \psi(x) \right\}. \quad (3.10)$$

Для получения ряда теории возмущений необходимо разложить экспоненту в (3.10) в ряд по $\epsilon(x)$ и перейти к N -произведению операторов поля $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ согласно теореме Вика.

По определению, будем считать, что «хронологическая» свертка операторов фермионного поля электронов будет обычной:

$$S(x-y) = \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dp e^{-ip(x-y)}}{m - \hat{p} - i\epsilon}, \quad (3.11)$$

а «причинная» функция «размазанного» электромагнитного поля запишется в виде:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-y) &= \delta_{\mu\nu} D(x-y) = \overline{\mathcal{Y}_\mu(l, x) \mathcal{Y}_\nu(l, y)} = \\ &= \int dx' \int dy' K\left(\frac{x-x'}{l}\right) K\left(\frac{y-y'}{l}\right) \langle 0 | T(A_\mu(x') A_\nu(y')) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k |\tilde{K}(l^2 k^2)|^2 e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{K}(l^2 k^2) = \int dx e^{ikx} K\left(\frac{x}{l}\right). \quad (3.13)$$

Таким образом, мы получаем обычный ряд теории возмущений с единственным отличием, что причинные функции фотонного поля

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = \delta_{\mu\nu} \Delta(x-y) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon} \quad (3.14)$$

заменяются функцией (3.13).

Обсудим теперь формальное определение S -матрицы (3.10). Следует заметить, что в локальной и тем более в нелокальной квантовой теории поля T -произведение по существу не означает операцию строгого упорядочения операторов поля по времени, поскольку в ряду теории возмущений присутствуют ультрафиолетовые расходимости.

Символически стандартная схема построения конечной S -матрицы по теории возмущений может быть представлена в виде:

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} T_{\Lambda} \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x, \Lambda) \right\}. \quad (3.15)$$

Здесь введены следующие обозначения. Символ T_{Λ} обозначает хронологическое упорядочение операторов поля плюс некоторую регуляризационную процедуру (обычно это регуляризационная процедура Паули — Вилларса с различными возможными модификациями), которая делает конечными все матричные элементы ряда теории возмущений. Λ -параметр регуляризации, при стремлении которого к бесконечности возникают бессмысленные расходящиеся выражения. Для компенсации получающихся расходящихся выражений в лагранжиан взаимодействия вводится некоторое число контрчленов, зависящих от Λ , как от параметра. Операторная структура контрчленов и их явная зависимость от Λ подбирается таким образом, чтобы полностью компенсировать все возникающие при вычислении амплитуд расходящиеся при $\Lambda \rightarrow \infty$ выражения. Таким образом, предел в (3.15) существует.

Что является неудовлетворительным при таком построении S -матрицы? Нефизический параметр Λ фигурирует как в определении регуляризационной процедуры T_{Λ} , так и в задании лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}_I(x, \Lambda)$. Это делает физически бессмысленным лагранжиан взаимодействия, поскольку параметр Λ никакого физического смысла не имеет. Получается, что лагранжиан взаимодействующих полей, который определяет физику процесса, так зависит от математического аппарата, с помощью которого вычисляются элементы S -матрицы, что теряет свой первоначальный физический смысл. Поэтому $\mathcal{L}_I(x, \Lambda)$ следует рассматривать как некоторый искусственный объект, выбранный таким образом, чтобы обеспечить существование предела в (3.15). В рамках этой процедуры физический смысл имеет только S -матрица (см., например, [8]).

Поэтому, как нам кажется, было бы целесообразно так подобрать регуляризационную процедуру, зависящую от параметра Λ , чтобы никаких бессмысленных контрчленов не появлялось в лагранжиане взаимодействия. Следовательно, должно быть

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} T_{\Lambda} \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}, \quad (3.16)$$

где $\mathcal{L}_I(x)$ не зависит от параметра регуляризации Λ . Эта идея впервые была высказана Д. А. Славновым [12], который исследовал квантовую теорию самодействующего скалярного поля.

Точно таким же образом мы поступим и в рассматриваемом случае. Сформулируем так вспомогательную регуляризационную процедуру, чтобы предел в (3.16) существовал, и \mathcal{S} -матрица удовлетворяла всем необходимым требованиям в каждом порядке теории возмущений.

При этом лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$ остается конечным. Если же в теории надо будет сделать какие-либо перенормировки, то такие перенормировки означают не процедуру устранения расходимостей, а переход от одних, менее удобных, к другим, более удобным, физическим параметрам. Все перенормировочные постоянные будут конечны.

Так в нелокальной квантовой электродинамике лагранжиан взаимодействия имеет вид (см. [8]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x) = & e: \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{Y}}(l, x) \psi(x): + \\ & + e(Z_1 - 1): \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{Y}}(l, x) \psi(x): - \delta m: \bar{\psi}(x) \psi(x): \\ & + (Z_2 - 1): \bar{\psi}(x) (i\hat{d} + m) \psi(x): - (Z_3 - 1) \frac{1}{4}: F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x):. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В случае нелокальной теории перенормировочные константы Z_1 , Z_2 , Z_3 , δm будут конечны. Причем, в силу тождества Уорда, $Z_1 = Z_2$.

4. НЕЛОКАЛЬНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР $K(x-y)$

Остановимся на основном вопросе нелокальной теории: в классе каких функций следует искать форм-фактор $K\left(\frac{x-y}{l}\right)$, чтобы построенная с его помощью \mathcal{S} -матрица удовлетворяла всем перечисленным выше требованиям?

Как показали исследования в нелокальной теории скалярного квантованного поля [13], наиболее критическим к выбору класса допустимых форм-факторов является требование унитарности \mathcal{S} -матрицы. Именно, оказалось, что унитарная \mathcal{S} -матрица может быть построена в случае, если форм-фактор $K\left(\frac{x-y}{l}\right)$ релятивистски инвариантен и функция

$$\tilde{K}(l^2 k^2) = \int dx e^{ihx} K\left(\frac{x}{l}\right). \quad (4.1)$$

является, во-первых, целой аналитической функцией в k^2 -плоскости и, во-вторых, достаточно быстро убывает в пространственноподобном направлении, т. е. при $k^2 \rightarrow -\infty$.

В случае квантовой электродинамики будем предполагать, что форм-фактор $V(-l^2k^2) = |\tilde{K}(l^2k^2)|^2$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $V(z)$ — целая функция в комплексной z -плоскости конечного порядка роста $1/2 \leq \rho < \infty$;
- 2) $[V(z)]^* = V(z^*)$;
- 3) $V(x) \geq 0$ при вещественных x ;
- 4) $V(0) = 1$;
- 5) $|V(u)| = 0$ ($1/u^\alpha$) при некотором $\alpha > 0$, когда $u \rightarrow +\infty$.

Этих условий достаточно, чтобы сделать конечными все матричные элементы в теории возмущений (см. ниже).

Прежде чем перейти к исследованию физического смысла форм-фактора, приведем несколько формул, полезных при дальнейших вычислениях. Как будет видно ниже, в рассматриваемой теории возможен переход к евклидовой метрике. В евклидовом x -пространстве пропагатор фотона (3.12) можно записать в виде

$$D(x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_E V(l^2k_E^2)}{k_E^2} e^{ik_E x_E}, \quad (4.2)$$

где k_E и x_E — евклидовы векторы ($x_E^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0$). Введем пропагатор «точечного» фотона:

$$\Delta(x_E^2) = \frac{1!}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_E e^{ik_E x_E}}{k_{13}^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{x_E^2}. \quad (4.3)$$

Представим функцию $D(x_E^2)$ в виде:

$$D(x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{x_E^2} U\left(\frac{x_E^2}{l^2}\right). \quad (4.4)$$

Тогда функция $U\left(\frac{x_E^2}{l^2}\right)$ связана с форм-фактором $V(l^2k_E^2)$ соотношением

$$\begin{aligned} U\left(\frac{x_E^2}{l^2}\right) &= V(0) - \frac{1}{\pi^2} \int d^4k_E e^{ik_E x_E} V''(k_E^2 l^2) = \\ &= 1 + \int_0^\infty du f_0\left(\sqrt{u \frac{x_E^2}{l^2}}\right) V'(u). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Воспользовавшись условиями (1) — (5), получим:

$$U(u) = \begin{cases} O(u^\alpha), & u \rightarrow 0, \\ 1 + O(\exp\{-u^\nu\}), & u \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $\gamma = \rho/(2\rho - 1) > 1/2$ для $\rho > 1/2$ и $U(u) = 1$ при $u > 1$ для $\rho = 1/2$. При этом при $a > 1$ для всех $x_E^2 > 0$

$$|D(x_E^2)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{U\left(\frac{x_E^2}{l^2}\right)}{x_E^2} \right| \leq \frac{U\left(\frac{x_E^2}{l^2}\right)}{(2\pi)^2 x_E^2} \Big|_{x^2=0} = \\ = \frac{1}{(4\pi)^2 l^2} \int_0^\infty dt V(t) < \infty,$$

т. е. функция $D(x_E^2)$ принимает максимальное значение в нуле, причем $D(0) < \infty$.

Форм-фактор $V(l^2 k_E^2)$ связан с функцией $U\left(\frac{x_E^2}{l^2}\right)$ соотношением

$$V(l^2 k_E^2) = \int_0^\infty du J_0(\sqrt{u k_E^2} l^2) U'(u) = \\ = \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\xi v(\xi) (l^2 k_E^2)^\xi}{\sin \pi \xi}, \quad (4.7)$$

где $0 < \beta < a$.

Функция

$$v(\xi) = \frac{1}{2^2 \xi \Gamma^2(1+\xi)} \int_0^\infty du u^\xi U'(u) \quad (4.8)$$

1) регулярна в полуплоскости $\text{Re } \xi > -a$, и в этой области справедлива оценка ($\xi = \xi + i\eta$)

$$|v(\xi + i\eta)| \leq C \frac{e^{\pi |\eta|}}{(1+|\eta|)^M \Gamma\left(\frac{|\xi|}{\rho} + 1\right)}$$

при любых $M > 0$ и некотором $C > 0$;

2) $v(0) = 1$; $v(-m) = 0$, $m = 1, \dots, [a]$;

3) $[v(\xi)]^* = v(\xi^*)$.

Остановимся теперь на физическом смысле введенного форм-фактора. Изменение свободного пропагатора фотона, согласно (3.12), означает изменение закона Кулона на малых расстояниях. Потенциал взаимодействия двух электронов за счет обмена виртуальным фотоном вычисляется в приближении, когда пренебрегается отдачей заряженных частиц, т. е. электронов, и связан с функцией распространения фотона соотношением:

$$W(r) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} D(\mathbf{k}^2) \quad (4.9)$$

Подставляя $D(\mathbf{k}^2)$, согласно (4.4), и используя приведенные выше формулы, получаем:

$$W(r) = \frac{e}{2\pi^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r' \sqrt{r'^2 - r^2}} \cdot U\left(\frac{r'^2}{l^2}\right). \quad (4.10)$$

Если $U(u) \equiv 1$, тогда $W(r) = e/4\pi r$, т. е. мы получаем обычный закон Кулона. Для функции $U(u)$, удовлетворяющей условиям (4.6), легко получить при $\rho > 1/2$

$$W(r) = \begin{cases} \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{l} \int_0^\infty du V(u^2) + O\left(\frac{r^2}{l^2}\right), & r \ll l, \\ \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \left[1 + O\left(\exp\left\{-\left(\frac{r^2}{l^2}\right)^\nu\right\}\right) \right], & r \gg l. \end{cases} \quad (4.11)$$

В случае $\rho = 1/2$ имеем

$$W(r) = \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}, \quad r > l. \quad (4.12)$$

Таким образом, потенциал $W(r)$ конечен при $r = 0$ и убывает при $r \rightarrow \infty$, причем при $r \gg l$ отклонение потенциала от кулоновского порядка $O(\exp\{-(r^2/l^2)^\nu\})$ при $\rho > 1/2$, т. е. это добавочное слагаемое убывает быстрее любой линейной экспоненты, а в случае $\rho = 1/2$ потенциал $W(r)$ точно равен кулоновскому при $r > l$. Это наводит на мысль, что форм-факторы, являющиеся целыми функциями порядка роста $\rho = 1/2$, описывают электрон, заряд которого распределен внутри сферы радиуса l , а потенциал $W(r)$ есть не что иное, как потенциал взаимодействия двух заряженных шаров.

Плотность распределения заряда $\rho(r)$ можно найти согласно формуле

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (rW(r)) \quad \text{при } r > 0.$$

В случае $\rho > 1/2$ получается, что заряд электрона распределен по всему пространству, причем при $r \rightarrow \infty$ $\rho(r) \sim \exp\{-(r^2/l^2)^\nu\}$, т. е. быстро убывает.

С физической точки зрения наибольший интерес представляет случай $\rho = 1/2$, когда покоящийся электрон можно интерпретировать как заряженный шар радиуса l .

Можно поставить вопрос, существуют ли какие-либо принципы физического или математического характера, которые позволили бы выбрать форм-фактор $V(k^2 l^2)$ или, что то же самое, потенциал $W(r)$ однозначно? Оказывается, что такие принципы существуют.

Физически естественно поставить задачу: найти такие факторы $V(-l^2k^2)$, для которых потенциал двух покоящихся электронов $W(r)$ примет наименьшее возможное значение в нуле, т. е. при $r = 0$.

Математически следующая задача имеет решение.

Среди целых функций $V(z)$ порядка роста $\rho = 1/2$ и типа σ , удовлетворяющих условиям:

- а) $V(0) = 1$,
- б) $V(x) = |f(x)|^2 \geq 0$ на вещественной полуоси $0 \leq x < \infty$,
- в) $\int_0^\infty \frac{du}{V^u} V(u) < \infty$,

найти функцию, минимизирующую функционал

$$\mu(V) = \int_0^\infty \frac{du}{V^u} V(u) = \text{const } W(0). \quad (4.13)$$

Эта задача относится к классу экстремальных задач в теории целых функций (см. подробнее работу [14]) и имеет единственное решение.

Приведем решение этой задачи [15]. Перепишем условие (4.13) в виде:

$$\mu(V) = \int_0^\infty \frac{du}{V^u} V(u) = 2 \int_0^\infty dt V(t^2) = 2 \int_0^\infty dt |f(t^2)|^2. \quad (4.14)$$

Функция $f(t^2)$ является целой функцией первого порядка роста и типа $\sigma/2$. Поэтому по теореме Пэли — Винера (см. работу [16]) справедливо представление

$$f(t^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} du e^{iut} \psi(u),$$

где $\psi(u) \in L_2(-\sigma/2, \sigma/2)$. Так как $f(t^2)$ зависит от t^2 , то функция $\psi(u)$ — четная, и следовательно,

$$f(t^2) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\sigma/2} \psi(u) \cos ut \, du. \quad (4.15)$$

По равенству Парсеваля из (4.14) получим

$$\mu(V) = \int_0^\infty dt |f(t^2)|^2 = \int_0^{\sigma/2} |\psi(u)|^2 \, du. \quad (4.16)$$

Кроме того

$$f(0) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\sigma/2} du \psi(u) = 1. \quad (4.17)$$

Пусть теперь имеется система полиномов $\{P_n(x)\}$, ортонормированных с весом 1 на отрезке $[0, \sigma/2]$, т. е.

$$\int_0^{\sigma/2} du P_n(u) P_{n'}(u) = \delta_{nn'}$$

и

$$P_0(u) = \sqrt{2/\sigma}.$$

Тогда функция $\psi(u)$ может быть разложена по этой системе

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(u).$$

Условия (4.16) и (4.17) запишутся

$$\sqrt{2/\pi} \int_0^{\sigma/2} du \psi(u) = \sqrt{2/\pi} c_0 \sqrt{\sigma/2} = 1;$$

$$\mu(V) = \int_0^{\sigma/2} du |\psi(u)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

Ясно, что

$$\min_{\{\psi\}} \mu(V) = \min_{\{c_n\}} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 = \pi/\sigma.$$

Значит

$$\psi(u) = \sqrt{\pi/\sigma}$$

и

$$f(t^2) = \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma/2} du \cos ut = \sin \sigma t/2 / (\sigma t/2).$$

Окончательно

$$V(z) = \left[\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sqrt{z}}{\frac{\sigma}{2} \sqrt{z}} \right]^2. \tag{4.18}$$

Вычисляя по формуле (4.9) потенциал двух покоящихся электронов, получаем:

$$W(r) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}, & r > \sigma, \\ \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sigma} \left(2 - \frac{r}{\sigma} \right), & r < \sigma. \end{cases} \tag{4.19}$$

Этот потенциал представляет собой потенциал взаимодействия двух заряженных сфер радиуса $l = \sigma/2$. Фурье-образ форм-фактора $K((x-y)/l)$ в градиентном преобразовании (2.6) в этом случае равен

$$\tilde{K}(l^2k^2) = \int dx e^{ihx} K(x/l) = \sin \sqrt{-k^2l^2} / \sqrt{-k^2l^2}. \quad (4.20)$$

При данной интерпретации этот форм-фактор $K(x/l)$ описывает электрон как заряженную сферу радиуса $l = \sigma/2$.

Приведем окончательно формулы для этого случая

$$V(-l^2k^2) = \left[\frac{\sin \sqrt{-k^2l^2}}{\sqrt{-k^2l^2}} \right]^2. \quad (4.21)$$

Для функции $v(\zeta)$ в представлении (4.7) легко получить

$$v(\zeta) = 2^{1+2\zeta} / \Gamma(2\zeta + 3). \quad (4.22)$$

Интересно вычислить функцию $D(x_E^2)$ в евклидовой метрике. Согласно (4.2), имеем:

$$D(x_E^2) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{x_E^2}, & x_E^2 > 4l^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{x_E^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{x_E^2}{4l^2}} + \right. \\ \left. + \frac{x_E^2}{4l^2} \ln \frac{2l}{\sqrt{\frac{x_E^2}{4l^2}}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x_E^2}{4l^2}} \right) \right\}, & x_E^2 < 4l^2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Заметим, что при $x_E^2 \rightarrow 0$

$$D(x_E^2) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \ln \frac{4l}{\sqrt{x_E^2}},$$

т. е. $D(x_E^2)$ логарифмически растет, в то время как в локальной теории при $x_E^2 \rightarrow 0$

$$\Delta(x_E^2) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{x_E^2}.$$

Если электрон представляет собой равномерно заряженный шар радиуса l , то тогда, как нетрудно показать,

$$V(-l^2k^2) = \frac{9}{(-k^2l^2)^2} \left[\frac{\sin \sqrt{-k^2l^2}}{\sqrt{-k^2l^2}} - \cos \sqrt{-k^2l^2} \right]^2 \quad (4.24)$$

и

$$v(\zeta) = \frac{9 \cdot 2^{4+2\zeta} [2\zeta^2 + 7\zeta + 5]}{\Gamma(2\zeta + 7)}. \quad (4.25)$$

Итак, нелокальные обобщенные функции

$$K\left(\frac{x-y}{l}\right) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik(x-y)} \tilde{K}(k^2 l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (l^2 \square)^n \delta^{(4)}(x-y),$$

для которых фурье-образ $\tilde{K}(l^2 k^2)$ является целой функцией порядка роста $1/2$, дают нам основу для релятивистски-инвариантного описания протяженных объектов.

5. РЕГУЛЯРИЗАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА

Как было сказано выше, построение S -матрицы по теории возмущений возможно лишь в рамках определенного математического аппарата. Сформулируем теперь регуляризационную процедуру,

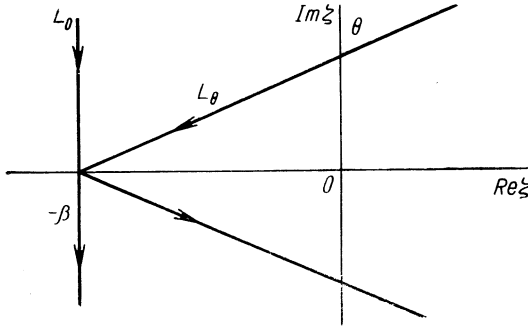


Рис. 1. Контуры интегрирования L_0 и L_θ в комплексной ζ -плоскости.

которой мы будем пользоваться при вычислении матричных элементов в теории возмущений.

В квантовой электродинамике в ряду теории возмущений подлежат регуляризации, во-первых, нелокальные пропагаторы фотона и, во-вторых, замкнутые спинорные циклы, образованные пропагаторами электронов.

Для нелокального форм-фактора $V(-l^2 k^2)$ в области $k^2 < 0$ справедливо представление Меллина

$$V(-l^2 k^2) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) (-l^2 k^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta}, \tag{5.1}$$

где $0 < \beta < a$, а функция $v(\zeta)$ удовлетворяет условиям, перечисленным в предыдущем параграфе. Для перехода в область $k^2 > 0$

необходимо перейти от интегрирования в ζ -плоскости от контура L_0 к контуру L_θ ($0 < \theta < \pi/2$), где

$$L_\theta = [\zeta : \zeta \rightarrow -\beta + i\epsilon^{\pm i(\pi/2 - \theta)}, \quad 0 < \beta < a, \quad \forall u \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2],$$

как показано на рис. 1.

Введем регуляризованную функцию

$$\tilde{D}^\delta(k^2) = \frac{l^2}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) e^{\delta\zeta^2} [l^2(-k^2 - i\epsilon)]^{\zeta-1}}{\sin \pi\zeta}. \quad (5.2)$$

Функция $\tilde{D}^\delta(k^2)$ при $\delta > 0$:

1) определена во всей комплексной k^2 -плоскости и регулярна везде, кроме разреза вдоль луча $[0, +\infty]$;

2) $\tilde{D}^\delta(k^2) = O\left(\frac{1}{|k^2|^{1+\beta}}\right)$ при $|k^2| \rightarrow \infty$;

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{D}^\delta(k^2) = \tilde{D}(k^2) = \frac{V(-k^2 l^2)}{-k^2 - i\epsilon}.$$

Для функции $\tilde{D}^\delta(k^2)$ существует фурье-образ

$$\begin{aligned} D^\delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} \tilde{D}^\delta(k^2) = \\ &= \frac{l^2}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) e^{\delta\zeta^2} (l^2)^{\zeta-1}}{\sin \pi\zeta} D(x, \zeta), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} D(x, \zeta) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} (-k^2 - i\epsilon)^{\zeta-1} = \\ &= \frac{2^2 \zeta}{(2\pi)^2} \cdot \frac{\Gamma(1+\zeta)}{\Gamma(1-\zeta)} \cdot \frac{e^{-i\pi(1+\zeta)}}{(x^2 - i\epsilon)^{1+\zeta}}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функция $D^\delta(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x^2| \rightarrow 0} |x^2|^\epsilon |D^\delta(x)| = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Заметим, что ранее [13] мы пользовались регуляризацией R^δ , которая позволила регуляризовать форм-факторы, порядок роста которых был $1/2 \leq \rho < 1$. Предлагаемая регуляризация может применяться для регуляризации форм-факторов произвольного конечного порядка роста.

Для регуляризации спинорных пропагаторов воспользуемся так называемой градиентно-инвариантной процедурой Паули — Вилларса. Это означает, что спинорные причинные функции электрона регуляризуются не по отдельности, а замкнутыми

спинорными циклами:

$$\sum_j c_j \text{Sp} [\gamma S_{M_j}(x_1 - x_2) \gamma S_{M_j}(x_2 - x_3) \dots]. \quad (5.4)$$

Поскольку в квантовой электродинамике максимальная расходимость — квадратичная, то достаточно ограничиться двумя вспомогательными массами M_1 и M_2 . В этом случае условия на коэффициенты c_j записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} 1 + c_1 + c_2 &= 0; \\ 1 + c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где $M_j^2 = m^2 \Lambda_j$; Λ_j ($j = 1, 2$) — большие безразмерные параметры регуляризации, мы их выберем в виде

$$\Lambda_j = \Lambda + \epsilon_j,$$

где $\Lambda \gg 1$, $0 < \epsilon_j \ll 1$. При такой регуляризации электрон-электронная петля, так называемая поляризация вакуума, расходуется логарифмически при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Мы предлагаем вместо условий (5.5) ввести три вспомогательные массы со следующими условиями на коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 :

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -1; \\ c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + c_3 \Lambda_3 &= -1; \\ c_1 \log \Lambda_1 + c_2 \log \Lambda_2 + c_3 \log \Lambda_3 &= d, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где d — конечное число, которое должно быть выбрано из условий нормировки физического заряда электрона (см. ниже разд. 9).

Итак, в рамках введенных нами регуляризаций сходятся все матричные элементы в ряду теории возмущений.

Для снятия регуляризации в элементах S -матрицы достаточно перейти к евклидовой метрике по всем внутренним импульсам в интегралах, соответствующих любым связанным диаграммам Фейнмана, поскольку $\tilde{D}^\delta(k^2)$ регулярна в полуплоскости $\text{Im } k^2 \geq 0$. После этого можно перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$, поскольку функции $\tilde{D}(k^2)$ убывают достаточно быстро при $k^2 \rightarrow -\infty$ (подробнее см. [13, 17]). Спинорные циклы конечны в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ согласно условиям (5.6).

В обычной локальной квантовой электродинамике (см., например, [8, 9]) расходящимися являются матричные элементы, соответствующие примитивным неприводимым диаграммам Фейнмана, показанным на рис. 2. Мы не будем рассматривать ниже диаграммы, изображенные на рис. 3, поскольку вклад диаграмм (IV) равен нулю согласно теореме Фарри, а интегралы, соответствующие диаграммам (V), сходятся в силу градиентной инвариантности, так как пропагаторы электронов соответствуют обычной локальной теории (см., например, [8, 9]).

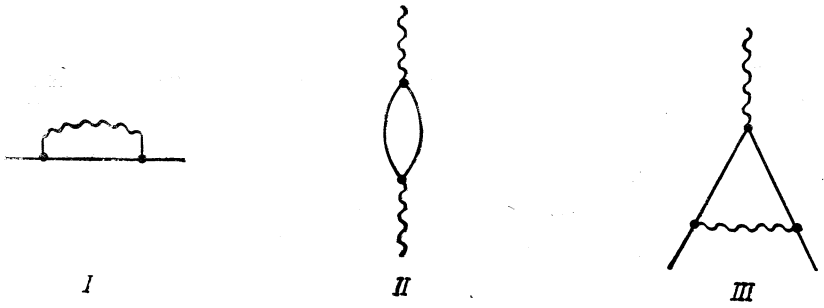


Рис. 2. Расходящиеся примитивные неприводимые диаграммы.

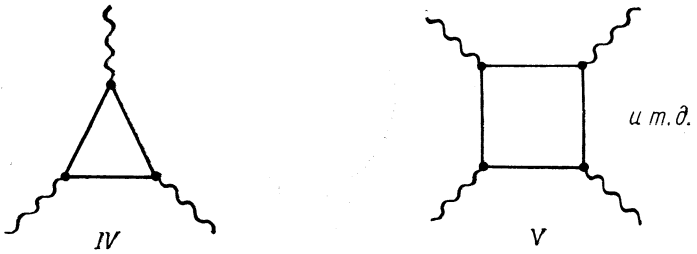


Рис. 3. Сходящиеся примитивные неприводимые диаграммы.

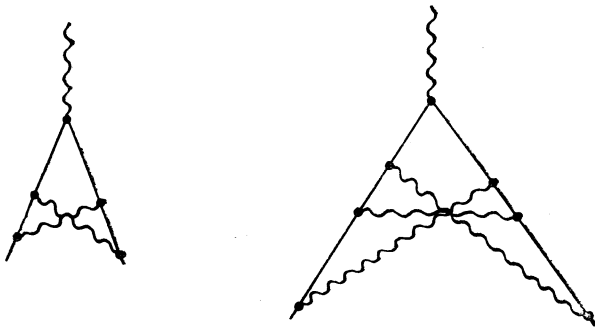


Рис. 4. Вершинные приводимые диаграммы.

Элементы S -матрицы, соответствующие диаграммам собственной энергии (I) и вершинной части (III), будут сходиться, поскольку пропагатор фотона $\tilde{D}(k^2)$ убывает достаточно быстро в евклидовой области. То же самое можно сказать о любых неприводимых

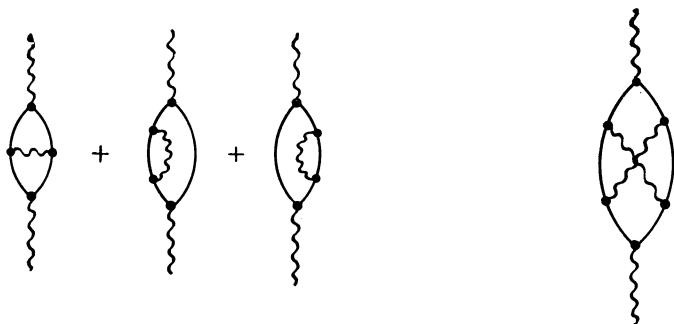


Рис. 5. Приводимые диаграммы поляризации вакуума.

диаграммах, описывающих вершинную часть (рис. 4). Диаграммы, показанные на рис. 5, и все остальные диаграммы в ряду теории возмущений также сходятся.

Интеграл, соответствующий диаграмме II на рис. 2, так называемой поляризации вакуума, будет также конечен в силу выбранной нами модифицированной процедуры Паули — Вилларса.

Итак, в рамках введенных нами регуляризаций все диаграммы, встречающиеся в теории возмущений, оказываются конечными.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УНИТАРНОСТИ S -МАТРИЦЫ

Доказательство унитарности S -матрицы в нелокальной квантовой электродинамике по теории возмущений проводится точно таким же образом, как и в случае квантовой теории скалярного поля (см. работу [17]).

В ряду теории возмущений квантовой электродинамики по сравнению с теорией скалярного поля имеется два сорта пропагаторов: фотонные и фермионные, и соответственно два типа регуляризаций: регуляризация фотонных пропагаторов и регуляризация фермионных циклов. Таким образом, S -матрица регуляризуется параметром δ и набором параметров $\{\Lambda_m\}$, поскольку каждый цикл регуляризуется независимо, т. е. мы имеем $S^{\delta\{\Lambda\}}$ -матрицу.

Как говорилось выше, снятие регуляризации по Λ , т. е. переход к $\Lambda \rightarrow \infty$, фактически нетривиален только в одной диаграмме поляризации вакуума (диаграмма II на рис. 2). Интегралы, соответствующие любым другим замкнутым циклам, будут

сходиться даже без введения регуляризации. Рассмотрение диаграммы поляризации вакуума (см. разд. 9) показывает, что аналитические свойства этой диаграммы находятся в полном соответствии с требованиями унитарности. Поэтому оператор

$$S^\delta = \lim_{\{\Delta_m \rightarrow \infty\}} S^{\delta, \{\Delta\}} \quad (6.1)$$

существует, и его свойства относительно фермионных операторов поля определяются локальной теорией.

Доказательство унитарности матрицы рассеяния

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta \quad (6.2)$$

проводится теперь в полном соответствии с доказательством в нелокальной квантовой теории скалярного поля (см. работу [17]).

Мы не будем здесь повторять всего доказательства, а сформулируем лишь общую схему. Предлагаемая нами регуляризационная процедура удовлетворяет следующим условиям:

1. Определена регуляризованная $S^\delta [e]$ -матрица, и существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta [e] = S [e]. \quad (6.3)$$

О существовании этого предела говорилось в предыдущем разделе.

2. Положительно-частотные функции Грина фотона, определяющие операцию произведения в

$$S [e] S^+ [e] = S [e] \otimes_{Df} S^+ [e],$$

т. е. соответствующие переходу к нормальному произведению, согласно теореме Вика, также регуляризуются

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{(-)}^\delta(k) &= \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\alpha}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) e^{\delta\zeta^2}}{\sin \pi\zeta} \times \\ &\times \frac{1}{i} [(-k^2 - i\epsilon)^\zeta - 1] - (-k^2 - i\epsilon k_0)^\zeta - 1], \end{aligned} \quad (6.4)$$

и существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{D}_{(-)}^\delta(k) = \tilde{D}_{(-)}(k) = 2\pi\theta(k_0) \delta(k^2). \quad (6.5)$$

Символически

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \otimes^\delta = \otimes \equiv \cdot. \quad (6.6)$$

3. В соотношении

$$J [e] = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1} [e] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+} [e] \quad (6.7)$$

предел не зависит от порядка предельных переходов к точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, т. е. оператор $J(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = S^{\delta_1} \otimes S^{\delta_2} S^{\delta_3+}$ непрерывен в точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.

Доказательство этого факта основано на теореме Боголюбова и Ширкова [8], утверждающей, что если $K_1(x_1 \dots x_n)$ и $K_2(y_1 \dots y_m)$ суть трансляционно-инвариантные обобщенные функции и аргументы $x_1 \dots x_n$ и $y_1 \dots y_m$ независимы, то произведение

$$K_1(x_1 \dots x_n) \Pi_{\Delta(-)}(x_s - y_t) K_2(y_1 \dots y_m)$$

также трансляционно-инвариантная обобщенная функция. Идея доказательства состоит в том, что из ограниченности суммы положительных частот вытекает и ограниченность каждой отдельной частоты.

4. Регуляризация подобрана таким образом, что

$$S^\delta [e] \otimes^\delta S^{\delta+} [e] \equiv 1 \quad (\delta > 0).$$

Это равенство вытекает из того факта, что между регуляризованными функциями $D^\delta(x)$, $D_{(-)}^\delta(x)$ и $D^{\delta*}(x)$ при $\delta > 0$ существуют соотношения

$$\left. \begin{aligned} D^\delta(x) &= \theta(x_0) D_{(-)}^\delta(x) + \theta(-x_0) D_{(+)}^\delta(x); \\ D^{\delta*}(x) &= \theta(-x_0) D_{(-)}^\delta(x) + \theta(x_0) D_{(+)}^\delta(x); \\ D_{(-)}^\delta(x) &= \theta(x_0) D^\delta(x) + \theta(-x_0) D^{\delta*}(x), \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

которые совпадают с соотношениями локальной теории, гарантирующими унитарность S -матрицы.

Таким образом, справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} J[e] &= S[e] S^+[e] = S[e] \otimes S^+[e] = \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1} [e] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+} [e] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta \otimes^\delta S^{\delta+} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений.

7. ГРАДИЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ S -МАТРИЦЫ

Требование градиентной инвариантности S -матрицы, т. е. инвариантности относительно преобразования

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (7.1)$$

с произвольной функцией $f(x)$, может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{n\mu_n}} \left(\frac{\delta n S}{\delta A_{\mu_1}(x_1) \dots \delta A_{\mu_n}(x_n)} \right) = 0 \quad (7.2)$$

при условии, что фермионные операторы электронного поля подчиняются свободным уравнениям движения.

Для доказательства (7.2) достаточно ограничиться рассмотрением случая с $n = 1$, т. е.

$$\partial_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (7.3)$$

Прежде всего проведем формальное доказательство, основываясь только на представлении

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}. \quad (7.4)$$

Мы будем предполагать, что представление (7.4) обеспечивает построение ряда теории возмущений с причинными функциями (3.11) — (3.12) и S -матрица разлагается в ряд по нормальным произведениям полевых операторов, подчиняющихся свободным уравнениям движения. Мы не будем учитывать введенную нами регуляризацию, но затем покажем, что изложенное доказательство справедливо в рамках наших регуляризаций.

Воспользовавшись представлением (7.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} &= iT \left\{ \left(\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int dy \mathcal{L}_I(y) \right) S \right\} = \\ &= i \int dy K \left(\frac{x-y}{l} \right) T \left\{ \left(\frac{\delta}{\delta \mathfrak{A}_\mu(l, y)} \int dz \mathcal{L}_I(z) \right) S \right\} = \\ &= i \int dy K \left(\frac{x-y}{l} \right) T \{ e\bar{\psi}(y) \gamma_\mu \psi(y) S \}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Воспользуемся формулами

$$\left. \begin{aligned} -i\partial_\mu \gamma_\mu T \{ \psi(x) S \} &= T \{ [m\psi(x) + ie\hat{\mathfrak{A}}(l, x)\psi(x)] S \}; \\ -i\partial_\mu T \{ \bar{\psi}(x) \gamma_\mu S \} &= T \{ [-m\bar{\psi}(x) - ie\bar{\psi}(x)\hat{\mathfrak{A}}(l, x)] S \}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Эти соотношения справедливы, если теория возмущений строится, согласно теореме Вика, с хронологическими свертками фермионных операторов (3.11), а S -матрица (3.1) зависит от операторов поля, удовлетворяющих свободным уравнениям.

С помощью этих формул получим

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} &= \int dy K \left(\frac{x-y}{l} \right) \frac{\partial}{\partial y_\mu} \frac{\delta S}{\delta \mathfrak{A}_\mu(l, y)} = \\ &= \int dy K \left(\frac{x-y}{l} \right) T \{ [m\bar{\psi}(y)\psi(y) + ie\bar{\psi}(y)\hat{\mathfrak{A}}(l, y)\psi(y) - \\ &\quad - m\bar{\psi}(y)\psi(y) - ie\bar{\psi}(y)\hat{\mathfrak{A}}(l, y)\psi(y)] S \} = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Итак, S -матрица градиентно-инвариантна в рамках проведенного формального рассмотрения.

Покажем теперь, что проведенные формальные преобразования справедливы в рамках нашей процедуры регуляризации.

Ряд теории возмущений для S -матрицы представляет собой набор диаграмм Фейнмана, где оператор электромагнитного поля $A_\mu(x)$ всегда связан с электронной линией. Возможны два случая: или эта линия незамкнута, или эта линия образует замкнутый цикл. Доказательство градиентной инвариантности математически сводится к изучению действия на S -матрицу оператора $\partial_\mu \delta / \delta A_\mu(x)$. Поскольку в этот оператор входит только первая вариационная производная по электромагнитному полю $A_\mu(x)$, можно рассматривать преобразования типа проведенных в (7.5) — (7.7) для каждой незамкнутой линии и каждого замкнутого цикла совершенно независимо.

Так как масса электрона является инвариантом при градиентном преобразовании, а преобразования в (7.5) — (7.7) затрагивают только операторы и пропагаторы заряженных полей, проведенные выкладки справедливы независимо для каждой отдельной незамкнутой линии и для каждого отдельного цикла, входящего в произвольную диаграмму.

Поэтому S -матрица градиентно-инвариантна в каждом порядке теории возмущений в рамках сформулированных правил регуляризации.

8. ДИАГРАММА СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим диаграмму собственной энергии, представленную на рис. 2 (I). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$-i: \bar{\psi}(x) \Sigma(x-y) \psi(y) :, \quad (8.1)$$

где

$$\Sigma(x-y) = -ie^2 \gamma_\mu S(x-y) \gamma_\mu D(x-y). \quad (8.2)$$

Переходя в импульсное представление и пользуясь нашей регуляризационной процедурой, что позволяет перейти к евклидовой метрике поворотом $k_0 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} k_4$, получаем в пределе $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-ie^2) \int dx e^{ipx} \gamma_\mu S(x) \gamma_\mu D^\delta(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dk \tilde{D}^\delta(k) \gamma_\mu \tilde{S}(p-k) \gamma_\mu = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int dk_E \frac{V(k_E^2 l^2)}{k_E^2} \gamma_\mu \frac{m + \hat{p}_E - \hat{k}_E}{m^2 + (p_E - k_E)^2} \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $p_E = (ip_0, \mathbf{p})$, $\hat{k}_E = \gamma_0 i k_4 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k}$, $p_E^2 = -p^2$. Воспользовавшись представлением (4.7) для форм-фактора $V(k_E^2 l^2)$, получим после

некоторых вычислений

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) (l^2)^\zeta}{\sin \pi\zeta} \int \frac{dk_E [4m - 2(\hat{p}_E - \hat{k}_E)]}{(k_E^2)^{1-\zeta} [m^2 + (k_E - p_E)^2]} = \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \cdot \frac{2\pi^3}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) (m^2 l^2)^\zeta}{(\sin \pi\zeta)^2 \Gamma(1+\zeta)} F(\zeta, p); \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$F(\zeta, p) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u}\right)^\zeta \left(1 - \frac{p^2}{m^2} u\right)^\zeta (2m - \hat{p}u). \quad (8.5)$$

Функция $F(\zeta, p)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } \zeta > -1$. Получим окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v(n)}{n!} (m^2 l^2)^n \times \\ &\times \left\{ F(n, p) \left[\ln m^2 l^2 + \frac{v'(n)}{v(n)} - \psi(n+1) \right] + \frac{\partial}{\partial n} F(n, p) \right\}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь $\psi(u) = \frac{d}{du} \ln \Gamma(u)$.

Мы считаем, что элементарная длина l достаточно мала, т. е.

$$m^2 l^2 \ll 1.$$

Тогда легко получить до членов порядка $(m^2 l^2)^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 du (2m - u\hat{p}) \ln \frac{m^2}{m^2 - up^2} + \\ &+ \frac{e^2}{16\pi^2} \left[\left(3 \ln \frac{1}{m^2 l^2} + 3v'(0) + 3\psi(1) + 1 \right) + \right. \\ &+ \left. m^2 l^2 4v(1) \left(\ln \frac{1}{m^2 l^2} - \frac{v'(1)}{v(1)} - \frac{5}{12} \cdot \frac{p^2}{m^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{e^2}{16\pi^2} (m - \hat{p}) \left[\left(\ln \frac{1}{m^2 l^2} - v'(0) + 1 \right) - m^2 l^2 v(1) \frac{1}{3} \cdot \frac{p^2}{m^2} \right] + \\ &+ O((m^2 l^2)^2). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Это разложение справедливо для импульса p^2 в области $p^2 l^2 \ll 1$.

Интересно подсчитать поправку к массе электрона

$$\delta m = m - m_0 = \tilde{\Sigma}(m) = \frac{3e^2}{16\pi^2} \left\{ \ln \frac{1}{m^2 l^2} + O(1) \right\}. \quad (8.8)$$

Если считать, что масса электрона целиком электромагнитного происхождения, т. е. $m_0 = 0$, тогда

$$ml \simeq \exp \left\{ -\frac{8\pi^2}{3e^2} \right\} \sim 10^{-10^2} \quad (8.9)$$

и

$$l \lesssim 10^{-10^2} \text{ см.} \quad (8.10)$$

Иными словами, мы получили для элементарной длины исключительно «бессмысленно» маленькое значение.

Поскольку в этом случае имеем $\frac{e^2}{16\pi^2} \ln \frac{1}{m^2 l^2} \sim 1$, то, строго говоря, мы не имеем права пользоваться теорией возмущений. Поэтому полученные числа должны рассматриваться как очень грубая оценка.

Если же считать, что величина элементарной длины лежит где-то в области

$$l \sim 10^{-16} \div 10^{-17} \text{ см} \quad \text{или} \quad \frac{1}{l} \sim 100 \div 1000 \text{ Гэв}, \quad (8.11)$$

тогда

$$\ln \frac{1}{m^2 l^2} \sim 50 \div 60$$

и

$$\delta m = m - m_0 \sim 0,1m \sim 0,05 \text{ Мэв.} \quad (8.12)$$

Это означает, что в этом случае масса электрона имеет в основном неэлектромагнитное происхождение и электромагнитные поправки реально малы.

9. ДИАГРАММА ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Рассмотрим диаграмму поляризации вакуума, представленную на рис. 1 (II). Член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, представим в виде:

$$-i : A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) :, \quad (9.1)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x-y) = -ie^2 \text{Sp} \{ \gamma_\mu S(x-y) \gamma_\nu S(y-x) \}. \quad (9.2)$$

Используя принятый нами метод регуляризации, получим в импульсном пространстве

$$\text{reg} \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d p e^{-ip(x-y)} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p), \quad (9.3)$$

где

$$\text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \int dk \sum_{j=0}^3 c_j \text{Sp} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{M_j - \hat{k} - i\epsilon} \gamma_\nu \frac{1}{M_j - (\hat{k} - \hat{p}) - i\epsilon} \right\} =$$

$$= (P_\mu P_\nu - \delta_{\mu\nu} P^2) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \alpha \times \\ \times \left\{ \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)P^2}{m^2} + \sum_{j=1}^3 c_j \ln \left(\Lambda_j - \alpha(1-\alpha) \frac{P^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (9.4)$$

Согласно нашему дополнительному условию (5.6), получим в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (\delta_{\mu\nu} P^2 - P_\mu P_\nu) \tilde{\Pi}(p^2); \quad (9.5)$$

$$\tilde{\Pi}(p^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ d + p^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2}{x^2(x^2 - p^2 - i\varepsilon)} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{x^2} \right) \right\}. \quad (9.6)$$

Итак, в рамках принятой нами регуляризационной процедуры поляризационный оператор конечен при снятии регуляризации

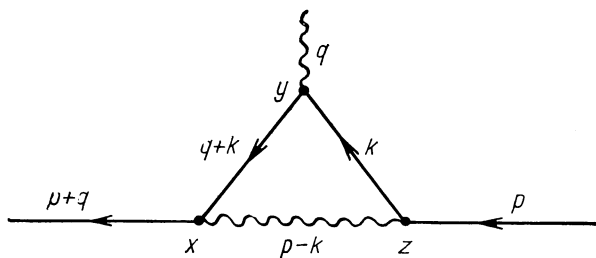


Рис. 6. Вершинная диаграмма.

и совпадает с перенормированным выражением в обычной локальной электродинамике, если выбрать произвольную постоянную регуляризации

$$d = 0. \quad (9.7)$$

В этом случае $\tilde{\Pi}(p^2)$ нормирован условием:

$$\tilde{\Pi}(0) = 0. \quad (9.8)$$

Это означает, что постоянная d должна определять перенормировку заряда электрона, а выбор $d = 0$ соответствует тому, что по крайней мере во втором порядке теории возмущений не происходит перенормировки заряда e , т. е. физический заряд электрона совпадает с затравочным.

10. ВЕРШИННАЯ ДИАГРАММА

Рассмотрим диаграмму, представленную на рис. 1 (III). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$ie : \bar{\psi}(x) \Gamma_{\mu}(x, z | y) \psi(z) A_{\mu}(y) :, \quad (10.1)$$

где введена вершинная функция третьего порядка

$$\Gamma_{\mu}(x, z | y) = ie^2 \gamma_{\nu} S(x-y) \gamma_{\mu} S(y-z) \gamma_{\nu} D(x-z). \quad (10.2)$$

Выберем импульсные переменные, как показано на рис. 6. Переходя к импульсному представлению, получаем в евклидовой метрике

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu}(p, q) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} ie^2 \int dy \int dz e^{ipz + iqu} \gamma_{\nu} S(y) \gamma_{\mu} S(z-y) \gamma_{\nu} D^{\delta}(z) = \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_E V(l^2(p_E - k_E)^2) \gamma_{\nu} (m + \hat{k}_E + \hat{q}_E) \gamma_{\mu} (m + \hat{k}_E) \gamma_{\nu}}{(p_E - k_E)^2 (m^2 + (k_E + q_E)^2) (m^2 + k_E^2)} = \\ &= -\frac{e^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\xi_V(\xi) (m^2 l^2)^{\xi}}{(\sin \pi \xi)^2 \Gamma(1+\xi)} \times \\ &\quad \times [\gamma_{\mu} F_1(\xi; p, q) + F_{2\mu}(\xi; p, q)], \end{aligned} \quad (10.3)$$

где

$$F_1(\xi; p, q) = \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha d\beta d\gamma \alpha^{-\xi} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma)}{\left[\beta + \gamma + \alpha \gamma \frac{p^2}{m^2} + \beta \gamma \frac{q^2}{m^2} + \alpha \beta \frac{(p+q)^2}{m^2} \right]^{-\xi}}; \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} F_{2\mu}(\xi; p, q) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha d\beta d\gamma \alpha^{-\xi} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma)}{\left[\beta + \gamma + \alpha \gamma \frac{p^2}{m^2} + \beta \gamma \frac{q^2}{m^2} + \alpha \beta \frac{(p+q)^2}{m^2} \right]^{1-\xi}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{m^2} [m^2 \gamma_{\mu} - 2mq_{\mu} + 4m(\beta q_{\mu} - \alpha p_{\mu}) + \\ &\quad + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_{\mu} \hat{q} + (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q}) \gamma_{\mu} (\alpha \hat{p} - \beta \hat{q})]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Легко проверить, что вершинная часть удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_{\mu} \bar{u}(p+q) \tilde{\Gamma}_{\mu}(p, q) u(p) = 0, \quad (10.6)$$

где $u(p)$ и $u(p+q)$ — спиноры Дирака, описывающие электрон в начальном и конечном состояниях.

Подсчитаем теперь добавку в аномальный магнитный момент электрона, обусловленную нелокальными эффектами. Для этого получим вершинную часть в приближении, когда импульсы p

и $(p + q)$ находятся на массовой поверхности, т. е. $p^2 = (p + q)^2 = m^2$ и отбрасываются члены порядка q^2 и $(m^2 l^2)^2$. Поскольку при этом возникает инфракрасная расходимость, необходимо ввести в (10.2) и (10.3) малую массу фотона λ_Φ ($\lambda_\Phi \ll m$). После несложных выкладок получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu(q) = & \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_\mu \left[\ln \frac{1}{m^2 l^2} - 2 \ln \frac{m^2}{\lambda_\Phi^2} + O(1) \right] - \\ & - \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu \left(1 - \frac{2v(1)}{3} m^2 l^2 \right), \end{aligned} \quad (10.7)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$.

Первое слагаемое в (10.7) содержит члены, подлежащие перенормировке.

Второй член дает вклад в аномальный магнитный момент. Имеем

$$\Delta\mu = \frac{\alpha}{2\pi} (1 - 2v(1) m^2 l^2/3). \quad (10.8)$$

Если электрон представляет собой заряженную сферу, то, согласно (4.22), получим:

$$v(1) = 4 \cdot 2/\Gamma(5) = 1/3.$$

Если же электрон является равномерно заряженным шаром, то $v(1) = 9 \cdot 2^6 \cdot 13/\Gamma(9) = 13/70$.

В настоящее время экспериментальное значение аномального магнитного момента электрона

$$\Delta\mu_{\text{эксп}} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0,32846 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + (0,54 \pm 0,58) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \quad (10.9)$$

полностью объясняется локальной квантовой электродинамикой [1—3]. Отсюда легко подсчитать верхнюю границу для элементарной длины:

$$\left. \begin{aligned} ml &\leq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \quad \text{заряженная сфера,} \\ ml &\leq \sqrt{\frac{70}{13}} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \quad \text{заряженный шар} \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} l &\leq 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad \text{заряженная сфера,} \\ l &\leq 2,1 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad \text{заряженный шар.} \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Отсюда видно, что несмотря на очень высокую точность измерения аномального магнитного момента этот эксперимент допускает существование электрона довольно больших размеров.

Еще раз отметим, что значения элементарной длины, приведенные в обзорах [1, 2], как уже говорилось во введении, не яв-

ляются истинным значением размера электрона или области нелокального взаимодействия, а лишь косвенно с ним связаны. В нашей же модели нелокального взаимодействия l имеет смысл точного размера электрона, т. е. радиуса шара.

11. ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Существенной чертой предлагаемого варианта нелокальной квантовой электродинамики являются рост амплитуд физических процессов с увеличением энергии. Рассмотрим, например, процесс

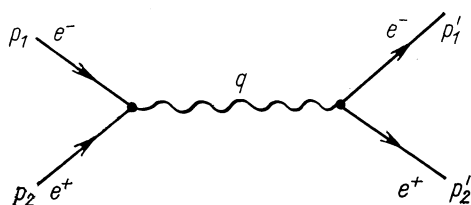


Рис. 7. Диаграмма упругого рассеяния $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$, описываемый диаграммой, представленной на рис. 7.

В данном порядке теории возмущений отношение сечений, подсчитанных по локальной и нелокальной теории, будет даваться формулой

$$\frac{\sigma_{\text{нелок}}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)}{\sigma_{\text{лок}}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)} = [V(-s l^2)]^2. \quad (11.4)$$

Как следует из (4.24), это отношение растет при $s \rightarrow \infty$, как $\exp\{2sl^2\}$, где $s = q^2 = (p_1 + p_2)^2$.

Заметим, что также быстро начнут расти и радиационные поправки к процессу рассеяния $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$.

Таким образом, в предлагаемой модели нелокальных взаимодействий оказывается, что при энергиях $s \gtrsim 1/l^2$ в игру вступает весь ряд теории возмущений. Электромагнитные взаимодействия становятся сильными. В случае обычной локальной электродинамики такое положение возникает при очень больших энергиях, определяемых, грубо говоря, соотношением

$$\frac{e^2}{4\pi} \ln \frac{s}{m^2} \sim 1.$$

Это значит, что при достаточно больших энергиях нельзя пользоваться разложением амплитуд по заряду электрона. В этом случае необходимо развитие методов, выходящих за рамки обычной теории возмущений.

Формулы типа (11.1) могут служить для оценки ожидаемых отклонений от предсказаний локальной квантовой электродинамики. Например, изучение процесса $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ позволяет получить более жесткое ограничение на величину элементарной длины по сравнению с измерениями аномального магнитного момента электрона. Из анализа экспериментальных данных [18], проведенных при общей энергии $E_{e^+} + E_{e^-} \sim 2 \text{ Гэв}$, следует

$$\left. \begin{aligned} l &\leq 0,9 \cdot 10^{-14} \text{ см} \text{ заряженная сфера,} \\ l &\leq 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ см} \text{ заряженный шар.} \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Мы использовали форм-факторы (4.21) и (4.24) для получения этих оценок.

В дальнейшем предполагается провести полный анализ имеющихся экспериментальных данных с точки зрения рассмотренной нелокальной квантовой электродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brodsky S. J., Drell S. D. Ann. Rev. Nucl. Sci., 1970, 20, 147.
См. пер. Бродский С., Дрелл С. УФН, 1972, 107, 57.
2. Петрунькин В. А. Тр. II Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ, P2-5400, Дубна, 1971.
3. Соловьев Л. Д. В кн.: Тр. XV международной конференции по физике высоких энергий. Киев, «Наукова думка», 1972.
4. Блохинцев Д. И. УФН, 1957, 61, 137.
5. Киржниц Д. А. УФН, 1966, 90, 129; В кн.: Тр. международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ, P2-3590, Дубна, 1968.
6. Киржниц Д. А., Лезнов А. Н. ЖЭТФ, 1965, 48, 622.
7. Lee T. D., Wick G. C. Nucl. Phys., 1969, 39, 209.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
9. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
10. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
11. Heisenberg W. Z. Phys., 1943, 120, 513, 673; Z. Naturforsch, 1966, 1, 608.
12. Славнов Д. А. «Докл. АН СССР», 1962, 143, 570; ЖЭТФ, 1962, 42, 1543; 1964, 47, 224.
13. Ефимов Г. В. Commun. Math. Phys., 1967, 5, 42; 1968, 7, 138; Препринт ИТФ-52, 54, Киев, 1968; В сб.: ЭЧАЯ. Т. 1, вып. 1. М., Атомиздат, 1970, с. 256; Препринт ОИЯИ, P2-5400, Дубна, 1970.
14. Ибрагимов И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку, Изд-во АН АзССР, 1962.
15. Джербалян М. М., Тавадян А. Б. «Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат.», 1954, т. 7, № 5, с. 1.
16. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., «Наука», 1964.
17. Алебастров В. А., Ефимов Г. В. Препринт ОИЯИ, P2-6586, Дубна, 1972; Препринт ИТФ-72-110Р, Киев, 1972.
18. Borgia V. e. a. Phys. Lett., 1971, B35, 340.