

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО РЕЗОНАНСНЫМ ФУНКЦИЯМ В ЗАДАЧАХ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Ф. А. Гареев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Е. Банг

Институт Нильса Бора, Копенгаген

Рассмотрено полюсное разложение (по теореме Миттаг-Леффлера) волновых функций, амплитуд рассеяния и функций Грина при положительных энергиях. Получен и обсуждается общий вид этих разложений для потенциалов конечного радиуса взаимодействия, а также для кулоновского потенциала отталкивания.

Обсуждается ряд примеров применения метода в структурных вычислениях с включением состояний непрерывного спектра и устанавливаются пределы применимости других приближенных методов, используемых в таких вычислениях.

The pole expansions (according to Mittag-Leffler's theorem) of wave functions, scattering amplitudes and Green's functions for positive energies are discussed. The general form of these expansions is obtained for the case of potentials of finite radius, with or without a Coulomb repulsion.

A number of examples of the use of the method in calculations of nuclear structure with inclusion of continuum states are considered. In this connection the limitations of other approximate methods, used in such calculations are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Возможность использования состояний с положительной энергией наравне со связанными состояниями в ядерной физике в течение долгого времени привлекала внимание ряда авторов (см. [1—3] и ссылки в них). Состояния эти необходимы для решения по крайней мере двух проблем. Первая, в основном математическая, заключается в том, что связанные одночастичные состояния среднего поля ядер не образуют полной системы. Следовательно, при диагонализации полного гамильтониана, содержащего остаточные взаимодействия, состояния непрерывного спектра должны быть учтены, чтобы сохранить полноту базиса разложения. Примеси континуума в основных состояниях ядер в общем невелики, однако при вычислении сечений реакций они становятся очень важными [4—7]. Способ учета состояний континуума зависит от

типа рассматриваемой реакции. Например, для реакций одно- и двухнуклонных передач с успехом были использованы функции Штурма — Лиувилля как базисные функции разложения. Другая проблема состоит в том, что состояния континуума играют важную роль как конечные или промежуточные состояния во многих ядерных реакциях, таких, как γp , $p\gamma$, γn и т. п., и электромагнитных переходах на состояния выше порога вылета частиц. Гигантские электромагнитные мультипольные резонансы лежат в этой области возбуждения и их можно изучить с помощью процессов, указанных выше. Для их описания включение состояний непрерывного спектра просто неизбежно, так как они определяют основные распадные свойства резонансов. Из самой природы гигантских резонансов ясно, что их волновая функция должна быть получена смешиванием конфигураций частично-дырочного типа с использованием остаточных взаимодействий.

Такие вычисления с учетом континуума крайне сложны и в простейших модельных задачах, рассмотренных в [8], так как нужно исследовать большое число каналов даже при ограничении, при котором только одна частица может быть в континууме. Тот факт, что спектр состояний с положительной энергией является непрерывным и их волновые функции не являются квадратично-интегрируемыми, приводит к ряду трудностей, если мы хотим использовать эти состояния в качестве базиса в реалистических расчетах.

Достаточно последовательным методом решения всех этих вопросов является метод связанных каналов [9—11]. Здесь состояния континуума находятся как решения системы связанных уравнений, в принципе интегродифференциальных. Сложность решения указанных уравнений ограничивает применение этого метода только легкими ядрами с остаточными силами, ответственными за связь каналов, являющимися комбинацией δ -сил.

Если используется разложение по дискретным наборам базисных функций, последнее ограничение снимается и первое становится менее серьезным. Были предложены различные методы дискретизации [12, 13], основанные или на замене энергии сплошного спектра на более или менее произвольные наборы дискретных энергий или на разложении функций континуума по фиксированному дискретному набору функций, скажем, по функциям гармонического осциллятора. Однако все эти методы все еще достаточно сложны для применений, а иногда могут привести к некорректным результатам (см. [14], рис. 1 и разд. 5). Более того, математическая обоснованность этих методов остается открытой, особенно вопросы сходимости разложений.

В общем случае можно сказать, что если физическая задача решается методом разложения по полному набору, сходимость будет наилучшей, если базисные функции являются решениями уравнения того же типа с подобными граничными условиями.

Был предложен ряд способов построения дискретных наборов волновых функций, которые дают равномерную сходимость разложения при определенных условиях. При использовании базисных функций Ейзенбуда и Вигнера [15], однако физические граничные условия отличаются от граничных условий базиса. С помощью базисных функций Капура и Пайерлса [16] и функций Вайнберга [17, 18] формируются полные наборы для положительных энергий, и функции Штурма — Лиувилля дают абсолютную и равномерную сходимость для разложения квадратично-интегрируемых функций [5, 19].

В противоположность связанным состояниям эти дискретные наборы зависят от энергии, что неудобно. При описании реакций последнее может давать некоторые преимущества, но при решении физической задачи методом разложения по полному набору желательно, чтобы только коэффициенты разложения содержали зависимость от энергии. Естественное обобщение решений уравнения Шредингера, соответствующих дискретным связанным состояниям для положительной (или, скорее, комплексной) величины энергии, введено Гамовым в описании α -распада [20]. Как и связанные состояния, состояния с комплексными собственными значениями имеют энергии, которые соответствуют полюсам S -матрицы. Представление S -матрицы с помощью ее полюсов дано Пайерлсом [21]. Теория ядерных реакций, в которой эти полюсы используются для разложения амплитуд реакции, развита Хамблетом и Розенфельдом [22].

Поскольку гамовские функции (которые мы будем ниже называть резонансными функциями) экспоненциально возрастают с ростом r , обычные определения нормировки, ортогональности и полноты неприменимы для этих функций. Это, по нашему мнению, главная причина того, что их не стали использовать более широко.

Позже был предложен ряд методов нормировки резонансных функций, однако все они эквивалентны методу Зельдовича [23], но для антисвязанных и резонансных функций с $|\operatorname{Re} k_n| < < |\operatorname{Im} k_n|$ эти методы не применимы.

Недавно была развита техника разложения волновых функций непрерывного спектра по резонансам с использованием аналитических свойств функций Грина [24, 25]. Но в этом подходе есть трудность — невозможно ответить на вопрос о сходимости разложения.

В связи с этим важно отметить, что в изучении аналитических свойств S -матрицы и ее разложении по полюсным членам решающую роль играет теорема Миттаг-Леффлера [26], гарантирующая равномерную сходимость ряда внутри произвольного замкнутого контура, не содержащего полюсов. Следовательно, соблазнительно использовать эту теорему также для разложения волновых функций непрерывного спектра и функций Грина.

В этом обзоре мы используем выражения, полученные таким путем для сравнения с точными решениями в некоторых конкретных случаях, следуя работам [8, 27]. В ряде работ, где вводились гамовские функции, их использовали в матричных элементах, например для расчета амплитуд перехода или коэффициентов разложения, включающих интегрирование по всему пространству. Экспоненциальный рост этих функций с увеличением r нейтрализовался введением регуляризации. Хотя в некоторых случаях эта процедура является достаточно последовательной, здесь мы будем придерживаться более консервативной идеи использования резонансных функций как базиса для расчета таких матричных элементов, где необходимы только свойства волновых функций внутри конечной области радиуса R . Следовательно, нам, как и многим из упоминавшихся выше авторов, необходимо доказать теоремы разложения, которые собираемся использовать в этой конечной области. Важным свойством резонансных функций является независимость полученных результатов от R при условии $R > R_{\text{яд}}$, где $R_{\text{яд}}$ — расстояние, на котором ядерные силы можно полагать равными нулю [22, 28] (даже с включением кулоновского потенциала [8]). Хотя мы разлагаем волновую функцию непрерывного спектра по резонансным функциям в ограниченной области пространства ($0 \leq r \leq R$), однако фактически она известна во всем пространстве, так как S -матрица разложена по тем же резонансным полюсам. Преимущество рассматриваемого подхода по сравнению с другими связано с тем, что если известно разложение одной из функций $\Psi(r)$, $S(k)$ и $G^+(k, r, r')$, то можно определить разложение двух других функций, и полученные ряды сходятся равномерно. Поэтому в рамках данного метода можно исследовать точность других приближенных методов и указать границы их применимости. На наш взгляд, особо интересно то, что в полученных выражениях естественным образом содержатся «резонансы формы», ширина (время жизни) которых просто связана с вероятностью вылета частицы по соответствующему каналу. Если применим резонансные функции в структурных вычислениях, то получим систему алгебраических уравнений, по форме почти совпадающих с уравнениями оболочечной модели (в частности, полученных с использованием осцилляторных функций), но содержащих возможность распада системы по открытым каналам. В этом смысле физическое содержание полученных уравнений такое же, что и в оболочечной модели реакций с континуумом [1—3].

Цель данного обзора — детально обсудить свойства резонансных функций и их применения в различных физических задачах. При этом мы в основном будем опираться на единственность и равномерную сходимую различных разложений Миттаг-Леффлера, что даст нам возможность установить пределы применимости приближенных подходов.

1. РАЗЛОЖЕНИЕ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Метод комплексных собственных значений применил Томсон [29], который рассмотрел этим методом проблему электромагнитных колебаний заряда на идеально проводящей сфере. В дальнейшем такой метод нашел широкое применение во многих областях физики (см., например, [26] и ссылки в ней).

Гамов [20] ввел резонансные функции для описания α -распада тяжелых ядер и вслед за его работой многие авторы использовали их во многих задачах квантовой механики, где резонансные явления играют существенную роль (см. обзоры [30] и монографии [31—33]). Однако во всех перечисленных работах не использовалось одно из важнейших свойств резонансных функций — их полнота. Справедливости ради стоит заметить, что это свойство доказано совсем недавно [8] и в доказательстве важную роль сыграла теорема Миттаг - Леффлера в формулировке Коши [26]. В настоящем разделе опишем в основном свойства разложений Миттаг-Леффлера для S -матрицы, функций Грина и волновых функций непрерывного спектра.

Разложение Миттаг-Леффлера для S -матрицы. Здесь и далее предполагаем, что одночастичный потенциал $U(r)$ — сферический — тождественно равен нулю при $r > R$ и не имеет сингулярностей. (Исключение составляет численный пример, в котором используется δ -потенциал [8]). Эти условия сильнее, чем те, которые необходимы для доказательства теорем, используемых ниже, но разумны с точки зрения задач ядерной физики. Следовательно, кулоновский потенциал в том виде, в каком он встречается в атомной и молекулярной физике, не рассматривается, но отталкивательные кулоновские силы, важные для протонов и α -частиц, исследуются ниже. С указанными ограничениями функции Йоста $f_e(k)$ являются голоморфными во всей k -плоскости. Далее предположим, что они имеют в k -плоскости только простые нули. В приложении работы [8] достаточно подробно обсуждается это предположение. Используя соотношение $S_e(k) = f_e(-k)/f_e(k)$, можно доказать, что функция

$$F_R(k) = [(S_l(k) - 1)/2ik] (h_l^+(kR))^2 \quad (1)$$

для большого замкнутого контура в k -плоскости, т. е. $|k| > > |k_c|$, который не проходит рядом с каким-либо полюсом (можно показать, что такой контур существует [26]), имеет следующее поведение:

$$F_R < \text{const} |k_c| p_0,$$

где p_0 — неотрицательное целое. Действительно, при $kR \gg 1$ имеют место соотношения [34]:

$$S_l(k) = [1 + O(k^{-1}) + (-1)^l (2ik)^{-m-2} V^{(m)}(R) \times \exp(-2ikR) (1 + O(k^{-1})) / (1 + O(k^{-1}))], \quad \beta > 0; \quad (1a)$$

$$S_l(-k) = (1 + O(k^{-1})) / [1 + O(k^{-1}) + (-1)^l (2ik)^{-m-2} \times V^{(m)}(R) \exp(-2ikR) (1 + O(k^{-1}))], \quad \beta < 0, \quad (1b)$$

где $[(d/dr)^m V(r)]_{r \rightarrow R-0} \equiv V^{(m)}(R) \neq 0$,

$$V(r) = (2m/\hbar^2) U(r), \quad k = \alpha + i\beta.$$

Известно, что функции h_l^\pm имеют ограничения [32]:

$$h_l^\pm(kR) \leq \mu_l [|kR| / (1 + |kR|)]^{-l} \exp[-\text{Im}(kR)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (1в)$$

Отсюда следует, что можно выбрать $p_0 = m + 1$. Обозначим полюса функции F_R через k_n и соответствующие вычеты r_n . Тогда теорема Миттаг-Леффлера утверждает, что если полюсы расположены в порядке возрастания (или убывания) абсолютной величины k_n , то выражение

$$F_R(k) = \sum_{q=0}^p \frac{k^q}{q!} F_R^{(q)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_n} \right)^{p+1} \frac{r_n}{k - k_n}, \quad p \geq p_0, \quad (2)$$

сходится равномерно в k -плоскости внутри любого замкнутого контура, не содержащего полюсов. Так, выражая S -матрицу через (1)

$$S_l(k) = 1 + 2ik (h_l^\pm(kR))^{-2} F_R(k), \quad (3)$$

получаем ее миттаг-леффлеровское разложение. В общем случае разложение Миттаг-Леффлера содержит целую функцию и ряд полюсных членов. Это разделение, однако, не единственно, и его можно изменить перепорядочением разложения, как иллюстрируется ниже выбором p . Действительно, последнюю сумму в (2) можно переписать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_n} \right)^{p+1} \frac{r_n}{k - k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{k - k_n} + \frac{1}{k_n} + \frac{k}{k_n^2} + \dots + \frac{k^p}{k_n^{p+1}} \right).$$

Следовательно, хотя целая часть функции $F_{R_0}^{\pm}(k)$ определена, некоторая неоднозначность все же остается, так как она зависит от $p \geq p_0$. Каждый выбор p соответствует перераспределению ролей полюсных членов и целой функции в сумме (2). Условие

$p \geq p_0 > 0$ — достаточное, но не необходимое; для δ -потенциала [8] $p = -1$ дает сходящийся ряд. Преимущество данного выше представления разложения Миттаг-Леффлера заключается в том, что здесь целая функция задана для любых p . Необходимо заметить, что поскольку $S_1(k) - 1_{k \rightarrow 0} = O(k^{2l+1})$ (за исключением связанного состояния при нулевой энергии), то в общем случае $F_R(0) \neq 0$, так как $h_l^+(kR) = O(k^{-l})$ для $k \rightarrow 0$.

Выясним причину введения в (1) функции $(h_l^+(kR))^2$. S -матрица при $k \rightarrow \infty$ ведет себя как [34]:

$$\left. \begin{aligned} S_l &= O(\exp(-2ikR)k^{-m-2}), & \beta > 0; \\ S_l &= O(\exp(-2ikR)k^{m+2}), & \beta < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

и поэтому функция $F_R(k)$ при $k \rightarrow 0$ имеет очень плавную функциональную зависимость от k :

$$\left. \begin{aligned} F_R(k) &\approx O(k^{-m-3}), & \beta > 0; \\ F_R(k) &\approx O(k^{m+1}), & \beta < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3б)$$

Отсюда получаем, что вычеты r_n функции $F_R(k)$ имеют следующую асимптотику:

$$\left. \begin{aligned} r_n &\approx O(k_n^{-m-2}) \approx O(n^{-m-2}), & \beta > 0; \\ r_n &\approx O(k_n^{m+2}) \approx O(n^{m+2}), & \beta < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3в)$$

поскольку [34]

$$k_n = \pm (\pi/R)(n + \tau/2 - m/4) + O(\lg n), \quad (3г)$$

где $\tau = 0$, если $(-1)^l V^{(m)}(R) > 0$; $\tau = 1$, если $(-1)^l V^{(m)}(R) < 0$.

Если разложим S -матрицу непосредственно без умножения на фактор $\exp(2ikR)(h_l^+(kR))^2$ в ряд Миттаг-Леффлера, то соответствующие вычеты будут пропорциональны $\exp(-2ik_n R)$, а это приведет к нефизически большому (экспоненциальному) вкладу связанных состояний в разложение. Введение этого фактора гарантирует правильное пороговое поведение ($k \rightarrow 0$) S -матрицы при любом числе членов разложения в (2).

Разложение Миттаг-Леффлера для волновой функции. Чтобы применить разложение S -матрицы, полученное выше, наиболее прямым путем к состояниям рассеяния, введем функцию

$$\Psi_l^G \equiv (1/k) h_l^+(kR) \Psi_l^+(r). \quad (4)$$

Тогда Ψ_l^G удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера, и для $r \leq R$

$$d^2 \Psi_l^G / dr^2 + [k^2 - l(l+1)/r^2 - V(r)] \Psi_l^G = 0, \quad (5)$$

а для $r > R$

$$\Psi_l^G = (1/k) h_l^+(kR) (j_l(kr) + [(S_l(k) - 1)/2i] h_l^+(kr)), \quad (6)$$

где j_l и h_l^+ — функции Риккати — Бесселя и Риккати — Ханкеля первого рода, определенные как в [32].

Регулярное решение радиального уравнения Шредингера в литературе встречается под различными названиями, зависящими от различных k -зависимых нормировок. Причина, по которой мы ввели еще один вариант функции Ψ_l^G , станет ясной ниже.

В точках k_n -полюсов S -матрицы волновая функция также имеет полюсы. Ее вычеты должны быть волновыми функциями, которые удовлетворяют тому же уравнению Шредингера, что и Ψ_l^G (или Ψ^+) для $k = k_n$, но для $r > R$ становятся пропорциональными h_l^+ ; так

$$\lim_{k \rightarrow k_n} (k - k_n) \Psi_l^G(kr) = C_n \varphi_n(r), \quad (7)$$

где $\varphi_n(k_n, r)$ — решение задачи на собственное значение:

$$d^2 \varphi_n(r) / dr^2 + [k_n^2 - l(l+1)/r^2 - V(r)] \varphi_n(r) = 0; \quad (8)$$

$$\varphi_n(0) = 0; \quad (8a)$$

$$h_l^+(k_n R) (d\varphi_n(r)/dr)|_{r=R} = \varphi_n(R) k_n h_l^{+'}(k_n R). \quad (8b)$$

Константа C_n зависит от нормировки φ_n . Эти функции соответствуют связанным состояниям при $\text{Re } k_n = 0$, $\text{Im } k_n > 0$. Для $\text{Re } k_n = 0$ и $\text{Im } k_n < 0$ они соответствуют антисвязанным состояниям, для комплексных значений k_n — резонансным состояниям, и среди них гамовским состояниям для $\text{Re } k_n > 0$. В дальнейшем все φ_n будем называть резонансными функциями.

Нормировка этих функций есть некоторое обобщение нормировки связанных состояний. Предполагая, что мы хотим использовать свойства волновых функций только для $r < R$, воспользуемся нормировкой

$$\int_0^R dr \varphi_n^2(r) + \frac{\varphi_n^2(R)}{2k_n} \left[\frac{d}{dk} \left(k \frac{h_l^{+'}(kR)}{h_l^+(kR)} \right) \right]_{k=k_n} = 1. \quad (9)$$

Теперь постоянная C_n определена как

$$C_n = -(1/2k_n) \varphi_n(R). \quad (10)$$

Более детальный вывод C_n для $l = 0$ дан ниже. Если известны вычеты, то разложение Миттаг-Леффлера функции Ψ_l^G можно построить

$$\Psi_l^G(k, r) = \sum_{i=0}^p \frac{k^i}{i!} \Psi_l^G(0, r)^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_n} \right)^{p+1} \frac{C_n \varphi_n(r)}{k - k_n}. \quad (11)$$

Для $p = 0$ и $l = 0$ этот ряд совпадает, за исключением нормировочного множителя, с формулой из работы [35]. То, что Ψ_l^G можно представить через разложение Миттаг-Леффлера, наиболее легко показать, рассматривая связь между Ψ_l^G и функцией Грина:

$$\left. \begin{aligned} G_l^+ &= -k^{-1}\Psi_l^{(+)}(k, r <) f_l(k, r >); \\ \Psi_l^G(k, r) &= -G_l^+(k, r, R). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Таким образом, свойства разложения Ψ_l^G задаются свойствами G_l^G , которые рассмотрены в следующем разделе.

Необходимо заметить, что преимущество представления волновой функции рассеяния как суммы не зависящих от энергии функций, умноженных на зависящие от энергии коэффициенты, присущие всем разложениям Миттаг-Леффлера с различными p . Выбор p имеет большую степень свободы, поскольку уже для $p = -1$ часто разложения сходятся, это означает, что сходимость можно улучшить ценой увеличения числа функций $\Psi_l^G(0, r)^i$.

Их находят как решения с подходящими граничными условиями дифференциальных уравнений, полученных из уравнения Шредингера. Например, для $i = 1$ и $i = 0$ имеем уравнение

$$d^2\Psi_l^G(0, r)^{i}/dr^2 - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right] \Psi_l^G(0, r)^i = 0 \quad (13)$$

и граничные условия:

$$\Psi_l^G(0, 0)^{(0)} = \Psi_l^G(0, 0)^{(1)} = 0; \quad (13a)$$

$$\Psi_l^G(0, R)^{(0)} = F_R(0) + R/(2l + 1); \quad (13b)$$

$$\Psi_l^G(0, R)^{(1)} = RF'_R(0) + iR^2\delta_{l0}. \quad (13b)$$

Разложение Миттаг-Леффлера для функции Грина. Соотношение полноты. Разложение Миттаг-Леффлера для функции Грина рассмотрено многими авторами [36, 37]. Наиболее простой способ получить такое разложение — начать с известного выражения для радиальной функции Грина:

$$\begin{aligned} G_l^+(k, r, r') &= \sum_n \frac{\varphi_n^2 \varphi_n(r')}{k^2 - k_n^2} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{k'} \frac{\Psi_l^{(+)}(k', r) \Psi_l^{(+)*}(k', r')}{k^+ - k'}. \end{aligned} \quad (14)$$

Интеграл можно вычислить ($k^+ = k + i\gamma$, $\gamma \rightarrow 0^+$) с помощью замыкания контура в нижней полуплоскости для членов, для

которых интеграл становится малым, и в верхней полуплоскости для других членов (контур ориентирован по часовой стрелке), каждый раз используя большой контур, который не проходит около какого-либо полюса. О существовании такого контура уже упоминалось выше.

Теперь вклады от полюсов с положительными мнимыми k -величинами будут частично погашать часть связанного состояния G_l^+ , и вклад от k^+ ($\gamma \rightarrow 0^+$) равен нулю, что приводит к

$$G_l^+(k, r, r') = \sum_n \frac{\varphi_n(r) \varphi_n(r')}{2k_n(k - k_n)}, \quad r, r' < R, \quad (15)$$

где $\varphi_n(r)$ — резонансные функции, нормированные как и ранее. Мы видим, что для рассмотренного случая функция Грина имеет разложение Миттаг-Леффлера с $p = -1$ (это утверждение можно строго доказать [37]). То же самое, следовательно, должно быть и для $\Psi_l^+(r \leq R)$.

Более того, функция Грина для $k \rightarrow \infty$ должна вести себя как $\delta(r - r')/k^2 + O(k^{-3})$, $r, r' < R$. Отсюда заключаем

$$\frac{1}{2} \sum_n \varphi_n(r) \varphi_n(r') = \delta(r - r'), \quad r, r' < R, \quad (16)$$

и

$$\sum_n \frac{\varphi_n(r) \varphi_n(r')}{k_n} = 0, \quad (17)$$

Первое уравнение можно рассматривать как соотношение полноты, второе — показывает линейную зависимость φ_n -функций.

Тот факт, что мы имеем полноту только в ограниченном объеме, может показаться недостатком, однако это единственный путь преодоления возникающих больших трудностей, если хотим использовать φ_n -функции как базис разложения во всем пространстве. Метод регуляризации пытается преодолеть эти трудности, но если использовать определяемое этим методом скалярное произведение двух векторов состояния, то линейная зависимость (17) сохраняется, в то время как полнота теряется, как видно из следующего примера с $l = 0$.

Для $r > R$

$$\Psi_0^G(k, r) = [\exp(ikR)/2ik] [S(k) \exp(ikr) - \exp(-ikr)]; \quad (18)$$

$$\varphi_n(r) = \varphi_n(R) \exp[ik_n(r - R)]. \quad (19)$$

Таким образом, для регулируемого интеграла перекрытия между Ψ_0^G и φ_n получим

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\infty} \Psi_0^G(r) \varphi_n(r) \exp(-\varepsilon r^2) dr = \\
 &= \int_0^R \Psi_0^G(r) \varphi_n(r) dr + \varphi_n(R) \frac{\exp[i(k-k_n)R] \times}{2ik} \\
 & \times \int_R^{\infty} dr (S(k) \exp[i(k_n+k)r] - \exp[i(k_n-k)r]) = \\
 &= \int_0^R \Psi_0^G(r) \varphi_n(r) dr + \varphi_n(R) \left\{ \frac{\exp[i(k-k_n)R]}{2ik} - \right. \\
 & \left. - \frac{S(k) \exp[i(k_n+k)R]}{i(k_n+k)} + \frac{\exp[i(k_n-k)R]}{i(k_n-k)} \right\} = \\
 &= \int_0^R \Psi_0^G \varphi_n dr + \varphi_n(R) \left[\frac{i}{k_n+k} \frac{S(k) \exp(2ikR) - 1}{2ik} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2k(k_n+k)} - \frac{1}{2k(k_n-k)} \right] = \\
 &= \int_0^R \Psi_0^G \varphi_n dr + \varphi_n(R) \left[\frac{i}{k_n+k} \Psi_0^G(R) - \frac{1}{k_n^2 - k^2} \right], \quad (20)
 \end{aligned}$$

но это есть нуль [см. ниже (28)]. Следовательно, в интервале $(0, \infty)$ волновую функцию континуума невозможно разложить в ряд по резонансным функциям φ_n .

Выражение для функции Грина, данное выше, можно записать, используя (17), различными способами, полезными в конкретных приложениях:

$$G^+ = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\varphi_n(r) \varphi_n(r')}{k^2 - k_n^2} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{k}{k_n} \frac{\varphi_n(r) \varphi_n(r')}{k^2 - k_n^2}. \quad (21)$$

Здесь первый член, являющийся четным по k , представляет реальную часть функции Грина, тогда как второй — нечетный член — представляет мнимую часть G^+ (для реальных k). Другая интересная формула

$$G^+ = \sum_n \frac{\varphi_n(r) \varphi_n(r')}{k^2 - k_n^2} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{\varphi_n(r) \varphi_n(r')}{k_n(k+k_n)}. \quad (22)$$

Здесь первый член содержит полюсы, тогда как второй регулярен в точках $k = k_n$. Для достаточно узких резонансов, т. е., если

$k_n = \kappa_n + i\gamma_n$ и $|\gamma_n|$ достаточно мал, полюсный член дает обычное резонансное выражение для Ψ^+ :

$$\Psi^+ \sim \varphi_n(r) \varphi_n(R) / [k^2 - (\kappa_n^2 - \gamma_n^2 - 2i\kappa_n\gamma_n)]. \quad (23)$$

Связь между Ψ^G и φ_n . Нормировка φ_n . Мы будем для простоты рассматривать только $l=0$ и выведем некоторые полезные соотношения между Ψ^G и φ_n . Для $l=0$ и $r > R$ имеем:

$$\Psi_0^G(k, r) = \exp(ikR) [\sin kr/k + [(S(k) - 1)/2ik] \exp(ikr)]; \quad (24)$$

$$d\Psi_0^G(kr)/dr|_{r=R} = ik\Psi_0^G(k, R) + 1; \quad (24a)$$

$$\varphi_n(r) = \varphi_n(R) \exp[ik_n(r - R)]. \quad (25)$$

Далее

$$\Psi_0^G(0) = \varphi_n(0) = 0. \quad (25a)$$

Теперь Ψ_0^G и φ_n удовлетворяют уравнениям Шредингера:

$$d^2\Psi_0^G/dr^2 + (k^2 - V)\Psi_0^G = 0; \quad (26)$$

$$d^2\varphi_n/dr^2 + (k_n^2 - V)\varphi_n = 0. \quad (27)$$

Умножая первое уравнение на φ_n , а второе на Ψ_0^G , вычитая одно из другого и интегрируя от 0 до R , получаем

$$(k_n^2 - k^2) \int_0^R \Psi_0^G \varphi_n dr + i(k_n - k) \Psi_0^G(R) \varphi_n(R) = \varphi_n(R), \quad (28)$$

но

$$C_n \varphi_n(r) = \text{res}_n(\Psi_0^G(k, r)) = \lim_{k \rightarrow k_n} [(k - k_n) \Psi_0^G(k, r)]. \quad (29)$$

Таким образом,

$$2k_n C_n \int_0^R \varphi_n^2 dr + i C_n \varphi_n^2(R) = -\varphi_n(R), \quad (30)$$

или, поскольку

$$C_n = -\varphi_n(R)/2k_n, \quad (31)$$

имеем

$$\int_0^R \varphi_n^2(r) dr + i \frac{\varphi_n^2(R)}{2k_n} = 1. \quad (32)$$

Если теперь возьмем другой вычет $\text{res}_m(\Psi^G(k, r))$, то получим

$$\int_0^R \varphi_n(r) \varphi_m(r) dr + i \frac{\varphi_n(R) \varphi_m(R)}{k_n + k_m} = \delta_{nm}. \quad (33)$$

Перепишем формулу (32), изменив обозначения:

$$\int_0^R \varphi_n^2(r) dr = -i \frac{N_n^2 \exp(2ik_n R)}{2k_n} + 1. \quad (33a)$$

Можно доказать [36], что

$$N_n^2 \alpha \operatorname{Im} k_n. \quad (33b)$$

Отсюда следует, что для резонансных состояний с малыми ширинами ($\operatorname{Im} k_n \rightarrow 0$) при любом фиксированном значении R интеграл (33a) стремится к единице, а волновая функция $\varphi_n(r)$ становится действительной функцией. Тогда (33) переходит в обычное соотношение ортонормировки. Если же мы рассмотрим случай $R \rightarrow \infty$ при фиксированном значении $\operatorname{Im} k_n$, то интеграл (33a) обращается в бесконечность. Известно, что имеются специальные методы регуляризации [23, 24, 38] для вычисления таких интегралов в интервале $(0, \infty)$, однако в некоторых случаях эти методы могут привести к ошибкам. Например, регуляризованный интеграл по методу Зельдовича

$$\lim_{\xi \rightarrow 0+} \int_0^{\infty} \exp(-\xi r^2) \exp(\alpha r) dr = -\frac{1}{\alpha}$$

при $\alpha > 0$ отрицателен, хотя подынтегральная функция всюду положительна. Последнее означает, что для антисвязанных состояний указанные методы регуляризации не подходят. Это еще один аргумент в добавление к вышеприведенным в пользу введения радиуса обрезания $R > R_{\text{яд}}$ (при $R > R_{\text{яд}}$ ядерный потенциал равен нулю). Ясно, что радиус обрезания R произволен и не имеет никакого физического смысла, однако важно, что результаты не зависят от R при $R > R_{\text{яд}}$ [22, 28], как уже говорилось выше.

Заряженные частицы. В случае заряженных частиц решения для $r \rightarrow \infty$ не имеют такой простой формы, как для нейтронов. Будем предполагать, что ядерный потенциал для $r > R$ равен нулю.

Вместо функций Риккати — Ханкеля мы должны тогда ввести функции Уиттекера W ; таким образом, (6) заменяется на

$$\Psi_l^{G(c)} = (1/2ik) W_{-in, l+1/2}(-2ikR) \times \\ \times [S_l^{(c)}(k) W_{-in, l+1/2}(-2ikr) - W_{in, l+1/2}(2ikr)], \quad r \geq R. \quad (34)$$

Здесь

$$\eta = Z_1 Z_2 l^2 \mu / k, \quad (35)$$

где Z_1, Z_2 — заряды налетающей частицы и фиксированного рассеивателя, μ — их приведенная масса.

Решения радиального уравнения, которые ведут себя как $W_{-1\eta}$ и $W_{1\eta}$, тогда соответствуют обычным f_+ и f_- . Естественное обобщение обычного способа нахождения сингулярностей $S_l(k)$ — исследовать интегральное уравнение, удовлетворяемое

$$f_-(k, r) = f_-^{(0)}(k, r) + \int_r^R d\rho B(l, k, r, \rho) V(\rho) f_-(k, \rho), \quad (36)$$

где функция Грина B задается следующим образом:

$$B(l, k, r, \rho) = (1/2ik) [f_-^{(0)}(k, r) f_+^{(0)}(k, \rho) - f_+^{(0)}(k, r) f_-^{(0)}(k, \rho)]. \quad (37)$$

Мы имеем свободу в выборе $V(\rho)$ и $f^{(0)}$. Так как сингулярность в точке $r = 0$ кулоновского потенциала не появляется для реалистического распределения заряда, простейший выбор $V(\rho)$ возможно сделать следующим образом: V — полный потенциал, ядерный и электростатический, внутри R , а $f_{\pm}^{(0)}$, следовательно, — комбинация функций Риккати — Ханкеля, например:

$$f_{\pm}^{(0)} = a_-(k) h^- + a_+(k) h^+. \quad (38)$$

Несмотря на то что наши граничные условия отличаются от условий Альфаро и Редже [39], B совпадает с соответствующей функцией Грина в этой работе. И, следовательно, она оценивается выражением

$$|B| < \exp(|b|\rho + br) [\rho/1 + |k|\rho]^{l+1/2} \times \\ \times [r/1 + |k|r]^{-l+1/2}, \quad b = \text{Im } k. \quad (39)$$

Из (36) и (38) имеем

$$f_-(r) = a_- f_- (r) + a_+ f_+ (r), \quad (40)$$

где $f_{\pm}(R) = h^{\pm}(R)$ и т. д., так что можно решать уравнение Вальтера (36) отдельно для f_- и f_+ :

$$f_{-\pm}(r) = h^{\pm}(r) + \int_r^R d\rho B(\rho) V(\rho) f_{-\pm}(\rho). \quad (41)$$

Отсюда находим, используя ограниченный $V(\rho)$ и повторяя аргументы работы [26] или [39], что $f_{-\pm}$ не имеет других сингулярностей, кроме поведения $(kr)^{-l}$ при $kr \rightarrow 0$. Проблема аналитической структуры тогда сводится к нахождению $a_{\pm}(k)$, т. е. к хорошо известному определению коэффициента трансмиссии протона [40]. В этой задаче центробежный барьер не так важен, и мы рассматриваем только $l = 0$. Таким образом, имеем:

$$a_+ \exp(ikR) + a_- \exp(-ikR) = W_{-1\eta, 1/2}(-2ikR); \\ ik[a_+ \exp(ikR) - a_- \exp(-ikR)] = -2ikW'_{-1\eta, 1/2}(-2ikR) \quad (42)$$

или, вводя $z = -ikR$,

$$\left. \begin{aligned} W &= \exp(-z) 2z\Psi(1+i\eta, 2, 2z); \\ W' &= (-1 + 1/z + 2\Psi'/\Psi)W; \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{\pm} &= \exp(\mp z) (W \mp 2W')/2; \\ \Psi'/\Psi &= 1 - \Psi(1+i\eta, 3, 2z)/\Psi(1+i\eta, 2, 2z); \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} (\Psi'/\Psi) &= 1 - [(2z)^{-2} \Gamma(2)/\Gamma(\alpha) + \\ &+ O(\lg z)] / [(2z)^{-1} \Gamma(1)/\Gamma(\alpha) + O(1)] = \\ &= 1 - (2z)^{-1} + O(z \lg z), \quad \alpha = 1 + i\eta. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, $W' = W(1 + O(z \lg z))(z \rightarrow 0)$ и a не имеют других сингулярностей, кроме точки $k = 0$, где W имеет существенную особенность, так как ведет себя как

$$W \sim [\Gamma(1 - i\eta)]^{-1} \quad (46)$$

(или в общем случае как $[\Gamma(1 + l - i\eta)]^{-1}$). Таким образом, функция Йоста

$$f(k) = f_-(k, 0) \quad (47)$$

будет содержать этот множитель:

$$f(k) = f^V(k)/\Gamma(1 + l - i\eta), \quad (48)$$

а f^V голоморфна.

Следовательно, S можно записать в виде

$$S^V = S^e \Gamma(l + 1 - i\eta) / \Gamma(l + 1 + i\eta), \quad (49)$$

где S^V — мероморфная функция. Уравнение (49) дает общее выражение S -матрицы для потенциала, который содержит как кулоновскую часть, так и короткодействующую.

Оба члена в Ψ_l^G будут содержать множитель $|\Gamma(1 + l - i\eta)|^{-2}$,

$$\Psi_l^{G(V)} = |\Gamma(l + 1 + i\eta)|^2 \Psi_l^{G(C)} \quad (50)$$

является, очевидно, мероморфной функцией, так же как аналогичное выражение для функции Грина. Для этих выражений можно теперь строить различные разложения Миттаг-Леффлера со свойствами сходимости, идентичными описанным выше.

2. ОДНОЧАСТИЧНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

В этом разделе мы обобщим метод разложения Миттаг-Леффлера для случаев, когда среднее поле ядер описывается аксиально-симметричным потенциалом.

Разложим волновую функцию $\Psi_{\Omega, \pi}(k, r)$ деформированного потенциала $V(r - R(\theta))$ по полной системе спин-угловых функций $Y_{lj}^{\Omega}(\theta, \varphi)$:

$$\Psi_{\Omega, \pi}(k, \mathbf{r}) = \frac{1}{r} \sum_{l, j} R_{lj}^{\Omega}(r) Y_{lj}^{\Omega}(\theta, \varphi). \quad (51)$$

Тогда получим [43]

$$U_i''(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U_i = \sum_{i'} K_{ii'}(r) U_{i'}(r), \quad (52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U_i(r) &\equiv R_{ij}^{\Omega}(r); \quad (l, j) \equiv i; \quad k^2 = (2m/\hbar^2) E_{\Omega, \pi}; \\ K_{ii'}(r) &= V(r - R) \delta_{ii'} - \langle Y_i^{\Omega}/V(r - R) - V(r - R(\theta))/Y_{i'}^{\Omega} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Систему (52) следует решать с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} U_i(r \rightarrow 0) &\rightarrow j_l(kr); \\ U_i(r \rightarrow \infty) &\rightarrow j_l(kr) + [(S_l - 1)/2i] h_l^+(kr). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

В качестве решений системы (52) получим волновые функции рассеяния; очевидно, что при $k > 0$ система (52) разрешима для любых k .

Разложим волновую функцию $\Psi_{\Omega, \pi}(k, r)$ в ряд Миттаг-Леффлера. Тогда в полной аналогии с [8] введем функцию

$$\begin{aligned} \Psi_{\Omega, \pi}^G(k, \mathbf{r}) &= [\exp(ikR)/k] \Psi_{\Omega, \pi}(k, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{r} \sum \tilde{U}_i(r) Y_i^{\Omega}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (55)$$

где R — расстояние, на котором ядерные силы равны нулю. Очевидно, что $\Psi_{\Omega, \pi}^G$ удовлетворяет той же системе уравнений (52), что и $\Psi_{\Omega, \pi}(k, r)$. Как и в одноканальном случае, в полюсах k_v S -матрицы волновая функция $\Psi^G(k, r)$ имеет полюсы, а ее вычеты должны быть волновыми функциями, которые удовлетворяют тому же уравнению Шредингера, что и $\Psi_{\Omega, \pi}^G$ (или $\Psi_{\Omega, \pi}$), однако при $r \geq R$ имеют другую асимптотику, а именно $\sim h^+(k_v r)$, так как

$$\lim_{k \rightarrow k_v} (k - k_v) \Psi_{\Omega, \pi}^G(k, \mathbf{r}) = l_v \varphi_v(\mathbf{r}). \quad (56)$$

Отсюда получаем систему уравнений для собственных значений k_v и собственных функций $\varphi_v(\mathbf{r}) = (1/r) \sum_i \chi_i^{(v)}(r) Y_i^{\Omega}(\theta, \varphi)$:

$$\left. \begin{aligned} \chi_i^{(v)''} + \left[k_v^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_i^{(v)} &= \sum_{i'} K_{ii'}(r) \chi_{i'}^{(v)}(r); \\ \chi_i^{(v)}(r \rightarrow 0) &\Rightarrow j_l(k_v r); \\ h_l^+(k_v R) \frac{d}{dr} \chi_i^{(v)}(r) |_{r=R} &= \chi_i^{(v)}(R) k_v h_l^+(k, r) |_{r=R}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Из (51) и (55) следует, что

$$\tilde{U}_i(r) = (\exp(ikR)/k) U_i(r). \quad (58)$$

Для дальнейшего нам необходимо написать граничные условия для $\tilde{U}_i(r)$:

$$\left. \frac{d\tilde{U}_i(r)}{dr} \right|_{r=R} = \frac{\exp(ikR)}{h_i^\dagger(kR)} + \tilde{U}_i(R) k \frac{h_i^{\dagger'}(kR)}{h_i^\dagger(kR)}. \quad (59)$$

По аналогии с [22] легко получить:

$$l_i^{(v)} \alpha_i^{(v)} = -\chi_i^{(v)}(R) \exp(ik_i^{(v)}R) / 2k_i^{(v)} h_i^\dagger(k_i^{(v)}R), \quad (60)$$

где

$$\lim_{k \rightarrow k_i^{(v)}} (k - k_i^{(v)}) \tilde{U}_i(r) = l_i^{(v)} \chi_i^{(v)}(r); \quad (61)$$

$$\alpha_i^{(v)} = \int_0^R \chi_i^{(v)}(r)^2 dr + \frac{\chi_i^{(v)}(R)^2}{2k_i^{(v)}} \frac{d}{dk} \left(\frac{kh_i^{\dagger'}(k_i^{(v)}R)}{h_i^\dagger(k_i^{(v)}R)} \right)_{k=k_i^{(v)}}. \quad (62)$$

Из (60) — (62) следует

$$l_i^{(v)} = -\chi_i^{(v)}(R) \exp(ik_i^{(v)}R) / 2k_i^{(v)} h_i^\dagger(k_i^{(v)}R) \alpha_i^{(v)}. \quad (63)$$

Существует возможность разложения парциальных волн $\tilde{U}_i(r)$ (непосредственно) и полной волновой функции $\Psi^G(k, r)$ в ряд Миттаг-Леффлера. В обоих случаях условия применимости теоремы Миттаг-Леффлера выполнены и в принципе полученные ряды имеют такой же вид, что и в одноканальном случае [8]. Учитывая это, напишем разложение Миттаг-Леффлера для полной волновой функции

$$\Psi^G(k, r) = \sum_{q=0}^p \frac{k^q}{q!} \frac{d^q}{dk^q} \Psi^G(k, r) |_{k=0} + \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k_v} \right)^{p+1} \frac{l_v \Phi_v(r)}{k - k_v}; \quad (64)$$

$$l_v = - \sum_i \frac{\chi_i^{(v)}(R) \exp(ik_i^{(v)}R)}{2k_i^{(v)} h_i^\dagger(k_i^{(v)}R) \alpha_i^{(v)}}. \quad (65)$$

Здесь $\sum_i \alpha_i^{(v)} = 1$, а p — неотрицательные целые числа. Разложение S -матрицы имеет вид, аналогичный (64) (подробности см. в [22]). Разложение (64) сходится равномерно в k -плоскости внутри любого замкнутого контура, не содержащего полюсов.

Легко получить следующие соотношения [22]:

$$k_v^2 = k_i^{(v)2};$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_v &= (2\hbar^2/m) \operatorname{Re} k_v \operatorname{Im} k_v = (2\hbar^2/m) \operatorname{Re} k_i^{(v)} \operatorname{Im} |k_i^{(v)}|; \\ E_v &= (\hbar^2/2m) [(\operatorname{Re} k_v)^2 - (\operatorname{Im} k_v)^2] = \\ &= (\hbar^2/2m) [(\operatorname{Re} k_i^{(v)})^2 - (\operatorname{Im} k_i^{(v)})^2], \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

а собственное значение $\mathcal{E}_v = E_v - i\Gamma_v/2$. Из этих формул видно, что полная ширина (вероятность распада) не зависит от номера канала (к этому вопросу мы еще вернемся позже).

Если предположить, что потенциал $V(\mathbf{r})$ действительный, то из стационарного уравнения Шредингера для φ_{v_1} и φ_{v_2} с помощью теоремы Грина получим

$$(\mathcal{E}_{v_2}^* - \mathcal{E}_{v_1}) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi_{v_2}^* \varphi_{v_1} d\mathbf{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i W(\chi_i^{(v_2)}(r)^*, \chi_i^{(v_2)}(r))|_{r=R}, \quad (67)$$

где W (вронскиан) в данном случае равен

$$W(\chi_i^{(v_2)*}, \chi_i^{(v_1)}) = \chi_i^{(v_2)*}(r) d\chi_i^{(v_1)}(r)/dr - \chi_i^{(v_1)}(r) d\chi_i^{(v_2)*}(r)/dr.$$

Далее примем $v_1 = v_2$ и учтем, что $\mathcal{E}_v^* - \mathcal{E}_v = i\Gamma_v$; тогда

$$i\Gamma_v \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\varphi_v|^2 d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\hbar^2}{2m} |\chi_i^{(v)}|^2 [b_i(k_i^{(v)}) - b_i(k_i^{(v)})^*], \quad (68)$$

$$b_i(k_i^{(v)}R) = (dh_i^+(k_i^{(v)}r)/dr)/h_i^+(k_i^{(v)}r)|_{r=R}. \quad (69)$$

Если воспользуемся результатами [22], то найдем (для $\operatorname{Re} k_i^{(v)} \neq 0$):

$$\Gamma_v = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\sum_i \operatorname{Re} k_i^{(v)} |\chi_i^{(v)} / h_i^+|^2}{\sum_i \left\{ \int_0^R |\chi_i^{(v)}(r)|^2 dr + N_i |\chi_i^{(v)}| |h_i^+|^2 \right\}}; \quad (70)$$

$$N_i(R) = |Rk_i^{(v)2}|^{-1} \{ (2l-1) |h_{l-1}^+(k_i^{(v)}R)|^2 + \\ + (2l-5) |h_{l-3}^+(k_i^{(v)}R)|^2 + \dots + (2 \pm 1) |h_{1/2 \pm 1/2}(k_i^{(v)}R)|^2 \}, \quad (71)$$

знак \pm связан с четностью l . Знаменатель формулы (70) неотрицателен; из (66) следует, что $\operatorname{Re} k_i^{(v)} = \operatorname{Re} k_v$ и не зависит от номера канала. Следовательно, знак Γ_v определяется только знаком $\operatorname{Re} k_v$ вне зависимости от канала. А это означает, что в рассматриваемом многоканальном случае классификация резонансных состояний $\varphi_v(\mathbf{r})$ должна быть такой же, как в одноканальном.

Напомним, что мы рассматриваем только упругое рассеяние, для неупругого процесса такая простая классификация нарушается.

Рассмотрим одноканальный случай. Предположим, что

$$|\operatorname{Im} k_v| \ll |\operatorname{Re} k_v|; \quad (72a)$$

$$k_v R \ll 1, \quad (72b)$$

тогда $\alpha_v^{(v)} \cong 1$ и из (62) следует

$$\left| \frac{\chi_v^{(v)}(R)}{h_l^\dagger(k_v R)} \right|^2 \approx \left(1 - \int_0^R \chi_v^{(v)}(r)^2 dr \right) \times \\ \times \frac{2k_v}{h_l^\dagger(k_v R)^* h_l^{\dagger'}(k_v R)} F(k_v R), \quad (73)$$

так как при выполнении условий (72) $\chi_v^{(v)}(R)^2 \approx |\chi_v^{(v)}(R)|^2$.

Далее

$$2k_v N_l h_l^\dagger(k_v R)^* h_l^{\dagger'}(k_v R) \sim (k_v R)^2 \ll 1; \quad (74)$$

$$1 - \int_0^R \chi_v^{(v)}(r)^2 dr \approx 0, \quad (75)$$

откуда получаем

$$\Gamma_v = \frac{\hbar^2}{m} \operatorname{Re} k_v \frac{|\chi_v^{(v)}(R)/h_l^\dagger(k_v R)|^2}{\int_0^R |\chi_v^{(v)}(r)|^2 dr}. \quad (76)$$

Эта формула совпадает с полученным другим методом результатом (при нормировке $\chi_v^{(v)}(R) = h_l^\dagger(k_v R)$ [41]. В многоканальном случае формула (26) не изменится, только добавится суммирование по каналам:

$$\Gamma_v = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\sum_i \operatorname{Re} k_i^{(v)} \left| \frac{\chi_i^{(v)}(R)}{h_l^\dagger(k_i^{(v)} R)} \right|^2}{\sum_i \int_0^R |\chi_i^{(v)}(r)|^2 dr}. \quad (77)$$

Известно, что для потенциального рассеяния справедливо соотношение [32]

$$S_l(k) = 1 + \frac{2}{ik} \int_0^R dr j_l(kr) V(r) \Psi_l(k, r). \quad (78)$$

Легко доказать, что $S = -1$ при $\delta_l = (\Pi/2)$ ($S = \exp(2i\delta_l)$) или при выполнении условий (72). Тогда, если в разложении Миттаг-Леффлера для $S_l(k)$ и $\Psi_l(kr)$ оставить только по одному члену,

соответствующему $k \sim |k_v|$, то получим

$$\Gamma_v = \frac{\hbar^2}{mk} \left| \int_0^R dr j_l(kr) V(r) \chi_v^{(v)}(r) \right|^2, \quad (79)$$

а в многоканальном случае добавится суммирование по каналам:

$$\Gamma_v = \frac{\hbar^2}{mk} \sum_i \left| \int_0^R dr j_l(kr) V(r) \chi_i^{(v)}(r) \right|^2. \quad (80)$$

Формулы (79) и (80) совпадают с формулами, полученными другим способом [42, 43].

Следовательно, все приближенные формулы (76), (77), (79) и (80) в нашем подходе получаются, естественно, при выполнении условий (72), т. е. при сохранении в разложениях Миттаг-Леффлера для $S_l(k)$ и $\Psi_l(kr)$ только одного члена. Отсюда точность этих формул ограничена узкой резонансной областью $k \sim |k_v|$. Совершенно очевидно, что если условие (72а) выполнено, а условие (72) — нет, то формулы остаются справедливыми, однако их точность ухудшается (это соответствует случаю, когда потенциальная часть фазы рассеяния сравнима с резонансной). Получаем нетривиальный вывод: все приближенные способы вычисления положений и ширин узких ($|\operatorname{Re} k_v^{\square}| \gg |\operatorname{Im} k_v|$) резонансов эквивалентны. Как мы подчеркивали во введении, рассматриваемый метод достаточно универсален, так как получающиеся аналитические выражения позволяют определить точность других приближенных подходов.

До сих пор еще не предложен достаточно надежный метод расчета одночастичных резонансных состояний деформированных ядер, однако вычисление квазистационарных состояний ($\Gamma \rightarrow 0$) можно проводить с хорошей точностью методом связанных каналов, предложенным в [43]. Для антисвязанных и широких резонансных состояний он становится чрезвычайно трудоемким, и поэтому целесообразно в ряде случаев для расчета таких состояний развить теорию возмущений [36] или точную диагонализацию [8] на базе резонансных функций сферического-симметричного потенциала. В качестве возмущения или остаточного взаимодействия можно принять отклонение деформированного потенциала от сферически-симметричного. Тогда главный эффект остаточных взаимодействий можно описать как сдвиг положений и ширин резонансов.

Исходной точкой является уравнение Дайсона для G_0^+ и G^+ (невозмущенный и возмущенный потенциалы соответственно):

$$G^+ = G_0^+ + G_0^+ H' G^+, \quad (81)$$

где H' — возмущение. Предполагая снова, что возмущение действует только внутри интервала $0 \leq r < R$, можно ввести разло-

жение Миттаг-Леффлера как для G_0^+ , так и для G^+ . Приравнивая вычеты в точках $k = k_n$ и $k = k_n^0$, получаем

$$\varphi_n = \sum_m \frac{\varphi_m^0}{2k_m^0 (k_n - k_m^0)} \int_0^R \varphi_m^0 H' \varphi_n d\tau; \quad (82)$$

$$\varphi_n^0 = \sum_m \frac{\varphi_m}{2k_m (k_m - k_n^0)} \int_0^R \varphi_n^0 H' \varphi_m d\tau. \quad (83)$$

Если принять

$$H' = \lambda U; \quad k_n = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i k_n^{(i)}; \\ \psi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_n^{(i)} \quad (84)$$

и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ , то получаем ряд из теории возмущений для волновых функций и энергий. Важно заметить, что нет соответствия членов с одинаковыми степенями между этим рядом и обычным рядом из теории возмущений, даже когда рассматриваются только вклады вычетов связанных состояний. Это обусловлено неортогональностью резонансных функций. Только поправки первого порядка в энергии находятся в согласии. Однако ситуация изменится, если рассмотреть случай $\Gamma_n^0 \rightarrow 0$. Тогда функция Грина G_0^+ (G^+) [см. уравнение (22)] сводится к

$$G_0^+ \cong \sum_{n>0} \frac{\varphi_n^0(r) \varphi_n^0(r')}{k^2 - k_n^{(0)2}}, \quad (84a)$$

ортогональность φ_n^0 восстанавливается и наши формулы совпадают с формулами стандартной теории возмущений.

В случае метода точной диагонализации встречаются аналогичные проблемы. Уравнение

$$(H - E) \Psi = (H_0 + H' - E) \sum_n^N C_n \varphi_n = 0, \quad (85)$$

приводит, например, к матричному уравнению для собственных значений, если его умножить на функции φ_n и проинтегрировать по всем углам и по r от 0 до R (индекс 0 в φ_n^0 для удобства опустим).

Из-за неортогональности E будет появляться как в диагональных, так и в недиагональных частях. Между двумя связанными состояниями недиагональные вклады будут малы, так что такие собственные векторы, которые состоят, главным образом, из компонент связанного состояния, должны быть похожи на обычные. В общем случае, однако, недиагональные члены велики. Неорто-

гональность не является только вычислительным неудобством, но также ведет к свободе выбора набора базисных уравнений для φ_n . Естественно поэтому предположить, что определенный базис $n = n_1 \dots n_N$ достаточен для разложения и те же базисные функции используются для матрицы $\langle n_1 | H | n_2 \rangle$. Необходимо заметить, что состояния с различными значениями l безусловно ортогональны, и, следовательно, в однополюсном приближении для каждого l в разложении нет трудностей, описанных выше [8]. Произвол в выборе обрезанной задачи связан с отсутствием принципа минимума для состояний рассеяния. Однако принцип стационарности существует, и более хорошая исходная точка для обрезания получается, когда мы начинаем с выражения стационарности и делаем обрезание этого выражения. Теперь (82) можно получать из вариации для $G^+ - G_0^+ = G_0^+ H' G^+$:

$$\delta (G_0^+ H' G^+ + G^+ H' G_0^+ - G^+ H' G^+ + G^+ H' G_0^+ H' G^+) = 0, \quad (86)$$

где вариация проводится по параметрам в G^+ ; так как выражение стационарно, малое изменение в этих параметрах, как обрезание с достаточно многими членами, должно привести к результату, который близок к правильному. Проведем теперь вариацию с таким обрезанным выражением; в результате получим уравнение

$$\sum_n^N C_n \varphi_n = \sum_m^{\infty} \frac{\varphi_m}{2k_m (k - k_m)} \int \varphi_m H' \left(\sum_n^N C_n \varphi_n \right) d\tau \quad (87)$$

или, приняв $\tilde{\varphi}_m = \varphi_m / \sqrt{k_m}$, $\tilde{C}_m = \sqrt{k_m} C_m$, получим

$$\sum_m^N \tilde{C}_m \tilde{\varphi}_m = \sum_m^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_m}{2(k - k_m)} \int \tilde{\varphi}_m H' \left(\sum_n^N \tilde{C}_n \tilde{\varphi}_n \right) d\tau. \quad (88)$$

Приравнивая коэффициенты $\tilde{\varphi}_n$, получаем

$$2(k - k_m) \tilde{C}_m = \sum \tilde{C}_n \langle \tilde{\varphi}_n^* H' \tilde{\varphi}_m \rangle, \quad (89)$$

которое, очевидно, является обычной задачей на собственные значения, хотя и не эрмитовой (но симметричной). На практике, разыскивая резонансы G^+ , можно исключить из нашего базиса все такие компоненты, которые, если бы были большими, приводили бы к нерезонансному поведению, т. е. антисвязанные функции, функции с отрицательными $\text{Re } k_n$ и функции с $\Gamma \gg k^2$.

Снова, как это мы делали в теории возмущений, рассматривая случай $\Gamma \rightarrow 0$, приходим к выводу, что матрица системы (89) становится эрмитовой, т. е. приходим к обычной процедуре диагонализации.

3. СТРУКТУРНЫЕ ЗАДАЧИ

Наиболее важным применением резонансных функций, на наш взгляд, является их использование в структурных расчетах, когда смесь континуума играет существенную роль. Такие расчеты часто удобно проводить с другими дискретными базами, такими, как базисы Штурма — Лиувилля или осцилляторными. Однако, когда полная энергия системы выше порога испускания частицы, эти базисы неприменимы.

В настоящем разделе будем следовать работам [8, 27], так как в других работах не используется свойство полноты резонансных функций. Основная идея заключается в том, что, хотя неортогональность и линейная зависимость резонансных функций представляют трудности для прямой диагонализации полного гамильтониана системы по этим функциям, разложение Миттаг-Леффлера для функции Грина даст возможность определить соответствующие коэффициенты разложения через матричные элементы остаточных взаимодействий по резонансным состояниям. Мы используем то, что состояния рассеяния входят в расчеты матричных элементов от операторов, быстро спадающих к нулю при увеличении расстояния от центра ядра, так что интегрирование необходимо проводить только до определенного расстояния $r = R$. В этом смысле излагаемый метод напоминает метод, описанный в работе [13]. Обсудим несколько примеров.

Оболочечная модель с континуумом. Рассмотрим гамильтониан системы A нуклонов

$$H_1 = H_1 + T + V + V_1 \equiv H_0 + V_1, \quad (90)$$

где H_1 — гамильтониан системы $A - 1$ нуклонов; $T + V$ — кинетическая энергия и оболочечный потенциал A -го нуклона, а V_1 — остаточные взаимодействия.

Полную волновую функцию системы разложим по дискретным и непрерывным собственным функциям гамильтониана H_0 :

$$\Psi\rangle = Q\Psi\rangle + P\Psi\rangle = \sum_{\Lambda} \alpha_{\Lambda} |\Lambda\rangle + \sum_{\Lambda} \int dk a(k) |k\lambda\rangle. \quad (91)$$

Например, частично-дырочные состояния можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} |\Lambda\rangle &= |\mu_{\Lambda}\rangle |\bar{\pi}_{\Lambda}\rangle; \\ |k\lambda\rangle &= \Psi_{\lambda}^{\dagger}(kr) \lambda \equiv \Psi_{\lambda}^{\dagger}(kr) Y_{e_{\lambda} m_{\lambda}} \bar{\pi}_{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Ради простоты не будем рассматривать антисимметризацию, означающую включение обменного члена в матричные элементы V_1 .

Если записать

$$\begin{aligned} a_\lambda(k) &= A_\lambda \delta(k - k_\lambda) + (2/\pi) b_\lambda(k); \\ k_\lambda^2 &= E - e_\lambda, \end{aligned} \quad (93)$$

то коэффициенты A_λ описывают граничные условия Ψ ($e_\lambda = |e_{\pi_\lambda}|$, $2m/\hbar^2 = 1$). Заметим, что k_λ в формуле (93) не совпадает с полюсами k_i функции Грина. Подставим (91) в уравнение Шредингера, умножим слева на $\langle \Lambda' |$ и $\langle k'\lambda' |$ и получим:

$$\begin{aligned} &\sum_{\Lambda} \langle \Lambda' | E_\Lambda - E + V_1 | \Lambda \rangle \alpha_\Lambda + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda} \int_0^\infty dk \langle \Lambda' | V_1 | k\lambda \rangle b_\lambda(k) = \\ &= - \sum_{\lambda} \langle \Lambda | V_1 | k_\lambda \lambda \rangle A_\lambda; \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} &(k'^2 - k_\lambda^2) b_{\lambda'}(k') + \sum_{\Lambda} \langle k'\lambda' | V_1 | \Lambda \rangle \alpha_\Lambda + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda} \int_0^\infty dk \langle k'\lambda' | V_1 | k\lambda \rangle b_\lambda(k) = \\ &= - \sum_{\lambda} \langle k'\lambda' | V | k\lambda \rangle A_\lambda. \end{aligned} \quad (95)$$

Эта система интегральных уравнений определяет коэффициенты α_Λ и b_λ и, как нетрудно видеть, совпадает с уравнениями, полученными в [1—3]. Матричные элементы в этой системе содержат силы V_1 конечного радиуса действия и дырочные волновые функции, экспоненциально убывающие с увеличением расстояния от центра ядра. Поэтому интегрирование должно быть проведено до определенного расстояния $r_1 = R$ и $r_2 = R$, причем значение матричных элементов не зависит от R , если R достаточно велико.

Вводя разложение Миттаг-Леффлера для $\Psi_{\lambda'}$ ($k'r$) в $\langle k'\lambda' |$, из (95) получаем:

$$b_{\lambda'}(k') = (k_\lambda^2 - k'^2)^{-1} \sum_i f_{i(\lambda')}^*(k') \beta_{i\lambda'}; \quad (96)$$

$$f_i^* = [\varphi_i(R)/2k_i(k - k_i)] k/\hbar^2(kR), \quad (97)$$

где $\beta_{i\lambda'}$ можно определить из (95).

Следовательно, подынтегральные выражения в (94) и (95) имеют сингулярности, которые не будем здесь обсуждать, так как их свойства зависят от выбора A_λ , т. е. от граничных условий рассматриваемой функции.

Подставляя в (94) и (95) разложения Миттаг-Леффлера для $\langle k'\lambda' |$ и $|k_\lambda\lambda\rangle$ и используя единственность такого разложения, приравняем полюсные члены с одинаковыми i' . Получаем:

$$(E_{\Lambda'} - E)\alpha_{\Lambda'} + \sum_{\Lambda} \langle \Lambda' | V_1 | \Lambda \rangle \alpha_{\Lambda} + \\ + \sum_{\lambda} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \langle \Lambda' | V_1 | \Psi_{\lambda}^{\dagger}(kr) \lambda \rangle \frac{1}{k_{\lambda}^2 - k^2} \sum_i f_{i\lambda}^*(k) \beta_{i\lambda} = \\ = - \sum_{i\lambda} \langle \Lambda' | V_1 | \Phi_i \lambda \rangle f_{i\lambda}(k_{\lambda}) A_{\lambda}; \quad (98)$$

$$\sum_{\Lambda} \langle \lambda' \Phi_{i'} | V_1 | \Lambda \rangle \alpha_{\Lambda} - \beta_{i'\lambda'} + \\ + \sum_{\lambda_i} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \langle \Phi_{i'} \lambda' | V_1 | \Psi_{\lambda}^{\dagger}(kr) \lambda \rangle \frac{1}{k_{\lambda}^2 - k^2} f_{i\lambda}^* \beta_{i\lambda} = \\ = - \sum_{i\lambda} \langle \lambda' \Phi_{i'} | V_1 | \Phi_i \lambda \rangle f_{i\lambda}(k_{\lambda}) A_{\lambda}. \quad (99)$$

Итак, проблема нахождения Ψ сводится к вычислению коэффициентов α_{Λ} и $\beta_{i\lambda}$ из системы алгебраических уравнений (98) и (99) при фиксированных A_{λ} . В матричных обозначениях системы (98) и (99) можно переписать в виде:

$$W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = V_1(fA); \quad (100)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = W^{-1}V_1(fA). \quad (101)$$

Отсюда видно, что матрица V_1 и вектор (fA) получаются из разложения Миттаг-Леффлера в простой форме; зависимость от энергии (fA) имеет вид $(k_{\lambda}^2 - k^2)^{-1}$. Безусловно, наибольшее преимущество рассматриваемого метода по сравнению с другими заключается в простоте вычислений матрицы W .

Матричные элементы в частично-дырочном случае имеют вид:

$$\langle \Lambda' | W | \lambda i \rangle = \langle \Lambda(r_1, r_2) | V_1(r_1, r_2) | F_{\lambda i}(r_1) \bar{\Pi}_{\lambda}(r_2) \lambda \rangle; \quad (102)$$

$$\langle \lambda' i' | W | \lambda i \rangle = \langle \lambda' i'(r_1, r_2) | V_1(r_1, r_2) \times \\ \times | F_{\lambda i}(r_1) \bar{\Pi}_{\lambda}(r_2) \lambda \rangle - \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{i i'}; \quad (103)$$

$$F_{\lambda i}(r) = \int_0^{\infty} dk \Psi_{\lambda}^{\dagger}(kr) (k_{\lambda}^2 - k^2)^{-1} f_{i\lambda}^*(k). \quad (104)$$

Обратимся к определению Грина:

$$G_{\lambda, p}^{\pm}(k_{\lambda}; r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \Psi_{\lambda}^{\pm}(kr) (k_{\lambda}^{\pm 2} - k^2)^{-1} \Psi_{\lambda}^{\pm*}(kr'); \quad (105)$$

$$k^{\pm} \equiv \begin{cases} \pm |k| + i|\eta|, & k^2 > 0, \eta \rightarrow 0; \\ i|k|, & k^2 < 0. \end{cases}$$

Если интегралы (104) и (105) интерпретировать одинаково, то можно записать

$$G_{\lambda, p}^{(\pm)}(k; r, r') = \sum_i F_{\lambda_i}^{(\pm)}(r) \Phi_i^*(r'). \quad (106)$$

Перепишем разложение Миттаг-Леффлера функции Грина, слегка видоизменив обозначения:

$$G_p^{\pm} = \sum_i \frac{\Phi_i(r) \Phi_i(r')}{2k_i(k - sk_i)}, \quad (106a)$$

где $s = -1$ для связанных состояний, $s = +1$ для антисвязанных и резонансных состояний.

Сравнивая (106) и (106a) и используя единственность полюсного разложения, получаем

$$F_{\lambda_i}^{(\pm)}(r) = \Phi_i^*(r) / [2k_{\bar{i}}(k^{\pm} - sk_{\bar{i}})], \quad (107)$$

где $k_{\bar{i}}$ является зеркальным отражением k_i :

$$\text{Re}(k_{\bar{i}}) = -\text{Re}(k_i); \quad \text{Im}(k_{\bar{i}}) = \text{Im}(k_i). \quad (107a)$$

Видно, что все вычисления сводятся к вычислению матричных элементов одного типа, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \lambda' i' | V_1 | i \lambda \rangle &= \langle \lambda' \bar{\Pi}_{\lambda'}(r_2) \times \\ &\times \Phi_{i\lambda'}(r_1) | V_1(r_1 r_2) | \Phi_{i\lambda}(r_1) \bar{\Pi}_{\lambda}(r_2) \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (108)$$

Введем обозначение

$$\alpha_{i\lambda}^{\pm} = \beta_{i\lambda} / 2k_{\bar{i}}(k_{\lambda}^{\pm} - sk_{\bar{i}}), \quad (109)$$

тогда (101) сможем записать в виде

$$\alpha = M^{-1} V_1 (fA), \quad (110)$$

где

$$\langle \Lambda' | M | \Lambda \rangle = \langle \Lambda' | V_1 | \Lambda \rangle - (E - E_{\Lambda}) \delta_{\Lambda' \Lambda}; \quad (111)$$

$$\langle \lambda' i' | M | \Lambda \rangle = \langle \lambda' \bar{\Pi}_{\lambda'} \Phi_{i\lambda'} | V_1 | \Lambda \rangle;$$

$$\langle \Lambda' | M | i \lambda \rangle = \langle \Lambda' | V_1 | \Phi_{i\lambda}^* \bar{\Pi}_{\lambda} \rangle;$$

$$\langle \lambda' i' | M | i \lambda \rangle = \langle \lambda' \bar{\Pi}_{\lambda'} \Phi_{i\lambda'} | V_1 | \Phi_{i\lambda}^* \bar{\Pi}_{\lambda} \rangle;$$

$$-2k_{\bar{i}}(k_{\lambda}^{\pm} - sk_{\bar{i}}) \delta_{i' i} \delta_{\lambda \lambda'}.$$

Видно, что комплексная матрица M имеет простую форму: она симметрична, и только диагональные элементы зависят от энергии. Заметим, что диагональные матричные элементы содержат квадрат φ_i , но не по абсолютной величине, как при нормировке (32). Четыре разных члена в (111) соответствуют H_{QQ} , H_{PQ} , H_{QP} , H_{PP} в обычной оболочечной модели с континуумом. Очевидно, что если один из четырех матричных элементов мал по сравнению с другими, то его можно рассмотреть по теории возмущений [это следует из (110) и (111)]. Если во всех каналах нет уходящих и падающих волн, то система (110) однородна и мы имеем задачу на собственные значения и собственные волновые функции. Это возможно только в случае, когда полная энергия системы ниже порога испускания частицы.

Метод случайной фазы. В предыдущем разделе не было необходимости детально обсуждать состояния частично-дырочного типа, однако совершенно очевидно, что в тяжелых ядрах задача становится очень трудной, поскольку нужно включать в расчеты многочастично-многодырочные конфигурации. Стоит заметить, что рассмотренный метод учета континуума и методы, предложенные в вышеупомянутых работах, не приспособлены для расширения базиса до таких сложных конфигураций.

Если в качестве базиса используют только связанные состояния, то в методе случайной фазы эти трудности преодолимы. Использование такого метода в задачах с учетом состояний континуума предложено в [44]. Введем представление вторичного квантования и запишем гамильтониан:

$$H_0 = \sum_{\nu} e_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + \sum_{\mu} \int_0^{\infty} dk e_{\mu}(k) a_{\mu}^{\dagger}(k) a_{\mu}(k); \quad (112)$$

$$-V_1 = \sum_{\nu\mu\lambda i} \int \langle \nu\bar{\lambda} | V | \mu\bar{i} \rangle_{an} a_{\nu}^{\dagger} a_{\lambda} a_{\mu} a_i^{\dagger}, \quad (113)$$

где индекс an обозначает антисимметризацию матричных элементов. Интеграл в (113) означает, что по индексам, соответствующим состояниям континуума, сумма заменяется интегралом.

Поскольку состояния континуума ортогональны:

$$\frac{2}{\Pi} \left\langle \mu \int_0^{\infty} dr \Psi_{\mu}^{\dagger*}(k, r) \Psi_{\nu}^{\dagger}(k', r) \right\rangle = \delta_{\mu\nu} \delta(k, -k'), \quad (114)$$

то мы должны иметь

$$[a_{\mu}^{\dagger}(k), a_{\nu}(k')] = \delta_{\mu\nu} \delta(k - k'), \quad (115)$$

где $a_{\mu}^{\dagger}(k)$ — оператор рождения частицы в состоянии $\sqrt{\pi/2} \times \Psi_{\mu}^{\dagger}$. Составим операторы

$$Q_j^{\dagger}(E) = \sum_{\mu > \varepsilon_F > \nu} X_{\mu\nu}(E) (a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu})_j - Y_{\mu\nu}(E) \times \\ \times (a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu})_j + \sum_{\mu > \varepsilon_F > \nu} \int dk \{ \chi_{\mu\nu}(k, E) (a_{\mu}^{\dagger}(k) a_{\nu})_j - \\ - y_{\mu\nu}(k, E) (a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu}(k))_j \} \quad (116)$$

и потребуем выполнения соотношения

$$[H, Q_j^{\dagger}(E)] = EQ_j^{\dagger}(E). \quad (117)$$

Основное состояние в этом приближении является коррелированным вакуумом $|\tilde{0}\rangle$, определенным из равенства

$$Q_j(E)|\tilde{0}\rangle = 0 \quad (118)$$

и не имеющим свободных частиц. Возбужденные состояния записываются следующим образом:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \prod_i Q_{j_i}^{\dagger}(E_i)|\tilde{Q}\rangle, \quad E = \sum E_i. \quad (119)$$

Граничные условия должны быть выбраны так, чтобы в состоянии $Q_j^{\dagger}(E)|\tilde{0}\rangle$ могла быть только одна свободная частица с уходящими или падающими волновыми функциями или их комбинацией. Это видно из определения (116) операторов $Q_j^{\dagger}(E)$, согласно которому только одна частица должна быть в континууме. Подставляя (116) в (117) и приравнивая коэффициенты при операторах $a_{\sigma}^{\dagger} a_{\rho}$, получаем систему связанных неоднородных уравнений для X , Y , χ и y . Применяя те же операции, что и при выводе формулы (93), получаем:

$$\chi_{\tau}(k) = A_{\tau} \delta(k - k_{\tau+}) + (2/\Pi) b_{\tau+}(k), \quad \tau \equiv (\mu, \nu); \quad (120)$$

$$y_{\tau}(k) = (2/\Pi) b_{\tau}(k), \quad (121)$$

где

$$k_{\tau\pm}^2 = \pm E - |e_{\tau}(\tau)|, \quad (122)$$

и в полной аналогии с (96) имеем:

$$b_{\tau\pm}(k) = (k_{\tau\pm}^2 - k^2)^{-1} \sum_i f_{i(\tau)}^*(k) \beta_{i\tau\pm}. \quad (123)$$

Два знака в $k_{\tau\pm}$ (122) не следует путать с двухзначностью k_{λ}^{\pm} , соответствующей G^+ и G^- .

Чтобы получить уравнения, по форме совпадающие с (110), введем обозначения:

$$\alpha_{it} = \beta_{it}/2k_i (k_{\lambda t}^r - sk_i), \quad t = \pm, r = \pm, s = \pm; \quad (124)$$

$$\alpha_{\Lambda+} \equiv X_{\mu\nu}; \quad \alpha_{\Lambda-} \equiv Y_{\mu\nu}, \quad \Lambda \equiv (\mu, \nu). \quad (125)$$

В результате получаем

$$\alpha \equiv M^{-1}V_1(fA); \quad (126)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \langle \Lambda' + | V_1 | \Lambda + \rangle &= \langle \mu' \bar{\nu}' | V_1 | \mu \bar{\nu} \rangle; \\ \langle \Lambda' + | V_1 | \Lambda - \rangle &= \langle \mu' \bar{\nu}' | V_1 | \bar{\nu} \mu \rangle; \\ \langle \Lambda + | V_1 | i\lambda + \rangle &= \langle \mu \bar{\nu} | V_1 | i\bar{\lambda} \rangle; \\ \langle \Lambda + | V_1 | i\lambda - \rangle &= \langle \mu \bar{\nu} | V_1 | \bar{\lambda} i \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Изменение порядка индексов означает, что рассматриваются матричные элементы с переставленными состояниями. Заметим, что хотя $k_{\lambda-}$ расположен на положительной мнимой оси, как и для связанных состояний, однако фактор $(k_{\lambda t} - sk_i)$ не равен нулю, поскольку $s = -1$, так что в полученных выражениях нет сингулярностей.

Итак, мы обсудили два метода, которые можно применить в структурных вычислениях с континуумом. Основная цель таких вычислений — описать возбужденные состояния ядер с энергиями выше порога вылета нуклонов. В этой области волновые функции, полученные представленными здесь методами, дают реалистичское описание резонансов. В частности, вычисленные сечения реакций (γ, p) , (p, γ) и т. п. прямо зависят от примесей волновых функций типа частица в континууме — дырка.

В связи с этим заметим, что большая часть поляризационных эффектов уже включена в таких вычислениях. Следовательно, амплитуды переходов можно вычислить прямо из матричных элементов одночастичных операторов по этим состояниям.

Первый предложенный метод, по своему содержанию тесно связанный с методом связанных каналов, предпочтительнее для использования в структурных расчетах легких ядер, в то время как метод случайной фазы — для тяжелых ядер.

Сравнивая уравнения (110), (111) и (126) с соответствующими уравнениями работ [13, 44], видим, что введение резонансных функций приводит к большому упрощению этих уравнений. В [13, 44] состояния континуума разлагаются по произвольной системе функций (при $r < R$). Тогда функция Грина должна быть вычислена в этом же представлении. Однако она в таком представлении не диагональна и каждый матричный элемент получается интегрированием по k выражений, содержащих множитель $(k^2 - k_\lambda^2)^{-1}$,

и дальнейшим умножением на два различных k -зависящих коэффициента. Интегрирование должно быть проведено для всех значений k_λ . В таком приближении единственность разложения гарантируется ортогональностью базисных функций (при условии достаточно больших R). В обсуждаемом методе это вытекает из единственности разложения Миттаг-Леффлера.

Ответить на вопрос о сходимости различных методов в общем виде чрезвычайно трудно. Однако можно сказать, что в методе, описанном в [13, 44], при использовании в качестве базисных осцилляторных функций сходимость будет очень плохой (см. работу [14] и разд. 4). Как показали вычисления, сходимость разложения Миттаг-Леффлера довольно быстрая (равномерная), особенно в области одночастичных резонансов (тогда в разложении с хорошей точностью можно сохранить только один член ряда). Это следствие того, что не только реальная, но и мнимая часть k_λ увеличивается при возрастании λ (коэффициенты разложения пропорциональны $1/\text{Im } k_\lambda$). В разложениях по другим базисным функциям это не так.

Функции Грина, используемые нами, определены в P -пространстве, и поэтому вопрос ортогональности приближенно полученных состояний континуума и связанных состояний не возникает. Аналогична ситуация с принципом Паули. Численные результаты работы [44] обнаруживают необъяснимые особенности, в частности, это относится к гигантским дипольным резонансам. Возможно, они вызваны вычислительными проблемами, обсуждавшимися выше. В принципе, если какие-то матричные элементы малы по сравнению с другими, можно развить теорию возмущений; это можно сделать способом, описанным в разд. 2.

[4. ПЛОТНОСТЬ ОДНОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ КОНТИНУУМА

Задача изучения плотности одночастичных состояний континуума представляет самостоятельный интерес, особенно в связи с исследованиями структуры высоковозбужденных состояний ядер при столкновении тяжелых ионов. В принципе трудно отличить эффекты, обусловленные плотностью одночастичных состояний континуума, от эффектов механизма реакций, однако в некоторых случаях такое разделение можно провести достаточно корректно. В этом разделе кратко обсудим существующие методы учета вклада одночастичных состояний континуума в оболочечные поправки для установления соответствия между ними, оставляя в стороне вопрос физической обоснованности этих методов.

Пионерские исследования [45, 46] инициировали поток работ по вычислению оболочечных поправок δU в целях описания и предсказания величин деформаций, порогов деления, времени

жизни и т. п. Практически все эти работы невозможно перечислить (см., например, [14, 47—54] и ссылки в них).

В расчетах δU с потенциалом конечной глубины возникает проблема учета влияния континуума и обычно ее решают разложением волновой функции по осцилляторному базису. При этом непрерывный спектр заменяют дискретными уровнями с положительными энергиями [51, 52]. Предполагают, что увеличение числа членов M в разложении (M — ранг матрицы диагонализации) позволит получить дискретный спектр уровней, достаточно хорошо

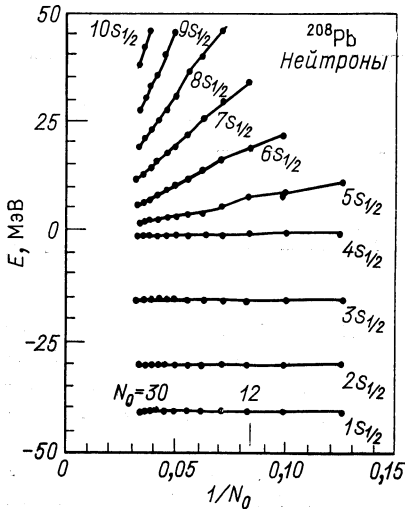
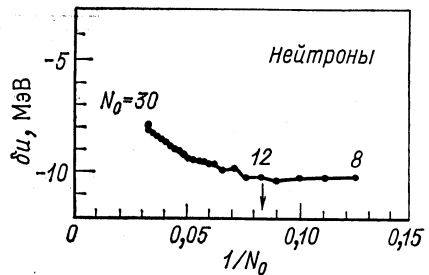


Рис. 1. Зависимость одночастичных энергий ^{208}Pb , вычисленных методом разложения по базисным осцилляторным функциям, от числа учитываемых осцилляторных квантов $N_0 = 2n + l$ [14]

Рис. 2. Зависимость оболочечных поправок δU от N_0 [14]



аппроксимирующий континуум. Важно заметить, что для состояний рассеяния отсутствует принцип минимума (принцип стационарности существует), поэтому следует ожидать появления особой точки «сгущения» при $E = 0$ в полученном дискретном спектре при увеличении M . Действительно, расчеты [14] показали, что плотность одночастичных уровней $\rho(E \approx 0)$ стремится к бесконечности при $M \rightarrow \infty$ при этом $\delta U \rightarrow \infty$ (рис. 1, 2) [14]. Если рассмотреть δU как функцию N ($N = 2n + l$, $M = \sum M$), то в интервале $8 \leq N_0 \leq 13$ оболочечная поправка практически постоянна. На этом основании обычно используют значение N_0 из указанного выше интервала. Другой способ учета вклада континуума в δU сводится к нахождению плотности одночастичных состояний континуума [53, 54], но точность ее вычисления в резонансной области энергий невелика.

Согласно работам [55, 56] плотность одночастичных состояний континуума можно записать в виде

$$\rho(k) = (1/\pi) d\delta(k)/dk, \quad (128)$$

где $\delta(k)$ — фаза рассеяния. Если потенциал среднего поля ядер равен нулю, то $\delta \equiv d\delta/dk \equiv 0$ и $\rho(k) = 0$. Естественно попытаться получить аналитическое выражение для $\delta(k)$ и $d\delta(k)/dk$. Это можно сделать, если применить теорему Вейерштрасса к целой функции Йоста; тогда для потенциалов, равных нулю при $r \geq R_{\text{яд}}$, можно записать [33] *:

$$\delta(k) = -kR_{\text{яд}} - \sum_{n=1}^N \operatorname{arctg} \frac{k}{K_n} + \sum_{n=1}^{N'} \operatorname{arctg} \frac{k}{\chi_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2k \operatorname{Im} k_n}{|k_n|^2 - k^2}; \quad (129)$$

$$\frac{d\delta}{dk} = -R_{\text{яд}} - \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{k^2 + K_n^2} + \sum_{n=1}^{N'} \frac{\chi_n}{k^2 + \chi_n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{Im} k_n (k^2 + |k_n|^2)}{(k^2 - |k_n|^2)^2 + 4k^2 (\operatorname{Im} k_n)^2}, \quad (130)$$

где $-i\chi_n$, iK_n и $(\operatorname{Re} k_n > 0)$ — полюсы S -матрицы, отвечающие антисвязанным, связанным и резонансным состояниям соответственно. В этих формулах вклады от полюсов k_n и $-k_n^*$ объединены. В (129) и (130) содержится много резонансных членов, однако резонансы в сечении рассеяния [$\sin \delta(k) = 1$] наблюдаются только при нескольких значениях энергий [33], выше которых резонансов в сечении уже нет. Это можно понять из следующего простого соображения: при достаточно больших энергиях рассеяния влияние потенциала на сечение рассеяния становится пренебрежимо малым. Важно отметить, что вклад от резонансных членов в (129) и (130) максимален только тогда, когда $k \sim |k_n|$, и этот вклад равен $\pi/2$ и $1/\operatorname{Im} k_n$ соответственно. Итак, каждому парциальному сдвигу фаз $\delta_{ij}(k)$ и его производной $d\delta_{ij}(k)/dk$ соответствует такое значение энергии, выше которой эти функции являются монотонными. Отсюда и из нижеизложенного ясно, что выше этой энергии δU должна быть равна нулю. Численные расчеты показывают, что такая монотонность $d\delta/dk$ наступает для энергии выше области второго резонансного состояния.

Следовательно, мы выяснили, что плотность $\rho(E)$ одночастичных состояний континуума равна $(1/\pi) (d\delta/dk) dk/dE = (1/\pi) \times d\delta/dE$, а дискретного спектра — $\delta(E - \mathcal{E}_\nu)$, где \mathcal{E}_ν — одно-

* В формулах (12.105) и (12.106) работы [33] есть опечатка. Формулы (122) и (130) для протонов слегка видоизменяются [8], но для нас эти изменения несущественны.

частичные энергии дискретного спектра, т. е.

$$\rho(E) = \begin{cases} \sum_{\nu} \delta(E - \mathcal{E}_{\nu}), & E < 0; \\ \sum_{lj} \frac{(2j+1)}{\pi} \frac{d\delta_{lj}}{dE}, & E > 0. \end{cases} \quad (131)$$

Если одночастичный спектр дискретен, то в методе оболочечных поправок Струтинского одночастичная плотность $\rho(E) = \sum_{\nu} \delta(E - \mathcal{E}_{\nu})$ заменяется на усредненную:

$$\bar{\rho}(E) = \frac{1}{\gamma \sqrt{\pi}} \sum_{\nu} \exp \left[-\frac{(E - \mathcal{E}_{\nu})^2}{\gamma^2} \right] L_s^{1/2} \left[\left(\frac{E - \mathcal{E}_{\nu}}{\gamma} \right)^2 \right], \quad (132)$$

где γ — параметр усреднения, а $L_s^{1/2}(\alpha)$ — корректирующий полином. Далее сама оболочечная поправка вычисляется по известным формулам.

Однако, если одночастичный спектр состоит из дискретной и непрерывных частей, то выражение (132) модифицируется [54]:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(E) = & \frac{1}{\gamma \sqrt{\pi}} \sum_{\nu} \exp \left[-\frac{(E - \mathcal{E}_{\nu})^2}{\gamma^2} \right] L_s^{1/2} \left[\left(\frac{E - \mathcal{E}_{\nu}}{\gamma} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{\gamma \sqrt{\pi} \pi} \sum_{lj} (2j+1) \int_0^{\infty} \frac{d\delta_{lj}(\epsilon)}{d\epsilon} \exp \left[-\left(\frac{E - \epsilon}{\gamma} \right)^2 \right] L_s^{1/2} \left[\left(\frac{E - \epsilon}{\gamma} \right)^2 \right] d\epsilon \end{aligned} \quad (133)$$

Второй член в (133) возникает от усреднения состояний континуума. Вспомним определение δ -функции:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (1/\pi) \alpha/x^2 + \alpha^2 \quad (134)$$

и обратим внимание на последнюю сумму в (130), тогда для резонансных состояний с малой шириной $\text{Im } k_n \rightarrow 0$ второй член в (133) сводится к сумме типа (132), при этом $\mathcal{E}_{\nu} \rightarrow |\mathcal{E}_{\nu}^n|$, так как собственные значения резонансных состояний комплексны. Ясно, что в области острых резонансов вклад отброшенных членов в (130) будет очень мал. Таким образом, мы получим приближенный метод вычисления δU с учетом вклада острых одночастичных резонансов. Его преимущество — сохранение традиционных формул (132) расчета, а недостаток — пренебрежение «подложки» непрерывного спектра [не учтены первые три члена (130)] и недостаточная точность учета широких резонансов. Расчеты δU для сферических [50] и деформированных [57] ядер соответствуют как раз такого рода приближению.

Вернемся к обсуждению метода расчета δU , основанному на диагонализации гамильтониана в базисе осцилляторных функций. Как мы уже отметили, при бесконечном увеличении ранга M матрицы диагонализации плотность $\rho(k)$ стремится к бесконечности [этого не должно быть, как следует из (130)], так что получается бесконечно большая оболочечная поправка δU (см. рис. 2). Интересно заметить, что при увеличении M энергии некоторых дискретных состояний в континууме не меняются, т. е. почти стабильны. Оказывается, эти «стабильные» состояния соответствуют резонансным состояниям (см. [58] и рис. 3, взятый из этой работы). В атомной физике этот метод расчета резонансных состояний называется

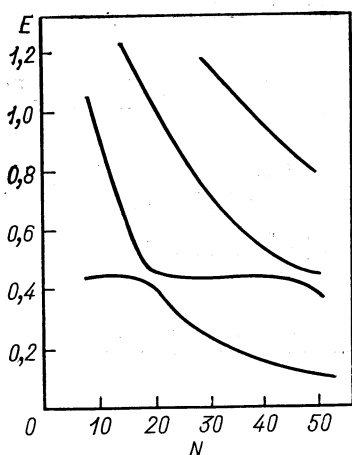


Рис. 3. Поведение дискретных состояний с положительной энергией в зависимости от N_0 [58]

методом стабилизации. Отсюда следует способ «подлечивания» расчетов δU , основанных на методе диагонализации в осцилляторном базисе. А именно, необходимо найти «стабильные» состояния с положительной энергией и только их (наряду с отрицательными) включить в вычисления δU . Тогда мы учтем вклад всех острых резонансов в δU . Нам кажется, что рекомендация [14] использовать те значения $8 \leq N_0 \leq 13$, для которых δU почти постоянная, в какой-то мере эквивалентна методу стабилизации.

В работах [53, 54] величину $d\delta/dE$ находят, вычисляя фазу рассеяния для разных значений E . Как уже говорилось, функция $d\delta/dE$ сильно меняющаяся в области острого резонанса [см. (130)]: возрастает от $\Gamma/(E - |\mathcal{E}_v|)^2$ до $1/\Gamma$ и уменьшается от $1/\Gamma$ до $\Gamma/(E - |\mathcal{E}_v|)^2$. Это означает, что если $\Gamma \sim 10^{-5} - 10^{-8}$ МэВ, то скачок производной сдвига фазы $\sim 10^{10} - 10^{16}$ в области изменения энергии $\sim 10^{-5} - 10^{-8}$ МэВ. Ясно, что даже для современных ЭВМ численное нахождение таких производных — весьма сложная задача. Однако эта задача решается очень просто с помощью (130), если известны комплексные собственные значения $\mathcal{E}_v^{(n)}$ для резонансных состояний; $\mathcal{E}_v^{(n)}$ можно найти по одному из методов, предложенных в [43]. Ясно, что точность вычисления δU во всех перечисленных выше методах должна быть небольшой (например, в [50] утверждается, что указанная точность $\sim 2-3$ МэВ, в [14] $\sim 0,5$ МэВ, однако и это требует доказательства).

В заключение настоящего раздела можно сказать, что вопрос корректного вычисления δU с учетом континуума остается все

еще открытым, хотя в принципе ясно, как его можно решать. Возможно, в альтернативном подходе вычисления δU , предложенном недавно [59], трудности, связанные с учетом континуума, решены.

5. СРЫВ НА НЕСВЯЗАННЫЕ ОДНОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Большое количество работ посвящено изучению одночастичного срыва на несвязанные состояния (см., например, оригинальные работы [60—63], обзор [64] и ссылки в них). В этом разделе мы кратко остановимся только на одной проблеме — вычислении матричных элементов:

$$M_{j_n l_n} = \int d\mathbf{r} \Psi_{q_p}^{(-)*}(\mathbf{r}) f_{j_n l_n}(\mathbf{r}) \chi_{q_d}^{(+)}(\mathbf{r}), \quad (135)$$

где $f_{j_n l_n}$ — волновая функция переданного нейтрона, все остальные обозначения стандартные [64]. Для конкретности будем рассматривать процесс $A + d \rightarrow A + p + n$, где A — ядро-мишень.

Основная трудность расчетов сечений передач в континуум связана с плохой сходимостью интеграла (135) от верхнего предела интегрирования, и эта трудность обычно преодолевается с помощью различных приближенных методов [23, 24, 60—63], преимуществами и недостатки которых довольно подробно обсуждаются в обзоре [64].

Следуя работе [64], представим волновую функцию нейтрона в виде

$$f_{j_n l_n}(r) = \theta(R-r) U_{j_n l_n}(q_n r) + \theta(r-R) \{j_{l_n}(q_n r) + [(S-1)/2i] h_{l_n}^+(q_n r)\}, \quad (136)$$

где R — расстояние, начиная от которого потенциал среднего поля равен нулю. Поскольку на практике интересно изучение срыва на резонансные состояния, то наиболее часто применяемое приближение состоит в следующем. Внутреннюю часть волновой функции нейтрона $U_{j_n l_n}(q_n r)$ заменяют на факторизованную волновую функцию:

$$U_{j_n l_n}(q_n r) \approx A(q_n) U_{j_n l_n}^0(r), \quad (r < R), \quad (137)$$

где

$$A(q_n) \approx \{(q_n \hbar^2 / 2\mu_n A) (\Gamma/2) / [(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4]\}^{1/2} \quad (138)$$

в окрестности резонанса. Здесь E_0 — положение резонанса, Γ — ширина его, а $U_{j_n l_n}^0(r)$ нормирована на единицу в объеме $0 \leq r \leq R$. Оправдать это приближение можно, если разложить $U_{j_n l_n}(q_n r)$ в ряд Миттаг-Леффлера и вспомнить, что в области острых резонансов в упругом рассеянии нейтронов в этом разло-

жении достаточно сохранить только один член [см. (73)]:

$$U_{j_n l_n}(qr) \approx \varphi_0(R) \varphi_0(r) / [q^2 - (k_0^2 - \gamma_0^2 - 2ik_0 j_0)]. \quad (139)$$

Точность приближения (139) обсуждена в разд. 2. Основное достоинство указанного приближения состоит в том, что вся зависимость от энергии вошла в $A(q_n)$, поэтому интегрирование по энергии можно проводить аналитически. Это преимущество сохранится, если в (139) добавить следующие члены разложения. При этом мы не вводим в интегралы (135) никаких дополнительных расходимостей, поскольку разложение Миттаг-Леффлера сходится равномерно в области $0 \leq r \leq R$. При других способах вычисления матричных элементов ситуация иная.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный обзор позволяет сделать вывод, что метод разложения Миттаг-Леффлера можно использовать для вычисления простых аналитических по k выражений для S -матрицы, состояний рассеяния и функций Грина одночастичной задачи для потенциала, которые с достаточной точностью включают в себя обычные ядерные потенциалы (сферически-симметричные и деформированные) и кулоновский потенциал отталкивания. Необходимо отметить, что, хотя разложение

$$\Psi^+ = \sum \frac{C_n \varphi_n(r)}{k - k_n}$$

справедливо и сходится по r только при $r < R$, точное выражение для Ψ^+ получается при $r > R$ с использованием разложения Миттаг-Леффлера для S -матрицы. Эти разложения сходятся равномерно во всей k -плоскости, за исключением точек полюсов, и на практике сходимост можно улучшить выбором достаточно большой постоянной p . Можно доказать, что $S^{(n)} \sim 0$ ($n^{-2-p} \lg n$) при $n \rightarrow \infty$. Аналогичные асимптотические выражения можно получить для Ψ^+ и G^+ ; для этого достаточно вспомнить соотношение $\Psi^+(k, R)^{(p)} = [S^{(p+1)}(k) \exp(2ikR) - 1] / 2ik = -G^+(k, R, R)$. В случае, когда в разложении Ψ^+ учитываем только один полюс, получаем факторизованное выражение $\Psi^+ = F(k) \varphi_n(r)$, достаточно точное в окрестности острого резонанса, которое ранее использовали многие авторы в расчетах ядерных реакций без должного обоснования. Вывод, что все приближенные методы вычисления положений и ширины узких резонансных состояний *эквивалентны*, нетривиален. Он не справедлив для широких резонансов.

Как показано на некоторых примерах, разложение Миттаг-Леффлера сильно облегчает включение континуума в структурных расчетах, например оболочечного типа или RPA -метода, так как

в результате получаются простые системы алгебраических уравнений. Неортогональность волновых функций резонансных состояний несколько усложняют вычисления, однако это окупается единственностью и равномерной сходимостью полученных разложений. Надеемся, что предложенный способ включения континуума окажется особенно полезным при описании гигантских резонансов, распадные свойства которых полностью определяются состояниями континуума.

Мы здесь не рассматривали разложение по полюсам K - и T -матриц, поскольку почти все представленные результаты верны и для них [34, 37].

Авторы признательны профессору В. Г. Соловьеву и Д. П. Гречухину за полезное обсуждение вопросов, рассмотренных в данном обзоре, а также сотрудникам Института Нильса Бора, ЛТФ ОИЯИ, НИИЯФ МГУ, ИАЭ за ценные обсуждения. Один из авторов (Е. Банг) благодарен сотрудникам ЛТФ ОИЯИ за предоставленную возможность работать в этой лаборатории. Авторы благодарны С. П. Ивановой, Б. Н. Захарьеву, Н. И. Пятову, И. Н. Михайлову, С. Г. Кадменскому, Б. С. Нильссону за ценные обсуждения, а также С. А. Гончарову и М. Х. Гиззаткулову, в соавторстве с которыми получены некоторые результаты, использованные в обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fano U.— Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 1866.
2. Bloch C. Many-body description of nuclear structure and reactions. N.Y., 1966.
3. Mahaux M., Weidenmüller H. A. Shell-model approach to nuclear reactions. Amsterdam, 1969.
4. Bang J. e.a.— Nucl. Phys., 1976, v. 264, p. 157.
5. Банг Е., Гареев Ф. А., Иванова С. П.— ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. 2, с. 286.
6. Гареев Ф. А. и др.— Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 938.
7. Bang J., Gareev F. A., Jamalejev R. M.— Phys. Lett. B, 1974, v. 49, p. 239.
8. Bang J. e.a. Preprint JINR, E4-11377. Dubna, 1978; Preprint JINR, E4-11378. Dubna, 1978; Nucl. Phys. A, 1978, v. 309, p. 381.
9. Buck V., Hill A. D.— Nucl. Phys., 1967, v. 95, p. 271.
10. Marangoni M., Saruis A. M.— Ibid., 1969, v. 132, p. 649.
11. Barz H. W. e.a.— Ibid., 1977, v. 275, p. 111.
12. Raynal J. e.a.— Ibid., 1967, v. 101, p. 369.
13. Birkholz J. e.a.— Ibid., 1972, v. 189, p. 385.
14. Boltsterli B. e.a.— Phys. Rev. C., 1972, v. 5, p. 1050.
15. Eisenbud L., Wigner E. P.— Phys. Rev., 1947, v. 72, p. 29.
16. Kapur P. L., Peierls R. E.— Proc. Roy. Soc. A, 1938, v. 166, p. 277.
17. Meetz K.— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 690.
18. Sasakawa T.— Nucl. Phys. A, 1971, v. 160, p. 321.
19. Bang J. M., Gareev F. A. Preprint JINR, E2-10624. Dubna, 1977; Preprint JINR E2-10625. Dubna, 1977.
20. Gamow G.— Z. Phys., 1928, Bd 51, S. 204.
21. Peierls R. E.— Proc. Roy. Soc. A, 1959, v. 253, p. 16.
22. Humbelt J., Rosenfeld L.— Nucl. Phys. A, 1961, v. 26, p. 329.

23. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1961, т. 12, с. 542.
24. Berggren T.— Nucl. Phys. A, 1968, v. 109, p. 265.
25. Garcia-Calderon G.— Ibid., 1976, v. 261, p. 130; Garcia-Calderon G., Peierls R.— Ibid., 1976, v. 265, p. 443.
26. Mussenzweig H. M. Causality and Dispersion Relation. N.Y., 1972.
27. Bang J., Gareev F. A. Preprint JINR, E4-11902. Dubna, 1978.
28. Humblet J.— Nucl. Phys. A, 1964, v. 50, p. 1.
29. Thomson J. J.— Proc. Lond. Math. Soc., 1884, v. 15, p. 197.
30. Humblet J. Trieste Lectures 1966, Fundamentals in nuclear theory. Vienna, 1967, p. 369; McVoy K. W. Ibid., p. 419.
31. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1971.
32. Тейлор Дж. Теория рассеяния. М., 1975.
33. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц, М., 1969.
34. Humblet J.— Nucl. Phys. A, 1970, v. 151, p. 225.
35. Сердобольский Б. И.— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1903.
36. More R. M., Gerjuoy E.— Phys. Rev. A, 1975, v. 7, p. 1188; More R. M.— Ibid., 1972, v. 4, p. 1782.
37. Romo J. W.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 237, p. 275; 1978, v. 302, p. 61.
38. Guarmati V., Vertse T.— Ibid., 1971, v. 160, p. 523.
39. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. М., 1966.
40. Block J. e.a.— Rev. Mod. Phys., 1951, v. 23, p. 147.
41. Breit G. Encyclopedia of Physics. Berlin, 1959.
42. Кадменский С. Г., Калечиц В. Е.— Ядерная физика, 1970, т. 12, с. 70.
43. Bang J. e.a.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 261, p. 59.
44. Krewald S. e.a.— Ibid., 1977, v. 281, p. 166.
45. Swiatecki W. J. In: Proc. 2d Intern. Conf. on Nuclidic Masses, Vienna, 1963. Vienna, 1964, p. 58.
46. Струтинский В. М.— Ядерная физика, 1966, т. 3, с. 614;— Nucl. Phys. A, 1967, v. 95, p. 420.
47. Струтинский В. М., Магнер А. Г.— ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 2, с. 356.
48. Михайлов И. Н. и др.— ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 6, с. 1338.
49. Гречухин Д. П., Пик-Пичак Г. А. Преприят ИАЭ-2114. М., 1971.
50. Бунатян Г. Г. Преприят ОИЯИ, P4-11151. Дубна, 1978.
51. Pauli H. C.— Phys. Repts., 1973, v. 7, p. 35.
52. Nix J. R.— Ann. Rev. Nucl. Sci., 1972, v. 22, p. 65.
53. Lin W.— Phys. Rev. C, 1970, v. 2, p. 871.
54. Ross C. K., Bhaduri R. K.— Nucl. Phys. A, 1972, v. 188, p. 566.
55. Beth E., Ihlenbeck G. E.— Physica, 1937, v. 4, p. 915.
56. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., 1963.
57. Гареев Ф. А., Иванова С. П., Пашкевич В. В.— Ядерная физика, 1970, т. 11, с. 1200.
58. Nazi A. U., Taylor H. S.— Phys. Rev. A, 1970, v. 1, p. 1109.
59. Струтинский В. М., Иванов Ф. А.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1197, т. 41, с. 14.
60. Vincent C. M., Fortune H. T.— Phys. Rev. C, 1970, v. 2, p. 782.
61. Bang J., Zimanyi J.— Nucl. Phys. A, 1969, v. 139, p. 534.
62. Bunakov V. E.— Ibid., 1970, v. 140, p. 241.
63. Barz H. W., Bunakov V. E., El-Naiem A. M.— Ibid., 1973, v. 217, p. 141.
64. Baur G., Trautmann D.— Phys Repts C, 1976, v. 25, p. 294.