*«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1981, том 12, вып. 5*

УДК 530.145.6

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Х. Намсрай

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дано систематическое изложение результатов исследований, в которых развивается идея Д. И. Блохинцева о стохастическом свойстве пространства в малом масштабе. На основе этой гипотезы в рамках стохастической модели Кершоу, развиваемой автором для релятивистского случая, выведены основные уравнения стохастической механики Нельсона и де ла Пена-Ауэрбаха. В рамках стохастической теории получены уравнения Сивашинского для самотурбулентного движения свободной частицы и подробно изучена проблема двух тел. Дается физическая интерпретация полученных результатов.

The review presents systematically the results of studies which develop an idea of D. I. Blokhintsev on the stochastic properties of space in the microworld. On the basis of this idea and within the framework of the Kershaw stochastic model, generalized by the author to the relativistic case, the basic equations of the stochastic mechanics by Nelson E., Kershaw D. and L. de la Pena-Auerbach are deduced. In this stochastic theory the Sivashinsky equations for the self-turbulent motion of a free particle are obtained and the two body problem is investigated in detail. Physical interpretation of the obtained results is given.

*Посвящается 60-летию
Монгольской Народной
Революции*

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы заметно усилился интерес к исследованию стохастических процессов и полей, и обусловлено это в первую очередь тем, что удалось установить тесную взаимосвязь между теорией стохастических процессов, квантовой механикой [1—7] и евклидовой квантовой теорией поля [8, 9], известной под общим названием теории стохастического квантования систем (или стохастической механики). Проводятся работы по обобщению идей стохастического квантования Нельсона и Феньеса для непрерывных систем [9, 10] (т. е. систем с бесконечным числом степеней свободы), а также для частиц, обладающих спином

[10, 12], и релятивистской механики [11—16] (см. также другие подходы [17]).

Самым интересным, с математической точки зрения, среди полученных результатов следует, по-видимому, считать тот факт, что динамические уравнения стохастической механики — это нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, которые допускают линеаризацию, при этом полученные линейные уравнения формально совпадают с уравнением Шредингера, если положить коэффициент диффузии D равным $\hbar/(2m)$.

Такая общность математического аппарата двух теорий наво дит на мысль о существовании глубокой взаимосвязи между теорией стохастических процессов и квантовой механикой. Проблема эта требует дальнейшего тщательного исследования (по этому поводу см. работы [18—21]). Что касается задачи о связи между стохастическими (марковскими) процессами и евклидовой квантовой теорией поля, то в работах Нельсона [8] была окончательно сформулирована на языке случайных процессов евклидова квантовая теория поля и в настоящее время практически решена проблема об однозначном соответствии между евклидовыми и псевдоевклидовыми функциями Грина [22], исследования которых были начаты еще Швингером [23], Накано [24], Е. С. Фрадкиным [25], Симанзиком [26], Тейлором [27] и Г. В. Ефимовым [28].

Помимо указанного подхода развиваются и другие направления в исследовании стохастических процессов и полей. Часть из них исходит из гипотезы о стохастических свойствах электромагнитного вакуума (такой подход называют стохастической электродинамикой). Обзоры [29] посвящены изложению основных элементов стохастической электродинамики и ее связи с квантовой теорией. Стохастическая электродинамика строится как классическая электродинамика с радиационным торможением заряженных частиц и их взаимодействием с фоновым электромагнитным полем со спектральной плотностью

$$\rho(\omega) = (\hbar/2\pi^2c^3)\,\omega^3.$$

Другие направления так или иначе базируются на понятии стохастического пространства [30—36]. В этом случае предполагается, что причиной случайного поведения частиц (аналогичного броуновскому движению) является стохастический характер физического пространства. Иначе говоря, стохастический характер процессов рассматривается как результат действия (или влияния) на физическую систему самого пространства. Именно к последнему направлению теории стохастических процессов относится настоящий обзор, в котором основное внимание уделяется обобщению стохастической механики Нельсона на релятивистский случай.

Стохастическое пространство применительно к физике элементарных частиц впервые рассматривалось в работах [30—33] (см. обзор [34]). В работах Фредерика [36] и Роя [37] рассматривались математические пространства со стохастической метрикой и квантованной областью соответственно. Работа [38] посвящена построению релятивистской кинематики массивных и безмассовых частиц в стохастическом фазовом пространстве. В рамках стохастической теории построению электродинамики частиц со спинами 0,1/2,1 и изучению слабых взаимодействий были посвящены работы [39].

В работе [16], развивая идею Д. И. Блохинцева о влиянии пространства с малой стохастической компонентой на физическую систему, был рассмотрен вопрос о движении частицы, координаты которой в стохастическом пространстве R_4 $(\hat{x}_\mu)$ определяются двумя слагаемыми:

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + b_\mu,$$

где x_μ — регулярная часть координаты, а b_μ — некоторый случайный вектор с распределением $\tau(b_\mu)$, удовлетворяющим условиям

$$\int d\tau(b_\mu) = 1, \quad d\tau(b_\mu) \geqslant 0,$$

и получены нелинейные уравнения движения стохастической частицы [1—7] в нерелятивистском и релятивистском случаях.

Привлекательность подхода, основанного на гипотезе о стохастичности пространства, к описанию стохастических процессов состоит в том, что нам удалось обобщить стохастическую механику на релятивистский случай и строго, в математическом смысле, определить релятивистские интегралы фейнмановского типа [40]. Кроме того, в этой схеме, как и следовало ожидать, появляется самотурбулентное явление [43], характерное для нелинейной системы.

До сих пор мы не конкретизировали виды пространства R_4 $(\hat{x}_\mu)$, которое, по-видимому, будет зависеть от операции арифметизации событий. Когда речь идет о нерелятивистском движении частиц, нам достаточно предположить стохастичность пространства по компоненте

$$\mathbf{x} \to \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{b}$ — универсальная стохастическая переменная, подчиненная вероятностному распределению $\tau(\mathbf{b}) = \tau(|\mathbf{b}|^2)$, например:

52
$$\tau(\mathbf{b}) = (2\pi l^2)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{b}|^2}{2l^2}\right), \tag{1}$$

где l — некоторая универсальная длина, смысл которой выяснен в разд. 6. Такая форма распределения вытекает из свойств однородности и изотропности пространства.

В релятивистском случае такая операция требует некоторого пояснения. В релятивистской теории пространство R_4 $(\hat{x}_\mu)$ должно быть пространством Минковского. Недефинитность метрики этого пространства приводит к ряду специфических проблем, которые не встречаются в случае евклидова пространства.

Эти специфические для физического пространства трудности связаны с требованиями инвариантности и условием нормировки вероятности того или иного значения интервала $b^2 = b_0^2 - \mathbf{b}^2$ в пространстве с недефинитной метрикой (см. подробнее [35]). Так, требование инвариантности означает, что распределение $\tau(b_\mu)$ вектора b_μ должно быть функцией от интервала $b^2 = b_\mu b^\mu$, а условие нормировки дает равенство

$$\int d\tau\,(b_\mu b^\mu) = 1.$$

Одновременное выполнение этих двух требований для $\tau(b_\mu)$ фактически невозможно в пространстве Минковского. Оказывается, что можно избежать упомянутых выше трудностей, если сделать следующие предположения [16]:

1. Стохастичность пространства R_4 $(\hat{x}_\mu)$ проявляется в евклидовой области переменных $\hat{x}_E^\mu = x_E^\mu + b_E^\mu$.

2. Физические величины рассматриваются как функции комплексного времени $t + i\tau$ в пределе $\tau = 0$ (τ — стохастическая переменная), что обеспечивает гипотезу о стохастичности евклидова пространства E_4 $(\hat{\mathbf{x}}, \tau)$ вместо пространства R_4 $(\hat{\mathbf{x}}, t)$ Минковского. Обоснование важности метода сдвига времени $t \to t + i\tau$ в квантовой теории поля и квантовой механике можно найти в работах В. А. Алебастрова и Г. В. Ефимова [41] и Дэвидсона [42] соответственно.

В рамках этих предположений нам [16] удалось построить уравнение типа Смолуховского для плотности вероятности $\rho(x_\mu, s)$ на релятивистский случай, при этом для $\rho(x_\mu, s)$ имеет место представление вида

$$\rho(x_\mu,\ s+\Delta s) = \int d^4y_E\, a(y_E^2,\ \Delta s)\,\rho(x_0 + iy_4,\ \mathbf{x}-\mathbf{y},\ s), \qquad (2)$$

где s — некоторый инвариантный параметр (собственное время), интерпретацию которого можно найти в [16, 53]. Интегрирование в (2) проводится по четырехмерному евклидову пространству и $a(y_E^2, \Delta s)$ — некоторая интегрируемая функция переменной $y_E^2 = y_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Выполнение релятивистской инвариантности обеспечено тем, что алгебра группы Лоренца и группы четырехмерных евклидовых вращений совпадает в комплексной области (см. подробнее [28]).

Итак, если начинать построение теории в стохастическом евклидовом пространстве, то релятивистское инвариантное описание движения частиц в стохастическом пространстве может быть реализовано.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения. В разд. 1 стохастичность пространства рассматривается с точки зрения случайного блуждания. В последующем разделе изучается нерелятивистское движение частицы в силовом поле. Далее исследуется движение релятивистской частицы в 4-мерном стохастическом пространстве и получаются уравнения движения частицы, которые формально эквивалентны уравнению Клейна—Гордона. Разд. 4 посвящен изучению проблемы двух тел в нерелятивистском и релятивистском случаях. В разд. 5 и 6 в рамках стохастической теории [43] выводится уравнение Сивашинского [48] для самотурбулентного движения свободной частицы и дается физическая интерпретация полученных результатов. В конце статьи приводятся приложения.

Автор выражает глубокую благодарность Г. В. Ефимову за постоянное внимание к работе, стимулирующие обсуждения и ценные советы, а также Б. М. Барбашову, Д. А. Киржницу и В. К. Федянину за полезные обсуждения этой работы.

1. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО И СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ

Рассмотрим движение частицы в пространстве $R_3(\hat{\mathbf{x}})$. Допустим, что частица совершает N перемещений, тогда ее положение $\mathbf{R}_0$ после N перемещений определяется выражением

$$\mathbf{R}_0=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{r}_j^0.$$

Если движение равномерное и прямолинейное, то $\mathbf{r}_j^0=\mathbf{v}^0t_j$. Будем теперь предполагать, что в каждом перемещении $\mathbf{r}_j^0$ из-за стохастичности пространства частица испытывает случайное блуждание $\mathbf{b}_j=\alpha_j\mathbf{b}$, где α_j — произвольная последовательность действительных чисел, а $\mathbf{b}$ — универсальная стохастическая переменная, подчиненная вероятностному распределению (1). Тогда после N-перемещений в стохастическом пространстве положение частицы определится формулой

$$\mathbf{\Phi}=\mathbf{R}_0+\mathbf{B}=\sum_{j=1}^{N}(\mathbf{r}_j^0+\alpha_j\mathbf{b}). \qquad (3)$$

Возникает вопрос: какова вероятность $W_N(\mathbf{\Phi})\,d\mathbf{\Phi}$ того, что после N перемещений координаты частицы будут лежать в интервале $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}+d\mathbf{\Phi}$, где $\mathbf{\Phi}$ определяется формулой (3). В такой формулировке задача может быть решена с помощью метода, предложенного А. А. Марковым. Применение метода Маркова к задаче случайных блужданий можно найти в работе [44].

Вероятность $W_N(\mathbf{B})\,d\mathbf{B}$ того, что после N перемещений частица окажется в интервале $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}+d\mathbf{B})$

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{R}_0,\quad \mathbf{B}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\mathbf{b} \tag{4}$$

дается выражением

$$W_N(\mathbf{B})=\frac{1}{8\pi^3}\int\int\int d\boldsymbol{\rho}\exp(-i\boldsymbol{\rho}\mathbf{B})\,A_N(\boldsymbol{\rho}), \tag{5}$$

где

$$A_N(\boldsymbol{\rho})=\prod_{j=1}^{N}\int d\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})\exp(i\boldsymbol{\rho}\alpha_j\mathbf{b})=$$

$$=\prod_{j=1}^{N}(2\pi l^2)^{-3/2}\int d\mathbf{b}\exp(i\boldsymbol{\rho}\alpha_j\mathbf{b}-|\mathbf{b}|^2/2l^2).$$

Для оценки выражения $A_N(\boldsymbol{\rho})$ вычислим значение типичного интеграла:

$$I=(2\pi l^2)^{-3/2}\int d\mathbf{b}\exp(i\boldsymbol{\rho}\alpha_j\mathbf{b}-|\mathbf{b}|^2/2l^2)=\exp(-l^2\alpha_j^2\rho^2/2),$$

тогда

$$A_N(\boldsymbol{\rho})=\exp\left(-l^2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2\rho^2/2\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{P_N}{2}|\boldsymbol{\rho}|^2\right),\quad P_N=l^2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получаем:

$$W_N(\mathbf{B})=(2\pi P_N)^{-3/2}\exp(-|\mathbf{B}|^2/2P_N). \tag{7}$$

Определим теперь величину D, называемую дисперсией. Величина $D=0$, когда $l=0$, т. е. отсутствует стохастичность пространства. Положив

$$\overline{(B_x)^2}=\overline{(B_y)^2}=\overline{(B_z)^2}=\lim_{N\to\infty}P_N=$$

$$=\lim_{N\to\infty}l^2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2=\lim_{N\to\infty}Nl^2\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2=$$

$$=\lim_{N\to\infty}ntl^2\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2=t\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta B_x^j)^2$$

и обозначив D величину

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta B_x^j)^2,$$

где $\Delta B_x^j = l\sqrt{n}\,\alpha_j$, n — число перемещений в единицу времени, получим:

$$2Dt = \overline{(B_x)^2}.$$

Итак,

$$D = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta B_x^j)^2. \qquad (8)$$

После определения дисперсии D выражение (7) можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{B}) = \lim_{N\to\infty} W_N(\mathbf{B}) = (4\pi Dt)^{-3/2}\exp(-|\mathbf{B}|^2/4Dt). \qquad (9)$$

Так как $\mathbf{B} = \mathbf{\Phi} - \mathbf{R}_0$, то

$$\rho(\mathbf{\Phi}) = (4\pi Dt)^{-3/2}\exp(-|\mathbf{\Phi}-\mathbf{R}_0|^2/4Dt). \qquad (10)$$

Как и следовало ожидать, наша задача свелась к проблеме о случайных блужданиях. Согласно (9) частица, совершившая n перемещений в единицу времени, каждое $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}\alpha_j$ из которых было подчинено вероятностному распределению $\tau(|\mathbf{b}|^2)$, оказалась по истечении времени t в элементе объема, находящемся между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B} + d\mathbf{B}$ с вероятностью $\rho(\mathbf{B})\,d\mathbf{B}$ или $\rho(\mathbf{\Phi})\,d\mathbf{\Phi}$ (когда $\mathbf{R}_0 \neq 0$). Из теории броуновского движения известно, что распределение $\rho(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$, определяющее вероятность обнаружения положения $\mathbf{r}$ броуновской частицы к моменту времени t, если при $t = 0$ имело место $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, определяется совершенно подобным выражением (10)

$$\rho(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) = (4\pi D_\delta t)^{-3/2}\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{4D_\delta t}\right)$$

при $t \gg \beta^{-1}$, где $\beta = 6\pi a\eta/m$; $D_\delta = kT/m\beta = kT/6\pi a\eta$; a — радиус броуновской частицы; η — коэффициент вязкости окружающей среды (жидкости); k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Таким образом, введение стохастичности в пространство приводит к броуновскому типу движения частицы, которая при отсутствии стохастичности двигалась бы по определенной первоначально заданной траектории.

Перейдем теперь к получению дифференциального уравнения для плотности вероятности $\rho(\mathbf{r}, t)$. Вывод уравнения такой же, как и в теории случайных блужданий. Поэтому мы здесь приведем только результаты. Как обычно, если сделать существенные допущения, а именно:

1) выбрать интервал времени Δt достаточно большим для того, чтобы за этот интервал частица успела испытать большое число перемещений, но таким, чтобы за этот интервал среднее квадратичное приращение **r**, т. е. $\langle |\Delta\mathbf{r}|^2\rangle$, оставалось бы малым; при этих условиях вероятность того, что частица за время Δt испытывает перемещение $\Delta\mathbf{r}$ дается выражением

$$\Psi(\Delta\mathbf{r},\ \Delta t) = (4\pi D\Delta t)^{-3/2}\exp(-|\Delta\mathbf{r}|^2/4D\Delta t) \qquad (11)$$

и не зависит от **r**;

2) предположить, что характер перемещения частицы в пространстве в данный момент времени не зависит от свойства предыдущих перемещений, то имеет место соотношение

$$\rho(\mathbf{r},\ t+\Delta t) = \int d(\Delta\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}-\Delta\mathbf{r},\ t)\,\Psi(\Delta\mathbf{r},\ \Delta t). \qquad (12)$$

Уравнение типа (12) называется уравнением Смолуховского. Так как по предположению $\langle |\Delta\mathbf{r}|^2\rangle$ мало, то величину $\rho(\mathbf{r}-\Delta\mathbf{r},\ t)$ под знаком интеграла можно разложить в ряд Тейлора, а полученное выражение проинтегрировать почленно. Переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получаем:

$$\partial\rho/\partial t = D\Delta\rho. \qquad (13)$$

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

При построении динамики стохастических частиц обычно используется математическое понятие левой и правой производных, с помощью которых конструируются стохастическая и систематическая скорости частицы [1, 5, 7, 9]. В качестве динамического уравнения используется закон Ньютона.

Однако подход Кершоу [3] (см. также [13]) основывался на уравнениях типа Смолуховского для плотности вероятности $\rho(\mathbf{x},\ t)$ и средней скорости частицы $\mathbf{v}(\mathbf{x},\ t)$.

Несмотря на различную интерпретацию стохастического поведения системы (частицы), математический метод описания стохастических процессов в нашей схеме будет таким же, как и в работах Кершоу [3], Лехра и Пака [13], основанных на теории Бома [56] и де Бройля [57] со скрытыми параметрами.

В разд. 1 мы рассмотрели задачу о случайных блужданиях с точки зрения стохастичности пространства. Наибольший интерес представляет изучение движения частицы в пространстве, свойства которого предполагаются стохастическими. Перейдем теперь к этому вопросу.

Если предположить, что характер перемещения частицы в пространстве в данный момент времени не зависит от свойства предыдущих перемещений, то имеет место соотношение для плотности вероятности $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho(\mathbf{x}, t+\Delta t) = \int \rho(\mathbf{x}-\delta\mathbf{x}_+, t)\, \Psi_+(\mathbf{x}-\delta\mathbf{x}_+, t; \delta\mathbf{x}_+, \Delta t)\, d(\delta\mathbf{x}_+), \tag{14}$$

где величину $\Psi_+(\mathbf{x}-\delta\mathbf{x}_+, t; \delta\mathbf{x}_+, \Delta t)$ можно интерпретировать как вероятность того, что частица, занимавшая положение $\mathbf{x}-\delta\mathbf{x}_+$ в момент времени t, переместится на $\delta\mathbf{x}_+$ за время Δt и, следовательно, попадает в точку $\mathbf{x}$ в момент времени $t+\Delta t$. В стохастической теории [1, 13, 16] с удвоенным числом вероятностей перехода используется величина $\Psi_-(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}_-, t; \delta\mathbf{x}_-, \Delta t)$, которая означает вероятность того, что частица из положения $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}_-$ в момент времени t переместилась на $\delta\mathbf{x}_-$ в предшествующий интервал времени Δt и, таким образом, заняла место в точке $\mathbf{x}$ в ранний интервал времени $t-\Delta t$. Тогда уравнение, аналогичное (14), в этом случае принимает вид:

$$\rho(\mathbf{x}, t-\Delta t) = \int \rho(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}_-, t)\, \Psi_-(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}_-, t; \delta\mathbf{x}_-, \Delta t)\, d(\delta\mathbf{x}_-). \tag{15}$$

Здесь для $\Psi_\pm$ можно выбрать выражение вида

$$\Psi_\pm = (4\pi D_\pm \Delta t)^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\delta\mathbf{x}_\pm - \mathbf{v}_\pm(\mathbf{x}, t)\,\Delta t)^2}{4D_\pm \Delta t}\right],$$

где $\delta\mathbf{x}_\pm = \mathbf{v}_\pm(\mathbf{x}, t)\,\Delta t + \Delta\mathbf{x}_\pm$ — полное смещение частицы в течение времени Δt; $D_\pm$ — некоторые константы типа коэффициента диффузии. Полагая $D_+ = D_- = D$, разлагая ρ и $\Psi_\pm$ в ряд Тейлора, интегрируя по $\delta\mathbf{x}_\pm$ и оставляя члены порядка Δt, получаем уравнения Фоккера—Планка для $\rho(\mathbf{x}, t)$

$$\left.\begin{aligned} \partial\rho/\partial t &= -\nabla(\rho\mathbf{v}_+) + D\nabla^2\rho; \\ \partial\rho/\partial t &= -\nabla(\rho\mathbf{v}_-) - D\nabla^2\rho, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\partial\rho/\partial t = -\nabla(\rho\mathbf{v}); \quad \mathbf{u} = D\nabla \ln\rho; \\ &\mathbf{v} = (\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-)/2; \quad \mathbf{u} = (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)/2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

В стохастической теории величины $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ называют обычной (регулярной) и стохастической скоростью частицы соответственно, а $\mathbf{v}_+$ $(\mathbf{v}_-)$ — скоростью вперед (назад).

Рассмотрим теперь движение частицы во внешнем силовом поле $\mathbf{F} = -\nabla U$. Следуя Кершоу [3], мы можем составить уравнения типа Смолуховского для средних скоростей $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ частиц по формулам

$$\mathbf{v}_\pm(\mathbf{x},\ t\pm\Delta t)=\frac{1}{N^\pm}\int\left[\mathbf{v}_\pm(\mathbf{x}\mp\delta\mathbf{x}_\pm,\ t)\pm\frac{\Delta t}{m}\mathbf{f}_\pm(\mathbf{x}\mp\delta\mathbf{x}_\pm,\ t)\right]\times$$
$$\times\rho(\mathbf{x}\mp\delta\mathbf{x}_\pm,\ t)\,\Psi_\pm(\mathbf{x}\mp\delta_\pm,\ t;\ \delta\mathbf{x}_\pm,\ \Delta t)\,d(\delta\mathbf{x}_\pm); \tag{18}$$

$$\mathbf{v}_\pm(\mathbf{x},\ t\mp\Delta t)=\frac{1}{N^\mp}\int\left[\mathbf{v}_\pm(\mathbf{x}\pm\delta\mathbf{x}_\mp,\ t)\mp\frac{\Delta t}{m}\mathbf{f}'_\pm(\mathbf{x}\pm\delta\mathbf{x}_\mp,\ t)\right]\times$$
$$\times\rho(\mathbf{x}\pm\delta\mathbf{x}_\mp,\ t)\,\Psi_\mp(\mathbf{x}\pm\delta\mathbf{x}_\mp,\ t;\ \delta\mathbf{x}_\mp,\ \Delta t)\,d(\delta\mathbf{x}_\mp), \tag{19}$$

где $\mathbf{f}_\pm$ и $\mathbf{f}'_\pm$ — некоторые внешние силы, а

$$N^\pm=\int\rho(\mathbf{x}\mp\delta\mathbf{x}_\pm,\ t)\,\Psi_\pm(\mathbf{x}\mp\delta\mathbf{x}_\pm,\ t;\ \delta\mathbf{x}_\pm,\ \Delta t)\,d(\delta\mathbf{x}_\pm)$$

— нормировочные множители. Верхний (нижний) знак соответствует $\mathbf{v}_+$ ($\mathbf{v}_-$).

Разлагая $\mathbf{v}_\pm$, ρ, $\Psi_\pm$, $\mathbf{f}_\pm$ и $\mathbf{f}'_\pm$ в ряд Тейлора, интегрируя по $\delta\mathbf{x}_\pm$ и устремляя $\Delta t\to 0$, получаем из (18) и (19) четыре возможных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{\partial\mathbf{v}_\pm}{\partial t}+(\mathbf{v}_\pm\nabla)\,\mathbf{v}_\pm\right)&=\mathbf{f}_\pm\pm mD\left(2\,\frac{(\nabla\rho\nabla)}{\rho}\,\mathbf{v}_\pm+\nabla^2\mathbf{v}_\pm\right);\\ m\left(\frac{\partial\mathbf{v}_\pm}{\partial t}+(\mathbf{v}_\mp\nabla)\,\mathbf{v}_\pm\right)&=\mathbf{f}'_\pm\mp mD\left(\frac{2}{\rho}(\nabla\rho\nabla)\,\mathbf{v}_\pm+\nabla^2\mathbf{v}_\pm\right).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Переходя к переменным $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ и складывая (вычитая) уравнения (20), получаем следующие уравнения, описывающие совершенно разные процессы:

$$d_c\mathbf{v}-\lambda\,d_s\mathbf{u}=\frac{1}{m}\,\mathbf{F}^+_\lambda;\quad d_c\mathbf{u}+\lambda\,d_s\mathbf{v}=\frac{1}{m}\,\mathbf{F}^-_\lambda \tag{21}$$

и

$$d_c\mathbf{v}-\lambda\,d_s\mathbf{v}=\frac{1}{m}\,\mathbf{F}_\lambda;\quad d_c\mathbf{u}+\lambda\,d_s\mathbf{u}=\frac{1}{m}\,\mathbf{F}'_\lambda, \tag{22}$$

где $d_c=\partial/\partial t+(\mathbf{v}\nabla)$; $d_s=(\mathbf{u}\nabla)+D\nabla^2$; $\lambda=\pm1$;

$$\mathbf{F}^+_1=\frac{1}{2}(\mathbf{f}_++\mathbf{f}_-);\quad \mathbf{F}^+_{(-1)}=\frac{1}{2}(\mathbf{f}'_++\mathbf{f}'_-);\quad \mathbf{F}^-_1=\frac{1}{2}(\mathbf{f}'_+-\mathbf{f}'_-);$$
$$\mathbf{F}^-_{(-1)}=\frac{1}{2}(\mathbf{f}_+-\mathbf{f}_-);\quad \mathbf{F}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{f}_++\mathbf{f}'_-);\quad \mathbf{F}_{(-1)}=\frac{1}{2}(\mathbf{f}'_++\mathbf{f}_-);$$
$$\mathbf{F}'_1=\frac{1}{2}(\mathbf{f}'_+-\mathbf{f}_-);\quad \mathbf{F}'_{(-1)}=\frac{1}{2}(\mathbf{f}_+-\mathbf{f}'_-).$$

Левая часть полученных уравнений обладает определенной четностью при преобразовании инверсии времени. Действительно, так как при $t\to -t$

$$\mathbf{v}\to-\mathbf{v};\quad d_c\to-d_c;$$
$$\mathbf{u}\to\mathbf{u};\quad d_s\to d_s,$$

то легко видеть, что выражение $d_c\mathbf{v} - \lambda d_s\mathbf{u}$ не меняет, а $d_c\mathbf{u} + \lambda d_s\mathbf{v}$ ($\lambda = \pm 1$) меняет свой знак при преобразовании $t \to -t$. Следовательно, правая часть соответствующих уравнений, обозначающая силу, должна быть выбрана таким образом, чтобы отдельное уравнение в целом оставалось инвариантным при $t \to -t$. Это требование выполняется, если предположить, что

$$\mathbf{f}_+ \to \mathbf{f}_-, \quad \mathbf{f}'_+ \to \mathbf{f}'_- \quad \text{при} \quad t \to -t.$$

Тогда $\mathbf{F}^+_\lambda$ не меняет, а $\mathbf{F}^-_\lambda$ меняет свой знак, а $\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_{(-1)}$ и $\mathbf{F}'_1 \to -\mathbf{F}'_{(-1)}$ при $t \to -t$, и, следовательно, четыре уравнения (22) сводятся фактически к двум уравнениям. Запишем еще одно уравнение:

$$\partial\mathbf{u}/\partial t = -\nabla(\mathbf{vu}) - D\nabla(\nabla\mathbf{v}), \tag{23}$$

вытекающее из уравнения непрерывности и выражения (17) для скорости $\mathbf{u}$.

Мы видим, что исходя из гипотезы о стохастичности пространства и уравнений Смолуховского, в рамках подхода Кершоу мы получили те же самые фундаментальные уравнения, которые были получены Нельсоном [1], де ла Пена-Ауэрбаха—Сетто [4] (см. также обзор [5]) различными путями. Отметим, что Кершоу не мог получить эти уравнения, поскольку он рассматривал только одну вероятность перехода, например, $\Psi_+(\Delta\mathbf{x}, \Delta t)$.

Подробные исследования уравнений (21) и (23) даются в работах [1—5]. В приложении 1 затрагивается вопрос, связанный с требованиями, предъявляемыми к уравнениям стохастической механики. В частности, основываясь на некоторых математических предположениях о стохастических процессах, Нельсон [1] получил первое уравнение (21) с $\lambda = 1$ и (23) и показал, что если рассмотреть заряженную частицу и выбрать силы

$$\mathbf{F}^+_1 = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} \quad \text{и} \quad \mathbf{F}^+_1 = -\nabla U,$$

то эти уравнения эквивалентны уравнениям Шредингера

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}}{2m\hbar}\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi - \frac{\mathrm{i}e}{\hbar}U\psi$$

и

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi$$

соответственно. Здесь положено $D = h/2m$, $\psi = \exp(R + \mathrm{i}S)$,

$$R = \frac{1}{2}\ln\rho, \quad \mathrm{grad}\, S = \frac{m}{\hbar}\left(\mathbf{v} + \frac{e}{mc}\mathbf{A}\right),$$

$\mathbf{A}$ — вектор потенциала, связанный с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соотношением

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi.$$

Далее, исходя из описания среднего локального движения элементов непрерывных сред (ансамблей), приводящего к двум разного рода движениям в течение короткого времени Δt, де ла Пена-Ауэрбах и Сетто [4] получили уравнения (21) с $\lambda = 1$. Эти уравнения можно также свести к уравнениям Шредингера для волновых функций ψ и ψ^*, если выбрать лоренцеву силу следующим образом:

$$\mathbf{F}_1^+ = -e\nabla\Phi - \frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}$$

и

$$\mathbf{F}_1^- = \frac{e}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{H} + \frac{e}{c}D\nabla\times\mathbf{H}.$$

Де ла Пена-Ауэрбах и Сетто [4] также показали, что второе из уравнений (21) с $\lambda = -1$ описывает эйнштейновский процесс. Скагерстам [5] исследовал уравнения (21) и (23) с точки зрения теории стохастических процессов, определенных в классическом конфигурационном пространстве.

Недавно Дэвидсон [7] показал, что в стохастической модели Феньеса—Нельсона имеется целый класс различных динамических схем, приводящих к уравнению Шредингера как к решению марковской диффузионной задачи. В результате постоянная дисперсии D в марковской теории оказывается произвольным положительным параметром.

Заметим, что второе уравнение (21) с $\lambda = 1$ согласуется с уравнением непрерывности (17) или (23), и тем самым оно дает правильное классическое уравнение движения частицы со скоростью $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ во внешнем электромагнитном поле $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1^+ + \mathbf{F}_1^-$ (по этому поводу см. [4]).

Оставшиеся уравнения (22) по внешнему виду похожи на уравнения Навье—Стокса для «жидкостей» со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$, если величину D будем формально отождествлять с коэффициентом вязкости. Их изучению посвящен разд. 5.

Наконец, определим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\overline{(\Delta \mathbf{x})^2}}{\Delta t}.$$

По предположению

$$\overline{(\Delta x_+)^2} = \overline{(\Delta x_-)^2} = \lim_{N\to\infty} l^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 = \Delta t \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta x_j)^2,$$

где $\Delta x_j = l\sqrt{n}\,\alpha_j$, n — число перемещений за единицу времени. В то же время

$$\overline{(\Delta x_+)^2} = 2D_+\Delta t = \overline{(\Delta x_-)^2} = 2D_-\Delta t,$$

отсюда

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\overline{(\Delta \mathbf{x})^2}}{\Delta t}=\frac{3}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta x_j)^2=\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m}.$$

Мы приходим к соотношению Нельсона.

Итак, исходя из гипотезы о стохастичности пространства мы получили нельсоновскую механику, совпадающую с квантовой механикой. Взаимосвязь между уравнением Шредингера и стохастической теорией, основанной на гипотезе стохастичности пространства, можно продемонстрировать на следующем простом примере. Пусть в момент времени $t=0$ волновая функция имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{x},\ t=0)=N\exp(-\mathbf{x}^2/2a^2), \tag{24}$$

где N — нормировочная константа, а a — положительное число, тогда волновая функция при $t>0$ определяется с помощью функции Грина уравнения Шредингера:

$$\varphi(\mathbf{x},\ t)=\int K(\mathbf{x}-\mathbf{x}',\ t)\,\varphi(\mathbf{x}',\ 0)\,d\mathbf{x}',$$

где

$$K(\mathbf{x},\ t)=\frac{1}{i}(4\pi Dt)^{-3/2}\exp(i\mathbf{x}^2/4Dt).$$

После элементарных вычислений получим:

$$|\varphi(\mathbf{x},\ t)|^2=N^2\left[1+\frac{\hbar^2t^2}{m^2a^4}\right]^{-3/2}\exp\left\{-\frac{\mathbf{x}^2}{a^2}\frac{1}{(1+\hbar^2t^2/m^2a^4)}\right\}. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь плотность вероятности, соответствующую функции (24), т. е.

$$\rho(\mathbf{x},\ t=0)=N^2\exp(-\mathbf{x}^2/a^2), \tag{26}$$

и попытаемся определить $\rho(\mathbf{x},\ t)$ с помощью стохастической механики, рассмотренной выше. Так как

$$\mathbf{u}=D\nabla\ln\rho,$$

то соответствующая выражению (26) скорость

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x},\ t=0)=-\frac{\hbar}{ma^2}\mathbf{x},$$

а решение уравнения типа (16) для $\mathbf{u}^0=\mathbf{v}_+\ (\mathbf{v}_-=0)$ определяется соотношением

$$\rho(\mathbf{x},\ t)=N^2/(4\pi Dt)^{3/2}\int d\mathbf{x}'\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{u}^0(\mathbf{x}')\,t)^2}{4Dt}-\frac{\mathbf{x}'^2}{a^2}\right]=$$

$$=\frac{N^2}{(1+\hbar^2t^2/m^2a^4)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\mathbf{x}^2}{a^2}\Big/\left(1+\frac{\hbar^2t^2}{m^2a^4}\right)\right], \tag{27}$$

которое точно совпадает с квантовомеханической величиной (25). Ядро этого уравнения

$$G(\mathbf{x},\ t,\ \mathbf{x}',\ t'=0)=(4\pi Dt)^{-3/2}\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{u}^0(\mathbf{x}')\,t)^2}{4Dt}\right]$$

удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\beta\frac{\partial(\mathbf{x}G)}{\partial \mathbf{x}}+D\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}G,$$

где

$$\mathbf{x}\beta=-\mathbf{u}^0(\mathbf{x}),\quad \beta=\hbar/(ma^2).$$

3. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как указано во введении, в релятивистском случае мы будем формально рассматривать движение частицы, испытывающей случайное блуждание из-за стохастичности четырехмерного евклидова пространства $E_4(\hat{x},\ \tau)$. Пусть частица совершает N-перемещений, тогда ее координаты определяются выражением

$$B_\mu=\sum_{j=1}^{N}\beta_j b_\mu,$$

где β_j — последовательность N-чисел, а вектор $b_\mu=(b_4,\ \mathbf{b})$ распределен с вероятностью

$$\tau(b_\mu)\,d^4b=\tau(b_\mu b^\mu)\,d^4b.$$

Здесь

$$b^2=b_\mu b^\mu=b_4^2+\mathbf{b}^2.$$

Вероятность $W_N(B_\mu)\,d^4B$ того, что величина B_μ лежит в интервале между B_μ и $B_\mu+dB_\mu$, дается выражением

$$W_N(B_\mu)\,d^4B=d^4B\,(2\pi P_N)^{-2}\exp(-B^2/2P_N),\quad P_N=\sum_{j=1}^{N}l^2\beta_j^2.$$

Определяя

$$2Ds=\overline{B_x^2}=\overline{B_y^2}=\overline{B_z^2}=\overline{B_4^2}$$

или

$$D=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,l^2\sum_{j=1}^{N}n\beta_j^2\quad(n=N/s),$$

получаем

$$\rho(B_\mu)=\lim_{N\to\infty}W_N(B_\mu)=(4\pi Ds)^{-2}\exp(-B^2/4Ds),$$

где s — некоторый положительный скаляр, смысл которого будет выяснен в разд. 6. Пока, в данном случае, его можно понимать как собственное время частицы. Далее, как и в трехмерном случае, определяется «вероятностью перехода»

$$\Psi(\Delta y_E,\ \Delta s) = (4\pi D\Delta s)^{-2}\exp\left(-\frac{|\Delta y_E|^2}{4D\Delta s}\right),$$

при этом уравнение Смолуховского приобретает вид:

$$\rho_E(x_\mu^E,\ s+\Delta s) = \int d^4y_E\rho_E(x_\mu^E - y_\mu^E,\ s)\,\Psi(y_E,\ \Delta s), \tag{28}$$

где для удобства положено $y_E = \Delta y_E$, а уравнение диффузии выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\rho_E}{\partial s} = D\Box_E\rho_E,\quad \Box_E = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{29}$$

Если $\Psi(y_E,\ \Delta s)$ зависит от точки x_μ^E, например

$$\Psi(x_\mu^E;\ y_E,\ \Delta s) = (4\pi D\Delta s)^{-2}\exp\left[-\frac{(y_E - y_E^0(x_\mu^E))^2}{4D\Delta s}\right],$$

где $(y_E^0)^\mu = u_E^\mu\,\Delta s$; $u_E^\mu = (u_4,\ \mathbf{u})$ — четырехмерная евклидовая скорость частицы, то вместо (29) получается уравнение типа Фоккера—Планка в евклидовом пространстве

$$\partial\rho_E/\partial s = -\partial_\mu(\rho u_E^\mu) + D\Box_E\rho_E,\quad \partial_\mu = (\partial/\partial x_4,\ \nabla).$$

Теперь возникает вопрос о переходе к псевдоевклидовому пространству (пространству Минковского). В монографии Г. В. Ефимова [28] по нелокальным взаимодействиям квантованных полей показано, что в случае, когда построение теории поля идет от евклидового образа, переход к псевдоевклидовой области можно осуществить сдвигом координат таким образом, чтобы x_0 получили чисто мнимую добавку, а координаты $\mathbf{x}$ остались действительными. Оказывается, что процедура сдвига координаты x_0 более глубоко связана с такой фундаментальной проблемой, как причинность, и, по-видимому, она также будет иметь прямое отношение к релятивистски инвариантному описанию протяженных объектов (см. подробнее в монографии Г. В. Ефимова [28]). Используя эту идею, мы можем записать уравние (28) в следующем виде:

$$\rho(x_\mu,\ s\pm\Delta s) =$$
$$= \int d^4y_E\Psi_\pm(y_E,\ \Delta s;\ \mathbf{x}\mp\mathbf{y},\ x_0 + \mathrm{i}y_4)\,\rho(\mathbf{x}\mp\mathbf{y},\ x_0+\mathrm{i}y_4,\ s),$$

где переменные $x_\mu = (x_0, \mathbf{x})$ — псевдоевклидовы и $\Psi_\pm$ могут быть выбраны в виде

$$\Psi_\pm = (4\pi D_\pm \Delta s)^{-2} \exp\left[-\frac{(y_E - y_\pm^{\Pi})^2}{4D_\pm \Delta s}\right],$$

$$y_\pm^{\Pi} = (\pm i u_\pm^0 \Delta s,\ \mathbf{u}_\pm \Delta s),\ D_- = D_+ = D,$$

$u_\pm^\mu$ — 4-мерные векторы скорости. Отсюда мы легко получаем два уравнения Фоккера — Планка

$$\partial\rho/\partial s = -\partial_\mu(\rho u_+^\mu) + D\Box\rho; \quad \partial\rho/\partial s = -\partial_\mu(\rho u_-^\mu) - D\Box\rho, \tag{30}$$

или в терминах v^μ и u^μ

$$\partial\rho/\partial s = -\partial_\mu(\rho v^\mu); \quad u^\mu = \frac{1}{2}(u_+^\mu - u_-^\mu) = -D\partial^\mu \ln\rho, \tag{31}$$

где

$$v^\mu = \frac{1}{2}(u_+^\mu + u_-^\mu); \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_0},\ \nabla\right); \quad \Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Попытаемся теперь получить уравнения движения частицы, которые согласно принципу соответствия должны принимать форму (20) в зависимости от выбора силового поля в нерелятивистском пределе. В рамках нашей схемы релятивистские уравнения для $u_\pm^\mu$ получаются из следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u_\pm^\mu(x_\nu,\ s+\varepsilon\Delta s) = \frac{1}{N^\pm}\int \Big[& u_\pm^\mu(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{y},\ x_0 + iy_4,\ s) + \\ & + \varepsilon\frac{\Delta s}{m} F_\pm^\mu(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{y},\ x_0 + iy_4)\Big] \times \\ \times \rho(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{y},\ x_0+iy_4,\ s)\, & \Psi_\pm(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{y},\ x_0+iy_4,\ s;\ y_E,\ \Delta s)\, d^4y_E; \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} u_\pm^\mu(x_\nu,\ s-\varepsilon\Delta s) = \frac{1}{N^\mp}\int \Big[& u_\pm^\mu(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{y},\ x_0+iy_4,\ s) - \\ - \frac{\varepsilon\Delta s}{m} F'^\mu_\pm(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{y},\ x_0+iy_4)\Big] & \rho(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{y},\ x_0+iy_4,\ s) \times \\ \times \Psi_\mp(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{y},\ & x_0+iy_4,\ s;\ y_E,\ \Delta s)\, d^4y_E, \end{aligned} \tag{33}$$

где $N^\pm = \int d^4y_E \Psi_\pm(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{y}, x_0+iy_4, s; y_E, \Delta s)\,\rho(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{y}, x_0+iy_4, s)$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для } u_+^\mu; \\ -1 & \text{для } u_-^\mu, \end{cases}$$

$F_\pm^\mu$ и $F'^\mu_\pm$ — некоторые силы.

Разлагая выражения, входящие в (32) и (33), в ряд Тейлора, интегрируя по d^4y_E и устремляя $\Delta s \to 0$, получаем после некоторых вычислений следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{\partial u_{\pm}^{\mu}}{\partial s}+u_{\pm}^{\nu}\partial_{\nu}u_{\pm}^{\mu}\right)&=F_{\pm}^{\mu}\pm mD\left(2\,\frac{u^{\nu}}{D}\,\partial_{\nu}u_{\pm}^{\mu}+\Box u_{\pm}^{\mu}\right);\\ m\left(\frac{\partial u_{\pm}^{\mu}}{\partial s}+u_{\mp}^{\nu}\partial_{\nu}u_{\pm}^{\mu}\right)&=F_{\pm}^{\prime\mu}\mp mD\left(2\,\frac{u^{\nu}}{D}\,\partial_{\nu}u_{\pm}^{\mu}+\Box u_{\pm}^{\mu}\right).\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Отсюда мы получаем релятивистские уравнения для v^{μ} и u^{μ}:

$$D_c v^{\mu}-\lambda D_s u^{\mu}=\frac{1}{m}\,\Phi_{\lambda}^{(+)\mu};\quad D_c u^{\mu}+\lambda D_s v^{\mu}=\frac{1}{m}\,\Phi_{\lambda}^{(-)\mu} \tag{35}$$

и

$$D_c v^{\mu}-\lambda D_s v^{\mu}=\frac{1}{m}\,\Phi_{\lambda}^{\mu};\quad D_c u^{\mu}+\lambda D_s u^{\mu}=\frac{1}{m}\,\Phi_{\lambda}^{\prime\mu}, \tag{36}$$

где $D_c=\partial/\partial s+v^{\lambda}\partial_{\lambda}$; $D_s=u^{\lambda}\partial_{\lambda}+D\,\Box$; $\lambda=\pm 1$. Функции $\Phi_{\lambda}^{(+)\mu}, \ldots, \Phi_{\lambda}^{\prime\mu}$ выражаются через $F_{+}^{\mu}, \ldots, F_{-}^{\prime\mu}$ так же, как и в нерелятивистском случае. $\Phi_{\lambda}^{(+)\mu}(\Phi_{\lambda}^{(-)\mu})$ не меняет (меняет) свой знак, а

$$\Phi_{1}^{\mu}\to\Phi_{-1}^{\mu}\ \text{и}\ \Phi_{1}^{\prime\mu}\to-\Phi_{-1}^{\prime\mu}\ \text{при}\ s\to -s.$$

Уравнения (35), (36) вместе с уравнением (31) представляют собой ковариантный аналог (21), (22) и (17) в релятивистском случае.

Отметим, что левая часть первого уравнения (35) при $\lambda=1$ точно совпадает с выражением для ускорения, получаемым на основе некоторых предположений в рамках математического подхода Нельсона (Гуэрра и Руджиэро [14], а также Лехр и Пак [13]).

Можно рассмотреть частный случай, когда присутствует только лоренцева сила $\Phi_{\lambda=1}^{(+)\mu}$, связанная с электромагнитным полем $F^{\mu\nu}$ соотношением

$$\Phi_{1}^{(+)\mu}=\frac{e}{c}F^{\mu\nu}v_{\nu}=\frac{e}{c}\left(\partial^{\mu}A^{\lambda}-\partial^{\lambda}A^{\mu}\right)v_{\lambda}.$$

Здесь A^{μ} — электромагнитный потенциал, для которого выполняется условие Лоренца

$$\partial_{\mu}A^{\mu}=0.$$

Обычно в этом случае предполагается, что обобщенный импульс является 4-градиентом от мирового скаляра S

$$\partial^{\mu}S=mv^{\mu}+\frac{e}{c}A^{\mu},$$

тогда первое уравнение (35) с $\lambda = 1$ и (31) эквивалентны уравнению Клейна—Гордона

$$\left(\partial^{\mu} - \frac{e}{c}\,\mathrm{i}A^{\mu}\right)^2 \varphi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\varphi = 0. \tag{37}$$

Доказательство дается в работах [1,13], поэтому мы не будем приводить его здесь.

Уравнения (35) с $\lambda = 1$ исследовались также Вижье [15] в рамках подхода де ла Пена-Ауэрбаха и Сетто [4]. Внешнее поле в этом случае выбиралось в виде

$$\Phi^{(+)\mu}_{\lambda=1} = \frac{e}{c}\,F^{\mu\nu}v_{\nu};\quad \Phi^{(-)\mu}_{\lambda=1} = \frac{e}{c}\,F^{\mu\nu}u_{\nu} + \frac{e}{c}\,D\partial^{\nu}F^{\nu\mu}.$$

Такой выбор поля $\Phi^{(-)\mu}_{1}$ обеспечивает совместность второго уравнения (35) с (31) при $\lambda = 1$, в результате чего не получается переопределения физических величин ρ и v^{μ} (см. приложение 1).

Ковариантным аналогом (22) являются уравнения (36), которые будут рассмотрены в разд. 5.

4. ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим сначала дье взаимодействующие нерелятивистские частицы. Мы будем исследовать этот вопрос в рамках стохастической теории, основанной на уравнениях Смолуховского, для плотности вероятности ρ ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, t) нахождения первой частицы в точке $\mathbf{x}_1$, а второй — в точке $\mathbf{x}_2$ в момент времени t и их относительных скоростей $\mathbf{v}_1$ ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, t) и $\mathbf{v}_2$ ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, t) [45]. Предполагается, что потенциал взаимодействия U ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$) между двумя частицами будет зависеть только от разности их координат $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, т. е. $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$.

Рассматриваемый нами вопрос впервые изучал Кершоу [3] для вероятности перехода Ψ_+ ($\Delta\mathbf{x}$, Δt) и получил некоторые уравнения, описывающие движение центра масс двух частиц и их относительное движение. Мы будем исследовать, как это делалось выше, проблему двух тел в рамках двух вероятностей перехода Ψ_+ и Ψ_-. Здесь для первой частицы

$$\Psi^1_{\pm}\,(\Delta\mathbf{x}_1^{\pm},\ \Delta t) = (2\pi\tau_1\Delta t/m_1)^{-3/2}\exp\left[-\frac{m_1\,(\Delta\mathbf{x}_1^{\pm})^2}{2\tau_1\Delta t}\right],$$

а для второй частицы

$$\Psi^2_{\pm}\,(\Delta\mathbf{x}_2^{\pm},\ \Delta t) = (2\pi\tau_2\Delta t/m_2)^{-3/2}\exp\left[-\frac{m_2\,(\Delta\mathbf{x}_2^{\pm})^2}{2\tau_2\Delta t}\right],$$

где $\tau_1 = 2D_1m_1$ и $\tau_2 = 2D_2m_2$.

Без потери общности положим, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. В терминах переменных

$$\mathbf{r}^+ = \mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+;\quad \mathbf{R}^+ = (m_1\mathbf{x}_1^+ + m_2\mathbf{x}_2^+)/(m_1 + m_2)$$

величины Ψ_+^1 и Ψ_+^2 принимают вид:

$$\Psi_+(\Delta \mathbf{r}^+, \Delta t) = \frac{\partial(\mathbf{x}_2^+)}{\partial(\mathbf{r}^+)} \int \Psi_+^1(\Delta \mathbf{x}_1^+, \Delta t)\, \Psi_+^2(\Delta \mathbf{x}_1^+ - \Delta \mathbf{r}^+, \Delta t)\, d^3(\Delta x_1^+) =$$

$$= (2\pi\tau\Delta t/\mu)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\mu(\Delta \mathbf{r}^+)^2}{2\tau\Delta t}\right],$$

где $\partial(\mathbf{x}_2^+)/\partial(\mathbf{r}^+)$ — якобиан перехода от $\mathbf{x}_2^+$ к $\mathbf{r}^+$, $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$. Аналогично

$$\Psi_+(\Delta \mathbf{R}^+, \Delta t) =$$

$$= \frac{\partial(\mathbf{x}_2^+)}{\partial(\mathbf{R}^+)} \int \Psi_+^1(\Delta \mathbf{x}, \Delta t)\, \Psi_+^2\left(\Delta t, \frac{M}{m_2}\Delta \mathbf{R}^+ - \frac{m_1}{m_2}\Delta \mathbf{x}\right) d^3(\Delta x) =$$

$$= (2\pi\tau\Delta t/M)^{-3/2} \exp\left[-\frac{M(\Delta \mathbf{R}^+)^2}{2\tau\Delta t}\right],$$

где $M = m_1 + m_2$ — полная масса частиц. Пусть

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = (m_1 \mathbf{v}_1^+ + m_2 \mathbf{v}_2^+)/M;$$

$$\mathbf{C}^+(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_2^+;$$

здесь

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1^+ + \mathbf{x}_1^- - \mathbf{x}_2^+ - \mathbf{x}_2^- = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2;$$

$$\mathbf{R} = [m_1(\mathbf{x}_1^+ + \mathbf{x}_1^-) + m_2(\mathbf{x}_2^+ + \mathbf{x}_2^-)]/M = (m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2)/M.$$

Тогда полное изменение смещения $\delta\mathbf{R}^+$ и $\delta\mathbf{r}^+$ определяется равенствами

$$\delta\mathbf{R}^+ = \mathbf{V}^+\Delta t + \Delta\mathbf{R}^+ \quad \text{и} \quad \delta\mathbf{r}^+ = \mathbf{C}^+\Delta t + \Delta\mathbf{r}^+$$

соответственно. По аналогии с проведенными ранее исследованиями имеем:

$$\Psi_R^+(\delta\mathbf{R}^+, \Delta t, \mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = (2\pi\tau\Delta t/M)^{-3/2} \exp\left[-\frac{M(\delta\mathbf{R}^+ - \mathbf{V}^+\Delta t)^2}{2\tau\Delta t}\right]$$

и

$$\Psi_r^+(\delta\mathbf{r}^+, \Delta t, \mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = (2\pi\tau\Delta t/\mu)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\mu(\delta\mathbf{r}^+ - \mathbf{C}^+\Delta t)^2}{2\tau\Delta t}\right]$$

и при этом $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)\dfrac{\partial(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{R})}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t+\Delta t) = \int \rho(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}^+, \mathbf{R} - \delta\mathbf{R}^+, t) \times$$

$$\times \Psi_r^+(\delta\mathbf{r}^+, \Delta t, \mathbf{r} - \delta\mathbf{r}^+, \mathbf{R} - \delta\mathbf{R}^+, t) \times$$

$$\times \Psi_R^+(\delta\mathbf{R}^+, \Delta t, \mathbf{r} - \delta\mathbf{r}^+, \mathbf{R} - \delta\mathbf{R}^+, t)\, d^3(\delta r^+)\, d^3(\delta R^+) =$$

$$= \rho - \Delta t\,[\nabla_r(\rho\mathbf{C}^+) + \nabla_R(\rho\mathbf{V}^+) - D_\mu \nabla_r^2\rho - D_M \nabla_R^2\rho],$$

отсюда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla_r(\rho \mathbf{C}^+) - \nabla_R(\rho \mathbf{V}^+) + D_\mu \nabla_r^2 \rho + D_M \nabla_R^2 \rho, \qquad (38)$$

где $D_\mu = \tau/(2\mu)$; $D_M = \tau/(2M)$.

Соответствующие уравнения для ρ, полученные на основе понятия вероятностей перехода Ψ_-^1 и Ψ_-^2, принимают вид:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t - \Delta t) = \int \rho(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}^-, \mathbf{R} + \delta\mathbf{R}^-, t)\, \Psi_r^- \Psi_R^- d^3(\delta r^-)\, d^3(\delta R^-) \qquad (39)$$

или

$$\partial\rho/\partial t = -\nabla_r(\rho \mathbf{C}^-) - \nabla_R(\rho \mathbf{V}^-) - D_\mu \nabla_r^2 \rho - D_M \nabla_R^2 \rho,$$

где

$$\mathbf{C}^- = \mathbf{v}_1^- - \mathbf{v}_2^-; \quad \mathbf{V}^- = (m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-)/M.$$

Из уравнений (38) и (39) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\rho/\partial t = -\nabla_r(\rho \mathbf{V}_r) - \nabla_R(\rho \mathbf{V}_c); \\ &\mathbf{u}_c = D_M \nabla_R \ln \rho \quad \mathbf{u}_r = D_\mu \nabla_r \ln \rho. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Здесь

$$\mathbf{V}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^+ + \mathbf{V}^-) = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)/M;$$

$$\mathbf{V}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^-) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2;$$

$$\mathbf{u}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) = (m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2)/M;$$

$$\mathbf{u}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^+ - \mathbf{C}^-) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2.$$

Напомним, что потенциал $U(r)$ действует только на скорость $\mathbf{C}$, тогда уравнения для $\mathbf{C}^\pm$ и $\mathbf{V}^\pm$ имеют вид:

$$\mathbf{V}^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t \pm \Delta t) = \frac{1}{N^\pm} \int \mathbf{V}^\pm(\mathbf{r} \mp \delta\mathbf{r}^\pm, \mathbf{R} \mp \delta\mathbf{R}^\pm, t) \times \rho(\mathbf{r} \mp \delta\mathbf{r}^\pm, \mathbf{R} \mp \delta\mathbf{R}^\pm, t)\, \Psi_r^\pm \Psi_R^\pm d^3(\delta r^\pm)\, d^3(\delta R^\pm);$$

$$\mathbf{C}^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t \pm \Delta t) = \frac{1}{N^\pm} \int \left[\mathbf{C}^\pm(\mathbf{r} \mp \delta\mathbf{r}^\pm, \mathbf{R} \mp \delta\mathbf{R}^\pm, t) \mp \mp \Delta t \frac{1}{\mu} \nabla_r U(\mathbf{r} \mp \delta\mathbf{r}^\pm)\right] \rho(\mathbf{r} \mp \delta\mathbf{r}^\pm, \mathbf{R} \mp \delta\mathbf{R}^\pm, t) \times \Psi_r^\pm \Psi_R^\pm d^3(\delta r^\pm)\, d^3(\delta R^\pm),$$

где

$$N^\pm = \int d^3(\delta R^\pm)\, d^3(\delta r^\pm)\, \rho(\mathbf{r} \mp \delta\mathbf{r}^\pm, \mathbf{R} \mp \delta\mathbf{R}^\pm, t)\, \Psi_r^\pm \Psi_R^\pm.$$

Отсюда после некоторых вычислений получим следующие уравнения:

$$d_s'\mathbf{V}_c - d_u'\mathbf{u}_c = 0;\ d_s'\mathbf{V}_r - d_u'\mathbf{u}_r = -\nabla_r U/\mu, \tag{41}$$

где

$$d_s' = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_c\nabla_R) + (\mathbf{V}_r\nabla_r);\ d_u' = (\mathbf{u}_c\nabla_R) + (\mathbf{u}_r\nabla_r) + D_\mu\nabla_r^2 + D_M\nabla_R^2.$$

Таким образом, операторы d_s' и d_u' распадаются на сумму двух независимых частей. Соответственно этому можно искать $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ в виде произведения

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \rho_r(\mathbf{r}, t)\,\rho_R(\mathbf{R}, t),$$

а переменные $\mathbf{V}_{c,r}$ и $\mathbf{u}_{c,r}$ можно положить следующими:

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \mathbf{V}_r(\mathbf{r}, t);\ \mathbf{u}_r(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \mathbf{u}_r(\mathbf{r}, t);$$
$$\mathbf{V}_c(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \mathbf{V}_c(\mathbf{R}, t);\ \mathbf{u}_c(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \mathbf{u}_c(\mathbf{R}, t),$$

где ρ_R, $\mathbf{V}_c$ и $\mathbf{u}_c$ описывают движение центра масс (как свободное движение частицы с массой $m_1 + m_2$), а ρ_r, $\mathbf{V}_r$ и $\mathbf{u}_r$ — относительное движение частиц [как движение частицы массы μ в центрально-симметричном поле $U = U(r)$], тогда уравнения (40) и (41) принимают вид:

$$\partial\rho_R/\partial t = -\operatorname{div}(\rho_R\mathbf{V}_c);\quad d_R'\mathbf{V}_c - d_R''\mathbf{u}_c = 0 \tag{42}$$

и

$$\partial\rho_r/\partial t = -\operatorname{div}(\rho_r\mathbf{V}_r);\quad d_r'\mathbf{V}_r - d_r''\mathbf{u}_r = -\nabla_r U(r)/\mu, \tag{43}$$

где $d_R' = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_c\nabla_R)$; $d_R'' = (\mathbf{u}_c\nabla_R) + D_M\nabla_R^2$; $d_r' = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_r\nabla_r)$; $d_r'' = (\mathbf{u}_r\nabla_r) + D_\mu\nabla_r^2$.

Согласно Нельсону, уравнения (42) и (43) линеаризуются подстановкой

$$\varkappa_r = \frac{1}{2}\ln\rho_r;\ \varkappa_R = \frac{1}{2}\ln\rho_R;\ \mathbf{u}_r = 2D_\mu\nabla_r\varkappa_r;$$
$$\mathbf{u}_c = 2D_M\nabla_R\varkappa_R;\ \mathbf{V}_r = 2D_\mu\nabla_r\delta_r;$$
$$\mathbf{V}_c = 2D_M\nabla_R\delta_R;$$
$$\varphi_r = \varphi_r(\mathbf{r}, t) = \exp(\varkappa_r + i\delta_r);\ \varphi_R = \varphi_R(\mathbf{R}, t) = \exp(\varkappa_R + i\delta_R).$$

Отсюда мы имеем следующие два уравнения для φ_r и φ_R:

$$\frac{\partial\varphi_r}{\partial t} = iD_\mu\nabla_r^2\varphi_r - i\frac{1}{2\mu D_\mu}U(r)\,\varphi_r \tag{44}$$

и

$$\partial\varphi_R/\partial t = iD_M\nabla_R^2\varphi_R$$

соответственно. Последние два уравнения формально совпадают с уравнениями Шредингера для φ_r и φ_R, если положить $\tau = \hbar$, т. е.

$$D_M = \hbar/2M;\ D_\mu = \hbar/2\mu.$$

Перейдем теперь к проблеме двух релятивистских частиц. В данной работе рассмотрим задачу о стохастическом поведении двух тождественных и коррелированных релятивистских скалярных частиц, поскольку эта задача представляет интерес с физической точки зрения. Наше исследование [46] основано на уравнениях типа Смолуховского для плотности вероятности $\rho\,(x_1^\nu,\ x_2^\mu,\ s_1,\ s_2)$ нахождения первой частицы в точке x_1^ν, а второй — в точке x_2^μ в моменты «времени» s_1 и s_2 и их относительных скоростей $v_1^\nu\,(x_1^\lambda,\ x_2^\mu,\ s_1,\ s_2)$ и $v_2^\mu\,(x_1^\lambda,\ x_2^\nu,\ s_1,\ s_2)$ соответственно.

Для прямого обобщения результатов, полученных выше для одночастичной модели, на двухчастичный случай математически более удобным оказалось введение восьмимерного конфигурационного пространства, рассмотренного в [47].

В этом пространстве положение двух частиц и их относительные скорости определяются восьмикомпонентными векторами X^i и v^i ($i = 1,\ \ldots,\ 8$) соответственно, где

$$\{X^i\}_{i=1,\ \ldots,\ 8} \equiv \{x_1^\mu,\ x_2^\nu\}_{\mu,\ \nu=0,\ \ldots,\ 3};$$
$$\{v^i\,(X^j,\ s_1,\ s_2)\} \equiv \{v_1^\mu,\ v_2^\nu\}.$$

Здесь x_1^μ и x_2^ν — векторы координат каждой частицы. Метрический тензор g_{ij} в этом пространстве определяется, как и в [47]:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$X^2 = X_i X^i = g_{ij} X^i X^j = (x_1)^2 + (x_2)^2.$$

Если $x_1^\mu\,(s_1)$ и $x_2^\nu\,(s_2)$ — траектории каждой частицы, то в восьмимерном пространстве общая их траектория будет $X^j\,(s_1,\ s_2)$.

Так же как и в трех- и четырехмерном случаях, мы введем двухчастичный аналог $\Psi\,(X^j,\ s_1,\ s_2,\ \Delta s_1,\ \Delta s_2)$ одночастичных вероятностей перехода $\Psi\,(\mathbf{x},\ t,\ \Delta t)$ и $\Psi\,(x^\mu,\ s,\ \Delta s)$, использованных выше. Если две частицы некоррелированы, то величину

$\Psi(X^j, s_1, s_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ можно факторизовать:

$$\Psi(X^j, s_1, s_2, \Delta s_1, \Delta s_2) = \Psi_1(x_1^\nu, s_1, \Delta s_1)\,\Psi_2(x_2^\mu, s_2, \Delta s_2).$$

Без потери общности выберем калибровку $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$, тогда уравнение типа Смолуховского для $\rho(X^j, s_1, s_2)$ примет вид:

$$\begin{gathered}\rho(X^j, s_1 \pm \Delta s, s_2 \pm \Delta s) = \\ = \int d^8 Y_E \rho(X^I \mp Y^I, X^1 + \mathrm{i}Y_E^1, X^5 + \mathrm{i}Y_E^5, s_1, s_2) \times \\ \times \Psi^\pm(X^I \mp Y^I, X^1 + \mathrm{i}Y_E^1, X^5 + \mathrm{i}Y_E^5, s_1, s_2, \Delta s, Y_E^i),\end{gathered} \tag{45}$$

где X^I и Y^I ($I = 2, 3, 4, 6, 7, 8$) обозначают пространственную часть векторов X^i и Y^i соответственно.

Принимая во внимание явный вид $\Psi^\pm$:

$$\left.\begin{aligned}&\Psi^\pm = (4\pi D_\pm \Delta s)^{-4} \exp\left[-\frac{(Y_E^i - Y_\pm^i)^2}{4D_\pm \Delta s}\right];\\ &Y_\pm^i = (\pm\mathrm{i}v_\pm^1 \Delta s, \pm\mathrm{i}v_\pm^5 \Delta s, v_\pm^I \Delta s),\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

получаем из (45) следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\partial\rho/\partial s_1 + \partial\rho/\partial s_2 + \partial_i(\rho v_+^i) - D_+ \Box \rho = 0;\\ &\partial\rho/\partial s_1 + \partial\rho/\partial s_2 + \partial_i(\rho v_-^i) + D_- \Box \rho = 0;\\ &\partial_i = \partial/\partial X^i, \quad -\partial_i \partial^i = \Box = \Box_1 + \Box_2.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Здесь положили $D_- = D_+ = D$, D — дисперсия, а величина v_+^i (v_-^i) называется скоростью вперед (назад). Переходя к переменным

$$v^i = \frac{1}{2}(v_+^i + v_-^i); \quad u^i = \frac{1}{2}(v_+^i - v_-^i)$$

и складывая (вычитая) уравнения (47), получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial s_1} + \frac{\partial\rho}{\partial s_2} + \partial_i(\rho v^i) = 0; \quad u^i = -D\partial^i \ln\rho, \tag{48}$$

где v^i — обычная (регулярная), u^i — стохастическая скорости двухчастичной системы.

В нашей схеме (см. разд. 6) сохранение массы (плотности вероятности, умноженной на объем) означает отсутствие утечки массы через любые гиперповерхности, характеризующиеся векторами v_1^μ и v_2^ν, в связи с этим принимаем физическую гипотезу, что полное число частиц (т. е. пара в реальном пространстве — времени) сохраняется. Тогда можем записать

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial s_1} + \frac{\partial\rho}{\partial s_2} = (\mathbf{d}\rho\cdot\mathbf{v}_1) + (\mathbf{d}\rho\cdot\mathbf{v}_2) = \\ = \frac{\partial\rho}{\partial x_1^0} v_1^0 + \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \frac{\partial\rho}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial\rho}{\partial x_2^0} v_2^0 + \\ + \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \frac{\partial\rho}{\partial \mathbf{x}_2} = 0 \quad (\beta_i^2 = v_i^2/c^2, \ i = 1, 2)\end{gathered}$$

и при этом наше уравнение непрерывности в конфигурационном пространстве принимает вид:

$$\partial_i (\rho v^i) = 0, \tag{49}$$

или в терминах переменных v^i и u^i

$$-u^i v_i + D\partial^i v_i = 0. \tag{50}$$

В случае двухчастичной системы, следуя Кершоу [3], можем составить уравнения типа (45) для средних скоростей $v^i_\pm (X^j, s_1, s_2)$ в некотором внешнем поле $F^i_\pm (X^j, s_1, s_2)$:

$$\begin{gathered} v^i_\pm (X^j,\ s_1 + \varepsilon\Delta s,\ s_2 + \varepsilon\Delta s) = \\ = \frac{1}{N^\pm} \int \Big[v^i_\pm (X^I - \varepsilon Y^I,\ X^1 + \mathrm{i}Y^1_E,\ X^5 + \mathrm{i}Y^5_E,\ s_1,\ s_2) + \\ + \frac{\varepsilon\Delta s}{M} F^i_\pm (X^I - \varepsilon Y^I,\ X^1 + \mathrm{i}Y^1_E,\ X^5 + \mathrm{i}Y^5_E,\ s_1,\ s_2) \Big] \times \\ \times \Psi^\pm (X^I - \varepsilon Y^I,\ X^1 + \mathrm{i}Y^1_E,\ X^5 + \mathrm{i}Y^5_E,\ s_1,\ s_2,\ \Delta s,\ Y^i_E) \times \\ \times \rho (X^I - \varepsilon Y^I,\ X^1 + \mathrm{i}Y^1_E,\ X^5 + \mathrm{i}Y^5_E,\ s_1,\ s_2)\, d^8 Y_E, \end{gathered} \tag{51}$$

где

$$\begin{gathered} N^\pm = \int d^8 Y_E \Psi^\pm (X^I - \varepsilon Y^I,\ X^1 + \mathrm{i}Y^1_E,\ \ldots,\ Y^i_E) \times \\ \times \rho (X^I - \varepsilon Y^I,\ \ldots,\ s_2) \end{gathered}$$

— нормировочные множители; M — некоторая эффективная масса нашей двухчастичной системы;

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для } v^i_+; \\ -1 & \text{для } v^i_-. \end{cases}$$

В нашем случае уравнения (51) приводят к дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial u^i_\pm}{\partial s_1} + \frac{\partial u^i_\pm}{\partial s_2} + u^j_\pm \partial_j u^i_\pm = F^i_\pm / M \pm D \left(\frac{2}{D} u^j \partial_j u^i_\pm + \Box u^i_\pm \right). \tag{52}$$

Складывая уравнения (52), получаем:

$$\left.\begin{aligned} & D_c v^i - D_s u^i = \frac{1}{2M} (F^i_+ + F^i_-) = F^i / M, \\ & D_c = \partial/\partial s_1 + \partial/\partial s_2 + v^i \partial_i, \\ & D_s = u^i \partial_i + D\Box. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Уравнение (53) вместе с уравнением непрерывности (49) представляет собой ковариантный аналог одночастичного случая для двух-частичной системы.

Отметим, что левая часть уравнения (53) точно совпадает с выражением для «ускорения», полученным Куфаро Петрони и Вижье [47] на основе некоторых предположений в рамках математического подхода Нельсона [1] и Гуэрра—Руджиэро [14].

Связанная пара нелинейных дифференциальных уравнений (50) и (53) может быть линеаризована, если мы положим

$$v^i = \frac{1}{m}\,\partial^i\Phi, \tag{54}$$

как и в предыдущих работах [1, 16, 47], где $\Phi\,(X^i,\; s_1, s_2)$ — фазовая функция, определяемая равенством

$$\Phi\,(X^i,\; s_1,\; s_2) = \frac{mc^2}{2}\,(s_1+s_2)+S\,(X^i). \tag{55}$$

Используя выражения (48), (54) и (55), на основе уравнений (49) и (53) получаем уравнение типа Гамильтона—Якоби [47]

$$(\partial_i\partial^i - \partial_i S\partial^i S/\hbar - 2m^2c^2/\hbar^2)\,R = 0 \tag{56}$$

для двухчастичной системы в случае, когда отсутствует внешняя сила $F^i \equiv 0$. Здесь мы положили

$$R = \rho^{1/2}, \quad D = \hbar/2m.$$

Из уравнения (56) вытекает уравнение непрерывности следующего вида:

$$2\partial_i R\partial^i S + R\partial_i\partial^i S = 0.$$

Наконец, имеем формальное уравнение для величины $\psi = R\,\exp\,(\mathrm{i}S/\hbar)$:

$$(\Box - 2m^2c^2/\hbar^2)\,\psi = 0. \tag{57}$$

В нерелятивистском пределе уравнение (57) приводит к обычному двухчастичному уравнению Шредингера для $\psi\,(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, t) = R\,(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, t)\exp\,(\mathrm{i}S/\hbar)$, которое распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla_1\left(P\frac{\nabla_1 S}{m}\right) + \nabla_2\left(P\frac{\nabla_2 S}{m}\right) = 0,$$

где $P = R^2 = \psi^*\psi$, и

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla_1 S)^2}{m} + \frac{(\nabla_2 S)^2}{m} + Q = 0.$$

Здесь

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\,(\nabla_1^2 R/R + \nabla_2^2 R/R)$$

— некоторый потенциал, и его обычно называют нелокальным квантовым потенциалом двух тел (см., например, [47]).

В заключение отметим, что физические следствия полученных выше результатов были обсуждены в [47].

5. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ СИВАШИНСКОГО ДЛЯ САМОТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Сивашинским [48] была отмечена формальная аналогия между уравнением фронта пламени и уравнением Гамильтона—Якоби для движения свободной частицы. Показано, что если в уравнение для фронта пламени ввести члены с высшими производными, описывающие структурные возмущения фронта, то фронт оказывается нестабильным по отношению к длинноволновым возмущениям. В результате исходное детерминистическое уравнение может порождать решения стохастического типа. Делалась попытка интерпретировать уравнение с высшими производными как уравнение Гамильтона—Якоби, описывающее движение «квантовой» частицы.

Однако в рамках подхода Сивашинского выбор потенциала (потенциала самодействия частицы), «генерирующего турбулентность» в уравнении Гамильтона—Якоби, неоднозначен и не имеет четкого физического обоснования.

Этот раздел обзора посвящен получению уравнения Сивашинского для самотурбулентного движения свободной частицы в рамках стохастической теории, основанной на гиптотезе о стохастичности пространства [43], и тем самым делается попытка обосновать возникновение потенциала, генерирующего турбулентность в уравнении движения частицы.

Снова рассмотрим скалярную частицу в стохастическом пространстве $R_3(\hat{\mathbf{x}})$, координаты которой определяются как

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Так как в нашей модели реальные точки пространства $R_3(\hat{\mathbf{x}})$ являются стохастическими, эти точки не могут быть использованы в качестве базиса для координатной системы, по этой же причине производные по ним не могут быть сформулированы. Стохастичность пространства проявляется только в микромире. Поэтому можно взять математически продолженную от стохастической микрообласти макрошкалу нестохастического пространства. Такое математическое построение обеспечивает нестохастичность пространства, к которому может быть отнесено стохастическое физическое пространство (см. [36]). В нашем случае это математическое построение сводится к усреднению по мере $\tau(\mathbf{b})$ в каждой точке $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ пространства $R_3(\hat{\mathbf{x}})$. Итак, под физической величиной $f(\mathbf{x}, t)$ будем подразумевать величину $\langle f(\hat{\mathbf{x}}, t)\rangle$, усредненную по мере $\tau(\mathbf{b})$ в данный момент времени t. Предположение о малости стохастической компоненты пространства $R_3(\hat{x})$ означает, что

$$F(\mathbf{x}, t) = \langle f(\mathbf{x}+\mathbf{b}, t)\rangle = \int d\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}) f(\mathbf{x}+\mathbf{b}, t) =$$
$$= \left\langle f(\mathbf{x}, t) + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}, t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} b_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}, t) + \ldots \right\rangle \approx f(\mathbf{x}, t) + l^2 \Delta f. \tag{58}$$

Считается, что $\tau(\mathbf{b}) = \tau(-\mathbf{b})$.

Следует отметить, что при подходящем выборе функции $\tau(\mathbf{b})$ метод усреднения (58), обеспечивающий переход от малого масштаба к большому, приводит к совершенно новому объекту *:

$$F_{\text{н}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} (l^2 \nabla^2)^n f(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}, t),$$

а в релятивистском случае

$$F_{\text{н}}(x_\mu, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{(2n)!} (l^2 \Box)^n f(x_\mu, s) = \int d^4y K(x-y) f(y, s),$$

где

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} (l^2 \nabla^2)^n \delta^3(x);$$

$$K(x_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{(2n)!} (l^2 \Box)^n \delta^4(x),$$

а коэффициенты c_n (c'_n) зависят от конкретного выбора распределения $\tau(\mathbf{b})$ ($\tau(y^E_\mu)$). В квантовой теории поля такой объект тщательно исследовался Г. В. Ефимовым [28] с точки зрения обобщенных функций $K(x)$, пространственно-временные свойства которых существенно зависят от различных последовательностей коэффициентов $\{c_n\}$. Ефимов показал, что объект, построенный с помощью таких обобщенных функций $K(x)$, является размазанным (нелокальным) в пространстве.

Таким образом, процедура усреднения (58) в рамках нашей гипотезы приводит к нелокальному объекту. Однако такое усреднение не может изменить физическую природу объекта (например, если объект до усреднения был стохастическим, то после него также остается стохастическим), а только может менять простран-

* Впервые такой объект был построен Д. И. Блохинцевым [34] в квантовой теории поля для специального случая, когда $b_\mu = c\gamma_\mu$, где c — стохастическая переменная, а γ_μ — обычные матрицы Дирака.

ственную структуру объекта, который размазан в некоторой области, определяемой величиной l. В вычислениях локальных и нелокальных объектов, таких, как скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, эффект стохастичности, возникающий из-за флуктуации пространственных координат, накапливается с течением времени, проявляется только в динамическом аспекте и не зависит от промежуточной процедуры усреднения (58). Тогда в нашем случае локальный $f(\mathbf{x}, t)$ и нелокальный $F_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$ объекты можно считать стохастическими величинами. В настоящее время не ясно, как записать вероятностное уравнение (уравнение типа Чепмана — Колмогорова) для нелокальной стохастической величины $F_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$. Поэтому в грубом приближении, когда параметр l будет бесконечно малым, будем предполагать, что величина $F_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$ будет определяться конечной суммой вида (58). Такой объект

$$F_{\text{н}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) + f_l(\mathbf{x}, t), \tag{59}$$

когда $f_l(\mathbf{x}, t)$ определяется конечной суммой ряда по параметру l, как известно [28], обладает локальным свойством, как и $f(\mathbf{x}, t)$, и, следовательно, для $F_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$ можно записать уравнение типа Чепмана — Колмогорова.

В качестве первого приближения по параметру l мы будем пренебрегать вторым членом в (59), т. е.

$$\langle f(\mathbf{x}, t)\rangle \equiv F(\mathbf{x}, t) \approx f(\mathbf{x}, t).$$

Именно к этому приближению относились наши прежние результаты, а в этом разделе не будем пренебрегать вторым членом в выражении (59).

Попытаемся теперь получить общую форму динамических уравнений скалярной частицы в стохастическом пространстве, когда присутствует член порядка l^2 в выражениях для скорости и силы согласно равенству (59):

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{v}_{\pm} + \mathbf{v}^l_{\pm}; \quad \mathbf{f}_{\pm} = \mathbf{f}_{\pm} + \mathbf{f}^l_{\pm}.$$

Предполагается, что в уравнениях (18) и (19) [(32) и (33)] типа Смолуховского для $\mathbf{v}_{\pm}$ ($v^{\mu}_{\pm}$) малые добавки $\mathbf{v}^l_{\pm}$ и $\mathbf{f}^l_{\pm}$ ($v^{\mu,l}_{\pm}$ и $F^{\mu,l}_{\pm}$) входят только в симметричной комбинации по Δt и $\delta\mathbf{x}$ (Δs и $\delta x^{\mu}_E = y^{\mu}_E$), т. е. они являются четными функциями при преобразованиях $\Delta t \to -\Delta t$ и $\delta\mathbf{x} \to -\delta\mathbf{x}$ ($\Delta s \to -\Delta s$ и $\delta x^{\mu}_E \to -\delta x^{\mu}_E$). В этом случае величины $\mathbf{v}_{\pm}$ и $\mathbf{f}_{\pm}$ ($v^{\mu}_{\pm}$ и $F^{\mu}_{\pm}$), входящие в уравнения (18) и (19) [(33) и (34)], заменяются следующими выражениями:

$$\mathbf{v}_{\pm} + \sum_{\left\{\begin{smallmatrix}\Delta t\\ \delta\mathbf{x}\end{smallmatrix}\right\}} \mathbf{v}^l_{\pm} \text{ и } \mathbf{f}_{\pm} + \sum_{\{\delta\mathbf{x}\}} \mathbf{f}^l_{\pm}$$

$$\Big(v^{\mu}_{\pm} + \sum_{\left\{\begin{smallmatrix}\Delta s\\ y_E\end{smallmatrix}\right\}} v^{\mu,l}_{\pm} \text{ и } F^{\mu}_{\pm} + \sum_{\{y_E\}} F^{\mu,l}_{\pm}\Big),$$

где символ $\sum\limits_{\{\ldots\}}$ означает операцию симметризации по переменным $\{\ldots\}$, например

$$\sum_{\{\mathbf{y}\}} \mathbf{v}_{\pm}^{l}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \sum_{\{\mathbf{y}\}} \mathbf{v}_{\pm}^{l}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{v}_{\pm}^{l}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathbf{v}_{\pm}^{l}(\mathbf{x}-\mathbf{y})].$$

В результате мы получаем уравнения, аналогичные (21), (22) и (35), (36):

$$\left.\begin{aligned} d_c\mathbf{v} - \lambda d_s'\mathbf{u} &= \frac{1}{m}\mathbf{F}_{\lambda}^{+}; \\ d_c\mathbf{u} + \lambda d_s'\mathbf{v} &= \frac{1}{m}\mathbf{F}_{\lambda}^{-}; \end{aligned}\right\} \qquad (21а)$$

$$\left.\begin{aligned} d_c\mathbf{v} - \lambda d_s'\mathbf{v} &= \frac{1}{m}\mathbf{F}_{\lambda}; \\ d_c\mathbf{u} + \lambda d_s'\mathbf{u} &= \frac{1}{m}\mathbf{F}_{\lambda}' \end{aligned}\right\} \qquad (22а)$$

и

$$\left.\begin{aligned} D_c v^{\mu} - \lambda D_s' u^{\mu} &= \frac{1}{m}\Phi_{\lambda}^{(+)\mu}; \\ D_c u^{\mu} + \lambda D_s' v^{\mu} &= \frac{1}{m}\Phi_{\lambda}^{(-)\mu}; \end{aligned}\right\} \qquad (35а)$$

$$\left.\begin{aligned} D_c v^{\mu} - \lambda D_s' v^{\mu} &= \frac{1}{m}\Phi_{\lambda}^{\mu}; \\ D_c u^{\mu} + \lambda D_s' u^{\mu} &= \frac{1}{m}\Phi_{\lambda}'^{\mu} \end{aligned}\right\} \qquad (35б)$$

в нерелятивистском и релятивистском случаях соответственно. Здесь

$$\left.\begin{aligned} d_s' &= (\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}) + D(\boldsymbol{\nabla}^2 + l^2\boldsymbol{\nabla}^4); \\ D_s' &= u^{\lambda}\partial_{\lambda} + D(\Box + l^2\Box^2). \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Естественно, если пренебречь членами порядка $Dl^2\boldsymbol{\nabla}^4$ ($Dl^2\Box^2$) в выражениях d_s' (D_s'), то, как и следовало ожидать, получим старые уравнения (21) и (22) [(35) и (36)].

В пределе при $\mathbf{v}^{+} \equiv \mathbf{v}^{-}$, т. е. $\mathbf{u} \equiv 0$, получаем из (21а) и (22а) уравнение Ньютона

$$d_c\mathbf{v} = \mathbf{F}/m$$

и еще уравнение

$$d_c\mathbf{v} - \lambda D(\nabla^2 + l^2\nabla^4)\,\mathbf{v} = \mathbf{F}_{\lambda}/m$$

для частицы.

Последние уравнения при $\mathbf{F}_\lambda = 0$ представляют собой уравнения типа Сивашинского для свободной частицы. Например, полагая $\lambda = -1$, получаем:

$$d_c\mathbf{v} + D\nabla^2\mathbf{v} + Dl^2\nabla^4\mathbf{v} = 0, \tag{61}$$

которое инвариантно при преобразовании Галилея.

Заметим, что для системы уравнений (21а) [или (21)] условие $D \to 0$ в «классическом» пределе согласовано, так как при этом первое уравнение (21а) переходит в уравнение Ньютона, а обе стороны второго уравнения (21а) обращаются в нуль в пределе, когда $D \to 0$. Напомним, что $\mathbf{F}^+$ — внешняя сила, которая не содержит в себе стохастической компоненты, а второе уравнение (21а) при $\lambda = 1$ согласуется с уравнением непрерывности (см. также приложение 1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

Если в нашем формализме лоренцева сила выводится естественным образом, следовательно, мы можем записать

$$\mathbf{F}_1^- = -m(\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) + D\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})).$$

В случае электромагнитного поля она принимает вид:

$$\mathbf{F}_1^- = \frac{e}{c}\,\mathbf{u} \times \mathbf{H} + \frac{e}{c}\,D\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}.$$

Наоборот, в системе уравнений (22а) невозможно перейти формально к условию $D \to 0$ в «классическом» пределе, так как в выражениях для сил $\mathbf{F}_\lambda$ и $\mathbf{F}_\lambda'$ обычная и стохастическая компоненты силы уже присутствуют. Вполне возможно, что стохастическая часть силы не обязательно исчезает даже при $D \to 0$, а с другой стороны, стохастическая скорость $\mathbf{u} = D\boldsymbol{\nabla} \ln \rho$ исчезает в пределе $D \to 0$. Тогда стохастические члены в обеих сторонах уравнения (22а) не обращаются в нуль при $D \to 0$.

Специальный метод требуется для исследования нелинейных уравнений (21а), (22а) и (61), решение которых выходит за рамки данной работы.

В [49] было изучено уравнение (61) численным методом и было показано, что его решение ведет себя как некоторый турбулентный процесс.

В данной работе мы сделаем только некоторые общие замечания об этих уравнениях. Прежде всего заметим, что уравнение (61) эквивалентно уравнению Гамильтона — Якоби только в том случае, когда «течение» $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} S$ потенциально, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$. В противном случае решение уравнения (61) неограниченно возрастает по времени. Например, рассмотрим поле $\mathbf{v} = (u, v, w)$, где

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) = 0; \quad w(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t).$$

Заметим, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Для такого поля все нелинейные члены в уравнении (61) обращаются в нуль, и получаем чисто линейное уравнение для $\varphi(x, y, t)$:

$$\varphi_t + D\nabla^2\varphi + Dl^2\nabla^4\varphi = 0.$$

Это уравнение имеет пространственные периодические решения следующего типа:

$$\varphi = A \exp(\sigma t + ik_1 x + ik_2 y),$$

где

$$\sigma = D(k_1^2 + k_2^2) - Dl^2 (k_1^2 + k_2^2)^2.$$

Если $k_1^2 + k_2^2 < l^{-2}$, то амплитуды этих решений растут экспоненциально.

Второй вопрос относится к выбору знака параметра λ. Так, например, если членами порядка Dl^2 пренебрегается, второе уравнение (21а) при $\lambda = -1$ не согласуется с уравнением непрерывности, и, следовательно, случай $\lambda = -1$ для (21а) вообще исключается из рассмотрения.

Когда $\lambda = 1$, уравнение типа (61), полученное из уравнения (22а), такое, что для него отсутствует рассеяние на коротковолновых областях. Как известно, для таких уравнений важная задача — граничное условие — недостаточно хорошо сформулирована. По этой причине случай $\lambda = 1$ для (61) просто не имеет физического смысла, если не предполагать существования членов с производными выше четвертого порядка.

Поскольку наше приближение включает только члены с производными четвертого порядка, то случай $\lambda = 1$ для уравнения (61) исключается. Разумеется, что поставленные выше вопросы остаются в силе в релятивистском случае.

В релятивистском случае уравнение Сивашинского (61) теперь принимает вид:

$$D_c v^\mu = -D(\Box + l^2\Box^2) v^\mu, \tag{62}$$

которое получается из уравнения (35б) при $u^\mu \equiv 0$ и $\Phi^\mu = 0$.

Итак, исходя из гипотезы о стохастичности пространства мы получили уравнение Сивашинского. Было показано, что возникающая неустойчивость равномерного и прямолинейного движения свободной частицы приводит к случайным флуктуациям ее траектории. Несмотря на чисто классический характер исходного уравнения, возникает имитация типично квантовых эффектов: соотношение неопределенностей, волны де-Бройля и их интерференция, дискретные уровни энергии, а также нулевые флуктуации.

Как видели выше, потенциал самодействия частицы [правая часть уравнений (61) и (62)] генерирующий турбулентности в движении свободной частицы имеет стохастическое происхождение.

Другими словами, стохастичность, удаляясь при предельном переходе $\mathbf{u} \Longrightarrow 0$, как память о себе делает движение для $\mathbf{v}$ неустойчивым.

6. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При нашем подходе, естественно, возникают следующие вопросы:

1. Каков физический смысл стохастичности пространства в нерелятивистском и релятивистском случаях?

2. Что такое универсальная длина l и какой порядок ее величины?

3. Как интерпретировать инвариантный параметр s, использованный при построении релятивистской динамики, и т. д. Некоторые возможности, которые ведут к стохастическому пространству $R_4(\hat{x})$, обсуждались Д. И. Блохинцевым [35].

В рамках нашего подхода в нерелятивистском случае стохастичность пространства приводит к невозможности определения координаты частицы с точностью, превышающей значение, по крайней мере, комптоновской длины волны частицы. В релятивистском случае это свойство труднее поддается физической интерпретации. Формально его можно трактовать как наличие флуктуаций 4-мерных координат частицы в евклидовом пространстве $E_4(\hat{\mathbf{x}}, \tau)$ (т. е. как наличие случайных блужданий в мнимом времени). Сама по себе такая трактовка не имеет физического смысла, однако метод представляет ценность как один из способов релятивистского описания случайных процессов в терминах уравнения типа Смолуховского. Следует отметить, что полученные выше уравнения (32) и (33), вообще говоря, не имеют никакого отношения к обычным уравнениям Смолуховского, описывающим вероятностное последствие и, следовательно, величины $\Psi_{\pm}$, фигурирующие в этих уравнениях, не могут быть трактованы как вероятность перехода.

Под универсальной (или фундаментальной) длиной мы будем подразумевать следующее. Физически универсальная длина l представляет собой некое характерное расстояние, на котором начинают нарушаться соответствующие представления о пространстве и локальности (причинной связи), в частности возможно проявление его стохастических свойств и нелокальности, если они существуют. Оценки, проведенные в [39, 50], показывают, что $l \leqslant 10^{-15} \sim 10^{-16}$ см. Другие возможности введения понятия фундаментальной длины в физике обсуждались в [28, 31, 50, 51].

Второй важный вопрос связан с эволюцией системы при переходе от одной гиперплоскости σ_1 к другой σ_2. Пусть гиперплоскость σ характеризуется единичным времениподобным вектором v_μ. Гиперплоскость σ ортогональна к мировой линии $\mathcal{P}(s)$-частицы, а 4-скорость $u^{\mu} = \frac{d\mathscr{P}}{ds} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$ представляет собой единичный вектор, касательный к мировой линии частицы.

До сих пор мы рассматривали эволюцию системы с точки зрения ее собственного времени. Например, с помощью этого понятия мы вывели вероятностное распределение $\rho(x_{\mu}, s+\Delta s)$ для момента $s+\Delta s$ из вероятностного распределения $\rho(x_{\mu}, s)$ для более раннего момента s, а также получили дифференциальное уравнение для $\rho(x_{\mu}, s)$. Однако собственное время и координата $x_0 = ct$ в действительности зависимы и связаны между собой соотношением $dx^0/ds = c/\sqrt{1-\beta^2} = u^0$, а в системе покоя частицы они просто совпадают.

С учетом сказанного попытаемся вывести уравнение для $\rho(x_{\mu})$ с иной точки зрения, а именно на основе геометрического объекта — «дифференциальной формы» или «1-формы» (см. подробнее [52]), при этом развитие вероятностного распределения ρ определяется с помощью ориентированного семейства плоских поверхностей $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{d}\rho$. Используя только поверхности, не удается полностью охарактеризовать 1-форму $\tilde{\mathbf{k}}$, необходимо еще указать ориентацию. Пусть $\tilde{\mathbf{k}}$ составлена из поверхностей постоянных значений $\rho = 7, 8, 9 \ldots$, тогда направление от поверхности к поверхности считается «положительным», если ρ в этом направлении увеличивается.

Определим теперь понятие производной по направлению вектора $\mathbf{v}$. Возьмем некоторый вектор $\mathbf{v}$, построим кривую $\mathscr{P}(\lambda)$, определяемую равенством $\mathscr{P}(\lambda) - \mathscr{P}_0 = \lambda\mathbf{v}$, и продифференцируем функцию ρ вдоль этой кривой:

$$\partial_{\mathbf{v}}\rho = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} \rho(\mathscr{P}(\lambda)) = \left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)_{\mathscr{P}_0}.$$

«Дифференциальный оператор»

$$\partial_{\mathbf{v}} = (d/d\lambda)$$

при $\lambda = 0$ вдоль кривой $\mathscr{P}(\lambda) - \mathscr{P}_0 = \lambda\mathbf{v}$, который производит это дифференцирование, называется «оператором производной по направлению вектора $\mathbf{v}$». Производная по направлению $\partial_{\mathbf{v}}\rho$ и градиент $\mathbf{d}\rho$ тесно связаны. Это сразу видно, если применить $\partial_{\mathbf{v}}$ к уравнению $\rho(\mathscr{P}) = \rho(\mathscr{P}_0) + \langle\mathbf{d}\rho, \mathscr{P} - \mathscr{P}_0\rangle$ + нелинейные члены, определяющему «градиент», и вычислить результат в точке $\mathscr{P}_0$, что дает

$$\partial_{\mathbf{v}}\rho = \langle\mathbf{d}\rho, d\mathscr{P}/d\lambda\rangle = \langle\mathbf{d}\rho\cdot\mathbf{v}\rangle.$$

В терминах работы [52] этот результат гласит: $\mathbf{d}\rho$ — линейная машина для вычисления скорости изменения ρ вдоль произвольного вектора $\mathbf{v}$. Введя $\mathbf{v}$ в $\mathbf{d}\rho$, на выходе получаем $\partial_{\mathbf{v}}\rho$ —«число пересекаемых плоскостей» — число, которое при достаточно малом $\mathbf{v}$ равно просто приращению ρ между основанием и острием вектора $\mathbf{v}$.

В координатном представлении оператор производной $\partial_{\mathbf{v}}$ по направлению вектора $\mathbf{v}$ определяется выражением

$$\partial_{\mathbf{v}} = v^{\mu}\partial/\partial x^{\mu}.$$

Принятые обозначения и понятия заимствованы из [52].

Итак, заслуживает внимания метод, основанный на использовании понятия производной по направлению. Так, например, при использовании этого метода уравнения (32) и (33) существенно упростятся благодаря исключению зависимости от $u^{\mu}_{\pm}$ в выражениях для $\Psi_{\pm}$, величина которых теперь принимает вид:

$$\Psi_{\pm} = (4\pi D_{\pm}\Delta s_{\pm})^{-2}\exp\left(-(\Delta y)^2/4D\Delta s_{\pm}\right).$$

Здесь s_+ и s_- означают параметры, которые характеризуют производную по направлению векторов u^{μ}_{+} и u^{μ}_{-} соответственно. В этом случае уравнения (34) приобретают вид:

$$\partial u^{\mu}_{+}/\partial s_+ = 2u^{\nu}\,\partial_{\nu}u^{\mu}_{+} + D\,\square\,u^{\mu}_{+} + F^{\mu}_{+}/m;$$

$$\partial u^{\mu}_{-}/\partial s_- = -2u^{\nu}\,\partial_{\nu}u^{\mu}_{-} - D\,\square\,u^{\mu}_{-} + F^{\mu}_{-}/m;$$

$$\partial u^{\mu}_{-}/\partial s_+ = 2u^{\nu}\,\partial_{\nu}u^{\mu}_{-} + D\,\square\,u^{\mu}_{-} + F'^{\mu}_{-}/m;$$

$$\partial u^{\mu}_{+}/\partial s_- = -2u^{\nu}\,\partial_{\nu}u^{\mu}_{+} - D\,\square\,u^{\mu}_{+} + F'^{\mu}_{+}/m.$$

Так как согласно определению производная по направлению u^{μ}_{+} и u^{μ}_{-} равна

$$\partial u^{\mu}_{\pm}/\partial s_+ = u^{\nu}_{+}\,\partial_{\nu}u^{\mu}_{\pm},\quad \partial u^{\mu}_{\pm}/\partial s_- = u^{\nu}_{-}\,\partial_{\nu}u^{\mu}_{\pm},$$

то мы получаем уравнения (35) и (36) с

$$D_c = v^{\nu}\partial_{\nu};\quad D_s = u^{\nu}\partial_{\nu} + D\,\square.$$

Уравнения вида (35) с $\lambda = 1$ и $D_c = v^{\lambda}\partial_{\lambda}$ впервые получили Лехр и Пак [13] (см. также [12]), которые, разумеется, эквивалентны уравнениям (35) с $D_c = \frac{\partial}{\partial s} + v^{\lambda}\partial_{\lambda}$ и $D_s = u^{\lambda}\partial_{\lambda} + D\square$.

Итак, производную по s, фигурирующую в этом обзоре, можно понимать как производную по направлению некоторого произвольного вектора v^{μ}. В частном случае, когда в качестве вектора v^{μ} выбирается скорость частицы u^{μ}, величина s может быть интерпретирована как собственное время частицы. В нашем подходе сохранение массы (плотности вероятности, умноженной на объем) означает отсутствие утечки массы через любую гиперповерхность, характеризующуюся вектором v^{μ}, отсюда, в частности, следует, что плотность вероятности нахождения частицы вдоль мировой траектории постоянна, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = (\mathrm{d}\rho \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial x_0} u^0 + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} = 0. \tag{63}$$

Последнее уравнение выражает сохранение массы (плотность вероятности тока) частицы.

Заметим, что равенство (63) напоминает уравнение, которое отражает отсутствие переноса тепла и требует постоянства удельной энтропии (энтропии единицы массы) для частицы жидкости (см., например, [52]):

$$d\mu/dt = 0 \text{ или } \partial\mu/dt + (\mathbf{v}\nabla)\,\mu = 0,$$

а последнее уравнение выражает сохранение массы:

$$\partial\rho/\partial t + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

Получим теперь уравнение непрерывности для плотности вероятности тока в нашем случае. Мы видим из (30), что условие (63) приводит к следующим двум уравнениям:

$$\partial_\mu (\rho u_+^\mu) = D\,\Box\,\rho$$

и

$$\partial_\mu (\rho u_-^\mu) = -D\,\Box\,\rho.$$

Далее, определим векторы четырехмерного тока:

$$\mathscr{Y}_\pm^\mu = \rho u_\pm^\mu;\ \mathscr{Y}^\mu \equiv \frac{1}{2}(\mathscr{Y}_+^\mu + \mathscr{Y}_-^\mu);\ v^\mu \equiv \mathscr{Y}^\mu/\rho,$$

тогда $\mathscr{Y}^\mu$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu \mathscr{Y}^\mu = 0. \tag{64}$$

Так как $v^\mu v_\mu = c^2$, то $|\rho|^2 = \mathscr{Y}^\mu \mathscr{Y}_\mu / c^2$ является мировым скаляром и, следовательно, уравнения

$$\partial_\mu \mathscr{Y}_+^\mu = D\,\Box\,|\rho|$$

и

$$\partial_\mu \mathscr{Y}_-^\mu = -D\,\Box\,|\rho|$$

записаны уже в ковариантной форме.

Приложение 1. **Исследование уравнения стохастической механики**

Описание стохастической системы является полным, если известны ее плотность вероятности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, так как стохастическая скорость $\mathbf{u}$ связана с $\rho(\mathbf{x}, t)$ соотношением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = D\nabla \ln \rho(\mathbf{x}, t).$$

Для них мы получили следующие уравнения

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0;\quad m\,(d_c\mathbf{v} - d_s\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \tag{П.1}$$

а в релятивистском случае

$$\partial_\mu \mathscr{Y}^\mu = 0;\quad m\,(D_c v^\mu - D_s u^\mu) = F^\mu.$$

Помимо этого, имеются уравнения для $\mathbf{u}$ и u^μ:

$$\left.\begin{aligned} &m\,(d_c\mathbf{u} + d_s\mathbf{v}) = \mathbf{f}_s \\ \text{и}\qquad &m\,(D_c u^\mu + D_s v^\mu) = F_s^\mu. \end{aligned}\right\} \tag{П.2}$$

Из физических соображений можно утверждать, что эти основные уравнения должны удовлетворять ряду требований.

1. Чтобы не получилось переопределения физических величин ρ и $\mathbf{v}$, необходимо потребовать, чтобы последние два уравнения для $\mathbf{u}$, u^μ были эквивалентны уравнениям непрерывности для ρ и $\mathscr{Y}^\mu$ соответственно.

2. Будем предполагать, что в стохастической механике работа, произведенная полем над частицей, связана только со скоростью $\mathbf{v}$ и не зависит от скорости $\mathbf{u}$, т. е.

$$\left\langle \frac{d}{dt}\,(mv^2)\right\rangle = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{v});\qquad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\right).$$

При отсутствии внешней силы это условие означает сохранение кинетической энергии во времени.

3. В релятивистском случае должно выполняться условие

$$v^\mu v_\mu = c^2.$$

Итак, на основе первого требования можно выбрать вид внешних сил $\mathbf{f}_s$ и F_s^μ, а требования 2 и 3 накладывают дополнительно условия:

$$(\mathbf{v}\cdot d_s\mathbf{u}) = 0,\quad v_\mu D_s u^\mu = 0. \tag{П.3}$$

Отметим, что в нерелятивистском пределе последнее условие переходит в $(\mathbf{v}d_s\mathbf{u}) = 0$, следовательно, они взаимосогласованы.

Рассмотрим теперь в качестве внешнего поля электромагнитное поле и покажем, что уравнения (П.2) с внешней силой

$$\mathbf{f}_s = \frac{e}{c}\,\mathbf{u}\times\mathbf{H} + \frac{e}{c}\,D\nabla\times\mathbf{H};\quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A};$$

$$F_s^\mu = \frac{e}{c}\,F^{\mu\nu}u_\nu + \frac{e}{c}\,D\partial^\nu F^{\nu\mu},\quad F^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right) \tag{П.4}$$

будут эквивалентны уравнениям для ρ и $\mathscr{Y}^\mu$ соответственно. В нерелятивистском случае положим

$$m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\,\mathbf{A} = \nabla S,$$

где S — действие. Тогда первое уравнение (П.2) с учетом (П.4) дает

$$d_c\mathbf{u} + d_s\mathbf{v} = -\mathbf{u}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - D\nabla\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v}. \tag{П.5}$$

Действуя оператором ∇ на уравнение непрерывности для ρ и используя формулу $\mathbf{u} = D\nabla\ln\rho$, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + D\nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0. \tag{П.6}$$

Используя известные формулы векторного анализа

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u},$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})=\Delta\mathbf{v}+\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}),\quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\equiv 0,$$

приходим к равенству (П.5), что и требовалось доказать.

Аналогично выводу уравнения (П.5) временную компоненту второго уравнения (П.2) можно свести к виду

$$D_c u_0+D_s v_0=(\mathbf{u}\nabla)v_0-\mathbf{u}\partial_0\mathbf{v}-D\nabla\partial_0\mathbf{v}+D\Delta v_0. \qquad (\text{П}.7)$$

Здесь использованы уравнения (П.4) и равенство (см., например, [54])

$$mv^{\mu}+\frac{e}{c}A^{\mu}=-\partial S/\partial x^{\mu}.$$

Дифференцируя уравнение непрерывности для $\mathscr{V}^{\mu}$, находим:

$$D_c u_0+D_s v_0=(\mathbf{u}\cdot\nabla)v_0-\mathbf{u}\partial_0\mathbf{v}-D\nabla\partial_0\mathbf{v}+D\Delta v_0+(\mathbf{v}\cdot\nabla)u_0-\mathbf{v}\partial_0\mathbf{u}.$$

Так как $u_0=D\partial_0\ln\rho$ и $\mathbf{u}=D\nabla\ln\rho$, то $(\mathbf{v}\nabla)u_0-\mathbf{v}\partial_0\mathbf{u}=0$, отсюда получаем уравнение (П.7).

Подобным путем легко убедиться в том, что три пространственные компоненты второго уравнения (П.2) тождественны векторному уравнению

$$D_c\mathbf{u}+D_s\mathbf{v}=-v_0\nabla u_0+v_0\partial_0\mathbf{u}-u_0\nabla v_0+u_0\partial_0\mathbf{v}-\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}+D\partial_0\nabla v_0-$$
$$-D\partial_0^2\mathbf{v}-D\nabla\times\operatorname{rot}\mathbf{v},$$

полученному в результате дифференцирования уравнения непрерывности для $\mathscr{V}^{\mu}$ на оператор ∇.

Вернемся к дополнительным условиям (П.3). Уравнение

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}=0, \qquad (\text{П}.8)$$

где

$$\mathbf{B}=d_s\mathbf{u}=(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+D\Delta\mathbf{u}$$

имеет бесчисленное множество решений (допустим, что $\mathbf{B}$ — есть неизвестный вектор), так как оно определяет только составляющую вектора $\mathbf{B}$ в направлении вектора $\mathbf{v}$, значение которой будет $\mathbf{B}_v=0$; составляющая же в направлении, перпендикулярном $\mathbf{v}$, остается совершенно произвольной. Таким образом, если рассматривать $\mathbf{B}$ как радиус-вектор некоторой точки M относительно начала координат O, то геометрическое место концов всех векторов $\mathbf{B}$, удовлетворяющих уравнению (П.8), будет плоскостью, перпендикулярной к вектору $\mathbf{v}$ и проходящей через начало координат O. В релятивистском случае этот вопрос был обсужден в [15] с геометрической точки зрения.

В заключение этого приложения заметим, что полученные нами уравнения (П.1), (П.2) и (П.6) являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных и, следовательно, прямое решение их представляет собой почти неразрешимую задачу в конкретных приложениях. Наконец, приведем некоторые частные решения уравнений (П.1) на простейший случай свободного и одномерного движения частицы с начальными условиями:

$$\rho(x,\ t=0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,l}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{l^2}\right];\quad v(x,\ t=0)=v_0.$$

Эти решения имеют вид:

$$\rho(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,l\sqrt{1+bt^2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0-v_0t)^2}{l^2(1+bt^2)}\right];\quad b=4D^2/l^2;$$

$$v(x,\ t)=(v_0+bt\,(x-x_0))/(1+bt^2);$$

$$u(x,\ t)=-\sqrt{b}\,(x-x_0-v_0t)/(1+bt^2),$$

а их среднее значение и дисперсия равны:

$$\langle v(x,\ t)\rangle = \int dxv(x,\ t)\,\rho(x,\ t) = v_0;$$

$$\langle u(x,\ t)\rangle = \int dxu(x,\ t)\,\rho(x,\ t) = 0;$$

$$\langle x(t)\rangle = \int dx x\rho(x,\ t) = x_0 + v_0 t;$$

$$\text{Dис.}\ x^2(t) = \frac{1}{2}\,l^2(1+bt^2);\quad \text{Dис.}\ v^2(x,\ t) = \frac{l^2}{2}\,\frac{b^2t^2}{1+bt^2};$$

$$\langle v^2(x,\ t)\rangle = v_0^2 + \frac{l^2}{2}\,\frac{b^2t^2}{1+bt^2}.$$

В случае равномерного поступательного и вращательного движения частиц ($\mathbf{f} = \mathrm{const}$) легко могут быть получены решения, подобные вышеприведенным.

Приложение 2. **Задача Коши для уравнения диффузии**

Рассмотрим следующее уравнение в двумерном пространстве и времени x_1 и x_0:

$$\frac{\partial\rho(x_0,\ x_1,\ s)}{\partial s} = D\Box_2\rho(x_0,\ \ x_1,\ s),\quad \Box_2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Поскольку переменные s и x_0 связаны между собой, то это уравнение можно записать в виде

$$\left(\Box_2 - a^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho(x_0,\ x_1) = 0,\ a^2 = 1/D,$$

$$x_0 = ct.$$

Исследуем теперь функцию Грина уравнения

$$\left(\Box_2 - a^2\frac{\partial}{\partial t}\right)G(x_1 - x_{10},\ t - t_0) = -\delta(x_1 - x_{10})\,\delta(t - t_0),$$

где $(x_1,\ t)$ — точка наблюдения, а $(x_{10},\ t_0)$ — точка источника. Для того чтобы построить функцию G, рассмотрим сначала две функции:

$$D_1(x_0,\ x_1) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int \exp(\mathrm{i}p_0x_0 - \mathrm{i}p_1x_1)\,\delta\left(\mathrm{i}\,\frac{p_0c}{D} - p^2\right)\theta(p^0)\,d^2p;$$

$$D_2(x_0,\ x_1) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int \exp(-\mathrm{i}p_0x_0 + \mathrm{i}p_1x_1)\,\delta\left(-\mathrm{i}\,\frac{p_0c}{D} - p^2\right)\theta(p^0)\,d^2p.$$

После элементарных вычислений имеем:

$$D_1(x_0,\ x_1) = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\exp\left[-\frac{c^2}{2D}(t - t_0)\right]\int dp\,\frac{1}{\omega}\exp(\mathrm{i}\omega x_0 + \mathrm{i}px_1);$$

$$D_2(x_0,\ x_1) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\exp\left[-\frac{c^2}{2D}(t - t_0)\right]\int dp\,\frac{1}{\omega}\exp(-\mathrm{i}\omega x_0 - \mathrm{i}px_1).$$

Здесь

$$c\tau = x_0 = c(t - t_0);\ x_1 = x_1 - x_{10} = R;\ \omega = \sqrt{p^2 - \frac{c^2}{4D^2}}.$$

9—01385

Величины D_1 и D_2 вычисляются элементарно с помощью контурных интегралов (см., например, [55]). Они равны:

$$D_1 = -\frac{1}{2}\exp(-\mu c(t-t_0))\,\mathcal{Y}_0(\mu\sqrt{R^2-c^2\tau^2})\,(1-\theta(R+c\tau));$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\exp(-\mu c(t-t_0))\,\mathcal{Y}_0(\mu\sqrt{R^2-c^2\tau^2})\,\Theta(c\tau-R),$$

$$\mu = c/2D.$$

Функция Грина определяется выражением

$$G(R,\ \tau) = -c(D_2-D_1) = \\ = \frac{c}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}a^2c^2(t-t_0)\right]\mathcal{Y}_0\left(\frac{a^2c}{2}\ \sqrt{R^2-c^2\tau^2}\right)\Theta(c\tau-|R|).$$

Легко видеть, что, как и следовало ожидать,

$$\lim_{c\to\infty} a^2G(R,\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}}\exp\left(-\frac{R^2}{4D\tau}\right).$$

Решим теперь одномерную начальную задачу:

$$\rho(x,\ t) = a^2\int dx_{10}\,[\rho G]_{t_0=0} + \frac{1}{c^2}\int dx_{10}\left[G\frac{\partial\rho}{\partial t_0} - \rho\frac{\partial G}{\partial t_0}\right]_{t_0=0},$$

отсюда

$$\rho(x,\ t) = \frac{1}{2}\exp(-\mu ct)\left\{f(x+ct)+f(x-ct)+\right. \\ + \int\limits_{x-ct}^{x+ct} f(x_{10})\,dx_{10}\left[\frac{\mu}{2}I_0(\mu\sqrt{c^2t^2-(x_{10}-x)^2})+\right. \\ \left.+\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}I_0(\mu\sqrt{c^2t^2-(x_{10}-x)^2})\right]+ \\ \left.+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} I_0(\mu\sqrt{c^2t^2-(x_{10}-x)^2})\,v(x_{10})\,dx_{10}\right\},$$

где $f(x_{10}) = \rho(x_{10},\ t)|_{t=0}$; $v(x_{10}) = \left.\dfrac{\partial\rho(x_{10},\ t)}{\partial t}\right|_{t=0}$.

Здесь $\mathcal{Y}_0(x)$ и $I_0(x)$ — известные цилиндрические функции.

Наконец, для сравнения запишем фукцию Грина уравнения Шредингера в представлении собственного времени:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial s} = -D\Box\psi,\ D = \hbar/2m = 1/a^2,$$

или

$$\left(\Box_2 + \mathrm{i}a^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{K}(x_1-x_{10},\ t-t_0) = -\delta(t-t_0)\,\delta(x_1-x_{10}),$$

где

$$\mathcal{K}(R,\ \tau) = -\frac{ia^2}{4}\, c \exp\left[-i\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\, ia^2c^2\tau\right]\left[\mathcal{Y}_0\left(\frac{a^2c}{2}\sqrt{c^2\tau^2 - R^2}\right) - iN\left(\frac{a^2c}{2}\sqrt{c^2\tau^2 - R^2}\right)\right]\Theta(c\tau - R);$$

$$\tau = t - t_0;\quad R = x_1 - x_{10},$$

а при $c \to \infty$ функция $\mathcal{K}(R,\ \tau)$ совпадает с функцией Грина

$$G = \frac{1}{i}\,(4\pi Dt)^{-1/2} \exp\left(i\,\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

уравнения

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\psi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. **Nelson E.** — Phys. Rev., 1966, v. 150, p. 1079. Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1967; **Jammer M.** The Philosophy of Quantum Mechanics. Wiley, N. Y., 1974.
2. **Fenyes I.** — Z. Phys., 1952, Bd 132, S. 81.
3. **Kershaw D.** — Phys. Rev., 1964, v. 136, p. 1850.
4. **De la Pena-Auerbach L.** — J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 1620. **De la Pena-Auerbach L., Cetto A. M.** — Found. Phys., 1975, v. 5, p. 355.
5. **Skagerstam B.** Inst. Theor. Phys., Report 75-21, Gothenburg, Sweden, 1975.
6. **Moore S. M.** — Found. Phys., 1979, v. 9, p. 237.
7. **Davidson M.** — Lett. Math. Phys., 1979, v. 3(4), p. 271—277; J. Math. Phys., 1979, v. 20 (9), p. 1865-1869.
8. **Nelson E.** — J. Funct. Anal., 1973, v. 12, p. 97, 211.
9. **Guerra F., Ruggiero P.** — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1022; **Dohrn D., Guerra F.** — Lett. Nuovo cimento, 1978, v. 22, p. 121.
10. **Dankel T.** — J. Arch. Ration Mech. Anal., 1970, v. 37, p. 192; J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 253.
11. **Caubet J. P.** Le Mouvement Brownien relativiste, in Lecture Notes in Mathematical, N 559, Heidelberg, 1976; **Aron J.** — Progr. Theor. Phys., 1966, v. 35, p. 147.
12. **De la Pena-Auerbach L.** — J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 453.
13. **Lehr W. J., Park J. L.** — J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1235.
14. **Guerra F., Ruggiero P.** — Let. Nuovo cimento, 1978, v. 23, p. 529.
15. **Vigier J. P.** — Lett. Nuovo cimento, 1979, v. 24, p. 265—272.
16. **Namsrai Kh.** — Found. Phys., 1980, v. 10, p. 353-361.
17. **Yasue K.** — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 665; Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 532; J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1892; Inter. J. Theoret. Phys., 1979, v. 18, N 12, p. 861; **Lee V. J.** — Found. Phys., 1980, v. 10, p. 77-107. **Черников Н. А.** — Препринт ИТФ-68-44, Киев, 1968.
18. **Ghirardi G. C. e.a.** — Rev. Nuovo cimento, 1978, v. 1, ser. 3, № 3, p. 1—34.
19. **Onofri E.** — Lett. Nuovo cimento, 1979, v. 24, N 8, p. 253—254.
20. **Grabert H. e.a.** — Phys. Rev., 1979, v. A19, N 6, p. 2440—2445.
21. **Lavenda B. H.** — Lett. Nuovo cimento, 1980, v. 27, N 14, p. 433—436.
22. **Osterwalder K., Schrader R.** — Comm. Math. Phys., 1973, v. 31, p. 83—112; 1975, v. 42, p. 281—305; **Glaser V.** — Ibid., 1974, v. 37, p. 257—272.
23. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 721.
24. **Nakano T.** — Progr. Theor. Phys., 1959, v. 21, p. 241.
25. **Fradkin E. S.** — Докл. АН СССР, 1954, т. 98, с. 47; Журн. эксперимент и теорет. физ., 1954, т. 29, с. 751.

26. **Symanik K.** — J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 510.
27. **Taylor I. G.** — Ibid., 1966, v. 7, p. 172.
28. **Ефимов Г. В.** Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М., Наука, 1977.
29. **Boyer T. H.** — Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 790, 809; **Surdin M.** — Ann. Inst. H. Poincare, 1971, v. 15, p. 203; **Found.** Phys., 1978, v. 8, p. 341—357. **Claverie P., Diner S.** — Ann. Fond. l. de Broglie, 1976, v. 1, p. 73; **Int.** J. Quant. Chem., 1978, v. 12, Suppl. 1, p. 41—82. De La Pena-Auerbach L., Cetto A. M. - Ibid., 1978, v. 12, Suppl. 1, p. 23—27, Discuss p. 39—40. **Santos E.** — Nuovo cimento, 1974, v. 19, p. 57.
30. **March A.** — Z. Phys., 1934, Bd 104, S. 93, 161; 1937, Bd 105, S. 620.
31. **Марков М. А.** Гипероны и К-мезоны. М., Физматгиз, 1958.
32. **Yukawa H.** Research Inst. Fund. Phys. Kyoto Univ., PIEP—55, 1966.
33. **Ingraham R. I.** Renormalization Theory of Quantum Field with a Cut—off, Gordon et Breach, N. Y. (11—67).
34. **Блохинцев Д. И.** — ЭЧАЯ, 1974, т. 5, с. 606—644.
35. **Блохинцев Д. И.** Пространство и время в микромире. М., Наука, 1970.
36. **Frederick C.** — Phys. Rev., 1976, v. D 13, p. 3183.
37. **Roy S.** — Nuovo cimento, 1979, v. 51, p. 29.
38. **Prugovecki E.** — Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 3655; J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 2260, 2271.
39. **Динейхан М., Намсрай Х.** — ТМФ, 1977, т. 33, с. 32; Сообщение ОИЯИ, Р2-10962, Р2-11474, Дубна, 1977, 1978. **Намсрай Х. и др.** — Сообщение ОИЯИ, Р2-10963, Р2-11641, Дубна, 1977, 1978. **Намсрай Х.** Сообщение ОИЯИ, Р2-11144, Дубна, 1977.
40. **Намсрай Х.** Препринт ОИЯИ, Е2-12950, Дубна, 1979; **Int.** J. Theoret. Phys, 1980, v. 19, № 5, p. 397.
41. **Alebastrov V. A., Efimov G. V.** — Comm. Math. Phys., 1974, v. 38, p. 11.
42. **Davidson M.** — J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1975—1978.
43. **Намсрай Х.** Препринт ОИЯИ, Е2-12949, Дубна, 1979; **Found.** Phys., 1980, v. 10, № 9/10, p. 731.
44. **Чандрасекар С.** Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
45. **Намсрай Х.** Сообщение ОИЯИ, Е2-80-56, Дубна, 1980.
46. **Намсрай Х.** Препринт ОИЯИ, Р2-80-365, Дубна, 1980.
47. **Cufaro Petroni N., Vigier J. P.** — Lett. Nuovo cimento, 1979, v. 26, p. 149—154.
48. **Sivashinsky G. I.** — Found. Phys., 1978, v. 8, p. 735.
49. **Sivashinsky G. I.** — Acta Astronautica, 1977, v. 4, p. 1177; **Michelson D. M., Sivashinsky G. I.** — Ibid., p. 1207.
50. **Кадышевский В. Г.** — ЭЧАЯ, 1980, т. 11, с. 5—39. **Гинзбург В. Л.** — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 514—515.
51. **Hsu J. P., Mac E.** — Nuovo cimento, 1979, v. B49, p. 55; **Cheonll-Tong** — Lett. Nuovo cimento, 1979, v. 26, p. 604; **Ehrlich R.** — Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 320—325; v. D13, p. 50; **Fubini S.** — In: Proc. of the XVII Intern. Conf. on High Energy Phys., Lond., 1974; **Cheonll-Tong.** — Int. J. Theor. Phys., 1978, v. 17, p. 611—629; **Robert L.** — Canad. J. Phys., 1979, v. 57, p. 1681.
52. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Т. 1. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
53. **Miura T.** — Progr. Theor. Phys., 1979, v. 61, p. 1521.
54. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 2. М., Наука, 1973.
55. **Морс Ф. М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики. Т.1. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
56. **Bohm D.** — Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 166—193.
57. **De Broglie L.** — Ann. Inst. Henri Poincare, 1964, v. 1, p. 1.