*«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1982, том 13, вып. 1*

УДК 539.1.01

О СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ян Т. Лопушаньски

Институт теоретической физики, Вроцлав

Дается обзор важнейших фактов, касающихся симметрий, а также суперсимметрий, встречаемых в квантовой теории поля. В Приложениях приводятся строгие доказательства «по до»-теорем.

In this article the most important facts concerning the symmetries as well as supersymmetries encountered in quantum field theory are reviewed. The appendices are devoted to rigorous proofs of the «до go» theorem.

1. ПОНЯТИЕ СИММЕТРИИ И ЕГО РОЛЬ В ФИЗИКЕ

Тема обзора — симметрии в квантовой теории поля. Прежде чем заняться весьма далекими от повседневной жизни понятиями, скажем несколько слов о самом понятии симметрии, с которым мы часто встречаемся.

С юных лет мы встречаемся с более или менее очевидными проявлениями симметрии в окружающем нас мире. Многие из нас были в детстве очарованы красотой кристаллов или снежинок. Многие из нас верят, что мир, отраженный в зеркале, является столь же хорошим или столь же плохим. Они ошибаются, как это было доказано Ли и Янгом в 1957 г. [1]. Почти каждый из нас восторгается изумительной пропорцией скульптур и зданий, созданных великими мастерами. Древние греки видели в гармонии явлений проявление божества. Симметрии, проявляющиеся в Природе, привлекали внимание людей во все времена. Они являются объектом исследований для ученых и предметом восторга для художников.

Не все, однако, сознают, а это известно художникам, что полная симметрия не может быть идеалом красоты [2]. Произведение искусства лишь тогда может быть шедевром, когда его регулярность подчеркнута небольшими, на первый взгляд неприметными отступлениями от полной симметрии.

Эти эстетические каноны находят свое отражение в Природе, где идеальных симметрий не встретишь — все они приближенные. Несовершенство метода познания, каким располагает человечество, заставляет нас выделять из всей совокупности явлений лишь такие, которые легче поддаются исследованию, и вводить некие идеализированные понятия как, например, полная симметрия физической системы. Это единственный путь для проведения систематических исследований Природы, хотя и не свободный от недостатков, в отношении которых мы, пожалуй, бессильны. Разъясню этот вывод на следующем примере. В нерелятивистской теории галилеева симметрия считается совершенной. Но она, как хорошо известно, оказывается приближенной, как только мы перейдем к рассмотрению явлений, подчиняющихся принципу относительности Эйнштейна. В свою очередь, частная теория относительности, господствующая в ускорителях элементарных частиц, теряет свою силу в космологии или теории тяготения. Здесь я остановлюсь на проблемах, связанных с симметриями, встречаемыми в лабораторных экспериментах, отвлекаясь от явлений гравитации. Другими словами, буду сознательно рассматривать лишь модель, имеющую ограниченную область применимости, основанную на нескольких, довольно очевидных, аксиомах. Это позволит провести рассуждения математически строго (в духе Вайтмана, Хаага, Лемана, Симанзика и Цимермана [3]).

Если стать на такой путь, который в моем понимании является единственным, на котором человек может добиться упорядоченного знания об окружающем его мире, то возникает парадоксальная ситуация: несмотря на то что все симметрии в Природе являются приближенными, а, стало быть, само понятие такой симметрии должно быть — как кажется — близко нашему интуитивному восприятию, все же нам легче определить и исследовать понятие симметрии идеальной. Гораздо трудней недвусмысленно определить приближенную симметрию и оперировать таким понятием. Художник пользуется своим вкусом в своей работе с приближенной симметрией. Физик может опереться на свою интуицию, говоря, что отступление от симметрии мало. Математик же встречает затруднение в попытке строгой формулировки такого утверждения. Следовательно, проще рассматривать симметрии идеальные и основанные на них модели реальных явлений, и поэтому я начну с точной симметрии в квантовой теории поля.

Попытаюсь определить понятие симметрии физической системы. Все согласятся, что оно связано с преобразованиями в множестве параметров, описывающих данную систему. Не всякое преобразование параметров системы связано с ее симметрией. Должны быть соблюдены определенные условия. Именно требуется, чтобы система до преобразования и после него представляла тот же самый объект познания, а также, чтобы описания, полученные в результате преобразования параметров системы, были физически эквивалентны — неразличимы. Мы говорим, что трехмерный шар обладает вращательной симметрией потому, что вращения вокруг произвольной оси, проходящей через центр шара, переводят его в самого себя. Свойство инвариантности физической системы относительно некоторых преобразований может быть выражено математически как неизменность уравнений, описывающих эту систему, относительно рассматриваемых преобразований. Возникает вопрос о выборе самих параметров системы, которые подлежат преобразованиям. Выбор этот в определенной степени является произвольным и, в частности, зависит от того, будем ли мы рассматривать данный параметр как динамическую переменную, или как постоянную, характеризующую материал. Итак, в квантовой теории поля мы рассматриваем лишь такие преобразования, которые не меняют параметров типа массы, заряда и т. п. Для лучшего понимания этой ситуации приведу пример. Поля с нулевой массой обладают иногда симметрией по отношению к растяжениям из-за отсутствия эталона длины *. Это значит, что система переходит в себя после растяжения единиц времени и длины, а также после учета преобразования поля. Похожая с виду ситуация возникает при моделировании реальных процессов на основе анализа размерностей. Это, однако, только кажущееся сходство, так как размерный анализ не соответствует симметрии в том смысле, как мы ее понимаем в теории поля. Если провести анализ размерностей заряженного массивного поля, то придется согласиться, что масса и заряд являются динамическими переменными, подлежащими преобразованиям. Нужно, однако, признать, что исключение масштабных преобразований из семейства симметрий физической системы является произвольным соглашением. Каноническая симметрия растяжения может считаться частным случаем масштабных симметрий.

Из сказанного выше легко заключить, что симметрию физической системы можно описать математически на языке теории групп: два последовательных преобразования системы снова являются преобразованием этой же системы, существует тождественное преобразование, а также преобразование, обратное к данному,— в противном случае эти преобразования не были бы эквивалентны друг другу с точки зрения теории познания.

2. ВОПРОСЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ФОРМУЛИРОВКУ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ВАЙТМАНА

Во избежание возможных недоразумений следует определить точней те симметрии и связанные с ними группы, которые будут рассматриваться в настоящем обзоре. Предполагаем, что теории, которые здесь рассматриваются, симметричны по отношению к четырехмерным трансляциям и четырехмерным лоренцевым псевдовращениям в пространстве Минковского, как требует прин-

* Пользуемся системой единиц, в которой $c = \hbar = 1$, [масса] = см$^{-1}$.

цип относительности. Это является, конечно, приближением, поскольку частная теория относительности — это локальное приближение общей теории относительности. Здесь отчетливо виден пример идеализации, сужающей круг применимости теории. Симметрия по отношению к трансляциям описывается абелевой группой трансляций; симметрия по отношению к псевдовращениям — группой Лоренца, точней, накрывающей группой $SL(2, C)$. Группа трансляции порождается четырьмя генераторами P_0, P_1, P_2, P_3, которые интерпретируются физически как компоненты 4-вектора энергии и импульса. Группа $SL(2, C)$ имеет шесть генераторов

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \quad (\nu, \mu = 0, 1, 2, 3), \tag{1}$$

из которых три величины

$$M_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

есть составляющие обычного момента импульса, а остальные

$$M_{0i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

составляющие буста. Величины $M_{\mu\nu}$ образуют тензор второго ранга в пространстве Минковского.

Рассмотрим ограниченный класс моделей теории поля, удовлетворяющих неким аксиомам. Из-за ограниченности объема обзора у нас и не будет слишком много случаев, чтобы посмотреть как и в каких местах доказательств эти аксиомы проявляются, однако полезно сознавать, при каких предположениях, наши выводы справедливы. Выводы эти относительны. Пользоваться будем так называемой аксиоматикой Вайтмана [3]. В частности, предположим, что число полей φ, появляющихся в теории, конечно, что эти поля являются обобщенными функциями со значениями на множестве операторов, действующих в сепарабельном пространстве Гильберта с положительной метрикой. Далее предполагаем, что поля локальны или антилокальны — в согласии с теоремой о связи спина и статистики. Предполагается, что условия спектральности для вектора энергии — импульса выполняются и состояние вакуума Ω с минимальной энергией единственно. В согласии с предыдущими соображениями предполагаем, что в пространстве состояний Гильберта задано унитарное представление группы Пуанкаре и поля преобразуются ковариантно по отношению к этому представлению. Следует различать здесь два случая: 1) в теории имеются одночастичные состояния с массой m, отличной от нуля, и 2) имеются состояния с массой, равной нулю. В первом будем предполагать, что асимптотические поля $\varphi_{\substack{\mathrm{in} \\ \mathrm{out}}}$, для которых поля φ являются интерполирующими:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi \xrightarrow[x^0 \to \mp\infty]{} \varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}};\\ &(\Box + m^2)\,\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}} = 0, \quad \Box \equiv (\partial^0)^2 - \sum_{j=1}^{3} (\partial^j)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

образуют неприводимое множество операторов. Это, как следствие, влечет за собой неприводимость полей φ. Высказывания, касающиеся безмассовых полей, не вполне строгие, так как они опираются на предположения, строго доказанные лишь для полей массивных. Такая экстраполяция может привести к неожиданностям (феномен Голдстона). Однако некоторые высказывания можно доказать строго также для безмассовых полей. Будем предполагать, что безмассовые поля φ тоже образуют неприводимое множество операторов в пространстве Гильберта.

Важным предположением, выходящим за рамки аксиом Вайтмана, является предположение о том, что все поля φ взаимодействуют между собой или, иначе, на языке статистической механики, происходит смешивание [4, 5]. Математически это требование можно выразить так, что функционал Вайтмана не разложим на произведение двух других функционалов Вайтмана. Это предположение является более сильным, чем предположение о нетривиальности матрицы рассеяния

$$S \neq 1.$$

Встречающиеся в теории симметрии можно разделить на два класса:

1) глобальные симметрии, параметры которых не зависят от точки в пространстве Минковского *;

2) локальные симметрии, зависящие от точки в пространстве Минковского.

К первым симметриям относятся те, которые можно, в принципе, наблюдать, например, в экспериментах по рассеянию элементарных частиц (дальше, в разд. 6, поясняется, что значит «в принципе наблюдаемая симметрия»). К первому же классу также относятся так называемые динамические симметрии. Например, уравнение Шредингера для атома водорода обладает симметрией O (4). Ко второму классу причислим симметрии, скрытые от наших глаз, например, симметрии основных уравнений теории. Приведем примеры. Глобальными симметриями являются калибровочные преобразования первого рода, внутренние симметрии SU (2) или SU (3), преобразования Пуанкаре, преобразования

* Заметим, что глобальные симметрии могут зависеть от точки в пространстве Минковского, но лишь тривиальным образом, когда они не являются трансляционно инвариантными.

пространственного отражения P, отражения времени T, зарядового сопряжения C (также преобразования PCT), преобразования суперсимметрии. Локальными симметриями являются калибровочные преобразования второго рода, абелевы — в электродинамике и неабелевы — в теории Янга — Миллса.

В дальнейшем остановимся лишь на тех симметриях, которые можно описать с помощью групп Ли, а затем рассмотрим их обобщения на случай суперсимметрии. Не будем заниматься дискретными симметриями типа P, C, T или PCT, которые нельзя описать на языке теории групп, зависящих от непрерывно меняющихся параметров.

Симметрии, связанные с группами Ли, можно, по крайней мере локально, в окрестности единичного элемента группы, охарактеризовать с помощью алгебры Ли. Алгебра Ли задается своими генераторами и перестановочными соотношениями между ними — так называемыми соотношениями Ли — Картана. Например, в группе трансляции в четырехмерном пространстве Минковского генераторами являются составляющие 4-вектора энергии — импульса. Для глобальных калибровочных преобразований генератором является заряд (для абелевых преобразований).

Следует, однако, подчеркнуть, что не всякая глобальная симметрия теории может считаться физически содержательной. Приведем пример. Рассмотрим релятивистски ковариантные, скалярные, локальные, массивные поля $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $x \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$ и группу унитарных преобразований в пространстве Гильберта

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \equiv U_\alpha, \quad U_\alpha^+ = U_\alpha^{-1},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — параметры группы, таких, что

$$U_\alpha \Omega = \lambda_\alpha \Omega,$$

где λ_α — комплексное число, $|\lambda_\alpha| = 1$; Ω — состояние вакуума.

Функционал Вайтмана

$$(\Omega, \varphi_{i_1}(x_1) \ldots \varphi_{i_n}(x_n) \Omega)$$

не меняется при подстановке

$$\varphi_i(x) \to U_\alpha \varphi_i(x) U_\alpha^{-1} \equiv \varphi_i(x, \alpha).$$

Отсюда следует, что группа преобразований U_α является симметрией этой полевой модели. Не всегда, однако, эта симметрия интересна для физика. Чтобы убедиться в этом, введем S-матрицу для полей $\varphi_i(x)$; обозначим ее S. Для полей $\varphi_i(x, \alpha)$ соответствующий оператор рассеяния обозначим S_α *

$$S_\alpha \equiv U_\alpha S U_\alpha^{-1}.$$

* Я благодарен доктору Дж. Р. Клаудеру за дискуссию.

С точки зрения прагматика, желательно иметь дело лишь с одной матрицей рассеяния. Разумно потребовать, чтобы

$$S_\alpha = U_\alpha S U_\alpha^{-1} = S$$

или, что то же самое,

$$[U_\alpha,\ S] = 0. \tag{3}$$

Как показал Борхерс [6], если последнее условие не выполняется, то поля $\varphi_i\ (x,\ \alpha)$ и $\varphi_i\ (x)$ не являются квазилокальными по отношению друг к другу [квазилокальность, или почти локальность, является более слабой формой локальности, требуемой от исходных полей $\varphi_i\ (x)$]. Следовательно, достаточным условием для справедливости условия (3) является то, чтобы поля

$$\varphi_i\ (x) \text{ и } U_\alpha \varphi_k\ (x)\ U_\alpha^{-1} \quad i,\ k = 1,\ \ldots,\ n$$

были по отношению друг к другу почти локальными. Это ограничивает каким-то образом класс глобальных симметрий. В дальнейшем будем рассматривать только такого рода симметрии, называя их глобальными симметриями S-матрицы.

Классическим примером симметрии, не являющейся симметрией S-матрицы, является абелева группа, генерируемая оператором числа матриц (входящих или выходящих)

$$N_{in} \equiv \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \sum_{j=1}^{n} a_{j,\,\mathrm{in}}^{+}(p)\, a_{j,\,\mathrm{in}}(p);$$

$$\exp\{i\alpha N_{\mathrm{in}}\} \equiv U_{\mathrm{in}}\ (\alpha),$$

где α — вещественный параметр. Преобразование $U_{\mathrm{in}}\ (\alpha)$ унитарно и не меняет вектора вакуума. Более того, оно перестановочно с группой преобразований Пуанкаре

$$U\ (A,\ a),\ A \in SL\ (2\ C),\quad a \equiv (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$[U\ (A,\ a),\ U_{\mathrm{in}}\ (\alpha)] = 0.$$

Тем не менее только в тривиальном случае, когда

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{in}} = \varphi_{\mathrm{out}},$$

преобразование $U_{\mathrm{in}}\ (\alpha)$ является симметрией S-матрицы, которая в этом случае единична $S = 1$. Это следует из того, что для $S \neq 1$ имеем

$$N_{\mathrm{in}} \neq N_{\mathrm{out}} = S^{-1} N_{\mathrm{in}} S$$

и

$$[U_{\mathrm{in}}\ (\alpha),\ S] \neq 0.$$

Это обстоятельство отражает тот факт, что в процессе взаимодействия происходят процессы, связанные с изменением числа частиц,— оператор N_{in} не сохраняется. Было доказано [7], что в четырехмерном пространстве Минковского * [7] отсутствие неупругих процессов при столкновении двух частиц ведет к тривиальной S-матрице.

Сказанное приводит к заключению, что симметрии S-матрицы не следует рассматривать в отрыве от механизма взаимодействия.

3. КОНСТАНТЫ ДВИЖЕНИЯ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Как уже упоминалось, будем заниматься лишь симметриями, которые можно описать с помощью групп Ли (или их обобщений на случай суперсимметрии). Для глобальной симметрии генераторы группы Q_N ($N = 1, \ldots, k$ — число параметров группы), образующие алгебру Ли, не зависят от **точки** в пространстве Минковского, либо зависят тривиальным образом,

$$Q_N(x) = U(1, x)\, Q_N U(1, x)^{-1}.$$

В случае симметрии S-матрицы условие (3) ведет к соотношениям

$$[Q_N, S] = 0 \quad N = 1, \ldots k. \tag{4}$$

Величины, перестановочные с S-матрицей, называем **сохраняющимися.** Понятия **констант движения** и сохраняющихся величин вообще говоря различны.

В традиционном подходе к квантовой теории поля под константами движения понимаем величины, не зависящие от времени, в том смысле, что они перестановочны с гамильтонианом, представляемым в нашем случае нулевой составляющей P_0 вектора энергии — импульса. Следовательно, для констант движения R_i должны соблюдаться равенства

$$[R_i, P_0] = 0 \quad i = 1, \ldots L. \tag{5}$$

Легко привести примеры величин, для которых выполняется условие (4), но нарушается (5) (например, бусты M_{0i}). Обратно, существуют величины, для которых условие (5) выполняется, а (4) нарушено (например, N_{in} или N_{out} в нетривиальной теории поля).

Как показали исследования двухмерной нелинейной сигма-модели [8] константы движения, особенно не удовлетворяющие условию (4), являются очень полезными при вычислении матрицы рассеяния**. Если некоторая константа движения не перестановочна с матрицей рассеяния, то эта последняя нетривиальна. Можно ожидать, что такая ситуация реализуется в четырехмерном пространстве, но конкретных примеров пока нет.

---

* Для двухмерного пространства эта теорема неверна, как показывает пример нелинейной «сигма»-модели [8].

** В нелинейной сигма-модели матрица рассеяния факторизуется [8].

Примеров констант движения R_i, удовлетворяющих условию (5), бесконечно много. Это следует из того, что для свободных асимптотических полей φ_{in} (или φ_{out}) существует бесконечно много констант движения R_i^{in} ($R_i^{\text{in}} \neq R_i^{\text{out}}$). Дело в том, что свободное поле является системой с бесконечным числом степеней свободы. Следовательно, можно ввести бесконечно много начальных данных в начальный момент времени. Все они будут сохраняться, будут константами движения*. Заметим, что

$$P_0 = H_0(\varphi_{\text{in}}) = H_0(\varphi_{\text{out}}) = H(\varphi), \tag{6}$$

где $H_0(\varphi^{(0)})$ означает гамильтониан свободного поля $\varphi^{(0)}$

$$H_0(\varphi^{(0)}) \equiv \frac{1}{2}\int d^3x : \left(\partial^0\varphi^{(0)}\partial_0\varphi^{(0)} - \sum_{L=1}^{3}\partial^L\varphi^{(0)}\partial_L\varphi^{(0)} + m^2\varphi^{(0)2}\right):$$

$$\Box\varphi^{(0)} + m^2\varphi^{(0)} = 0, \qquad [\varphi^{(0)}(x),\ \varphi^{(0)}(y)] = \mathrm{i}\Delta(x-y,\ m^2),$$

а $H(\varphi)$ является гамильтонианом взаимодействующего поля

$$H(\varphi) = H_0(\varphi) + V(\varphi),$$

$V(\varphi)$ — гамильтониан взаимодействия.

Поскольку для констант движения выполняются условия

$$[R_i^{\text{in}},\ H_0(\varphi_{\text{in}})] = 0,$$

имеем

$$[R_i^{\text{in}},\ H(\varphi)] = [R_i^{\text{in}},\ P_0] = 0.$$

Следовательно, R_i^{in} являются также константами движения теории взаимодействующего поля φ. Большинство этих констант, однако, непригодно для характеристики динамики взаимодействующих полей, и возникает вопрос о выделении физически существенных констант**, полезных для нахождения S-матриц.

Из многолетнего опыта вытекает, что генераторы симметрии S-матрицы, среди которых есть константы движения, полезны для изучения динамики системы. Мы знаем также, что условие (3) выполняется, если поля φ и $U_\alpha\,\varphi U_\alpha^{-1}$ взаимно почти локальны. Для простоты предположим, что они просто взаимно локальны, т. е.

$$[U_\alpha\varphi_i(x)U_\alpha^{-1},\ \varphi_j(y)] = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0,\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n^{***},$$

---

* Я благодарен доктору И. Бялыницкому-Бируле за обсуждения.

** В классической статистической механике число констант движения весьма мало по сравнению с числом степеней свободы системы.

*** Пользуемся здесь метрикой с сигнатурой (+ — — —) и рассматриваем бозонные поля φ_i.

откуда следует, что

$$[[Q_N, \varphi_i(x)], \varphi_j(y)] = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0 \tag{7}$$
$$N = 1, \ldots, k, \; i, j = 1, \ldots, n.$$

Другими словами, поля

$$[Q_N, \varphi_i(x)] = A_{iN}(x)$$

являются локальными по отношению к полям φ_j.

Соотношение (7) подсказывает, что возможно более сложные величины, чем Q_N, полезны при исследовании динамики. Именно введем класс операторов $Q_N^{(L)}$, содержащий как частный случай Q_N, удовлетворяющих условиям (5) и (7), с помощью следующих условий:

$$Q_N^{(L)} = (Q_N^{(L)})^+, \text{ эрмитовость;} \tag{8}$$

$$[Q_N^{(L)}, P_0] = 0; \tag{9}$$

$$[\ldots[[Q_N^{(L)}, \varphi_{i_1}(x_1)]\, \varphi_{i_2}(x_2)] \ldots \varphi_{i_{L+1}}(x_{L+1})] = 0 \tag{10}$$

для $(x_i - x_k)^2 < 0$, $i, k = 1, \ldots, L+1$, $i \neq k$ *. Целое положительное число L назовем **родом** константы движения $Q_N^{(L)}$ [9].

Оказывается, что условия (8)—(10) являются достаточно сильными для определения $Q_N^{(L)}$ как функции входящих полей φ_{in} (или выходящих φ_{out}) на плотном множестве неперекрывающихся состояний [9], используемых в аксиоматической теории рассеяния [10]. Оказывается также, что константы движения, найденные в двухмерной нелинейной сигма-модели, удовлетворяют этим условиям. Величины $Q_N^{(1)}$, раньше обозначаемые Q_N, перестановочные с S-матрицей. Величины более высокого рода $Q_N^{(L)}$, $L > 1$ не обязаны обладать этим свойством. Тем не менее эти величины обладают неким свойством локальности в отличие от константы движения N_{in}. Можно показать, что в нетривиальной четырехмерной теории поля нет такого конечного L, что

$$[\ldots [N_{\text{in}}, \varphi_{\text{out}, i_1}(x_1)], \ldots \varphi_{\text{out}, i_{L+1}}(x_{L+1})] = 0$$

для $(x_i - x_k)^2 < 0$, $i, k = 1, \ldots, L+1$, $i \neq k$.

Это обстоятельство указывает на то, что мы находимся на правильном пути и что развиваемый формализм позволит выделить из бесконечного числа констант движения те величины,

* Точнее, x_i и x_k при $i \neq k$ должны находиться в разных двойных конусах.

которые характеризуют динамику взаимодействующих полей и полезны для нахождения S-матрицы. Однако нет уверенности в том, что при этом получим все полезные величины.

Можно показать, что если даже некая тривиальная константа движения для полей φ_{in} обладает конечным родом (например, N_{in}), то она теряет какие бы то ни было свойства локальности по отношению к полю φ и φ_{out}. В противоположность этому, род величин $Q_N^{(L)}$, по отношению к φ_{in} или φ_{out}, является конечным и не превосходит L. При этом не обязательно, чтобы $Q_N^{(L)}$ было перестановочные с S-матрицей.

Все сказанное имеет элегантное обобщение на случай, когда множество взаимодействующих полей содержит кроме бозонных также фермионные поля, а также на случай констант движения $Q_N^{(L)}$, преобразующихся как спиноры относительно $SL\,(2,\,C)$. Последнее реализуется в теории сумерсимметрии. Следует только заменить в (10) коммутаторы антикоммутаторами в соответствии с требованиями теоремы о связи спина и статистики.

4. ЗАРЯДЫ И ИХ СВОЙСТВА В МАССИВНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Вернемся к глобальным симметриям S-матрицы. Существует среди физиков утверждение, что всякий генератор таких симметрий можно представить в виде

$$Q_A = \int d^3x j_{0A}(x_0,\ x), \tag{11}$$

где $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$; x_0 — время; A — произвольный индекс тензорный или спинорный, где

$$j_{\mu A}(x),\ \ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

является локальным, релятивистски ковариантным, векторным полем в четырехмерном пространстве Минковского по отношению к значку μ и тензором (или спинором) относительно индекса A и локальным относительно поля φ. При этом поле $j_{\mu A}$ локально сохраняется

$$\partial^\mu j_{\mu A} = 0. \tag{12}$$

Такого рода поля будем называть **токами.** Величины Q_A, полученные из токов по формуле (11), **зарядами.** Насколько известно, формула (11) никем еще не доказана. Однако во всех известных в физике случаях формула (11) верна.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть задан ток, и хотим построить заряды Q_A. Здесь следует различить два случая: существует массовая щель или нет. Когда есть массовая щель, локальный закон сохранения (12) гарантирует существование заряда, который, в частности, может быть равным нулю. Если массовая щель отсутствует, то теория описывает безмассовое поле; условие (12) является необходимым, но не достаточным для существования заряда (11) [11].

Рассмотрим случай, когда все поля в теории массивные. Второй случай рассмотрим позже при обсуждении нарушения симметрии и частицы Голдстона.

Итак, мы знаем, что в первом случае заряд Q_A, определенный формулой (11), существует. Из (12) следует, кроме этого, что Q_A не зависит от времени

$$\frac{dQ_A}{dx^0} = \frac{\partial Q_A}{\partial x^0} + \mathrm{i}\,[Q_A,\ P_0] = 0. \tag{13}$$

Можно также показать, что [11]

$$Q_A \Omega = 0. \tag{14}$$

Покажем также, что заряд Q_A является билинейной по полям φ_{in} или φ_{out} формой и что он перестановочен с матрицей рассеяния. Следовательно, Q_A — сохраняющаяся величина [12].

Во избежание несущественных усложнений в записи формул, рассмотрим простейший случай, когда Q — скаляр по отношению к $SL(2, C)$ и φ_i — скалярные поля. Обобщение на случай зарядов и полей с другими трансформационными свойствами является простым делом.

Рассмотрим поле

$$\mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_i(x)] \equiv A_i(x),$$

которое само локально и локально относительно полей φ_i. Это следует из того, что Q определено формулой (11), поле j_μ — локально по отношению к φ_i и имеет место (13). Согласно теореме Борхерса [6],

$$A_i(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} A_{i,\,\mathrm{ex}}(x) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{\mathrm{ex}} \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x), \tag{15}$$

где «ех» обозначает «in» или «out», $L_{ij}^{\mathrm{ex}} = L_{ij}^{\mathrm{ex}}(x, \partial)$ является числовой матрицей и полиномом от x и ∂. С другой стороны,

$$A_i(x) = \mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_i(x)] \xrightarrow[x_0\to\pm\infty]{} \mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)]. \tag{16}$$

Из (15), (16) получаем

$$\mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{\mathrm{ex}} \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x),\quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, если подействовать обеими сторонами этого равенства на вакуум, использовать (14), а также воспользоваться стабильностью одночастичных состояний

$$\varphi_{i,\,\mathrm{in}}\Omega = \varphi_{i,\,\mathrm{out}}\Omega \equiv \Phi_i,$$

получим

$$Q\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^{\mathrm{ex}}\Phi_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Откуда следует, что

$$L_{ij}^{\mathrm{in}} = L_{ij}^{\mathrm{out}} \equiv L_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

и

$$\mathrm{i}\,[Q, \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x). \tag{17}$$

Из полученного равенства вытекают два следствия [12].

1) Q — является билинейной по полям φ_{ex} формой, причем структура этих форм одинакова

$$Q = \hat{Q}(\varphi_{\mathrm{in}}) = \hat{Q}(\varphi_{\mathrm{out}}).$$

Поскольку

$$S^{-1}\varphi_{i,\,\mathrm{in}}S = \varphi_{i,\,\mathrm{out}},$$

имеем, как второе следствие,

2) $[Q, S] = 0$.

Стоит отметить, что заряды Q, полученные таким образом, не обязаны быть трансляционно инвариантными. В частности, они не обязаны быть перестановочными с P_0 и, следовательно, не обязаны быть константами движения. Возможна ситуация, когда Q зависит **явно** от времени. Тогда, очевидно, несмотря на выпол нение (13)

$$[Q, P_0] \neq 0.$$

Классическим примером такой ситуации являются генераторы буста M_{0j}. Другими примерами являются генераторы растяжений и специальных конформных преобразований. Следует оговориться, что эти примеры выходят за рамки массивных полей, рассматриваемых в этой части. Ток растяжений, порождающий заряд, имеет вид

$$D_\nu(x) = x^\mu T_{\mu\nu}(x),$$

где

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad T^\mu_\mu = 0, \quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

и явно зависит от x. В результате

$$\mathrm{i}\,[D_\nu, P^\nu] \neq \partial^\nu D_\nu.$$

Можно показать [13], что всегда найдется такое n, что $[P_{\lambda_1}[P_{\lambda_2} \ldots$ $\ldots [P_{\lambda_n}, j_{\mu A}(x)] \ldots]]$ является трансляционно ковариантным током с точностью до дивергенции. Доказательство этой теоремы приведено в Приложении 1.

5. ТИПЫ СИММЕТРИЙ S-МАТРИЦЫ

Возникает вопрос, можно ли, основываясь на общих теоретических соображениях, установить число различных типов симметрии S-матрицы. Чтобы ответить на этот вопрос, опять приходится разделить случай массивных полей от безмассовых. Для массивных полей процедура определения коэффициентов L_{ij} [в уравнении (17)], характеризующих Q, основана на изучении матричных элементов *

$$(\psi_{\text{out}}, Q\psi'_{\text{in}}) = (Q\psi_{\text{out}}, \psi'_{\text{in}})$$

для нетривиальных амплитуд перехода **

$$(\psi_{\text{out}}, \psi'_{\text{in}}) \neq 0,$$

где

$$S^{-1}\psi_{\text{in}} = \psi_{\text{out}}, \quad (S \neq 1).$$

Метод этот был впервые применен Орзалези, Сучером и Ву [4] при исследовании специального вида сохраняющейся величины. Достоинством этого метода является то, что его можно применять к величинам Q различной тензорной или спинорной размерности. Следовательно, он применим и для суперсимметрии.

Первое общее решение задачи о сохраняющихся величинах Q тензорного характера дано О'Райферти и Мишелем, а также Колменом и Мандулей [13, 14] с помощью теоретико-групповых рассуждений. Метод Колмена и Мандули обладает тем недостатком, что его не просто перенести на случай спинорных зарядов и суперсимметрии. Три года спустя [5] после работы Колмена и Мандули автором были получены сходные с ними результаты использования метода Орзалези, Сучера и Ву (я не был знаком со статьей Колмена и Мандули). Строгое доказательство, основанное, главным образом, на моих ранних результатах, дано для скалярных полей Гарбером и Рэ. В Приложении 1 излагаются кратко выводы О'Райферти [13], которые представляют собой одну из первых «no go»-теорем в теории симметрий квантованных полей. В приложении 2 излагается основное содержание работ Гарбера и Рэ, а также результаты работ [5, 12, 14].

---

* Предполагаем здесь, что Q — эрмитов оператор.

** Тривиальной амплитудой перехода называем такую, которая соответствует свободному переходу из начального в конечное состояние, без рассеяния.

Ответ на поставленный в начале вопрос звучит скорее неожиданно: если теория допускает корпускулярную интерпретацию и самая легкая частица имеет отличную от нуля массу, то в теории, в которой все поля взаимодействуют между собой, единственными симметриями S-матрицы, порождаемыми тензорными генераторами, являются:

1. Трансляции, порождаемые 4-вектором энергии — импульса.

2. Лоренцевы повороты, порождаемые четырехмерным антисимметричным тензором второго ранга.

3. Конечное число внутренних симметрий, порождаемых трансляционно-инвариантными скалярными зарядами. Симметрии эти не смешиваются нетривиальным образом с симметриями трансляции и лоренцевых оборотов.

Эта теорема называется «no go»-теорема теории симметрии S-матрицы [14]. Эта важная теорема ведет к далеко идущим следствиям. В частности, мы не можем ожидать, что мультиплет, соответствующий некоторой внутренней симметрии, например $SU(2)$ или $SU(3)$, будет описывать частицы с разными массами или спинами. Как масса, так и спин не меняются при преобразованиях внутренней симметрии. Следовательно, эта теорема перечеркнула многочисленные попытки физиков, предпринятые в 60-х годах, которые направлены на нетривиальное объединение внутренних и геометрических симметрий для объяснения разницы масс частиц в мультиплетах. Теорема эта, в своей первоначальной формулировке в 1967 и 1970 г., не касалась величин Q со спинорными трансформационными свойствами, отвечающим суперсимметриям. Можно ее, однако, распространить и на этот случай (см. разд. 6).

Когда в теории появляются безмассовые частицы, точнее, когда нет массовой щели в спектре P^2, физики **верят**, что теорема эта видоизменится так, что нужно будет дополнительно включить:

1) абелеву группу растяжений;

2) специальную конформную группу, порождаемую 4-вектором K_μ.

Нет, однако, доказательства такого утверждения. Возникающая здесь трудность связана с вопросом существования S-матрицы в теории, содержащей безмассовые частицы и связанные с ними инфракрасные расходимости *. Кроме этого, не всегда удается провести корпускулярную интерпретацию теории как это, например, имеет место в теории с симметрией растяжений, с аномаль-

---

* Теория рассеяния в теории, содержащей массивные и безмассовые поля, в случае отсутствия инфракрасной катастрофы, предложена Бухольцем [15].

ными размерностями [16]. Отсутствие точных теорем в безмассовом случае ощущается в физике весьма сильно. Ведь безмассовый случай физически очень интересен. Достаточно упомянуть спонтанное нарушение симметрии и частицы Голдстона, механизм Хиггса, электромагнитные и слабые взаимодействия, основанные на присутствии безмассовых частиц.

Стоит подчеркнуть, что «no go»-теорема не верна для свободных полей. Для системы свободных полей можно указать бесконечное количество симметрий, которые, однако, неуместно назвать симметриями S-матрицы, так как она единична в этом случае. Это означает, что включение взаимодействия нарушает большинство симметрий, оставляя только немногие из них. Следует также указать, что «no go»-теорема не выполняется также в двухмерных теориях поля.

Хочется также обратить внимание на то, что симметрии S-матрицы могут не охватывать все физически интересные симметрии, удовлетворяющие условию (3). Как было сказано, взаимная почти локальность полей $U_\alpha \varphi_i U_\alpha^{-1}$ и φ_k является **достаточным** условием для выполнения (3), но не **необходимым**. Возможно, что существуют симметрии, для которых (3) выполняется без предположения о взаимной почтилокальности полей. К примеру, это могут быть какие-то динамические симметрии, не допускающие интерпретацию в терминах токов и зарядов.

6. СУПЕРСИММЕТРИИ

В 70-х годах были открыты советскими физиками и математиками [17] и введены в физику Вессом и Зумино [18] так называемые суперсимметрии. Эти исследователи показали, что в рамках квантовой теории поля существует возможность введения новых, до сих пор неизвестных, симметрий и зарядов. Заряды эти, в отличие от известных, преобразуются под действием лоренцевых преобразований, как спиноры. Следовательно, они не являются непосредственно наблюдаемыми величинами. По этой именно причине был употреблен термин **«существенно наблюдаемые»**, когда обсуждались глобальные симметрии. Спинорные заряды порождают преобразования, переводящие бозоны в фермионы и обратно. Таким образом эти преобразования **меняют спин** частиц, оставляя неизменными их массы. Существуют теории поля, ковариантные относительно преобразований суперсимметрии, мультиплеты которых содержат частицы с различными спинами, но с одинаковыми массами. Что интересно, структура суперсимметричных преобразований, особенно для безмассовых частиц, подсказывает существование глубокой связи между внутренними и геометрическими симметриями. В самом деле, оказывается, что даже в массивном случае есть возможность выразить вектор энергии — импульса, а также некоторые внутренние скалярные заряды, называемые **центральными**, в виде билинейных комбинаций спинорных зарядов. Если формально распространить «no go»-теоремы Колмена и Мандули [14], [5] на случай конформно ковариантных безмассовых частиц (а это, как мы знаем, является скорее актом веры, основанным на интуиции, чем точным утверждением), то алгебра суперсимметрии становится намного богаче и элегантней. Геометрические и внутренние заряды гармонично сочетаются друг с другом: каждый генератор симметрии S-матрицы может быть выражен в виде билинейной комбинации спинорных зарядов. Причем связь эта вполне прозрачна. Можно сказать, что суперсимметрии не являются ни чисто геометрическими, ни внутренними по своему характеру. Они также не являются стандартными симметриями, описываемыми группами Ли. Спинорные заряды антикоммутируют в обобщенных соотношениях Ли — Картана. Я без особого энтузиазма отношусь к конструкциям глобальных преобразований суперсимметрии в пространстве Гильберта, где по необходимости приходится вводить числа Грассмана и их алгебру. Предпочитаю изучение алгебр генераторов преобразований суперсимметрии. Расширенная алгебра, содержащая новые антикоммутирующие элементы вместе со старыми генераторами, порождающими знакомые группы Ли, называется градуированной алгеброй Ли. Стоит подчеркнуть, что одни суперзаряды не образуют замкнутой алгебры и необходимо включить обычные заряды для ее замыкания.

Можно показать [19] при тех же предположениях, что и при «no go»-теореме для спинорных зарядов, что в пространстве Гильберта с положительной метрикой единственными возможными зарядами являются заряды со спином 1/2. Спинорные заряды с высшими спинами возможны в пространстве с индефинитной метрикой.

Показано [19], что для массивных частиц существует лишь один тип спинорных зарядов, различаемых индексом внутренних симметрий. В случае конформно инвариантных безмассовых частиц возможны два типа спинорных зарядов. Интересно, что в безмассовом случае выбор внутренних симметрий существенно ограничен. Именно, возможны только симметрии $U(n)$ для $n \neq 4$ и $SU(n)$ для $n = 4$, где n обозначает число спинорных зарядов того же типа [19]. В массивном случае таких ограничений не возникает *.

Разговор о конформно инвариантном супермультиплете может вызывать недоумение в свете того, что само понятие частицы в масштабно-инвариантной теории возможно только для свободных

---

* Загадочное, казалось бы, выделение числа $n = 4$ связано с тем, что рассматривается алгебра суперсимметрий в четырехмерном пространстве Минковского.

частиц. Рассматривается мультиплет исключительной регулярности и красоты, но в теории без взаимодействия. Конечно, это должно встречать сопротивление в каждом здоровом уме. Но можно взглянуть на это по-другому. Во введении было оговорено, что в Природе нет точных симметрий и каждая из них приближенная. Можно затем рассматривать множество безмассовых, конформно-инвариантных полей как приближение к реальной ситуации, где все частицы массивные. Такой точки зрения придерживается, например, Хааг.

Следует особенно подчеркнуть, что существование суперсимметрии не противоречит «no go»-теореме [5, 14], так как оно относится лишь к тензорным зарядам. Можно говорить только о некотором его ослаблении. К сожалению, суперсимметрия не допускает разниц в массах частиц, принадлежащих одному супермультиплету. Объяснение этих разниц и было главной надеждой физиков в поисках путей соединения геометрических и внутренних симметрий. В этом смысле надежды на преодоление застоя, связанного с «no go»-теоремой, с помощью суперсимметрии не оправдались. Кроме этого, от момента открытия суперсимметрии и «бума», какой она произвела в физике, не найдено экспериментального подтверждения предсказуемых на ее основе явлений природы. В настоящее время надежды на успех связываются с супергравитацией и с хромодинамикой, где понятие суперсимметрии может найти разумные применения и, быть может, экспериментальное подтверждение. Не следует поддаваться пессимистическим настроениям, ибо ситуация с суперсимметрией может оказаться подобной той, которая имела место в теории Янга — Миллса [20]. Теория эта ждала более двадцати лет, прежде чем достигла признания и нашла всесторонние применения.

7. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

Из предыдущих разделов следует, что теория элементарных частиц зашла в тупик после доказательства Колменом и Мандулей «no go»-теоремы, и после того как выяснилось, что понятие суперсимметрии не помогло в решении задачи о выяснении разности масс частиц в мультиплетах. Единственный пока путь, на котором придется согласовывать теорию и эксперимент, это признание того, что реальные симметрии — приближенные. Этот взгляд принят в физике довольно широко. В связи с этим возникает вопрос, как разумным способом ввести приближенную симметрию, или, как говорят физики, как нарушить данную симметрию. Как раньше указывалось, нарушение симметрии дело деликатное. Имеются все-таки случаи, когда можно приписать понятию нарушенной симметрии прозрачный математический смысл. Что касается симметрий S-матрицы, то так называемое **спонтанное** нарушение симметрии можно описать математически строго. Коротко остановимся на этом. Известно, что поскольку в теории нет безмассовых частиц, уравнение непрерывности

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{18}$$

для тока j_μ является не необходимым, а достаточным условием для существования заряда * [11]

$$Q = \int d^3x j_0(x_0, \mathbf{x}). \tag{19}$$

Очевидно, возможен случай, когда Q исчезает, что влечет за собой тривиальность порождаемой им симметрии. Это случается всегда, когда ток имеет вид [21]

$$j_\mu = \partial^\nu F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Нас интересуют случаи, когда заряд не исчезает и порождает нетривиальную симметрию. Все сказанное здесь применимо, повторяю, только в теории с массивными частицами. Ситуация резко меняется, когда массовая щель в спектре массы исчезает. В этом случае уравнение (18), хотя и необходимо для существования заряда, но уже не достаточно **. Симметрия может быть, а может и не быть. Например, ток

$$j_\mu = \partial_\mu \varphi, \tag{20}$$

где φ — безмассовое свободное поле, удовлетворяющее уравнению Даламбера

$$\Box\varphi = 0,$$

не порождает ни заряда, ни унитарно представимых в пространстве Гильберта симметрий, хотя ток (20) и связан с преобразованием $\varphi \to \varphi + \lambda$, λ — произвольное вещественное число. В то же время ток

$$j_\mu = \partial^\nu F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

---

* Примером несохраняющегося (локально) тока, который не является лоренцево и трансляционно ковариантным, есть

$$J_\mu = \sum_{j=1}^{3} x_j \partial^j j_\mu = \sum_{j=1}^{3} \partial^j (x_j j_\mu) - 3 j_\mu$$

$\partial^\mu J_\mu = \partial^i j_i \neq 0$, так как $\partial^\mu j_\mu = 0$. Несмотря на это ток порождает заряд

$$Q = \int d^3x j_0 = \frac{1}{3} \int d^3x J_0 \text{ (Рее [14]).}$$

** Точнее, генератор Q существует всегда, если определить его с помощью матричных элементов $(A\Omega, [\int d^3x j_0, B]\,\Omega)$, где A и B локальные наблюдаемые. Но оператор этот не допускает замыкание и поэтому он непригоден практически (Рее [14]).

может породить сохраняющийся во времени заряд, как это имеет место в электродинамике. Существование заряда, в отсутствие массовой щели, не зависит только лишь от того, выполнено ли условие (18) или нет, но также зависит от флюктуаций вакуума. Чтобы лучше понять это, заметим, что даже если Q, определенное формулой (19), и не существует, то все-таки всегда существует величина

$$[Q, P(\varphi, x)]_{\pm}, \tag{21}$$

где $P(\varphi, x)$ — полином по φ_i, локальный или антилокальный по отношению к себе самому и току j_μ. Дело в том, что благодаря этой локальности заряд Q можно записать в виде интеграла от j_0 по конечной трехмерной области. Если бы заряд Q в действительности существовал, то выполнялось бы условие

$$Q\Omega = 0, \tag{22}$$

а также

$$\begin{aligned}(\Omega, [j_0(y_0, \mathbf{y}), P(\varphi, x)]_{\pm}\,\Omega)\,d^3y &= \\ = (\Omega, [Q, P(\varphi, x)]_{\pm}\Omega) &= 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Если последнее равенство не выполняется, то не выполняется также (22) и налицо флюктуации вакуума. Можно доказать, что необходимыми и достаточными условиями существования заряда Q в случае отсутствия массовой щели являются условия (18) и (23) [11]. Если выполняется (18), но нарушено (23), то говорим, что **симметрия спонтанно** нарушена.

Идеология, скрытая за этим явлением, состоит в том, что хотя алгебра операторов, описывающих физическую систему, инвариантна относительно преобразований, порождаемых током j_μ, что гарантировано условием (18), однако основное состояние Ω инвариантным не является. Это вполне аналогично той ситуации, которая известна из лагранжевой теории: лагранжиан и вытекающие из него уравнения движения могут обладать некой симметрией, но решение уравнений этой симметрией может не обладать. Функционал Вайтмана, который отвечает решениям уравнений, не обязан обладать симметрией, присущей уравнениям. Такая ситуация имеет место в том случае, когда наступает спонтанное нарушение симметрии.

Голдстон [22] показал в 1962 г., что если выполняется (18), но вакуум не является инвариантным по отношению к симметрии, порождаемой током j_μ [другими словами, не выполнено (22)], то в теории обязательно должны появиться безмассовые частицы. Частицы эти называются частицами Голдстона. Доказательство теоремы Голдстона основано на релятивистской инвариантности [22], или на локальности полей [11]. Частицу Голдстона можно получить, действуя током j_μ на вакуум Ω. В четырехмерном пространстве Минковского существуют лишь два типа частиц Голдстона, если метрика в пространстве состояний положительна. Это скалярные и спинорные частицы со спином 1/2 [23]. Значение открытия Голдстона состоит в том, что оно указывает на связь между нарушенной внутренней симметрией и массовым спектром, который, в свою очередь, связан с геометрическими преобразованиями из группы Пуанкаре. Теорема Голдстона противоречит «no go»-теореме в случае безмассовых частиц.

Начатое работой Голдстона направление исследования спонтанного нарушения симметрии приобрело громадную популярность за последние 17 лет, и в отдельных случаях дело дошло даже до перегибов. Как только появляется на горизонте физики какая-то внутренняя симметрия, сразу же принимаются нарушать ее. Тем не менее идея Голдстона оказалась чрезвычайно плодотворной в квантовой теории поля. Достаточно упомянуть так называемый механизм Хиггса, без которого трудно сегодня вообразить объединенную теорию слабых и электромагнитных взаимодействий. Этот вопрос будет затронут в разд. 8, а здесь остановимся на другом способе нарушения симметрии. Как уже известно, спонтанное нарушение симметрии поддается точному математическому описанию. Хуже обстоит дело с неспонтанным нарушением симметрии, состоящем во введении в лагранжиан, описывающий систему с некоей симметрией, малого члена, не инвариантного относительно этой симметрии. Трудность состоит в строгом определении понятия **малого нарушения** симметрии. Это «малое» отступление от симметрии портит не только свойства симметрии вакуума, но также свойства алгебры операторов. В рамках подхода Вайтмана к квантовой теории поля этот феномен не поддается даже качественному описанию. Граница между симметрией и ее отсутствием исчезает.

Стоит, однако, подчеркнуть, что иногда нарушение симметрии является необходимым, хотя и неожиданным условием дальнейшего прогресса исследований. В качестве примера можно упомянуть открытие Ли и Янгом нарушения P четности [1]. Природа не инвариантна по отношению к зеркальному отражению. Бог, создавая Мир, работал больше правой рукой, чем левой. Симметрия по отношению к зеркальному отражению казалась столь очевидной, что даже великие физики, как Паули например, никогда в ней не сомневались.

8. ОБЗОР ПОНЯТИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ СИММЕТРИЙ И КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Прежде чем приступить к обсуждению явления Хиггса, коротко опишем локальные симметрии, зависящие от точки пространства Минковского. Это в основном ненаблюдаемые симметрии, скрытые в уравнениях движения. Функционал Вайтмана, как правило, не инвариантен относительно преобразований, порождаемых этими симметриями. Ток не инвариантен относительно трансляций и лоренцевых поворотов и не порождает заряда.

Приведу простой пример. Пусть φ — комплексное скалярное поле с лагранжианом

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi^+\partial_\mu\varphi+\frac{1}{4}m^2\varphi^+\varphi-\frac{1}{8}f^2(\varphi^+\varphi)^2, \quad m^2>0,\ f^2>0. \tag{24}$$

За исключением знака перед 1/4 $m^2\varphi^+\varphi$ этот лагранжиан вполне обычный и описывает самовзаимодействующее поле φ. Легко видеть, что лагранжиан (24) инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\varphi(x)\to\exp(i\alpha)\,\varphi(x),$$

где α — вещественное число, не зависящее от x. Следовательно, лагранжиан имеет симметрию $U(1)$. Симметрия эта может быть спонтанно нарушена, если потребовать, чтобы

$$-i(\Omega,\ [Q,\ \mathrm{Re}(\varphi)]\,\Omega=(\Omega,\ \mathrm{Im}\,\varphi\Omega)=\eta\neq0. \tag{25}$$

Последнее означает, что вакуум не инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований $\exp\{-i\alpha Q\}$. Согласно теореме Голдстона, в этой модели должна появиться частица с нулевой массой.

Перестроим нашу модель так, чтобы она была инвариантна по отношению к локальным калибровочным преобразованиям, которые обозначим $U(1;\ x)$,

$$\varphi(x)\to\exp[i\alpha(x)]\,\varphi(x),\quad \alpha(x)\text{ — вещественная функция точки } x=(x_0,\ \mathbf{x}). \tag{26}$$

Мы сужаем класс преобразований, требуя, чтобы $\alpha(x)$ была непрерывной и даже дифференцируемой функцией точки. Более того, в квантовой теории принимается дополнительно условие вида

$$\Box\alpha(x)=0$$

или условие кулоновской калибровки

$$\Delta\alpha(x)=0 \tag{27}$$

вместе с граничными условиями на бесконечности. Это, по-видимому, продиктовано соображениями простоты или традиции. Мне не известны более глубокие причины такого именно выбора дополнительного условия.

Легко усмотреть, что лагранжиан (24) не инвариантен относительно преобразований (26). Мы вынуждены ввести компенсирующие безмассовые поля [24]

$$A_\mu = A_\mu^+$$

для сохранения инвариантности лагранжиана относительно преобразований (26).

Произведем в лагранжиане (24) замену

$$\partial_\mu \varphi \to \partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi \equiv D_\mu \varphi;$$
$$\partial_\mu \varphi^+ \to \partial_\mu \varphi^+ - ieA_\mu \varphi^+ \equiv D_\mu \varphi^+.$$

Этого достаточно для инвариантности относительно (26), если только A_μ преобразуется следующим образом под действием $U(1;\ x)$:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \alpha(x). \tag{28}$$

Здесь e является постоянной величиной, имеющей размерность электрического заряда. Для того чтобы полученный лагранжиан был полным по отношению к содержащимся в нем полям, следует добавить свободный лагранжиан безмассовых полей A_μ

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -\frac{i}{e}\,[D_\mu,\ D_\nu].$$

Таким путем получаем лагранжиан, который является исходным для обсуждения явления Хиггса [25].

Мы должны еще ввести калибровочное условие в теорию. Для того чтобы после квантования сохранить положительную определенность метрики в пространстве состояний Гильберта, принимаем калибровку (27), которая благодаря (28) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{27a}$$

Условие Лоренца $\partial^\mu A_\mu = 0$, хотя оно и релятивистски инвариантное, ведет к индефинитной метрике в пространстве состояний [26]. Условие (27) нарушает не только явную релятивистскую симметрию, но приводит к нелокальности полей. Наблюдаемые величины, как, например, напряженности, $F_{\mu\nu}$ и глобальный калибровочный ток, остаются все же релятивистски инвариантными и локальными. Таким образом, неприятные черты теоремы остаются вне наблюдаемости. Благодаря (25) калибровочная симметрия остается нарушенной. Но в этой новой ситуации, когда имеем дело с новым лагранжианом, уже нельзя применять теорему Голдстона, так как ее предпосылки уже не выполняются. Теория не является явно релятивистской, и так же нет локальности. Таким образом, нет оснований утверждать, что появится частица Голдстона. В самом деле, можно показать, в приближении древесных графов, что безмассовой частицы Голдстона действительно нет. Более того [25], безмассовое поле A_μ приобретает массу

$$M^2 = e^2\eta^2 > 0,$$

в то время как первоначальное скалярное поле получает массу

$$\mu^2 = f^2\eta^2 > 0.$$

Отсюда заключаем, что массы частиц в этой модели зависят от константы взаимодействия, а также драматическим образом, от вакуумного ожидания поля $\operatorname{Im}\varphi$, которое нарушает симметрию $U(1)$.

Этот результат важен, по крайней мере, по двум причинам:

1. Мы нашли метод замены безмассового поля на поле массивное для вполне реалистических моделей.

2. Найден путь к перенормировке массивных векторных полей. Задача эта долгое время оставалась нерешенной. Мы знаем теперь, что теория электромагнитного поля, взаимодействующего со скалярным комплексным полем, ренормируема независимо от знака перед квадратом голой массы m^2 [27].

Механизм Хиггса применим и в более сложных случаях, когда глобальная симметрия модели неабелева [28]. Эти случаи весьма важны для физики, так как относятся к теории слабых и электромагнитных взаимодействий [29].

Рассмотрим это на примере модели двух комплексных скалярных полей φ_1 и φ_2 с лагранжианом

$$\frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi_1^+\partial_\mu\varphi_1 + \partial^\mu\varphi_2^+\partial_\mu\varphi_2) + \frac{1}{4}m^2(\varphi_1^+\varphi_1 + \varphi_2^+\varphi_2) - \\ - \frac{1}{8}f^2(\varphi_1^+\varphi_1 + \varphi_2^+\varphi_2)^2, \tag{29}$$

который является прямым обобщением лагранжиана (27). Лагранжиан (29) инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований $SU(2)$ *

$$\varphi_k \to \sum_{i=1}^{2} A_{ki}\varphi_i \quad k = 1,\ 2;$$

$$A = \begin{pmatrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a} \end{pmatrix},\ |a|^2 + |b|^2 = 1,\ (A^{-1} = A^+,\ \operatorname{Det} A = 1).$$

---

* Теория эта инвариантна также относительно преобразований из группы $U(2)$, но мы можем из нее исключить преобразования группы $\frac{U(1)}{Z_2}$, рассмотренные раньше. Тогда остается симметрия $SU(2)$, которой будем заниматься.

Если требуем теперь, чтобы наша модель была инвариантна также по отношению к локальным калибровочным преобразованиям $SU(2, x)$, то мы вынуждены ввести в теорию безмассовые компенсирующие поля

$$A_\mu = A_\mu^+;$$

$$\partial_\mu \varphi_i \to \partial_\mu \varphi_i + ie \sum_{k=1}^{2} (A_\mu)_{ik} \varphi_k \equiv D_\mu \varphi_i;$$

$$\partial_\mu \varphi_i^\dagger \to \partial_\mu \varphi_i^\dagger - ie \sum_{k=1}^{2} (A_\mu)_{ik} \varphi_k^\dagger \equiv D\varphi_i^\dagger, \quad i = 1, 2.$$

Главное отличие от абелевого случая состоит в том, что введенные здесь потенциалы A_μ являются **матрицами** 2×2, которые не обязаны коммутировать между собой. Напряженности этих полей равны теперь

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] \tag{30}$$

и не являются линейными функционалами от потенциалов. Уравнения Максвелла

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = j_\mu$$

переходят в уравнения

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} - ie[F_{\mu\nu}, A^\nu] = -\frac{i}{e}[D^\nu[D_\mu, D_\nu]] = J_\mu, \tag{31}$$

явно содержащие поля A_μ. Поля A_μ, появляющиеся в неабелевой теории, называются полями Янга — Миллса. Соотношения (30) и (31) являются известными уравнениями Янга — Миллса [20].

Стоит отметить, что в отличие от электромагнитных полей не существует свободных полей Янга — Миллса.

Симметрия $SU(2)$ может быть спонтанно нарушенной как и в случае $U(1)$. Поскольку явная релятивистская инвариантность здесь утеряна (калибровочное условие неинвариантно) и нет полной локальности полей φ_i и A_μ, мы не можем воспользоваться теоремой Голдстона. Оказывается, что так же как и для абелевых калибровочных преобразований, безмассовые поля A_μ приобретают массу. Применение метода Хиггса позволило Саламу и Вайнбергу [29] создать объединенную теорию электромагнитных и слабых взаимодействий.

С момента написания Хиггсом своих работ прошло уже 15 лет. Результаты, достигнутые в теориях Янга — Миллса за последние годы, являются исключительно плодотворными. Некоторые из новых направлений выходят далеко за пределы старых, хороших и стандартных в понимании квантовой теории поля (например, инстантоны). Картина не является пока вполне связной и полна недоговорок.

Например, теория функционалов Вайтмана в ее классической форме становится непригодной в квантовой теории, содержащей компенсирующие поля. Это легко установить в модели скалярного комплексного поля φ, описываемого лагранжианом (24), расширенным затем до лагранжиана, включающего безмассовые вещественные поля A_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, инвариантного по отношению к локальным калибровочным преобразованиям (26), (28) с учетом (27). Новый лагранжиан имеет вид

$$\frac{1}{4} D^\mu\varphi^+ D_\mu\varphi + \frac{1}{4} m^2\varphi^+\varphi - \frac{1}{8} f^2 (\varphi^+\varphi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$m^2 > 0, \quad f^2 > 0, \quad D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Очевидно, функции полей Вайтмана φ, а также A_μ не инвариантны по отношению к преобразованиям (26) и (28). Можно было бы попытаться сослаться здесь на то, что вакуум не инвариантен относительно калибровочных преобразований или что симметрия нарушена. Однако ситуация здесь более драматична, ибо условие (27а) ведет к нарушению также лоренцевой симметрии. В самом деле, поля A_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ не преобразуются как векторы при преобразованиях Лоренца, так как вид условия (27а) релятивистски нековариантен. Имеем

$$A_\mu \to \Lambda_\mu^{-1\nu} A_\nu + \partial_\mu\beta, \tag{32}$$

где β зависит от преобразования Λ и от точки x. Если мы хотим сохранить инвариантность уравнений движения по отношению к преобразованиям Лоренца, то поле φ не может уже считаться скаляром по отношению к этим преобразованиям. Функции Вайтмана не инвариантны по отношению к преобразованиям (32), если не признать, что вакуум неинвариантен относительно лоренцевых преобразований. Ко всему этому прибавляется то неприятное обстоятельство, что поля перестают быть локальными.

Возможный выбор из создавшейся дилеммы заключается в том, чтобы переформулировать всю теорию таким образом, чтобы в ней появлялись лишь калибровочно инвариантные объекты, сохраняющие ковариантный характер по отношению к преобразованиям Лоренца. Такой подход кажется естественным. Следует, однако, признать, что задача эта не проста и требует кроме изобретательности создания мощного и точного математического аппарата. Грубо говоря, теорию эту следовало бы сформулировать с помощью таких классических величин, как

$$\varphi^+(x) \exp\left\{ie \int_x^y A_\mu(z)\, dz^\mu\right\} \varphi(y) \tag{33}$$

и, так называемых вильсоновских петель

$$\exp\left\{ie\oint_C A_\mu(z)\,dz^\mu\right\} = \exp\left\{ie\int_S F_{\mu\nu}\,ds^{\mu\nu}\right\}, \tag{34}$$

где S обозначает двухмерную поверхность, охватываемую замкнутым контуром C.

Величины (33), (34) являются инвариантными относительно калибровочных и лоренцевых преобразований. Эти величины можно было бы употребить как элементы для конструкции их вакуумных средних, наподобие теории Вайтмана. Следовало бы однако, перед этим позаботиться об их точном определении в квантовом случае, чтобы придать им точный смысл, например, путем введения решетки. Заметим, что эти величины нелокальны и зависят кроме точек x, y также от контуров. Только при $x \to y$ из (33) получается локальное выражение, соответствующее $\varphi^+(x)\,\varphi(x)$ и току $(\varphi^+\nabla_\mu\varphi - \varphi\nabla_\mu\varphi^+)(x)$. Несмотря на существующие попытки придать этим идеям стройный математический вид [30], следует отметить, что путь к этой цели далек. Мы имеем дело здесь с качественно новой ситуацией, вдохновляющей и в то же время не оторванной от действительности, ибо она касается в первую очередь электродинамики, а потом полей Янга — Миллса.

Я благодарен доктору Влодзимежу Гарчинскому за перевод рукописи на русский язык и за критические замечания, которые способствовали улучшению текста.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Ниже приводим очерк красивой «no go»-теоремы, которая была доказана О'Райферти [13] несколько раньше, чем теорема Колмена и Мандули [14], относящаяся к сходной проблеме.

Предположим, что в пространстве Гильберта $\mathcal{H}$, в котором определено представление алгебры $\mathfrak{p}$ группы Пуанкаре $\mathfrak{P}$, действует алгебра $\mathfrak{g}$ группы $\mathfrak{G}$. Относительно этой последней предполагается, что она конечного порядка r и что $\mathfrak{P}$ является ее подгруппой. Предположим также, что оператор массы $P^2 = P^\mu P_\mu$ и его степени являются самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$. Кроме этого, допустим, что P^2 имеет изолированное собственное число m^2, которому отвечает подпространство Гильберта $\mathcal{H}_m$ собственных векторов ($P^2\mathcal{H}_m = m^2\mathcal{H}_m$). Тогда, как показывает О'Райферти, подпространство $\mathcal{H}_m$ полно и является инвариантным относительно действия операторов, представляющих алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Другими словами, разности масс в мультиплетах не могут быть объяснены в рамках какой бы то ни было алгебры Ли конечного порядка.

Наметим доказательство этой фундаментальной теоремы. Полнота $\mathcal{H}_m$ следует из того, что это есть подпространство собственных векторов самосопряженного оператора. Сложней доказать инвариантность $\mathcal{H}_m$ по отношению к алгебре представления алгебры ϱ, для чего нужно доказать две леммы.

Лемма I. Пусть E произвольный элемент $\mathfrak{g}$ и пусть

$$U_n(E) \equiv [P^{(1)}\,[P^{(2)}\,\ldots\,[P^{(n)},\,E]\,\ldots]], \tag{П.1}$$

где $P^{(j)}$ $j = 1, \ldots, n$ совпадают с одним из операторов P_0, P_1, P_2, P_3. Тогда существует такое конечное число N, что

$$U_n(E) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant N. \tag{П.2}$$

Лемма II. Пусть A — самосопряженный оператор, действующий в $\mathscr{H}$, и пусть $A^n = (A^+)^n$ для всякого конечного n. Тогда, если выполняется равенство

$$A^N \mid h> = 0, \quad N \text{ — конечное, то}$$
$$A \mid h> = 0.$$

Из леммы I вытекает как следствие, что если

$$V_n(E) \equiv \overbrace{[P^2 [P^2 \ldots [P^2}^{n}, E] \ldots]],$$

то

$$V_n(E) = 0 \quad n \geqslant N.$$

Воспользуемся сначала леммами для доказательства теоремы О'Райферти, а затем приведем доказательства этих лемм и следствия.

Пусть E произвольный генератор группы $\mathfrak{G}$, т. е. $E \in \mathfrak{g}$ и пусть $| h_m \rangle \in \in \mathscr{H}_m$. Имеем

$$(P^2 - m^2) E \mid h_m\rangle = [(P^2 - m^2), E] \mid h_m\rangle = [P^2, E] \mid h_m\rangle.$$

Повторяя этот прием N раз, получаем

$$(P^2 - m^2)^N E \mid h_m\rangle = \underbrace{[P^2 [P^2 \ldots [P^2}_{N}, E] \ldots]] \mid h_m\rangle.$$

На основании следствия из леммы I получаем, что

$$(P^2 - m^2)^N E \mid h_m\rangle = 0.$$

Число m^2 вещественно, и, следовательно, оператор $(P^2 - m^2)^l$ является самосопряженным, и из леммы II следует, что

$$(P^2 - m^2) E \mid h_m\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$E \mid h_m\rangle \in \mathscr{H}_m,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы I. Пусть $\{E_a;\ a = 1, \ldots, r\}$ база в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда для произвольного $E \subset \mathfrak{g}$

$$[E, E_a] = \sum_{b=1}^{r} D_{ab}(E) E_b, \quad a = 1, \ldots, r, \tag{П.3}$$

где $D(E)$ является конечномерным присоединенным представлением E.

Используя определение (П.1), получаем

$$U_n(E_a) = [P^{(1)} [P^{(2)} \ldots [P^{(n)}, E_a] \ldots]] =$$
$$= \sum_b D_{ab}(P^{(n)}) [P^{(1)} [P^{(2)} \ldots [P^{(n-1)}, E_b] \ldots]] =$$
$$= \sum_b (D(P^{(n)}) \ldots D(P^{(2)}) D(P^{(1)}))_{ab} E_b.$$

Для произвольного $E = \sum_{\alpha} \alpha_a E_a$ имеем

$$U_n(E) = \sum_{a,\, b} \alpha_a (D(P^{(n)}) \ldots D(P^{(1)}))_{ab} E_b.$$

Покажем теперь, что существует такое конечное N, что выполняется равенство *

$$D(P^{(1)}) \ldots D(P^{(n)}) = 0 \quad \text{для} \quad n \geqslant N.$$

Для этого воспользуемся перестановочными соотношениями алгебры Ли группы $\mathfrak{P}$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = -\mathrm{i}\,(g_{\sigma\mu} P_\nu - g_{\sigma\nu} P_\mu) \quad \mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3, \tag{П.4}$$

где

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь тождеством Якоби

$$[[M_{\mu\nu}, P_\nu], E_a] + [[P_\nu, E_a] M_{\mu\nu}] + [[E_a, M_{\mu\nu}] P_\nu] = 0,$$

а также соотношениями (П.3) и (П.4), получаем

$$[D(P_\nu), D(M_{\mu\nu})] = \mathrm{i} g_{\nu\nu} D(P_\mu).$$

Домножая слева это равенство на $D(P_\mu)^{n-1}$ и пользуясь тем, что $D(P_\mu)$ коммутируют между собой, получаем

$$[D(P_\nu), D(P_\mu)^{n-1} D(M_{\mu\nu})] = \mathrm{i} g_{\nu\nu} D(P_\mu)^n. \tag{П.5}$$

Для конечных матриц имеем всегда

$$\mathrm{Tr}([A, B]) = 0.$$

Из (П.5) вытекает равенство

$$\mathrm{Tr}(D(P_\mu)^n) = 0$$

для любого конечного n.

Покажем теперь, что если для конечной матрицы, скажем n-мерной, выполняется равенство

$$\mathrm{Tr}(A^k) = 0$$

для любого конечного $k = 1, 2, \ldots$, то эта матрица нильпотентна.

Для доказательства рассмотрим характеристический полином **

$$P(z) \equiv \det(A - z1) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k + (-z)^n,$$

или

$$Q(z) \equiv (-z)^n P(z) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^n \alpha_k z^{k-n}.$$

---

* Заметим, что матрицы $D(P_\mu)$ перестановочны между собой, так как P_μ образуют алгебру абелевой группы.

** Благодарю доктора Э. Зайлера за дискуссию по этому вопросу.

Имеем для достаточно больших z

$$\log Q(z)=\log\left(\det\left(1-\frac{1}{z}A\right)\right)=$$

$$=\operatorname{Tr}\left(\log\left(1-\frac{1}{z}A\right)\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{k}\operatorname{Tr}(A^{k}).$$

Поскольку $\operatorname{Tr}(A^k)=0$, получаем

$$\log Q(z)=0$$

или

$$Q(z)=1.$$

Отсюда следует, что $\alpha_k=0$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Поскольку $P(A)\equiv 0$, имеем

$$P(A)=(-A)^n\equiv 0,$$

что и следовало доказать.

Таким образом, $D(P_\mu)$ являются нильпотентными матрицами. Существуют такие n_μ, что

$$(D(P_\mu))^n=0 \text{ для } n\geqslant n_\mu \quad \mu=0, 1, 2, 3.$$

Обозначим максимальное $n_\mu\equiv N/4$. Тогда

$$D(P^{(1)})\ldots D(P^{(n)})=0 \text{ для } n\geqslant N,$$

что влечет за собой (П.2) и завершает доказательство леммы I.

Доказательство следствия из леммы I: имеем

$$[P^2, E_a]=\sum_b D_{ab}(P_\mu)(P^\mu E_b+E_bP^\mu)=\sum_b(2P^\mu D(P_\mu)-D(P_\mu)^2)_{ab}E_b,$$

далее

$$[P^2[P^2, E_a]]=\sum_b(2P^\mu D(P_\mu)-D(P_\mu)^2)_{ab}[P^2, E_b]=$$

$$=\sum_b[(2P^\mu D(P_\mu)-D(P_\mu)^2)^2]_{ab}E_b \text{ и т. п.}$$

Следовательно, выражение $V_n(E_a)$ содержит суммы произведений $D(P_\mu)$ порядка от n до $2n$, поэтому при $n\geqslant N$ оно исчезает.

Доказательство леммы II. Если N четное, то из равенства

$$A^N\,|\,h\rangle=0$$

следует, что

$$h|A^{\frac{N}{2}}A^{\frac{N}{2}}|h\rangle=0.$$

Из самосопряженности A следует затем, что

$$A^{\frac{N}{2}}|h\rangle=0.$$

Если $N/2$ четное, то процедуру можно повторить. Если же оно нечетное, то, рассматривая равенство

$$A^{\left(\frac{N}{2}+1\right)}|h\rangle=0,$$

где теперь $N/2+1$ четно, понижаем как прежде показатель степени. Повторяя рассуждение нужное число раз, получаем после конечного числа шагов желаемый результат $A\mid h\rangle = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Приведем теперь в общих чертах доказательство «no go»-теоремы Колмена и Мандули, основанное на работах Гарбера, Рее и собственных [5, 12, 14]. Разберем случай скалярных полей с равными и отличными от нуля массами $m^2 \neq 0$. Обобщение для произвольных полей и различных масс возможно, но оно громоздко и непрозрачно из-за обилия индексов у полей.

Мы уже знаем [см. формулы (17)], что для асимптотических полей верно соотношение

$$\mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(x,\ \partial)\,\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x), \tag{П.6}$$

где $L_{ij}(x,\ \partial)$ — полиномы от x и ∂. Очевидно, выполняется также

$$[\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x),\ \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(y)] = \mathrm{i}\Delta(x-y)\,\delta_{ij},$$

где

$$\Delta(x-y) \equiv \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int dp\,\delta(p^2-m^2)\,\varepsilon(p_0)\exp(-\mathrm{i}px),$$

а также

$$[Q,\ P^2]\,\varphi_{i,\mathrm{ex}}\Omega = 0.$$

Пользуясь этим соотношением, получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\partial^{\mu}\partial_{\mu}(L_{ij}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}})\,\Omega = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}\Omega.$$

Далее, на основании теоремы Рее и Шлидера

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\Box L_{ij} + 2\partial^{\mu}L_{ij}\partial_{\mu}\Big)\,\varphi_{j,\,\mathrm{ex}} = 0.$$

Имеем тоже

$$\sum_{j=1}^{n}(\Box_x L_{ij} + 2\partial_x^{\mu}L_{ij}\partial_{x,\,\mu})\,[\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x),\ \varphi_{k,\,\mathrm{ex}}(y)] =$$

$$= \mathrm{i}\,(\Box_x L_{ik} + 2\partial_x^{\mu}L_{ik}\partial_{x,\,\mu})\,\Delta(x-y) = 0.$$

Отсюда следует, что предыдущее уравнение выполняется для произвольного решения уравнения Клейна — Гордона,

$$(\Box L_{ij} + 2\partial^{\mu}L_{ij}\partial_{\mu})\,f = 0 \tag{П.7а}$$

для

$$\Box f + m^2 f = 0. \tag{П.7б}$$

Покажем сперва, что произвольный полином в переменных x, ∂, $L(x,\ \partial)$, для которого выполняются (П.7), можно записать как полином в переменных $x_{\nu}\partial_{\mu} - x_{\mu}\partial_{\nu}$ и ∂_{ρ}. Это, конечно, верно для L, которое не зависит от x вообще. Предположим, что L является полиномом степени n в переменных x, т. е. имеет вид

$$L = x_{\mu_1}\ldots x_{\mu_n}c^{\mu_1\ldots\mu_n}(\partial) + \hat{L}(x,\ \partial),$$

где $\hat{L}$ — полином по x степени ниже, чем n, а $c^{\mu_1 \dots \mu_n}$ — полиномы по ∂, симметричные в верхних знаках.

Если L удовлетворяет соотношению (П.7), то $\partial^{\nu_1} \dots \partial^{\nu_{n-1}} L$ тоже. Это ведет к соотношению

$$c^{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \mu} \partial_\mu f = 0.$$

Легко показать, что отсюда следует для $p^2 = m^2$ соотношение

$$c^{\mu_1 \dots \mu_n} (\mathrm{i}p)\, p_{\mu_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n. \tag{П.8}$$

Следует теперь показать, что всякий полином $c^{\mu_1 \dots \mu_n}(\mathrm{i}p)$ (для которого выполняется (П.8) при $p^2 = m^2$) можно записать в виде

$$c^{\mu_1 \dots \mu_n} (\mathrm{i}p)|_{p^2=m^2} = \mathrm{i}p_{\nu_1} \dots \mathrm{i}p_{\nu_n} d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_n\mu_n)} (\mathrm{i}p)|_{p^2=m^2},$$

где

$$d^{(\nu_1\mu_1), \dots (\nu_n\mu_n)} (\mathrm{i}p)$$

симметрично относительно перестановок пар (ν_i, μ_i) между собой и антисимметрично относительно замены каждого ν_i с μ_i ($i = 1, \dots, n$). Для $n = 1$ таким полиномом является

$$d^{\nu\mu} (\mathrm{i}p) = -\frac{\mathrm{i}}{m^2} (p^\nu c^\mu (\mathrm{i}p) - p^\mu c^\nu (\mathrm{i}p)).$$

По индукции получаем

$$d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_n\mu_n)} = -\frac{\mathrm{i}}{m^2} (p^{\nu_n} d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_{n-1}\mu_{n-1})\mu_n} -$$
$$- p^{\mu_n} d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_{n-1}\mu_{n-1})\nu_n}),$$

где $c^{\mu_1 \dots \mu_n} (\mathrm{i}p)|_{p^2=m^2} = \mathrm{i}p_{\nu_1} \dots \mathrm{i}p_{\nu_{n-1}} d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_{n-1}\mu_{n-1})\mu_n} (\mathrm{i}p)|_{p^2=m^2}$.

Отсюда вытекает, что

$$L = x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_n\mu_n)} (\partial) + \hat{L}(x, \partial) =$$
$$= 2^{-n} \prod_{j=1}^{n} (x_{\mu_j} \partial_{\nu_j} - x_{\nu_j} \partial_{\mu_j})\, d^{(\nu_1\mu_1) \dots (\nu_n\mu_n)} (\partial) + \hat{\hat{L}}(x, \partial),$$

где $\hat{\hat{L}}$ — сумма $\hat{L}$ и членов, вытекающих из перестановки x с ∂ в первом члене. $\hat{\hat{L}}$ является полиномом степени не выше $(n-1)$ по отношению к x. Легко усмотреть, что оно также удовлетворяет (П.7). Повторяя эту процедуру $(n-1)$ раз, получаем желаемый результат: любой полином $L(x, \partial)$, удовлетворяющий (П.7), можно записать в виде

$$\tilde{L}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \partial_\rho).$$

На основе этой формулы, а также (П.6), заключаем, что

$$\mathrm{i}[Q, \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} \tilde{L}_{ij} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \partial_\rho)\, \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x). \tag{П.9}$$

Или словами: L_{ij} является полиномом в генераторах группы Пункаре ($x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$, и ∂_ρ), а также трансляционно-инвариантных генераторов внутренних симметрий (когда L_{ij} не зависит от x и ∂).

Покажем теперь, что при дополнительных предположениях относительно механизма взаимодействия между полями, L_{ij} может быть лишь линейной комбинацией генераторов группы Пуанкаре и генераторов трансляционно-инвариантных внутренних симметрий.

Эти дополнительные предположения говорят о том, что для любой частицы можно указать другую такую частицу, что будет иметь место их упругое рассеяние друг на друге при некоторых значениях энергий и импульсов (совместимых с законом сохранения энергии — импульса). Кроме этого, предполагается, что рассматриваемое множество частиц не распадается на невзаимодействующие между собой подмножества частиц. Эти предположения имеют общий характер и не ограничивают существенным образом механизм рассеяния.

Сперва решим задачу для трансляционно-инвариантных генераторов, а затем сведем проблему остальных генераторов к этому случаю.

Займемся сначала такими эрмитовыми генераторами, для которых выполняется равенство

$$\mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{r} L_{ij}(\partial)\,\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x). \tag{П.10а}$$

Из эрмитовости Q, а также полей вытекает, что

$$L_{ij}(\partial) = \overline{L_{ij}}(\partial). \tag{П.10б}$$

С помощью тождества Якоби

$$[[Q,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)],\ \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(y)] + [[\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x),\ \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(y)]\,Q] + [[\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(y),\ Q]\,\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = 0$$

получаем

$$L_{ij}(\partial) = -L_{ji}(-\partial). \tag{П.10в}$$

Для наглядности выкладок рассмотрим простейший случай, когда

$$L_{ij} = l_{ij} + l_{ij}^{\mu}\partial_{\mu}. \tag{П.11}$$

Из рассмотрения этого случая можно будет предложить общий метод, который необходим для анализа, когда L_{ij} зависит от операторов ∂ нелинейно.

Поскольку для генератора B трансляционно-инвариантной внутренней симметрии выполняется равенство

$$\mathrm{i}\,[B,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x),$$

уравнение (П.10а) с учетом (П.11) запишется в виде

$$\mathrm{i}\,[Q',\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x), \tag{П.12}$$

где

$$Q' \equiv Q - B.$$

Из (П.10б) и (П.10в) следует, что матрицы l_{ij}^{μ}, $\mu = 0, 1, 2, 3$ являются вещественными и симметричными. Их можно привести к диагональному виду при помощи вещественных ортогональных преобразований. Не ясно, однако, можно ли сделать это одновременно при помощи одного преобразования. Поэтому мы сперва применим определенное преобразование Лоренца к уравнению (П.12), а затем выполним предельный переход, который позволит заменить эту проблему на более простую, удобную для дальнейших рассуждений.

Рассмотрим преобразование Лоренца

$$\left.\begin{aligned}(\Lambda_1^{-1}(\alpha)\,p)_0 &= p_0\operatorname{ch}\alpha + p_1\operatorname{sh}\alpha;\\ (\Lambda_1^{-1}(\alpha)\,p)_1 &= p_0\operatorname{sh}\alpha + p_1\operatorname{ch}\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{П.13}$$

где α — вещественный параметр. С помощью этого преобразования получаем из (П.12)

$$\mathrm{i}\,[U(\Lambda_1(\alpha),\,0)\,Q'U(\Lambda_1(\alpha),\,0)^{-1},\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(\Lambda_1(\alpha)\,p)] = \\ = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}^{\mu} p_{\mu}\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(\Lambda_1(\alpha)\,p)$$

или

$$\mathrm{i}\,[Q^{\alpha},\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}^{\mu}\,(\Lambda_1^{-1}(\alpha)\,p)_{\mu}\,\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p), \tag{П.14}$$

где $\tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)$ — преобразование фурье-поля $\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)$, а

$$Q^{\alpha} \equiv \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\,U(\Lambda_1(\alpha),\,0)\,Q'U(\Lambda_1(\alpha),\,0)^{-1}. \tag{П.15}$$

С помощью (П.13) получаем из (П.14)

$$\lim_{\alpha\to\infty}\mathrm{i}\,[Q^{\alpha},\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}(l_{ij}^{0} + l_{ij}^{1})\,(p_0 + p_1)\,\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p).$$

Покажем, что так как $L_{ij}(\mathrm{i}p)$, данное уравнением (П.11), определяет оператор Q', величина

$$L_{ij}^{\infty}(\mathrm{i}p) \equiv \mathrm{i}\,(l_{ij}^{0} + l_{ij}^{1})\,(p_0 + p_1)$$

определяет оператор Q^{∞}. С этой целью рассмотрим выражение

$$Q_{\mathrm{ex}}^{\infty} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int (l_{ij}^{0} + l_{ij}^{1})\,(p_0 + p_1)\,a_{i,\,\mathrm{ex}}^{+}(p)\,a_{j,\,\mathrm{ex}}(p)\,\frac{d^3p}{2\omega_p},$$

где $a_{i,\,\mathrm{ex}}(p)$ и $a_{i,\,\mathrm{ex}}^{+}(p)$ — соответственно операторы поглощения и рождения частиц i-го сорта с импульсом $\mathbf{p}$, удовлетворяющим каноническим перестановочным соотношениям. Легко проверить, используя (П.10б) и (П.10в), что

$$\mathrm{i}\,[Q_{\mathrm{ex}}^{\infty},\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i}\sum_{j}(l_{ij}^{0} + l_{ij}^{1})\,(p_0 + p_1)\,\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p). \tag{П.16}$$

Следовательно, Q^{α} сходится к Q_{ex}^{∞}.

Поскольку Q^{α}, данное формулой (П.15), перестановочно с S-матрицей (так как $U(\Lambda,\,0)$ и Q' перестановочны с ней), то

$$Q_{\mathrm{in}}^{\infty} = Q_{\mathrm{out}}^{\infty} = Q^{\infty}. \tag{П.17}$$

Таким образом, можно трактовать Q^{∞} на равных основаниях с Q'.

Как отмечалось раньше, $(l_{ij}^{0} + l_{ij}^{1})$ является вещественной и симметричной матрицей и поэтому ее можно диагонализовать с помощью вещественной ортогональной матрицы. Из (П.16) и (П.17) получаем

$$\mathrm{i}\,[Q^{\infty},\ \widetilde{\psi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i}l_i\,(p_0+p_1)\,\widetilde{\psi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p), \tag{П.18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{i,\,\mathrm{ex}}(x) = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x);\\ &l_i\delta_{ij} = \sum_k \sum_m R_{ik}\,(l^0_{km} + l^1_{km})\,R^{-1}_{mj};\\ &R^{-1} = R^{\mathrm{T}}, \quad R = R, \end{aligned}\right\} \tag{П.18б}$$

а $\widetilde{\psi}(p)$ — преобразование Фурье $\psi(x)$.

Возьмем затем элемент S матрицы, описывающий соударение двух частиц $j \neq k$

$$(\widetilde{\psi}_{j,\,\mathrm{out}}(p^{(1)})\,\widetilde{\psi}_{k,\,\mathrm{out}}(p^{(2)})\,\Omega,\ \ \widetilde{\psi}_{j,\,\mathrm{in}}(p^{(3)})\,\widetilde{\psi}_{k,\,\mathrm{in}}(p^{(4)})\,\Omega) = S_{jkjk} \neq 0, \tag{П.19}$$

где

$$p^{(1)}_{\mu} + p^{(2)}_{\mu} = p^{(3)}_{\mu} + p^{(4)}_{\mu}. \tag{П.19а}$$

Можно показать, что если (П.19) выполняется для **некоторых** значений импульсов $p^{(i)}_{\mu}$, $i = 1, \ldots, 4$, то оно выполняется также для **всех** значений $p^{(i)}_{\mu}$, $i = 1, \ldots, 4$, удовлетворяющих (П.19а).

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} &(\widetilde{\psi}_{j,\,\mathrm{out}}(p^{(1)})\,\widetilde{\psi}_{k,\,\mathrm{out}}(p^{(2)})\,\Omega,\ \ Q^{\infty}\widetilde{\psi}_{j,\,\mathrm{in}}(p^{(3)})\,\widetilde{\psi}_{k,\,\mathrm{in}}(p^{(4)})\,\Omega) =\\ &= (Q^{\infty}\widetilde{\psi}_{j,\,\mathrm{out}}(p^{(1)})\,\widetilde{\psi}_{k,\,\mathrm{out}}(p^{(2)})\,\Omega,\ \ \widetilde{\psi}_{j,\,\mathrm{in}}(p^{(3)})\,\widetilde{\psi}_{k,\,\mathrm{in}}(p^{(4)}\,\Omega), \end{aligned} \tag{П.20}$$

в котором подставляем выражение (П.18а). Используя (П.19), получаем

$$l_j\,(p^{(3)}_0 + p^{(3)}_1) + l_k\,(p^{(4)}_0 + p^{(4)}_1) = l_j\,(p^{(1)}_0 + p^{(1)}_1) + l_k\,(p^{(2)}_0 + p^{(2)}_1).$$

Принимая во внимание (П.19а) и большой произвол в выборе значений $p^{(i)}_0$ и $p^{(i)}_1$, $i = 1, 2, 3, 4$, получаем

$$l_j = l_k = l.$$

На основании (П.18б) имеем

$$l^0_{ij} + l^1_{ij} = \delta_{ij}l. \tag{П.21}$$

Вернемся теперь к уравнению (П.12)

$$\mathrm{i}\,[Q',\ \widetilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i}\sum_j l^{\mu}_{ij}p_{\mu}\widetilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p)$$

и произведем такое преобразование Лоренца $\hat{\Lambda}$ (трехмерный поворот), которое заменяет p_1 на $(-p_1)$ и p_2 на $(-p_2)$. Получаем в результате

$$\mathrm{i}\,[\hat{Q}',\ \widetilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}(l^0_{ij}p_0 - l^1_{ij}p_1 - l^2_{ij}p_2 + l^3_{ij}p_3)\,\widetilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p),$$

где

$$\hat{Q}' \equiv U(\hat{\Lambda},\ 0)\,Q'U(\hat{\Lambda},\ 0)^{-1}.$$

Повторяя с $\hat{Q}'$ такую же процедуру как с Q', получаем

$$l^0_{ij} - l^1_{ij} = \delta_{ij}\hat{l}, \tag{П.22}$$

а отсюда

$$l_{ij}^0 = \delta_{ij} l^0; \quad l_{ij}^1 = \delta_{ij} l^1.$$

Если вместо (П.13) взять преобразование

$$(\Lambda_r^{-1}(\alpha)\, p)_0 = p_0 \operatorname{ch}\alpha + p_r \operatorname{sh}\alpha, \qquad r = 1,\ 2$$
$$(\Lambda_r^{-1}(\alpha)\, p)_1 = p_0 \operatorname{sh}\alpha + p_r \operatorname{ch}\alpha,$$

то сходные рассуждения привели бы к равенству

$$l_{ij}^i = \delta_{ij} l^r, \quad r = 1,\ 2.$$

Таким образом, окончательный результат наших рассуждений [ср. (П.11)] гласит, что

$$L_{ij} = l_{ij} + l^\mu \partial_\mu.$$

Если подставить это в (П.12), то получим

$$\mathrm{i}\,[Q - B,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = l^\mu \partial_\mu \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x);$$
$$\mathrm{i}\,[Q - B - l^\mu P_\mu,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = 0$$

или

$$Q = B + l^\mu P_\mu. \tag{П.23}$$

Следует, однако, помнить, что результат (П.23) получен в предположении вида (П.11) для L_{ij}. Таким образом, для того чтобы доказать равенство (П.23), которое является сутью «no go»-теоремы, для трансляционно-инвариантных генераторов рассмотрим еще случай, когда

$$L_{ij} = l_{ij}^\mu \partial_\mu + l_{ij}^{\mu_1\mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2}.$$

Согласно (П.10б) и (П.10в), матрицы $(\mathrm{i} l_{ij}^{\mu_1\mu_2})$ для фиксированных μ_1 и μ_2 являются чисто мнимыми и эрмитовыми и их можно (хотя и не всегда одновременно) привести к диагональному виду с помощью **унитарных** преобразований.

Имеем поочередно

$$\mathrm{i}\,[Q,\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{i} l_{ij}^\mu p_\mu - l_{ij}^{\mu_1\mu_2} p_{\mu_1} p_{\mu_2})\, \tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p); \tag{П.24}$$

$$\mathrm{i}\,[Q^\alpha,\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] =$$
$$= \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{i} l_{ij}^\mu (\Lambda_1^{-1}(\alpha)\, p)_\mu - l_{ij}^{\mu_1\mu_2} (\Lambda_1^{-1}(\alpha)\, p)_{\mu_1} (\Lambda_1^{-1}(\alpha)\, p)_{\mu_2})\, \tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p);$$

$$\mathrm{i}\,[Q^\infty,\ \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \sum_{j=1}^{n} (l_{ij}^{00} + 2 l_{ij}^{01} + l_{ij}^{11})\, (p_0 + p_1)^2\, \tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p), \tag{П.25}$$

где

$$Q^\alpha = \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^2 U(\Lambda_1(\alpha),\ 0)\, Q\, U(\Lambda_1(\alpha),\ 0)^{-1};$$
$$Q^\infty = \lim_{\alpha\to\infty} Q^\alpha.$$

Диагонализуя матрицу $(l_{ij}^{00} + 2 l_{ij}^{01} + l_{ij}^{11})$, получаем из (П.25)

$$[Q^\infty,\ \tilde{\psi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = l_i\, (p_0 + p_1)^2\, \tilde{\psi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p), \tag{П.26а}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)=\sum_{j=1}^{n} U_{ij}\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x) \neq \psi^{+}_{i,\,\mathrm{ex}}(x);\\ &l_i\delta_{ij}=\mathrm{i}\sum_{k}\sum_{m} U_{ik}\,(l^{00}_{km}+2l^{01}_{km}+l^{11}_{km})\,U^{-1}_{mj};\\ &U^{-1}=U^{+},\quad l_i=\bar{l}_i. \end{aligned}\right\} \tag{П.26б}$$

Пользуясь элементами S-матрицы типа (П.19) и выражениями типа (П.20), приспособленными к рассматриваемому сейчас случаю, получаем с помощью (П.26) для $j \neq k$

$$l_j\,(p_0^{(3)}+p_1^{(3)})^2+l_k\,(p_0^{(4)}+p_1^{(4)})^2=l_j\,(p_0^{(1)}+p_1^{(1)})^2+l_k\,(p_0^{(2)}+p_1^{(2)})^2. \tag{П.27}$$

Принимая снова во внимание (П.19а) и произвол в выборе значений $p_0^{(i)}$, $p_1^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, легко показать, что единственным решением (П.27) является

$$l_j = l_k = 0,$$

что, в свою очередь, ведет к соотношениям

$$l^{00}_{km}+l^{rr}_{km}\quad r=1,\,2,\,3; \tag{П.28а}$$

$$l^{0r}_{km}=0\quad r=1,\,2,\,3. \tag{П.28б}$$

Уравнение (П.24) принимает теперь вид

$$\mathrm{i}\,[Q,\,\tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)]=\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} l^{\mu}_{ij}p_{\mu}\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p)-\sum_{j=1}^{n}\Big(l^{00}_{ij}m^2-\sum_{r\neq s=1}^{3} l^{rs}_{ij}p_rp_s\Big)\,\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p). \tag{П.29}$$

Применим к (П.29) преобразование (П.13), именно

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\,[U(\Lambda_1(\alpha),\,0)\,QU(\Lambda_1(\alpha),\,0)^{-1},\,\tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)]=\\ &=\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} l^{\mu}_{ij}\,(\Lambda_1^{-1}(\alpha)\,p)_{\mu}\,\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p)-m^2\sum_{j=1}^{n} l^{00}_{ij}\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p)-\\ &-\sum_{j=1}^{n}\Big(2\sum_{s=2}^{3} l^{1s}_{ij}\,(\Lambda_1^{-1}(\alpha)\,p)_1\,p_s+\sum_{s\neq r=2}^{3} l^{rs}_{ij}p_rp_s\Big)\,\tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p). \end{aligned}$$

Исследуем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{j}\sum_{s=2}^{3} l^{1s}_{ij}\,(\Lambda_1^{-1}(\alpha)\,p)_1\,p_s&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=2}^{3}\,[(l^{1s}_{ij}\,\mathrm{sh}\,\alpha)\,p_0p_s+(l^{1s}_{ij}\,\mathrm{ch}\,\alpha)\,p_1p_s]=\\ &=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=2}^{3}\,(l'^{0s}_{ij}p_0p_s+l'^{1s}_{ij}p_1p_s). \end{aligned}$$

Результаты (П.28) применимы также к генераторам $U(\Lambda_1(\alpha),\,0)\,QU(\Lambda,(\alpha),\,0)^{-1}$ после соответствующих изменений. Следовательно, выполняются равенства

$$l^{1s}_{ij}\,\mathrm{sh}\,\alpha\equiv l'^{0s}_{ij}=0,\quad s=2,\,3.$$

Подобным образом можно показать, что в общем случае выполняется

$$l_{ij}^{rs} = 0, \quad r, s = 1, 2, 3, r \neq s.$$

Окончательно получаем из (П.29)

$$\mathrm{i}\,[Q', \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} l_{ij}^{\mu} p_{\mu} \tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p),$$

т. е. уравнение (П.12), в котором

$$\left.\begin{aligned} &Q' = Q - B'; \\ &\mathrm{i}\,[B', \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = -m^2 \sum_{j=1}^{n} l_{ij}^{00} \tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p) \end{aligned}\right\} \tag{П.30}$$

и, следовательно, B' является генератором внутренней симметрии.

Как мы знаем, уравнение (П.12) ведет к (П.23).

Повторяя изложенную выше процедуру к случаю, когда L_{ij} является оператором более высокого порядка, чем 2 в ∂, получим этот же результат (П.23). Это означает, что наиболее общим трансляционно-инвариантным генератором является линейная комбинация генераторов внутренней симметрии и составляющих операторов энергии — импульса.

Это завершает схему доказательства для случая **трансляционно-инвариантного** генератора.

Перейдем теперь к исследованию генераторов, которые не **перестановочны с группой трансляции.**

Мы знаем уже (см. формулу (П.9)), что коэффициент L_{ij} является полиномом от $x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$, а также ∂_ρ. Начнем с простейшего случая, когда L_{ij} **линейно** по отношению к $x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$, т. е. исследуем уравнение

$$\mathrm{i}\,[Q, \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} \{(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, d_{ij}^{\mu\nu}(\partial) + d_{ij}(\partial)\}\, \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x), \tag{П.31а}$$

где

$$d_{ij}^{\mu\nu} = -d_{ij}^{\nu\mu}. \tag{П.31б}$$

Легко видеть, что генератор

$$Q^{\rho} \equiv \mathrm{i}\,[P^{\rho}, Q]$$

является трансляционно-инвариантным, так как

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,[Q^{\rho}, \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] &= [[Q, \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)]\, P^{\rho}] + \\ &+ [[\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x), P^{\rho}]\, Q] = \\ = -\mathrm{i} \sum_{j} \{(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, d_{ij}^{\mu\nu}(\partial) &+ d_{ij}(\partial)\}\, [\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x), P^{\rho}] - \\ - \partial^{\rho} \Big[\sum_{j} \{x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, d_{ij}^{\mu\nu}(\partial) &+ d_{ij}(\partial)\}\, \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x)\Big] = \\ = \sum_{j} \{(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, d_{ij}^{\mu\nu}(\partial) &+ d_{ij}(\partial)\}\, \partial^{\rho} \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x) - \\ - \sum_{j} (g_\mu^\rho \partial_\nu - g_\nu^\rho \partial_\mu)\, &d_{ij}^{\mu\nu}(\partial)\, \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x) - \\ - \sum_{j} \{(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, d_{ij}^{\mu\nu}(\partial) &+ d_{ij}(\partial)\}\, \partial^{\rho} \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x) \end{aligned}$$

или *

$$\mathrm{i}\,[Q^{\rho},\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)]=2\sum_j d_{ij}^{\mu\rho}(\partial)\,\partial_\mu\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x).$$

Из полученных раньше результатов для трансляционно-инвариантных генераторов следует, что

$$\mathrm{i}d_{ij}^{\mu\rho}(\mathrm{i}p)\,p_\mu=-\mathrm{i}\delta_{ij}a^{\rho\mu}p_\mu+c_{ij}^{\rho}, \qquad (\text{П.32а})$$

где $a^{\rho\mu}$ и c_{ij}^{ρ} не зависят от p. Используя (П.31), получаем

$$-\mathrm{i}\delta_{ij}a^{\rho\mu}p_\mu p_\rho+c_{ij}^{\rho}p_\rho=0$$

или

$$-\mathrm{i}\delta^{ij}\left(a^{00}(\mathbf{p}^2+m^2)+\sum_{s=1}^{3}(a^{0s}+a^{s0})\,p_s\omega(p)+\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}a^{sr}p_sp_r+\right.$$

$$+c_{ij}^{0}\omega_p+\sum_{r=1}^{3}c_{ij}^{r}p_r=0, \qquad \omega_p\equiv+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta_{ij}a^{00}m^2=0;$$

$$-\delta_{ij}\sum_{s=1}^{3}(a^{0s}+a^{s0})\,p_s+c_{ij}^{0}=0;$$

$$\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}a^{sr}p_sp_r=0;$$

$$\sum_{s=1}^{3}c_{ij}^{r}p_r=0$$

или

$$a^{\mu\nu}=-a^{\nu\mu} \qquad (\text{П.32б})$$

$$c_{ij}^{\mu}=0 \quad \mu\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3. \qquad (\text{П.32в})$$

Подстановка этих результатов в (П.31) дает

$$\mathrm{i}\,[Q,\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)]=-(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\,a^{\mu\nu}\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)+\sum_{j=1}^{n}d_{ij}(\partial)\,\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x).$$

Поскольку для скалярных полей выполняется

$$[M_{\mu\nu},\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)]=\mathrm{i}\,(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\,\varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x),$$

имеем

$$\mathrm{i}\,[Q-a^{\mu\nu}M_{\mu\nu},\ \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)]=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}(\partial)\,\varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x)$$

---

* Следует помнить, что $\mathrm{i}\,[P_\mu\,[Q,\ \varphi_i]]=\left[P_\mu,\ \sum_j L_{ij}(x,\ \partial)\,\varphi_j\right]=$ $=\sum_j L_{ij}(x,\ \partial)\,[P_\mu,\ \varphi_j]=-\mathrm{i}\sum_j L_{ij}(x,\ \partial)\,\partial_\mu\varphi_j$ и $[Q\,[P_\mu,\ \varphi_i]]=-\mathrm{i}\,[Q,\ \partial_\mu\varphi_i]=$ $=-\mathrm{i}\partial_\mu\,[Q,\ \varphi_i]=-\sum_j\{(\partial_\mu L_{ij})\,\varphi_j-L_{ij}\partial_\mu\varphi_j\}$.

и, следовательно, генератор $Q - a^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$ является трансляционно-инвариантным. Поэтому

$$Q = B + l^{\mu}P_{\mu} + a^{\mu\nu}M_{\mu\nu}, \quad a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}. \tag{П.33}$$

Рассмотрим следующий, несколько более трудный случай, это когда L_{ij} зависит квадратично от выражения $x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}$:

$$[Q, \varphi_{i,\,\mathrm{ex}}(x)] = \sum_{j=1}^{n} \{(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})(x_{\sigma}\partial_{\tau} - x_{\tau}\partial_{\sigma})\, d_{ij}^{(\mu\nu)(\sigma\tau)}(\partial) + \\ + (x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})\, d_{ij}^{\mu\nu}(\partial) + d_{ij}(\partial)\}\, \varphi_{j,\,\mathrm{ex}}(x), \tag{П.34}$$

где $d^{(\mu\nu)(\sigma\tau)}$ антисимметрично относительно перестановок μ с ν, σ с τ, а также симметрично относительно перестановок пар (μ, ν) и (σ, τ).

Можно убедиться таким же путем, как в случае (П.31), что генератор

$$Q^{\alpha\beta} = -[P^{\alpha}[P^{\beta}, Q]]$$

трансляционно-инвариантен и ведет к уравнению

$$[Q^{\alpha\beta}, \tilde{\varphi}_{i,\,\mathrm{ex}}(p)] = 8\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{(\mu\beta)(\nu\alpha)} p_{\mu} p_{\nu} \tilde{\varphi}_{j,\,\mathrm{ex}}(p).$$

Как известно из предыдущих рассуждений, касающихся трансляционно-инвариантных генераторов, L_{ij} может зависеть от p_{μ}, $\mu = 0, 1, 2, 3$, лишь **линейно**. Поэтому должно выполняться

$$d_{ij}^{(\mu\nu)(\sigma\tau)} = 0. \tag{П.35}$$

Уравнение (П.34) сводится, таким образом, к ранее рассмотренному уравнению.

Подобным образом можно доказать, что L_{ij}, зависящее от $(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})$ в степени более высокой, чем 2, должно исчезать.

Таким образом мы закончили очерк полного доказательства «no go»-теоремы Колмена и Мандули для взаимодействующих скалярных полей одной массы. Результат, заключается в формуле (П.33)

$$\left.\begin{array}{c} Q = B + l^{\mu}P_{\mu} + l^{\mu\nu}M_{\mu\nu}, \\ \text{где } l^{\mu} \text{ и } l^{\mu\nu} = -l^{\nu\mu} \text{ числовые коэффициенты, а} \\ [B, P_{\mu}] = [B, M_{\mu\nu}] = 0. \end{array}\right\} \tag{П.36}$$

Это выражается следующим образом: произвольный генератор можно представить в виде линейной комбинации генераторов группы Пуанкаре и скалярных, трансляционно-инвариантных генераторов внутренних симметрий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lee T. D., Yang C. N.**— Phys. Rev., 1957, v. 105, p. 1971; **Wu C.S. e.a.**— Ibid., p. 1413.
2. **Yang C. N.**— In: VII Winter School of Theoretical Physics, Karpacz 1970; Acta Universitatis Wratislaviensis, 1970; **Weyl H.** Symmetry, Princeton University Press, 1952.

3. **Wightman A. S.**— Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 860; **Haag R.**-Kgl. Dan. Mat.-fys. Medd., 1955, v. 29, N 12;
Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.— Nuovo cimento, 1956, v. 1 (X), p. 205; 1957, v. 6 (X), p. 319; **Glaser V., Lehmann H., Zimmermann W.**— Ibid., 1957, v. 6 (X), p. 1122; **Streater R. F., Wightman A. S.** PCT, Spin and Statistics an All That; Benjamin W. A. Inc., N. Y.— Amsterdam, 1964.
4. **Orzalesi C. A., Sucher J., Woo C. H.**— Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1550; **Orzalesi C. A.**— Rev. Mod. Phys., 1970, v. 42, p. 381.
5. **Lopuszański J. T.**— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 2401.
6. **Borchers H. J.**— Nuovo cimento, 1960, v. 15, p. 784; **Araki H., Haag R.**— Comm. Math. Phys., 1967, v. 4, p. 77.
7. **Aks S. Ø.**— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 516.
8. **Pohlmeyer K.**— Comm. Math. Phys., 1976, v. 46, p. 207; **Lüscher M., Polhmeyer K.**— Nucl. Phys., 1978, v. B137, p. 46; **Lüscher M.**— Nucl. Phys., 1978, v. B135, p. 1; **Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B.**— Ibid., v. B133, p. 525; **Woo C. H.** Preprint ZIF, Bielefeld, 1979.
9. **Buchholz D., Lopuszański J. T.** Preprint U. C. Berkeley 1978, Lett. Math. Phys., 1979, v. 3, p. 175.
10. **Hepp K.**— Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 111.
11. **Kastler D., Robinson D. W., Swieca A.**— Comm. Math. Phys., 1966, v. 2, p. 108; **Schroer B., Stichel J.**— Ibid., v. 3, p. 258.
12. **Lopuszański J. T.**— Ibid., 1969, v. 12, p. 80; v. 14, p. 158; Springer Tracts in Modern Physics, Springer Verlag, Berlin— Heidelberg, 1970, V. 52, p. 201—214.
13. **O'Raifeartaigh L.**— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 575.
14. **Michel L.**— Nucl. Phys., 1964, v. 57, p. 356; Phys. Rev., 1965, v. 137B, p. 405; **Coleman S., Mandula J.**— Ibid., 1967, v. 159, p. 1251; **Garber W. D., Reeh H.**— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 59; **Garber W. D., Reeh H.**— Ibid., p. 985; **Garber W. D., Reeh H.** On the Structure of Symmetry Generators. Preprint Göttingen, November, 1978.
15. **Buchholz D.**— Comm. Math. Phys., 1975, v. 42, p. 269; 1975, v. 45, p. 1; 1977, v. 52, p. 147.
16. **Dell'Antonio G. F.**— Nuovo cimento, 1972, v. 12A, p. 756; **Lopuszański J. T.**— Rep. Math. Phys., 1974, v. 6, p. 159.
17. **Березин Ф., Кац Г.** Мат. сборник, 1970, т. 82, с. 311; **Гольфанд Й., Лихтман Е.** Проблемы в теоретической физике, том, посвященный И. Тамму. М., Наука, 1972, с. 37—44.
Volkov D., Akulov V.— Phys. Lett., 1973, v. 46B, p. 109.
18. **Neven A., Schwartz H.**— Nucl. Phys., 1971, v. B31, p. 86; **Wess J., Zumino B.**— Ibid., 1974, v. B70, p. 49; Phys. Lett., 1974, v. 49B, p. 52.
19. **Haag R., Lopuszański J. T., Sohnius M.**— Nucl. Phys., 1975, v. B88, p. 257; см. также обзорную статью: **Lopuszański J. T.** XII Winter School of Theoretical Physics, Karpacz 1975, Acta Universitatis Wratislaviensis, 1975.
20. **Yang C. N., Mills R. L.**,— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
21. **Swieca J. A.**— Phys. Rev., 1976, v. D13, p. 312; **Buchholz D., Fredenhagen K.** Charge Screening and Mass Spectrum in Abelian Gauge Theories. Preprint University of California, 1979.
22. **Goldstone S., Salam A., Weinberg S.**— Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 956; **Gilbert W.**— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 713.
23. **Maison D., Reeh H.**— Comm. Math. Phys., 1971, v. 24, p. 67.
24. **Weyl H.**— Z. Phys., 1929, Bd 56, S. 330.
25. **Higgs P. W.**— Phys. Lett., 1964, v. 12, p. 132; Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 508; Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1166; см. также обзорную статью: **Lopuzsański J. T.** Fortschritte Phys., 1974, Bd 22, S. 295.
26. **Strocchi F.**— Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 2334.

27. **Lee B. W.**— Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 823.
28. **Kibble T.W.B.**— Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 1554.
29. **Weinberg S.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264; 1971, v. 27, p. 1688; см. также обзорные статьи: **Salam A.**— Proc. of the 8-th Nobel Symposium, N.Y., John Wiley and Sons, 1968; **Zumino B.** Cargése Summer Institute, 1972. Ref. Th. 1550—CERN, 1972.
30. **Fröhlich J.**— In.: Field Theoretical Methods in Particle Physics. Ed. by Werner Rühe. N. Y.— Lond., Plenum Press., 1980, p. 1—41; **Osterwalder K., Seiler E.** Gauge Field Theories on a Lattice.— Ann. Phys. N. Y., 1978, v. 110, p. 440.