*«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1983, ТОМ 14, ВЫП. 5*

# ПАРАСТАТИСТИКА И ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ

*Посвящается памяти*
*Юрия Михайловича Широкова*

УДК 539.21

*А. Б. Говорков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор возможных обобщений статистик тождественных частиц — парастатистик и соответствующих им теорий параполей. Обсуждается связь парастатистик со случаями вырождения частиц по какой-либо внутренней степени свободы, а также те ограничения, которые налагаются на внутренние симметрии при их параполевом описании. В частности, обсуждается различие гипотез о «трехцветных» кварках и о «паракварках».

A survey of possible generalisations of statistics of identical particles — parastatistics — and of the corresponding parafield theories is presented. The connection between parastatistics and the case of degeneracy in some internal degree of freedom is discussed. The restriction of this correspondence is indicated. Especially, the distinction between the hypothesis of three-coloured quarks and the one of paraquarks is considered.

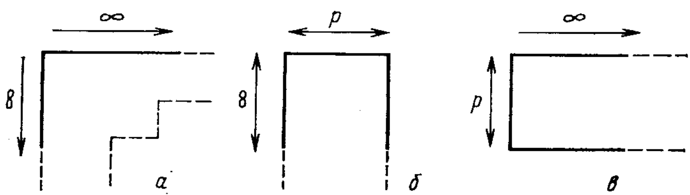
## ВВЕДЕНИЕ

**Определение:** *Обобщенной статистикой тождественных частиц называется такая статистика, когда число частиц в симметричном либо в антисимметричном состоянии не может превосходить некоторое заданное целое число $p$, называемое порядком статистики.* Очевидно, если $p = 1$, то под это определение попадают обычные ферми- и бозе-статистики. Если же $p > 1$, то в этом случае говорят о *парaферми-* и *парабозе*-статистиках соответственно или же о *парастатистиках* вообще.

Возможность существования статистик тождественных частиц, промежуточных между ферми- и бозе-статистиками, обсуждалась давно [1, 2] (о поведении «*парагаза*» см. [3—5]). Паули по этому поводу писал: «*Представляется весьма своеобразным то обстоятельство, что волновая механика дает больше возможностей, и притом равноправных с точки зрения принципа соответствия, чем встречается в природе*» [6, с. 192]. Дирак также отметил, что «*математически возможны и другие более сложные виды симметрии, но они не соответствуют ни одной из известных частиц*» [7, с. 279]. Столь авторитетные высказывания подчеркивают важность проблемы теоретической допустимости и в то же время отсутствия реализации в природе промежуточных (или пара) статистик.

Многими авторами предпринимались попытки доказательства невозможности существования парастатистик [8—19]. Внимательное изучение таких попыток [2, 20—23] показало, что обычно в их основе лежит более узкая, чем это требуется определением тождественности частиц, формулировка принципа неразличимости, как это имело место в работах [9, 10], а также в недавних работах [18, 19], либо же неправильное понимание кластерного закона для парачастиц [13], как это было разъяснено в [20].

В конце концов, Хааг с сотрудниками [24] строго показал непротиворечивость парастатистик основным аксиомам квантовой теории. Ими же была получена классификация парастатистик, совпадающая с классификацией Хартла, Столта и Тейлора [20—22], исходившими из кластерных свойств волновых функций парачастиц. Согласно этой классификации парастатистики подразделяются прежде всего на




Схемы Юнга, отвечающие парастатистикам:
*а* — бесконечной; *б* — параферми-статистике; *в* — парабозе-статистике

конечные и бесконечные. *Бесконечной* статистике отвечают произвольные схемы Юнга, по которым производится симметризация индексов частиц (рисунок, *а*). Бесконечные парастатистики мало исследованы, и до сих пор не выяснено, существует одна такая статистика [24] или же их множество [21]. В дальнейшем нами они рассматриваться не будут.

*Конечным* парастатистикам отвечают схемы Юнга с ограниченным числом столбцов для параферми- или строк для парабозе-статистики (рисунки, *б* и *в*).

Возникает естественный вопрос: можно ли сопоставить парастатистикам тождественных частиц (первично-квантованной теории) какую-либо теорию квантованного поля (вторично-квантованную теорию)? Хорошо известно, что для обычных ферми- и бозе-статистик вся информация о перестановочных свойствах волновых функций частиц заложена в коммутационных правилах для операторов рождения и уничтожения частиц.

Единственная попытка непосредственного построения аналогичных операторов для частиц, описываемых многомерными представлениями Юнга, была предпринята Окайамой [25]. Однако впоследствии была доказана ошибочность его построения [26]. Затем многими авторами обсуждалась связь между первично- и вторично- квантованными теориями парачастиц [20—22, 27—31], но они не имели конструктивной программы. (Отметим, однако, важный результат работ [20—22] о взаимнооднозначном соответствии этих теорий.)

Можно, однако, избежать сложного непосредственного построения вторично-квантованной теории в соответствии с первично-квантованной и решить эту задачу «в обход». Для этого следует попытаться определить, каким ограничениям должны подчиняться операторы рождения и уничтожения, и, далее, установить все те схемы вторичного квантования, которые удовлетворяют этим требованиям. Этому пути и будем следовать в данном обзоре. Главным в таком сопоставлении будет метод Н. Н. Боголюбова [32] непосредственного квантования матрицы плотности, расширенный в [33] на общий случай парастатистик. Оказывается, что такими схемами являются схемы *параквантования* полей, предложенные Грином [34] и Д. В. Волковым [35] при обобщении квантования полей.

В дальнейшем была установлена тесная связь параквантования с алгебрами Ли классических ортогональных $SO(2K)$, $SO(2K+1)$ и симплектической $Sp(2K)$ групп при стремлении размерности — числа всевозможных одночастичных состояний — к бесконечности: $K\to\infty$ [26, 36—42]. Недавно удалось развить схему квантования, соответствующую алгебрам Ли унитарных групп $SU(2K)$ и $SU(2K+1)$ [43, 44]. Таким образом, каждой алгебре Ли классических групп удалось сопоставить определенную схему обобщенного квантования и тем самым придать этим схемам определенное математическое обоснование.

Итак, парастатистики и соответствующая им теория параполей представляются достаточно хорошо обоснованными в смысле согласованности с основными постулатами квантовой теории.* Но тогда почему же в природе нет объектов, которые описывались бы такой замечательной теорией? Ответ оказывается удивительно простым: *на самом деле такая теория описывает случаи точного вырождения частиц по какой-либо внутренней координате.* Более того, если в природе встречается точное вырождение частиц по какой-либо внутренней координате, то логичнее не различать эти частицы внутренним индексом, с которым нельзя связать какую-либо наблюдаемую, а скорее следует рассматривать такие частицы как тождественные, но подчиняющиеся парастатистике, порядок которой совпадает с числом вырождения. Можно ожидать также, что такое описание является первым приближением для нарушенных симметрий, когда небольшое возмущение снимает вырождение. Эти выводы будут проиллюстрированы на примерах парастатистик второго и третьего порядков при описании с их помощью внутренних квантовых чисел типа изоспина и странности.

Далее оказывается, что параполевой подход к описанию внутренних симметрий налагает на них весьма жесткие ограничения. Строго говоря, при таком подходе вообще нельзя говорить о внутренних сим-

* Схема параквантования с большой подробностью изложена также в недавно изданной книге: **Ohnuki Y., Kamefuchi S.** Quantum Field Theory and Parastatistics. University of Tokyo Press, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1982.

метриях (параполя не имеют индексов), но можно говорить лишь о соответствии результатов теории, сформулированной на языке параполей, с результатами теории обычных полей, подчиняющихся определенной внутренней симметрии. Именно в этих ограничениях и может заключаться эвристическая ценность параполевого подхода. Особенно жесткие ограничения возникают при формулировке аналогов калибровочных теорий. Оказывается, *что в теории параполей можно построить единственную копию янг-миллсовского лагранжиана, отвечающую калибровочной симметрии* $SO$ (3)! В связи с этим в конце обзора обсуждается различие в описании кварков как «*трехцветных*» фермионов и как *парафермионов* третьего порядка, а также возможности расширения схемы параквантования с целью включения в нее цветовой $SU$ (3)-симметрии.

## 1. ТЕОРЕМА О СВЯЗИ ПАРАСТАТИСТИК И ПАРАПОЛЕЙ

Система из $n$ частиц полностью характеризуется матрицей плотности $\rho$ ($k_1, \ldots, k_n; k'_1, \ldots, k'_n; t$) — комплексной функцией от $2n$-переменных $k_1, \ldots, k_n; k'_1, \ldots, k'_n$ и времени $t$ с вещественными положительно определенными диагональными элементами. Под $k_i$ здесь понимается полный набор квантовых чисел, характеризующих одночастичное состояние, например импульс и проекция спина $i$-й частицы. Для простоты спектр этих квантовых чисел будем считать дискретным.

Согласно Н. Н. Боголюбову [32, с. 303] принцип неразличимости тождественных частиц состоит в требовании *симметричности матрицы плотности* относительно любых перестановок $\mathcal{P}$ индексов частиц

$$\rho\,(k_{\mathcal{P}_1}, \ldots, k_{\mathcal{P}_n}; k'_{\mathcal{P}_1}, \ldots, k'_{\mathcal{P}_n}) = \rho\,(k_1, \ldots, k_n; k'_1, \ldots, k'_n) \qquad (1)$$

(аргумент $t$ здесь, как и всюду ниже, мы опускаем). Н. Н. Боголюбов подчеркнул соответствие этого требования свойству симметрии классической функции распределения для одинаковых частиц и назвал его «*классической симметрией*» матрицы плотности в отличие от более специфического свойства «*квантовой симметрии*» волновых функций, или, что то же самое, симметрии матрицы плотности по «*первичным*» $k_1, \ldots, k_n$ и «*вторичным*» $k'_1, \ldots k'_n$ аргументам в отдельности.

Для вторичного квантования необходимо определить пространство чисел заполнения. Однако из-за отсутствия в общем случае какой-либо симметрии матрицы плотности относительно одних первичных, так же как и относительно одних вторичных аргументов мы не можем ввести числа заполнения для каждой из этих совокупностей аргументов в отдельности. Но можно это сделать для обеих совокупностей вместе. Можно определить число частиц $n_{ij}$, занимающих данное состояние $k^{(i)}$ среди всех первичных состояний $k_1, \ldots, k_n$ и состояние $k^{(j)}$ среди всех вторичных состояний $k'_1, \ldots, k'_n$. Числа $n_{ij}$ будем называть числами заполнения в «*двойном состоянии*» ($k^{(i)}$,

$k^{(j)}$)», а пространство таких чисел —«*пространством двойных чисел заполнения*» [33]. Теперь можно характеризовать состояние системы заданием матрицы плотности в этом пространстве

$$f\{n_{ij}\}, \quad \sum_{n_{ii}=1}^{\infty} f\{n_{ii}\}=1. \tag{2}$$

Здесь под $\{n_{ij}\}$ подразумевается набор чисел $n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{21}, n_{22}, \ldots$ Диагональная матрица плотности $f\{n_{ii}\}$ имеет смысл вероятности обнаружения $n_{11}$ частиц в состоянии $k^{(1)}$, $n_{22}$ частиц в состоянии $k^{(2)}$ и т. д. Для обычных ферми- и бозе-статистик имеет место

$$f\{n_{ij}\} = \overline{\chi}(N'_j)\,\chi(N_i), \tag{3}$$

где

$$N_i=\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}, \quad N'_j=\sum_{i=1}^{\infty} n_{ij} \tag{4}$$

и черта означает комплексное сопряжение. (Для ферми-статистики, конечно, $N_i, N'_j, n_{ij} \leqslant 1$.) В общем случае (3) не имеет места и задание чисел (4) не определяет полностью состояния всей системы.

Пространство двойных чисел заполнения есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f \mid g\rangle = \sum_{n_{ij}=1}^{\infty} \overline{f}\{n_{ij}\}\, g\{n_{ij}\} = \overline{\langle g \mid f\rangle}. \tag{5}$$

Отметим, что векторами в нем являются сами матрицы плотности [45]. В нем можно ввести базисные векторы с фиксированными двойными числами

$$\mid n_{ij}^0\rangle = \prod_{i,\, j=1}^{\infty} \delta_{n_{ij} n_{ij}^0}. \tag{6}$$

Теперь можно определить *операторы перехода* частицы из одного первичного состояния $s$ в другое первичное состояние $r$ без каких-либо переходов во вторичных состояниях:

$$N_{rs} \mid n_{ij}^0\rangle = \sum_{q=1}^{\infty} [n_{sq}^0 (n_{rq}^0 - \delta_{rs} + 1)]^{1/2} \mid n_{rq}^0 + 1,\, n_{sq}^0 - 1\rangle. \tag{7}$$

Оператор $N_{rr} \equiv N_r$ представляет собой оператор полного числа частиц в первичном состоянии $r$:

$$N_r \mid n_{ij}^0\rangle = \Big(\sum_{q=1}^{\infty} n_{rq}^0\Big) \mid n_{ij}^0\rangle. \tag{8}$$

Оператор $N_{rs}^+$, эрмитово-сопряженный оператору $N_{rs}$ в смысле скалярного произведения (5), совпадает с $N_{sr}$:

$$N_{rs}^+ = N_{sr}. \tag{9}$$

Для коммутатора двух операторов (7) имеем

$$[N_{ij}, N_{rs}] = \delta_{jr}N_{is} - \delta_{is}N_{rj}. \quad (10)$$

В этом соотношении легко узнать алгебру Ли генераторов унитарной группы $SU(K)$ в пространстве всевозможных одночастичных состояний, размерность которого $K \to \infty$.

Таким образом, наш результат заключается в следующем: *при любом обобщении квантования, совместимом с принципом неразличимости тождественных частиц необходимыми условиями для операторов сдвигов состояний являются* (9) *и* (10). Отметим, что эти соотношения были получены Н. Н. Боголюбовым при квантовании матрицы плотности в бозе- и ферми-статистиках [32, с. 333]. Наш анализ, основанный на введении понятия пространства двойных чисел заполнения, показал, что они должны выполняться при любом обобщении статистик тождественных частиц [33].

Перейдем теперь к непосредственному построению операторов рождения и уничтожения частиц, например в состоянии $r$ (далее все рассуждения будут относиться к первичным состояниям в матрице плотности, но точно так же могут быть повторены и для вторичных состояний). Здесь нам необходимо сформулировать ряд предположений.

**Предложение 1.** *Оператор перехода $N_{ij}$ представим в виде произведения двух операторов*

$$N_{ij} = a^{-1}[b_i^+, b_j]_\varepsilon + c_{ij}, \quad (11)$$

где $a$, $\varepsilon$, $c_{ij}$ — *числа, а скобки*

$$[b_i^+, b_j]_\varepsilon \equiv b_i^+b_j + \varepsilon b_j b_i^+. \quad (12)$$

В силу (9) числа $a$ и $\varepsilon$ должны быть вещественными и

$$\bar{c}_{ij} = c_{ji}. \quad (13)$$

Коэффициент $a$ произволен, и всюду в дальнейшем будем полагать $a = 2$.

**Предложение 2.** *Оператор $b_i$ уменьшает число частиц в состоянии $i$ на единицу*, т. е. имеет следующее соотношение с оператором числа частиц:

$$[N_r, b_i] = -\delta_{ri}b_i. \quad (14)$$

Отсюда следует также, что $b_i^+$ есть оператор рождения

$$[N_r, b_i^+]_- = \delta_{ri}b_i^+. \quad (15)$$

**Предложение 3.** *Допустимы неособые преобразования*

$$b_r' = \sum_j u_{rj}b_j, \quad (b_r')^+ = \sum_j \bar{u}_{rj}b_j^+, \quad (16)$$

*не изменяющие соотношений* (9), (10), (14).

Подстановка (16) в (10) приводит к условию унитарности этих преобразований

$$\sum_m u_{jm}\bar{u}_{im} = \delta_{ij} \tag{17}$$

и условию для постоянных

$$\sum_{m,n} \bar{u}_{im}u_{jn}c_{mn} = c_{ij}. \tag{18}$$

Последнее должно выполняться при произвольных унитарных преобразованиях (17) и потому его решением будет

$$c_{mn} = c\delta_{mn}, \tag{19}$$

где $c$ — некоторая вещественная постоянная. Заметим, что инвариантность теории относительно унитарных преобразований (16) была постулирована в [46]. Нам же удалось вывести условие унитарности этих преобразований из исходных соотношений (10).

Подстановка (11) в (14) дает

$$[[b_r^+, b_r]_\varepsilon, b_j]_- = -2\delta_{rj}b_j. \tag{20}$$

Произведя над операторами инфинитезимальное преобразование [46]

$$b'_r = b_r + \sum_j \omega_{rj}b_j, \quad \bar{\omega}_{rj} = -\omega_{jr} \tag{21}$$

и приравняв величины первого порядка малости по $\omega$ в обеих частях (20), приходим к *основному трилинейному соотношению* для операторов рождения и уничтожения

$$[[b_r^+, b_s]_\varepsilon, b_j]_- = -2\delta_{rj}b_s. \tag{22}$$

Эрмитовое сопряжение дает

$$[[b_r^+, b_s]_\varepsilon, b_j^+]_- = 2\delta_{sj}b_r. \tag{23}$$

Используя тождество

$$[[A, B]_\varepsilon, [C, D]_\eta]_- = [[[A, B]_\varepsilon, C]_-, D]_\eta + \eta\,[[[A, B]_\varepsilon, D]_-, C]_{1/\eta}, \tag{24}$$

легко проверить, что (22) и (23) обращают (10) в тождество, т. е. являются также и достаточными условиями [с учетом (11) и (19)].

Выражение (11) с нефиксированным числом $\varepsilon$ имело самый общий билинейный вид. Если положить $\varepsilon = \pm 1$, то соотношения (22) и (23) превращаются в соотношения, постулированные Грином [34]. Для них была доказана

**Теорема 1 (Гринберг и Мессиа [47]).** *Если существует единственное вакуумное состояние* $|0\rangle$ *такое, что*

$$b_r\,|0\rangle = 0 \quad \text{для всех } r, \tag{25}$$

*то*

$$b_s b_r^+\,|0\rangle = p\delta_{sr}\,|0\rangle, \tag{26}$$

*и*, далее, *из условия положительной определенности нормы векторов состояний в фоковском пространстве, построенном над вектором* $|\,0\,\rangle$, *следует, что число* $p$ *должно быть целым положительным. Оно определяет максимальное количество частиц в симметричном* ($\varepsilon = -1$) *или антисимметричном* ($\varepsilon = +1$) *состоянии*. Иными словами, Гринберг и Мессиа показали *достаточность* параквантования Грина для описания парастатистик конечного порядка $p$. Вопрос о *необходимости* такого квантования изучался в [48], где была доказана

**Теорема 2.** *Если* $\varepsilon \neq 0$, *то из условий* 1) *положительной определенности нормы векторов состояний в фоковском пространстве и* 2) *требования того, чтобы число частиц либо в симметричном, либо в антисимметричном состоянии не могло превосходить заданное число* $p \geqslant 2$ (условие парастатистики), *следует, что* $\varepsilon = -1$ *и* $\varepsilon = +1$ соответственно.

Таким образом, если $\varepsilon \neq 0$, то параквантование Грина оказывается и необходимым для описания парастатистик, и тем самым устанавливается взаимнооднозначная связь парастатистик и параполей Грина.

Остается неисследованным выброшенный нами случай $\varepsilon = 0$. Для него соотношений (22) и (23) недостаточно (например, для вычисления нормы векторов состояния в фоковском пространстве) и их следует дополнять какими-либо другими соотношениями. По этой причине остается невыясненным, какому типу статистики он отвечает. Можно лишь высказать предположение, что ему отвечает бесконечная статистика, упоминавшаяся во введении, но это утверждение совершенно не доказано. По этой причине утверждение о необходимости параквантования нельзя считать окончательно доказанным и его следует принимать с оговоркой об исключении $\varepsilon = 0$.

В фоковском пространстве, построенном над $|\,0\,\rangle$ действием на него всевозможными полиномами от операторов рождения, автоматически выполняются соотношения

$$[[b_r, b_s]_\varepsilon, b_j]_- = 0, \quad [[b_r^+, b_s^+]_\varepsilon, b_j^+]_- = 0 \tag{27}$$

при $\varepsilon = \pm 1$. (Здесь уместно напомнить, что для обычной, например, ферми-статистики соотношение $[b_r, b_s]_+ = 0$ в фоковском пространстве является следствием соотношений

$$[b_r, b_s^+]_+ = \delta_{rs}.)$$

Другие соотношения можно получить из (22), (23), (27) путем использования обобщенного тождества Якоби

$$\alpha\,[[A, B]_\varepsilon, C]_\eta = -\varepsilon\eta\,[[A, C]_{-\alpha/\varepsilon}, B]_{-\alpha/\eta} + \alpha^2\,[[B, C]_{\varepsilon\eta/\alpha}, A]_{1/\alpha}, \tag{28}$$

где $\alpha$, $\eta$, $\varepsilon$ — произвольные числа, не равные нулю. Так, положив $\alpha = \eta = -1$, получим

$$[[b_r, b_s]_\varepsilon, b_j^+]_- = 2\varepsilon\delta_{rj}b_s + 2\delta_{js}b_r. \tag{29}$$

Удобно все соотношения Грина записать в единой *символической* форме. Обозначим операторы рождения помещением символа состояния сверху

$$b_r^+ \equiv b^r. \tag{30}$$

Определим тензоры

$$g_{kl} = g^{kl} = 0, \quad g_k^l = -\varepsilon g^l{}_k = \delta_{kl}. \tag{31}$$

Теперь все соотношения Грина можно записать в виде

$$[[b_\rho, b_\sigma]_\varepsilon, b_\tau]_- = 2\varepsilon g_{\rho\tau} b_\sigma + 2 g_{\sigma\tau} b_\rho, \tag{32}$$

считая, что любой из индексов $\rho$, $\sigma$, $\tau$ может оказаться как нижним, так и верхним. Тензоры (31) обладают свойством

$$g_{\rho\sigma} = -\varepsilon g_{\sigma\rho}. \tag{33}$$

Легко проверить, что обычные соотношения

$$[b_\rho, b_\sigma]_{-\varepsilon} = g_{\rho\sigma} \tag{34}$$

обращают гриновские соотношения (32) в тождество, т. е. являются их решением. Однако это не единственное решение гриновских соотношений, и это еще раз подтверждает то, что ферми- и бозе- статистики — не единственные статистики, допускаемые принципом неразличимости тождественных частиц.

## 2. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПАРАСТАТИСТИКИ ДАННОГО ПОРЯДКА

Для парастатистики данного порядка $p$ должны выполняться дополнительные коммутационные соотношения, следующие из ограничений, налагаемых на спектр оператора числа частиц в данном состоянии

$$N_r = \frac{1}{2}[b_r^+, b_r]_\varepsilon - \frac{\varepsilon p}{2}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{35}$$

Браккен и Грин [40] предложили последовательный способ получения всех таких соотношений. Рассматривается последовательность симметричных для параферми ($\varepsilon = -1$)- и антисимметричных для парабозе ($\varepsilon = +1$)-статистик тензоров

$$h \equiv 1/2, \quad h_\rho \equiv b_\rho;$$

$$h_{\rho\sigma} = [h_\rho, b_\sigma]_{-\varepsilon} - 2h g_{\rho\sigma}; \tag{36а}$$

$$h_{\rho\sigma\tau} = [h_{\rho\sigma}, b_\tau]_+ - 2(h_\rho g_{\sigma\tau} - \varepsilon h_\sigma g_{\rho\tau} + h_\tau g_{\rho\sigma}); \tag{36б}$$

$$\begin{aligned} h_{\rho\sigma\tau\nu} = [h_{\rho\sigma\tau}, b_\nu]_{-\varepsilon} - \\ -2(h_{\rho\sigma} g_{\tau\nu} - \varepsilon h_{\rho\tau} g_{\sigma\nu} + h_{\sigma\tau} g_{\rho\nu} + h_{\rho\nu} g_{\sigma\tau} - \varepsilon h_{\sigma\nu} g_{\rho\tau} + h_{\tau\nu} g_{\rho\sigma}) + \\ + 4h(g_{\rho\sigma} g_{\tau\nu} - \varepsilon g_{\rho\tau} g_{\sigma\nu} + g_{\rho\nu} g_{\sigma\tau}) \end{aligned} \tag{36в}$$

и т. д. Указанная ($-\varepsilon$)-симметрия этих тензоров для всех индексов, кроме двух последних, вытекает из их последовательного построения.

Доказательство для двух последних индексов производится по индукции с привлечением гриновских соотношений (32). Для парастатистики $p$-го порядка должен обращаться в нуль тензор $(p+1)$-го порядка. Так, обращение при $p=1$ в нуль выражения (36а) приводит к обычным соотношениям (34). Для $p=2$ с учетом (32) получим

$$\frac{1}{2}h_{\rho\sigma\tau}=b_\rho b_\sigma b_\tau-\varepsilon b_\tau b_\sigma b_\rho-2g_{\rho\sigma}b_\tau-2g_{\sigma\tau}b_\rho=0. \tag{37}$$

Впервые квантование с такими коммутационными соотношениями рассмотрели Грин [34] и Д. В. Волков [35]. В [35, 49] была подмечена аналогия этих соотношений при $\varepsilon=-1$ с алгеброй Дэффина — Кеммера. Для $p=3$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h_{\rho\sigma\tau\nu}=[b_\rho b_\sigma b_\tau-\varepsilon b_\tau b_\sigma b_\rho,\ b_\nu]_{-\varepsilon}-3g_{\rho\sigma}[b_\tau,\ b_\nu]_{-\varepsilon}+\varepsilon g_{\rho\tau}[b_\sigma,\ b_\nu]_{-\varepsilon}-\\-g_{\rho\nu}[b_\sigma,\ b_\tau]_{-\varepsilon}-3g_{\sigma\tau}[b_\rho,\ b_\nu]_{-\varepsilon}+\varepsilon g_{\sigma\nu}[b_\rho,\ b_\tau]_{-\varepsilon}-g_{\tau\nu}[b_\rho,\ b_\sigma]_{-\varepsilon}+\\+3(g_{\rho\sigma}g_{\tau\nu}-\varepsilon g_{\rho\tau}g_{\sigma\nu}+g_{\rho\nu}g_{\sigma\tau})=0.\end{aligned} \tag{38}$$

Эти соотношения впервые вывели Камефучи и Такахаши [26] и Шарфштейн [50].

Соотношения (37) обращают общие гриновские соотношения (32) в тождество. Поэтому они не только необходимы, но и достаточны, и при построении парастатистики второго порядка можно исходить непосредственно из них. Однако уже для $p=3$ четырехлинейные соотношения (38) оказываются необходимыми, но не достаточными. Действительно, можно проверить, что им удовлетворяют обычные соотношения (34), и потому они описывают случаи как $p=3$, так и $p=1$. Для того чтобы разделить эти случаи, необходимо и достаточно положить в условии (26) $p=3$ [26]. Но тогда отпадает надобность в использовании (38), поскольку для построения теории с фиксированным условием (26) достаточно общих соотношений (32). Заметим, что этого достаточно даже для построения обычных статистик при $p=1$ [51].

## 3. ЛИ-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К КВАНТОВАНИЮ ПОЛЕЙ. УНИКВАНТОВАНИЕ

Многими авторами [26, 36—42] отмечалась тесная связь гриновских соотношений (32) с алгебрами Ли ортогональной и симплектической групп. Действительно, для билинейных комбинаций

$$A_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}[b_\rho,\ b_\sigma]_\varepsilon,\qquad A_{\rho\sigma}=\varepsilon A_{\sigma\rho} \tag{39}$$

коммутатор составляет

$$[A_{\rho\sigma},\ A_{\tau\nu}]_-=\varepsilon g_{\rho\tau}A_{\sigma\nu}+g_{\sigma\tau}A_{\rho\nu}+g_{\rho\nu}A_{\sigma\tau}+\varepsilon g_{\sigma\nu}A_{\rho\tau}. \tag{40}$$

Здесь использовались тождество (24) при $\varepsilon=\eta=\pm1$ и (32). В алгебре (40) уже нетрудно узнать алгебры Ли ортогональной группы $SO(2K)$ при $\varepsilon = -1$ и симплектической группы $Sp(2K)$ при $\varepsilon = +1$ в четномерном пространстве индексов, когда сначала располагаются $K$ нижних индексов, а за ними $K$ верхних индексов и $K \to \infty$ [40].

Можно вместо (39) написать подробно три комбинации [26]

$$N_{ij} = \frac{1}{2}[b_i^+, b_j]_\varepsilon = N_{ji}^+; \tag{41а}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2}[b_i, b_j]_\varepsilon; \tag{41б}$$

$$L_{ij} = M_{ji}^+ = \frac{1}{2}[b_i^+, b_j^+]_\varepsilon \tag{41в}$$

и алгебру (40) в виде

$$[N_{ij}, N_{rs}]_- = \delta_{jr}N_{is} - \delta_{is}N_{rj}; \tag{42а}$$

$$[M_{ij}, N_{rs}]_- = \delta_{jr}M_{is} + \varepsilon\delta_{ir}M_{js}; \tag{42б}$$

$$[L_{ij}, N_{rs}]_- = -\delta_{js}L_{ir} - \varepsilon\delta_{is}L_{jr}; \tag{42в}$$

$$[L_{ij}, M_{rs}]_- = -\varepsilon\delta_{jr}N_{is} - \delta_{js}N_{ir} - \delta_{ir}N_{js} - \varepsilon\delta_{is}N_{jr}; \tag{42г}$$

$$[L_{ij}, L_{rs}]_- = [M_{ij}, M_{rs}]_- = 0. \tag{42д}$$

Алгебра (42а) для операторов $N_{ij}$ представляет собой алгебру Ли унитарной группы $SU(K)$ и согласно (10) является следствием принципа неразличимости тождественных частиц для систем с постоянным их числом. Для рассмотрения систем с переменным числом частиц нам понадобилось введение операторов рождения и уничтожения частиц, и при этом алгебра билинейных операторов (41) расширилась до алгебр Ли $SO(2K)$ и $Sp(2K)$. Таким образом, корни ли-алгебраического подхода к квантованию полей заложены в самом принципе неразличимости тождественных частиц [33].

Возникает естественный вопрос о возможности такой схемы квантования, которая была бы связана с алгеброй Ли унитарной группы $SU(2K)$. Квантование такого рода было предложено в [43, 44]. Ниже кратко излагается схема, рассмотренная в [44] и названная «уникквантованием». Уникквантование может быть построено так, что либо параферми-, либо парабозе-квантование будет его подалгеброй. В дополнение к операторам $b_\rho$, удовлетворяющим этим подалгебрам (32), вводится набор новых операторов $c_\rho$ ($c_r$ или $c^r \equiv c_r^+$), удовлетворяющих тем же самым соотношениям

$$[[c_\rho, c_\sigma]_\varepsilon, c_\tau]_- = 2\varepsilon g_{\rho\tau}c_\sigma + 2g_{\sigma\tau}c_\rho \tag{43}$$

и следующим взаимным соотношениям с $b_\rho$:

$$[[b_\rho, c_\sigma]_\varepsilon, b_\tau]_- = -4g_{\rho\sigma}c_\tau + 2\varepsilon g_{\rho\tau}c_\sigma - 2g_{\sigma\tau}c_\rho; \tag{44а}$$

$$[[c_\rho, b_\sigma]_\varepsilon, c_\tau]_- = -4g_{\rho\sigma}b_\tau + 2\varepsilon g_{\rho\tau}b_\sigma - 2g_{\sigma\tau}b_\rho; \tag{44б}$$

$$[b_\rho, c_\sigma]_\varepsilon = -[c_\rho, b_\sigma]_\varepsilon; \tag{44в}$$

$$[b_\rho, b_\sigma]_\varepsilon = [c_\rho, c_\sigma]_\varepsilon. \tag{44г}$$

Отметим, что в силу (44г) операторы (39) или (41) могут быть с одинаковым успехом выражены как через $b$-, так и через $c$-операторы. Далее введем билинейные комбинации

$$\widetilde{A}_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}[b_\rho,\ c_\sigma]_\varepsilon=-\varepsilon\widetilde{A}_{\sigma\rho}. \tag{45}$$

Для них имеем

$$[\widetilde{A}_{\rho\sigma},\ \widetilde{A}_{\tau\nu}]_-=\varepsilon g_{\rho\tau}A_{\sigma\nu}-g_{\sigma\tau}A_{\rho\nu}-g_{\rho\nu}A_{\sigma\tau}+\varepsilon g_{\sigma\nu}A_{\rho\tau}; \tag{46а}$$

$$[\widetilde{A}_{\rho\sigma},\ A_{\tau\nu}]_-=-\varepsilon g_{\rho\tau}\widetilde{A}_{\sigma\nu}+g_{\sigma\tau}\widetilde{A}_{\rho\nu}-g_{\rho\nu}\widetilde{A}_{\sigma\tau}+\varepsilon g_{\sigma\nu}\widetilde{A}_{\rho\tau}. \tag{46б}$$

Эти соотношения дополняют подалгебру (40) до полной алгебры Ли $SU(2K)$. Интересно, что в этой алгебре помимо оператора числа частиц

$$N=\sum_s\left(\frac{1}{2}[b_s^+,\ b_s]_\varepsilon-\frac{\varepsilon p}{2}\right) \tag{47}$$

имеется коммутирующий с ним оператор

$$\widetilde{N}=\frac{\mathrm{i}}{2(2K+1)}\sum_{s=1}^{K}([b_s^+,\ c_s]_\varepsilon+\mathrm{const}), \tag{48}$$

обладающий свойствами

$$\left.\begin{aligned}[][b_\rho+\mathrm{i}c_\rho,\ \widetilde{N}]_-&=b_\rho+\mathrm{i}c_\rho;\\ [b_\rho-\mathrm{i}c_\rho,\ \widetilde{N}]_-&=-b_\rho+\mathrm{i}c_\rho.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Состояния частиц в такой теории будут характеризоваться не только их числом, но и некоторым «зарядом» $\widetilde{N}$.

Заметим также, что соотношениям (44) нельзя удовлетворить обычными соотношениями (34) для $b$- и $c$-операторов. Оказывается, что им можно удовлетворить грин-волковскими соотношениями (37) для $b$-операторов, а $c$-операторы выразить в виде

$$c_\rho=\pm\,\mathrm{i}\,(-1)^N\,b_\rho. \tag{50}$$

В этом случае оператор $\widetilde{N}$ из (48) выражается только через $b$-операторы:

$$\widetilde{N}=\frac{\pm(-1)^N}{2(2K+1)}\sum_{s=1}^{K}([b_s^+,\ b_s]_{-\varepsilon}+\mathrm{const}). \tag{51}$$

Можно и непосредственно убедиться в том, что при выполнении (37) коммутатор и антикоммутатор от $b_s^+$ и $b_s$ коммутируют друг с другом.

Наконец, заметим следующее. В случае параферми-статистики $\varepsilon=-1$ и сами операторы $b_\rho$ можно включить в алгебру (40), если дополнить (39) операторами

$$A_{0\lambda} = -A_{\lambda 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_\lambda, \quad A_{00} = 0. \tag{52}$$

Тогда алгебра (40) расширяется до алгебры Ли $SO(2K+1)$ [36]. Аналогично алгебра Ли (46) $SU(2K)$ расширяется до $SU(2K+1)$ при дополнении ее операторами

$$\widetilde{A}_{0\sigma} = \widetilde{A}_{\sigma 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} c_\sigma. \tag{53}$$

При этом диагональный оператор

$$\widetilde{A}_{00} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} c_0 = -\sum_{\mu=1}^{2K} \widetilde{A}_{\mu\mu}, \tag{54}$$

что гарантирует условие специальности группы.

Таким образом, алгебрам Ли всех классических групп сопоставляется определенная схема обобщенного квантования:

$$\left.\begin{array}{r} SO(2K) \\ SO(2K+1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{параферми-квантование}, \ \varepsilon = -1;$$

$Sp(2K) \rightarrow$ парабозе-квантование, $\varepsilon = +1$;

$SU(2K$ или $2K+1) \rightarrow$ уникквантование, $\varepsilon = -1$. Обратим внимание на выделенность парабозе-квантования. В этой схеме сами операторы рождения и уничтожения нельзя включить в алгебру Ли группы $Sp(2K)$, как это можно сделать для других схем, перейдя в пространство нечетного числа измерений. Такое включение, однако, возможно и для парабозе-квантования, если перейти к супералгебрам Ли. В этом случае парабозе-алгебра изоморфна простой классической ортосимплектической супералгебре $osp(1, 2K)$ [52].

## 4. ПАРАФЕРМИ-СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЫСШИХ СПИНОВ

Итак, в случае параферми-статистики мы имеем алгебру Ли $SO(2K+1)$. Ее можно переписать в терминах операторов поворотов. Для этой цели перейдем к самосопряженным операторам [36]

$$\beta_{2j-1} = \frac{1}{2}(b_j - b_j^\dagger); \tag{55а}$$

$$\beta_{2j} = \frac{i}{2}(b_j + b_j^\dagger), \ j = 1, \ldots, K. \tag{55б}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$[[\beta_\mu, \beta_\nu]_-, \beta_\varkappa]_- = -\delta_{\varkappa\mu}\beta_\nu + \delta_{\varkappa\nu}\beta_\mu. \tag{56}$$

Индексы $\mu$, $\nu$, $\varkappa$ теперь пробегают четный набор значений 1, 2, ... ..., $2K \to \infty$. Определим операторы

$$J_{\lambda 0} = -J_{0\lambda} = \beta_\lambda, \ \beta_0 \equiv J_{00} = 0; \tag{57}$$

$$J_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,[\beta_\mu, \beta_\nu]_-. \tag{58}$$

Используя тождество (24) при $\varepsilon = \eta = -1$ и (56)—(58), получаем алгебру

$$[J_{\mu\nu}, J_{\varkappa\lambda}]_- = -\mathrm{i}\delta_{\mu\varkappa}J_{\nu\lambda} - \mathrm{i}\delta_{\nu\lambda}J_{\mu\varkappa} + \mathrm{i}\delta_{\mu\lambda}J_{\nu\varkappa} + \mathrm{i}\delta_{\nu\varkappa}J_{\mu\lambda}. \tag{59}$$

Индексы $\mu$, $\nu$, $\varkappa$, $\lambda$ пробегают уже нечетный набор значений 0, 1, 2, ..., $2K \to \infty$. Алгебра (59) представляет собой алгебру самосопряженных генераторов $J_{\mu\nu}$ поворотов группы $SO\,(2K+1)$. В этом смысле параферми-квантование эквивалентно теории Рао—Баба высших спинов.

Точно такое же построение можно выполнить для уникватнования, соответствующего группе $SU\,(2K+1)$ [44]. Операторы

$$\zeta_{2j-1} = \frac{1}{2}\,(c_j + c_j^\dagger); \tag{60а}$$

$$\zeta_{2j} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,(c_j - c_j^\dagger), \tag{60б}$$

так же как и $\beta$-операторы, удовлетворяют соотношениям

$$[[\zeta_\mu, \zeta_\nu]_-, \zeta_\varkappa]_- = -\delta_{\varkappa\mu}\zeta_\nu + \delta_{\varkappa\nu}\zeta_\mu \tag{61}$$

и имеют с $\beta$-операторами соотношения

$$[[\zeta_\mu, \beta_\nu]_-, \zeta_\varkappa]_- = -2\delta_{\mu\nu}\beta_\varkappa - \delta_{\varkappa\nu}\beta_\mu - \delta_{\varkappa\mu}\beta_\nu; \tag{62а}$$

$$[[\beta_\mu, \zeta_\nu]_-, \beta_\varkappa]_- = -2\delta_{\mu\nu}\zeta_\varkappa - \delta_{\varkappa\nu}\zeta_\mu - \delta_{\varkappa\mu}\zeta_\nu; \tag{62б}$$

$$[\beta_\mu, \beta_\nu]_- = [\zeta_\mu, \zeta_\nu]_-; \tag{62в}$$

$$[\zeta_\mu, \beta_\nu]_- = [\zeta_\nu, \beta_\mu]_-. \tag{62г}$$

Далее, наряду с (57) и (58) введем операторы

$$\tilde{J}_{0\lambda} = \tilde{J}_{\lambda 0} = \zeta_\lambda; \tag{63}$$

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,[\zeta_\mu, \beta_\nu]_- + \delta_{\mu\nu}\zeta_0 = \tilde{J}_{\nu\mu}, \tag{64}$$

где

$$\tilde{J}_{00} \equiv \zeta_0 = -\frac{\mathrm{i}}{2K+1}\sum_{\lambda=1}^{2K}[\zeta_\lambda, \beta_\lambda]. \tag{65}$$

Условие специальности

$$\sum_{\mu=1}^{2K}\tilde{J}_{\mu\mu} + \tilde{J}_{00} = 0 \tag{66}$$

гарантируется (65). Заметим, что соотношения (61) и (62) выполняются для $\zeta_0$ автоматически вследствие их выполнения для других $\zeta_\lambda$. Поэтому в них индексы $\mu$, $\nu$, $\varkappa$ можно считать пробегающими значения $0, 1, 2, \ldots, 2K$. Теперь для $J_{\mu\nu}$ и $\tilde{J}_{\varkappa\lambda}$ наряду с (59) получаем соотношения

$$[\tilde{J}_{\mu\nu}, \tilde{J}_{\varkappa\lambda}]_- = -i\delta_{\nu\varkappa}J_{\mu\lambda} - i\delta_{\mu\lambda}J_{\nu\varkappa} - i\delta_{\mu\varkappa}J_{\nu\lambda} - i\delta_{\nu\lambda}J_{\mu\varkappa}; \tag{67а}$$

$$[J_{\mu\nu}, \tilde{J}_{\varkappa\lambda}]_- = i\delta_{\nu\varkappa}\tilde{J}_{\mu\lambda} - i\delta_{\mu\lambda}\tilde{J}_{\nu\varkappa} - i\delta_{\mu\varkappa}\tilde{J}_{\nu\lambda} + i\delta_{\nu\lambda}\tilde{J}_{\mu\varkappa}. \tag{67б}$$

Соотношения (59), (67) составляют алгебру самосопряженных генераторов группы $SU(2K+1)$. Интересно, что операторы $N$ и $\tilde{N}$, определяемые (47) и (48), можно выразить как суммы недиагональных и диагональных генераторов

$$N = \sum_{j=1}^{K} J_{2j\,2j-1} + \mathrm{const}; \tag{68}$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{2}\zeta_0 + \mathrm{const} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2K} \tilde{J}_{\mu\mu} + \mathrm{const}. \tag{69}$$

## 5. АНЗАЦ ГРИНА И ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ

Грин [34] нашел для своих соотношений (32) простое решение, получившее впоследствии наименование «анзац Грина». Состоит оно в следующем. Рассматривается совокупность $p$ обычных ферми- или бозе-операторов, имеющих, однако, аномальные [53] взаимные коммутационные соотношения

$$[a_\rho^A, a_\sigma^B]_{\varepsilon_{AB}} = \delta_{AB}g_{\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{AB} = \varepsilon(1-2\delta_{AB}), \tag{70}$$

где $A, B = 1, \ldots, p$. Здесь мы снова применяем символическую запись, когда индексы $\rho$ и $\sigma$ могут означать оператор уничтожения $a_r^A$ или рождения $a_r^{A+} = a^{Ar}$, а тензор $g_{\rho\sigma}$ определяется (31). Теперь легко проверить, что сумма

$$b_\rho = \sum_{A=1}^{p} a_\rho^A \tag{71}$$

удовлетворяет гриновским соотношениям (32). Отметим, что это решение определено с точностью до произвольных фазовых множителей перед компонентами. Суммы

$$b_r = \sum_{A=1}^{p} \exp(i\varphi_A)\, a_r^A, \quad b_r^+ = \sum_{A=1}^{p} \exp(-i\varphi_A)\, a_r^{A+} \tag{72}$$

также являются решениями гриновских соотношений. Легко проверить также, что

$$\sum_{\mathscr{P}} (-1)^{\eta(\mathscr{P})}\, b^+_{\mathscr{P}r_1}, \ldots, b^+_{\mathscr{P}r_n} = 0 \text{ при } n > p, \tag{73}$$

где сумма берется по всем перестановкам $\mathscr{P}$ состояний $r_1, \ldots, r_n$ и $\eta(\mathscr{P})$ — их четности. Таким образом, анзац Грина (71) удовлетворяет всем требованиям теоремы Гринберга — Мессиа (см. разд. 2) и потому любое другое представление параоператоров, подчиняющихся соотношениям Грина и этим требованиям, будет ему эквивалентно. Например, ему эквивалентны все представления (72). Следует только отметить, что как сама теорема Гринберга — Мессиа, так и этот вывод об эквивалентности всех представлений параоператоров анзацу Грина доказаны лишь для свободных параполей [13, 47, 54, с. 368].

Казалось бы, выражение параоператоров через систему обычных ферми- или бозе-операторов означает эквивалентность паракантования обычному квантованию при наличии некоторой дополнительной внутренней степени свободы, принимающей $p$ значений. В определенном смысле это действительно так, но следует отчетливо понимать те ограничения, которые налагает на внутренние симметрии скрытый характер их параполевого представления.

Прежде всего нужно указать на то, что в гриновском анзаце (71) индексы его компонент *ненаблюдаемы*, поскольку они входят всегда симметричным образом, и с помощью пароопероторов нельзя образовать какой-либо оператор, который действовал бы на них по-разному. Можно лишь ожидать, что с ними связана некоторая точная симметрия, для которой разделение внутренних состояний теряет смысл. Вскрытие такой внутренней симметрии, заложенной в паракантовании, и будет составлять предмет дальнейшего изложения. При этом анзац Грина будет играть роль математически удобного, но вовсе не обязательного аппарата.

Обсуждая связь паракантования с вырождением по внутренней координате, Гринберг и Мессиа писали [47]*: «*Читатели могут подумать, что уравнения для* $b_k$ *в терминах* $a_k^A$ *могут быть выведены:* а) *из-за сложной структуры или* б) *вырождения в описании уничтожения отдельной частицы с помощью* $b_k$ *(или рождения с помощью* $b_k^+$*). То, что* а) *не имеет места, ясно из того, что гриновский анзац линеен, что противоречит составной структуре, требующей мультипликативных соотношений. Точно так же не имеет места и* б)*, поскольку состояние* $b_k^+ \mid 0 \rangle$ *не является вырожденным в отличие от частиц со скрытой степенью свободы. Мы подчеркиваем, что гриновский анзац представляет собой только математический прием и что* $a_k^A$ *и* $a_k^{A+}$ *сами по себе не имеют физического смысла*». С последним утверждением нельзя не согласиться. Однако высказывания по поводу пунктов а) и б) не совсем точны. В [55, 56] были приведены примеры, когда паракантование возникало из-за сложной структуры объектов, как, например, для пар нуклонов в ядерных оболочках, и при этом индекс $A$ приобретал ясный физический смысл проекции момента нук-

---

* Мы поменяли обозначения операторов, принятые в [47], на обозначения, которым мы следуем в данном обзоре: $a \rightleftarrows b$.

лона. По поводу пункта б) также можно заметить, что наличие скрытой степени свободы сказывается не на вырождении одночастичных состояний (в случае вырождения они неразличимы), а на вырождении *многочастичных* состояний, что как раз и имеет место в параквантовании. Более того, в рамках параквантования удается построить такие операторы, которые имеют различные собственные значения в этих состояниях и тем самым снимают вырождение. На этом пути можно искать соответствие между параквантованием и «горизонтальными симметриями» типа изоспиновой и $SU$ (3) [41, 57—60].

## 6. ПАРАПОЛЯ

При исследовании алгебраической структуры параквантования удобно было использовать дискретное пространство состояний частиц. Теперь перейдем к полевой формулировке в пространстве и времени $x$ ($x_0$, **x**). Рассмотрим свободные поля любого спина, но все выражения запишем так, как будто мы имеем дело с дираковскими полями $\psi(x)$ и $\bar\psi(x) = \psi^+(x)\gamma_0$. Свободные поля можно разложить по отрицательно- и положительно-частотным решениям

$$\psi(x) = \sum_k \{b_{k-}\varphi_k^{(-)}(x) + b_{k+}\varphi_k^{(+)}(x)\}. \tag{74}$$

Знак $\mp$ указывает на принадлежность оператора $b_{k\pm}$ к частицам или античастицам, и далее мы включаем его в индекс состояния $k$. Из соотношений Грина (32) следуют соотношения для параполя

$$[[\psi(x), \psi(y)]_\varepsilon, \psi(z)]_- = 2\varepsilon\{\psi(x), \psi(z)\}_{-\varepsilon}\psi(y) + 2\{\psi(y), \psi(z)\}_{-\varepsilon}\psi(x). \tag{75}$$

Здесь под $\psi$ можно понимать как само поле, так и ему сопряженное $\bar\psi$, а фигурные скобки в правой части (75), так называемые символы Волкова [35], обладают $(-\varepsilon)$-симметрией и имеют значения

$$\{\psi(x), \bar\psi(y)\}_{-\varepsilon} = (-\varepsilon)\{\bar\psi(y), \psi(x)\}_{-\varepsilon} = -iS(x-y); \tag{76а}$$

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{-\varepsilon} = \{\bar\psi(x), \bar\psi(y)\}_{-\varepsilon} = 0, \tag{76б}$$

где $S(x)$ — соответствующая данному полю сингулярная перестановочная функция. Аналогично формулируются параполевые соотношения для парастатистики данного порядка. В частности, для парастатистики второго порядка согласно (37) имеем

$$\psi(x)\psi(y)\psi(z) - \varepsilon\psi(z)\psi(y)\psi(x) = 2\{\psi(x), \psi(y)\}_{-\varepsilon}\psi(z) + 2\{\psi(y), \psi(z)\}_{-\varepsilon}\psi(x). \tag{77}$$

Грин постулировал соотношения (75) и (77) [34]. Затем рядом авторов [35, 50, 61—63] они были выведены на основе швингеровского вариационного принципа при обобщении коммутационных свойств вариации поля. При аксиоматической формулировке их следует заменить на одновременные соотношения для гейзенберговских полей [13].

Анзац Грина [34, 47] позволяет выразить параполе через обычные поля с аномальными взаимными соотношениями

$$\psi(x)=\sum_{A=1}^{p}\psi^{A}(x); \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned}&[\psi^{A}(x),\ \bar{\psi}^{B}(y)]_{\varepsilon_{AB}}=-\mathrm{i}\delta_{AB}S(x-y);\\&[\psi^{A}(x),\ \psi^{B}(y)]_{\varepsilon_{AB}}=[\bar{\psi}^{A}(x),\ \bar{\psi}^{B}(y)]_{\varepsilon_{AB}}=0,\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

где $\varepsilon_{AB}=\varepsilon(1-2\delta_{AB})$. Заметим, что анзац (78) определен с точностью до фазового преобразования каждой из его компонент. Для свободных полей согласно теореме Гринберга — Мессиа все другие представления параполей эквивалентны анзацу Грина. В случае взаимодействующих полей это не доказано.

Анзац Грина удобен при исследовании локальных свойств взаимодействий параполей [47, 64], однако он не обязателен для последовательного построения теории параполя. Маккарти и Волков [3, 35] продемонстрировали возможность вычисления $S$-матричных элементов при использовании самих паракоммутационных соотношений (77).

Все предыдущее рассмотрение, произведенное в дискретном представлении, можно воспроизвести в непрерывном $x$-пространстве. В теории униполя [44] одному классическому полю сопоставляются два квантовых параполя, образованных из $b$- и $c$- операторов соответственно.

## 7. ТЕОРЕМА О СВЯЗИ ПАРАПОЛЕЙ С ВЫРОЖДЕННОЙ СОВОКУПНОСТЬЮ ОБЫЧНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть нам дано множество различных полей

$$\phi_1(x),\ \ldots,\ \phi_m(x),$$

некоторые из них могут быть обычными ферми- или бозе-полями, но среди них есть и параполя, удовлетворяющие одновременным соотношениям Грина (75). Поля могут иметь различную природу, т. е. быть скалярными, спинорными, векторными и т. п., и, кроме того, для сокращения записи мы не будем различать поля и сопряженные им поля $\phi_i^{+}(x)$. *Нормальный* случай характеризуется тем, что все *бозе*-поля коммутируют со всеми полями, все *ферми*-поля коммутируют со всеми бозеподобными (бозе- и парабозе-) полями и антикоммутируют со всеми фермиподобными (ферми -и параферми-) полями, все *парабозе*-поля имеют парабозе-соотношения с парабозе- и параферми-иолями данного порядка и коммутируют со всеми остальными полями, все *параферми*-поля имеют параферми-соотношения с параферми-полями и парабозе-соотношения с парабозе-полями данного порядка и коммутируют со всеми бозеподобными и антикоммутируют со всеми фермиподобными полями других порядков [47]. Оказывается, что этот случай содержит минимальные ограничения, тогда как в других, аномальных случаях возникают дополнительные ограничения — правила суперотбора [53].

Основное наше предположение будет состоять в возможности представления любого параполя анзацем Грина (78) и эквивалентности ему всех других представлений параполя [65]. Как указывалось, для гайзенберговских параполей оно не доказано, и мы принимаем его лишь как правдоподобную гипотезу. Далее, воспользуемся формализмом уайтмановских функций параполей, которые теперь можно выразить через уайтмановские функции компонент анзаца Грина

$$\langle \phi_1(x_1)\ldots \phi_m(x_m)\rangle_0 = \sum_{\substack{A_1=1,\ldots,p_1\\ A_m=1,\ldots,p_m}} \langle \phi_1^{A_1}(x_1)\ldots \phi_m^{A_m}(x_m)\rangle_0. \tag{80}$$

От них требуется выполнение обычных в аксиоматической формулировке условий лоренц-инвариантности и спектральности (см., например, [66, с. 682]). Тогда имеют место кластерные свойства и можно воспользоваться теоремой Араки [53]: если произведения из операторов полей $C_I$ и $C_{II}$ таковы, что $C_I$ и $L(\lambda a, 1)\, C_{II} L(\lambda a, 1)^{-1}$ антикоммутируют для лоренцева переноса вдоль пространственно-подобного вектора $a$ при достаточно большом $\lambda$, то

$$\langle C_I\rangle_0 \ \langle C_{II}\rangle_0 = 0. \tag{81}$$

В нормальном случае возникают всего два ограничения, необходимые и достаточные для того, чтобы уайтмановская функция от компонент анзаца Грина была отлична от нуля: 1) число фермионоподобных полей в ней должно быть четным (это требование вытекает также из лоренц-инвариантности) и 2) числа компонент параполей данного порядка должны иметь одинаковую четность.

Для вывода первого правила следует рассмотреть перестановку двух одинаковых произведений полей в отдаленных областях. Если число фермиподобных полей в них нечетно, то они антикоммутируют и согласно (81) функции Уайтмана от них обращаются в нуль.

Для вывода второго правила следует рассмотреть такую же перестановку двух произведений, полученных одно из другого заменой друг на друга двух каких-либо гриновских компонент $A \rightleftarrows B$, относящихся к параполям данного порядка. Если четности чисел этих компонент различны, то указанные произведения антикоммутируют, мы вновь имеем (81), и, следовательно, одна из функций Уайтмана обращается в нуль. Но поскольку в теории параполя все компоненты входят симметричным образом, то и другая функция Уайтмана должна обращаться в нуль (в противном случае она будет различать $A$ и $B$ компоненты)*.

* Можно подумать, что согласно второму правилу для скалярного поля $\phi(x)$ будем иметь $\langle \phi^A(x)\rangle_0 = 0$ и, следовательно, $\langle \phi(x)\rangle_0 = 0$. На самом деле может быть $\langle \phi(x)\rangle_0 = \mathrm{const} \neq 0$, поскольку для постоянной величины кластерные свойства недействительны. Очевидно также, что это отклонение не влияет на дальнейшие рассуждения, относящиеся к многоточечным уайтмановским функциям.

Согласно второму правилу можно разделить все пространство векторов

$$\phi_1^{A_1}(x_1)\ldots\phi_m^{A_m}(x_m)|0\rangle \tag{82}$$

на два ортогональных подпространства, содержащих четное и нечетное число полей $A$ и $B$. Теперь можно определить лоренц-инвариантный оператор Клейна $\hat{q}(A, B)$, принимающий значение $+1$ на первом из них и $-1$ на втором. Очевидно, он антикоммутирует с $\phi^A(x)$ и $\phi^B(x)$, но коммутирует со всеми другими полями. Кроме того, он имеет свойства

$$\hat{q}^2(A, B)=1,\ \hat{q}^+(A, B)=\hat{q}(A, B). \tag{83}$$

Если теперь совершить преобразование Клейна [67] и определить новые поля

$$\begin{aligned}\Phi^A(x) &= \hat{q}(A, B)\phi^A(x),\quad \Phi^B(x)=\phi^B(x),\\ &\Phi^C(x)=\hat{q}(A, B)\phi^C(x)\ \text{и т.д.},\end{aligned} \tag{84}$$

то для полей $\Phi^A$ и $\Phi^B$ взаимные перестановочные соотношения станут нормальными как между ними, так и между ними и остальными компонентами. Дальше можно разбивать на такие пары оставшиеся компоненты и производить для них то же преобразование. Например, для четвертого порядка

$$\begin{aligned}&\Phi^A(x)=\hat{q}(A, B)\phi^A(x),\ \Phi^B(x)=\phi^B(x),\\ &\Phi^C(x)=q(C, D)\hat{q}(A, B)\phi^C(x),\ \Phi^D(x)=\hat{q}(A, B)\phi^D(x).\end{aligned} \tag{85}$$

Таким же способом можно привести к обычным полям любую совокупность гриновских компонент.

Второе правило сильно ограничивает класс отличных от нуля уайтмановских функций (80) для параполей. Отличными от нуля оказываются лишь две структуры, выражающиеся через гриновские компоненты и соответственно нормальные поля в виде

$$\sum_{A=1}^{p}\langle\ldots\phi_i^A(x)\phi_j^A(y)\ldots\rangle_0=\sum_{A=1}^{p}\langle\ldots\Phi_i^A(x)\Phi_j^A(y)\ldots\rangle_0; \tag{86}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{A_1\neq\ldots\neq A_p=1}^{p}\langle\ldots\phi_1^{A_1}(x_1)\ldots\phi_p^{A_p}(x_p)\ldots\rangle_0=\\ &=\sum_{A,\ldots,A_p=1}^{p}\varepsilon_{A_1\ldots A_p}\langle\ldots\Phi_1^{A_1}(x_1)\ldots\Phi_p^{A_p}(x_p)\ldots\rangle_0,\end{aligned} \tag{87}$$

где $\varepsilon_{A_1\ldots A_p}$ — полностью антисимметричный тензор и указанные равенства определены с точностью до общего знака. Через параполя эти структуры выражаются в виде соответствующих последовательностей коммутаторов и антикоммутаторов. Указанные ограничения полностью соответствуют аналогичным требованиям, налагаемым на гамильтониан взаимодействия параполей условием локальности [47]. Привлечение уайтмановского формализма понадобилось нам лишь для последовательного введения оператора Клейна.

Легко видеть, что правые части (86) и (87) обладают $SO(p)$-симметрией. Если, однако, в (86) входят всегда произведения эрмитово-сопряженных полей $\phi_i^{A+}(x)\phi_j^A(y)$, а в (87), наоборот, входят либо только поля $\phi_i^A(x)$, либо только поля $\phi_i^{A+}(x)$, то эти функции обладают также $SU(p)$-симметрией. Таким образом, имеет место

**Теорема.** *При выполнении условия* (80), *лоренц-инвариантности и спектральности любая теория параполей эквивалентна теории p-кратно вырожденных совокупностей обычных полей, подчиняющихся в общем случае $SO(p)$-симметрии и при ограниченном выборе допустимых уайтмановских функций — $SU(p)$-симметрии.* Эта теорема была доказана в [68]. Затем, в несколько иной формулировке, в [69] и [70] (см. также обзор [71]).

## 8. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПАРАОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ АНЗАЦА ГРИНА

Фоковское пространство $\mathcal{A}$ анзаца Грина получается действием на вакуумный вектор $|0\rangle$ всевозможными полиномами от операторов $a^A{}_k$, $k=1, \ldots, K\to\infty$, $A=1, \ldots, p$. Оно приводимо по отношению к алгебре операторов $b_k$, $b_k^+$, задаваемых суммами (71). Сейчас мы опишем процедуру выделения неприводимых представлений (НП) этих операторов из большого пространства $\mathcal{A}$ [41, 51, 59].

В пространстве $\mathcal{A}$ отыскиваются векторы

$$|k_1, \ldots, k_f\rangle = \sum_{A_1, \ldots, A_f=1}^{p} y_{A_1\ldots A_f} a_{k_1}^{A_1+} \ldots a_{k_f}^{A_f+}|0\rangle, \tag{88}$$

для которых выполняется условие

$$b_r\,|k_1, \ldots, k_f\rangle = 0 \text{ при любом } r. \tag{89}$$

Такие векторы будем называть *младшими*. К ним принадлежит и сам вакуумный вектор $|0\rangle$. Условие (89) налагает на коэффициенты в (88) следующие ограничения:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{A_1=1}^{p} y_{A_1A_2\ldots A_f}=0;\\
\sum\limits_{A_2=1}^{p} \varepsilon_{A_1A_2}y_{A_1A_2\ldots A_f}=0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum\limits_{A_f}^{p} \varepsilon_{A_1A_f}\ldots\varepsilon_{A_{f-1}A_f}y_{A_1A_2\ldots A_f}=0,
\end{array}\right\} \tag{90}$$

где $\varepsilon_{AB} = \varepsilon\,(1-2\delta_{AB})$. Из этих уравнений вытекают следующие свойства младших векторов:

$$b_r b_s^+ \mid k_1, \ldots, k_f\rangle = p\delta_{rs} \mid k_1, \ldots, k_f\rangle +$$
$$+ 2\varepsilon\delta_{rk_1} \mid s, k_2, \ldots, k_f\rangle + \ldots + 2\varepsilon\delta_{rk_f} \mid k_1, \ldots, k_{f-1}, s\rangle, \qquad (91)$$

и вектор, симметричный для параферми-статистики ($\varepsilon = -1$) и антисимметричный для парабозе-статистики ($\varepsilon = +1$) по всем состояниям $r_1, \ldots, r_n, k_1, \ldots, k_f$,

$$\sum_{\mathcal{P}} (-\varepsilon)^{\eta(\mathcal{P})} b^+_{\mathcal{P}r_1} \ldots b^+_{\mathcal{P}r_n} \mid \mathcal{P}k_1, \ldots, \mathcal{P}k_f\rangle = 0, \qquad (92а)$$

если

$$2f + n \geqslant p + 1. \qquad (92б)$$

Последнее условие, в частности, означает, что при $p = 2$ и $p = 3$ младшие векторы ($n = 0$) должны обладать $\varepsilon$-симметрией (антисимметричны для параферми- и симметричны для парабозе-статистики). В общем случае симметрия младших векторов выше симметрии самой парастатистики: на ферми(или бозе-)-симметричных младших векторах строятся параферми (или парабозе-)-статистики 2-го и 3-го порядков, на младших векторах, обладающих симметрией парастатистик 2-го и 3-го порядков, строятся парастатистики 4, 5-го и 6, 7-го порядков соответственно и т. д. В этом смысле можно говорить о *последовательности* парастатистик [51].

Отметим, что условия (89), (91), (92) полностью определяют свойства младших векторов. Можно было бы постулировать эти или эквивалентные им условия, не привлекая анзац Грина [51].

Базисные векторы каждого НП получаются действием полиномами от $b_r^+$ на младшие векторы с фиксированным числом аргументов $f$. Так, на вакуумном векторе строится фоковское представление. На остальных младших векторах строятся фоковскиподобные представления. При выделении из $\mathcal{A}$ младших векторов (88) может получиться несколько решений системы (90). В этом случае будем иметь несколько эквивалентных НП, определяемых одними и теми же условиями для младших векторов.

Остановимся на физическом смысле младших векторов. Несмотря на то что они удовлетворяют (89), им соответствуют не вакуумные вырожденные состояния, а состояния с числом частиц $f$ в состояниях $k_1, \ldots, k_f$. Действуя на них оператором числа частиц (47), в силу (89) и (91) получаем

$$N \mid k_1, \ldots, k_f\rangle = f \mid k_1, \ldots, k_f\rangle. \qquad (93)$$

Таким образом, у нас нет никаких принципиальных соображений для того, чтобы отбрасывать все, кроме фоковского, НП параалгебры данного порядка.

С математической точки зрения анзац Грина аналогичен в случае параферми-статистики представлению операторов высших спинов в виде сумм коммутирующих между собою дираковских $\gamma$-матриц. Описанная процедура построения НП параалгебры соответствует сложению половинных спинов в определенный спин. Известно, что таким путем можно построить любой высший спин, но это, однако, не означает, что его всегда следует рассматривать как составной.

Представления параоператоров непосредственно в матричной форме были получены для парабозе-операторов в [39] и для парафер-ми-операторов в [42].

## 9. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПАРАСТАТИСТИКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИЗОСПИН

В качестве первого примера рассмотрим парастатистику второго порядка, задаваемую соотношениями (37). Параоператор представляется в виде суммы двух коммутирующих (антикоммутирующих) между собой фермионных (бозонных) операторов

$$b_\rho = a_\rho^1 + a_\rho^2. \tag{94}$$

Вводится вспомогательный оператор [он также удовлетворяет (37)]

$$\widetilde{b}_\rho = a_\rho^1 - a_\rho^2. \tag{95}$$

Для $b_\rho$ и $\widetilde{b}_\rho$ имеют место билинейные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{b}_\rho b_\sigma = \varepsilon \widetilde{b}_\sigma b_\rho, \quad b_\rho \widetilde{b}_\sigma = \varepsilon b_\sigma \widetilde{b}_\rho; \\ &b_\rho b_\sigma = \varepsilon \widetilde{b}_\sigma \widetilde{b}_\rho + 2g_{\rho\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Младшие векторы имеют простую конструкцию [57]

$$|k_1, \ldots, k_f\rangle = \widetilde{b}_{k_1}^+ b_{k_2}^+ \widetilde{b}_{k_3}^+ b_{k_4}^+ \ldots |0\rangle. \tag{97}$$

Используя (96), легко проверить, что они удовлетворяют соотношениям

$$b_r |k_1, \ldots, k_f\rangle = 0; \tag{98}$$

$$b_r b_s^+ |k_1, \ldots, k_f\rangle = 2\delta_{rs} |k_1, \ldots, k_f\rangle + \\ + 2\varepsilon\delta_{rk_1} |s, k_2, \ldots, k_f\rangle + \ldots + 2\varepsilon\delta_{rk_f} |k_1, \ldots, k_{f-1}, s\rangle; \tag{99}$$

$$|\ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots\rangle = \varepsilon |\ldots, k_j, \ldots, k_i, \ldots\rangle; \tag{100}$$

$$b_r^+ |k_1, \ldots, k_f\rangle = \varepsilon b_{r_1}^+ |r, k_2, \ldots, k_f\rangle. \tag{101}$$

Построим операторы

$$N = \sum_k \frac{1}{2} ([b_k^+, b_k]_\varepsilon - 2\varepsilon); \tag{102}$$

$$I_1 = \sqrt{-\varepsilon} \sum_k \frac{1}{4} [\widetilde{b}_k^+, b_k]_-; \tag{103}$$

$$I_2 = \sqrt{-\varepsilon} \sum_k \frac{\mathrm{i}}{4} [\tilde{b}_k^+, b_k]_+; \tag{104}$$

$$I_3 = \sum_k \frac{1}{4} ([b_k^+, b_k]_{-\varepsilon} + 2\varepsilon); \tag{105}$$

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = \sum_{k,\, l} \frac{1}{4} b_k b_l^+ b_k^+ b_l + I_3 (I_3 - 1). \tag{106}$$

С помощью (96) можно убедиться в том, что операторы $I_i$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют алгебре *изоспина*

$$[I_i, I_j]_- = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} I_k, \tag{107}$$

а операторы $N$ и $I^2$ коммутируют с ними и между собой. Теперь каждое состояние парачастиц может быть охарактеризовано тремя квантовыми числами: $| N, I, I_3\rangle$. При этом собственные состояния $I$ получаются симметризацией по схемам Юнга. Нормированные состояния приведены в табл. 1. Каждый столбец в этой таблице является НП алгебры параоператоров, действие которых в нем определяется (37) и условиями (98) —(101). Очевидно, оно не выходит за пределы одного столбца и переходы между состояниями, принадлежащими различным столбцам, не могут быть осуществлены с их помощью.

Таблица 1. **Состояния $| N, I, I_3\rangle$ парачастиц, подчиняющихся парастатистике *второго* порядка**

| Неприводимые представления алгебры параоператоров ↓ | $\mathscr{B}_0$ | $\mathscr{B}_1$ | $\mathscr{B}_2$ |
|---|---|---|---|
| | $\vert 0, 0, 0\rangle = \vert 0\rangle$ | — | — |
| | $\vert 1, 1/2, +1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} b_{r_1}^+ \vert 0\rangle$ | $\vert 1, 1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \vert r_1\rangle$ | — |
| | $\vert 2, 0, 0\rangle = \frac{(b_{r_1}^+ b_{r_2}^+ - \varepsilon b_{r_2}^+ b_{r_1}^+) \vert 0\rangle}{2\sqrt{2}\,(1-\varepsilon\delta_{r_1 r_2})^{1/2}}$ | — | — |
| | $\vert 2, 1, 0\rangle = \frac{(b_{r_1}^+ b_{r_2}^+ + \varepsilon b_{r_2}^+ b_{r_1}^+) \vert 0\rangle}{2\sqrt{2}\,(1+\varepsilon\delta_{r_1 r_2})^{1/2}}$ | $\vert 2, 1, +1\rangle = \frac{b_{r_1}^+ \vert r_2\rangle}{2(1+\varepsilon\delta_{r_1 r_2})^{1/2}}$ | $\vert 2, 1, -1\rangle = \frac{\vert r_1, r_2\rangle}{2(1+\varepsilon\delta_{r_1 r_2})^{1/2}}$ |

Неприводимые представления изоспина →

Укажем, что изменение состояний младших векторов данного НП осуществляется при помощи (99). Например,

$$b_{k_1} b_r^+ |k_1\rangle = 2\varepsilon |r\rangle \text{ при } r \neq k_1.$$

Можно показать, что таким способом мы разделили все пространство анзаца Грина на неприводимые части [57]

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \bigoplus_{f \in \{0,1,2,\ \dots\}} \mathscr{B}_f, \tag{108}$$

где $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — фоковские пространства представлений $a^1$- и $a^2$-операторов, а $\mathscr{B}_f$ — НП алгебры параоператоров, построенные на младших векторах с числом индексов $f$. В данном случае эквивалентных представлений не возникает.

Мы замечаем, что в каждом столбце НП имеется лишь два значения:

$$I_3 = \begin{cases} -f/2 & \text{при четном } n, \\ (f+1)/2 & \text{при нечетном } n, \end{cases} \tag{109}$$

где $n$ — число операторов $b_r^+$, действующих на младший вектор с числом индексов $f$. Таким образом, вырожденные состояния с одинаковым числом частиц, образующие данный изомультиплет $I$, принадлежат к различным НП алгебры параоператоров.

Следует подчеркнуть, что сами операторы $N$, $I$, $I_3$ образуются согласно (102), (105), (106) только из самих параоператоров $b$. Для образования же операторов $I_1$ и $I_2$ нужно вводить вспомогательные операторы $\tilde{b}$. Таким образом, можно заключить, что классификация состояний парачастиц по $N$, $I$, $I_3$ может быть выполнена в рамках самой алгебры параоператоров, тогда как формулировка алгебры изоспина и рассмотрение переходов внутри изомультиплетов требуют выхода за пределы этой алгебры.

Успешная классификация состояний парачастиц по изоспину наводит на мысль о том, нельзя ли непосредственно сопоставить им состояния обычных фермионов или бозонов двух сортов? Такое преобразование может быть осуществлено с помощью *σ-матричного представления параоператоров* [57].

Пусть $p_r$, $p_r^+$, $n_r$, $n_r^+$ являются операторами, удовлетворяющими обычным, в том числе нормальным взаимным коммутационным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &[p_r, p_s^+]_{-\varepsilon} = \delta_{rs}, \quad [p_r, p_s]_{-\varepsilon} = [p_r^+, p_s^+]_{-\varepsilon} = 0; \\ &[n_r, n_s^+]_{-\varepsilon} = \delta_{rs}, \quad [n_r, n_s]_{-\varepsilon} = [n_r^+, n_s^+]_{-\varepsilon} = 0; \\ &[p_r, n_s^+]_{-\varepsilon} = [p_r^+, n_s]_{-\varepsilon} = [p_r, n_s]_{-\varepsilon} = [p_r^+, n_s^+]_{-\varepsilon} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Параоператоры выражаются в виде суммы прямых произведений этих операторов на матрицы Паули

$$\left.\begin{aligned} b_r &= \sqrt{2}\,(\sigma_- \otimes p_r + \sigma_+ \otimes n_r); \\ b_r^+ &= \sqrt{2}\,(\sigma_+ \otimes p_r^+ + \sigma_- \otimes n_r^+), \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

и вспомогательные операторы

$$\left.\begin{aligned}\tilde{b}_r &= \sqrt{2}\,(\sigma_+ \otimes p_r + \sigma_- \otimes n_r);\\ \tilde{b}_r^+ &= \sqrt{2}\,(\sigma_- \otimes p_r^+ + \sigma_+ \otimes n_r^+),\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

где

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \sigma_+^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{113}$$

Легко проверить, что (111) [как и (112)] удовлетворяют соотношениям Грина — Волкова (37), а вместе со (112) — алгебре (96).

Вакуумный вектор также имеет структуру прямого произведения

$$\Phi_0 = \xi_0 \otimes |0\rangle, \tag{114}$$

где $|0\rangle$ — вакуумный вектор для $p$- и $n$-операторов, а $\xi_0$ выбирается в виде

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{115}$$

так что

$$\sigma_-\xi_0 = 0, \quad \sigma_+\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_-\sigma_+\xi_0 = \xi_0. \tag{116}$$

Остальные младшие векторы (97) теперь имеют вид

$$\Phi_{k_1 \ldots k_f} = 2^{f/2} \begin{cases} p_{k_1}^+ \ldots p_{k_f}^+ \Phi_0 & \text{для четного } f, \\ n_{k_1}^+ \ldots n_{k_f}^+ \sigma_+ \Phi_0 & \text{для нечетного } f. \end{cases} \tag{117}$$

Теперь любой вектор парачастиц выражается через векторы для $p$ и $n$ частиц:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2^{n+f}}\, b_{r_1}^+ \ldots b_{r_{2l}}^+ \begin{cases} \Phi_{k_1 \ldots k_{2q}}^{2q} \\ \Phi_{k_1 \ldots k_{2q+1}}^{2q+1} \end{cases} = \\ = \begin{matrix} n_{r_1}^+ p_{r_2}^+ \ldots n_{r_{2l-1}}^+ p_{r_{2l}}^+ p_{k_1}^+ \ldots p_{k_{2q}}^+ \Phi_0; \\ p_{r_1}^+ n_{r_2}^+ \ldots p_{r_{2l-1}}^+ n_{r_{2l}}^+ n_{k_1}^+ \ldots n_{k_{2q+1}}^+ \sigma_+ \Phi_0; \end{matrix} \\ \frac{1}{2^{n+f}}\, b_{r_1}^+ \ldots b_{r_{2l+1}}^+ \begin{cases} \Phi_{k_1 \ldots k_{2q}}^{2q} \\ \Phi_{k_1 \ldots k_{2q+1}}^{2q+1} \end{cases} = \\ = \begin{matrix} p_{r_1}^+ n_{r_2}^+ p_{r_3}^+ \ldots n_{r_{2l}}^+ p_{r_{2l+1}}^+ p_{k_1}^+ \ldots p_{k_{2q}}^+ \sigma_+ \Phi_0; \\ n_{r_1}^+ p_{r_2}^+ n_{r_3}^+ \ldots p_{r_{2l}}^+ n_{r_{2l+1}}^+ n_{k_1}^+ \ldots n_{k_{2q+1}}^+ \Phi_0, \end{matrix} \end{gathered} \tag{118}$$

где $n$ — число операторов $b^+$, а $f$ — число индексов младшего вектора.

Операторы (102)—(105) преобразуются к виду

$$N=\sum_k \mathcal{N}_k^+\tau_0\mathcal{N}_k \otimes 1; \tag{119а}$$

$$I_1=\sum_k (\mathcal{N}_k^+\tau_{(3+\varepsilon)/2}\mathcal{N}_k)\otimes\left(\frac{1-\varepsilon}{2}+\frac{1+\varepsilon}{2}\sigma_3\right); \tag{119б}$$

$$I_2=(-\varepsilon)\sum_k (\mathcal{N}_k^+\tau_{(3-\varepsilon)/2}\mathcal{N}_k)\otimes\left(\frac{1+\varepsilon}{2}+\frac{1-\varepsilon}{2}\sigma_3\right); \tag{119в}$$

$$I_3=\sum_k (\mathcal{N}_k^+\tau_3\mathcal{N}_k)\otimes\sigma_3, \tag{119г}$$

где $\mathcal{N}_k$ — столбец

$$\mathcal{N}_k=\begin{bmatrix} p_k \\ n_k \end{bmatrix}, \tag{120}$$

на который действуют изоспиновые матрицы

$$\tau_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \tau_1=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},\quad \tau_2=\begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix},\quad \tau_3=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Наличие в $I_3$ матрицы $\sigma_3$ указывает на то, что частицы $p$ и $n$ попеременно имеют изоспин 1/2 и —1/2 в зависимости от того, является ли полное число частиц четным или нечетным, поскольку

$$\sigma_3\xi_0=-\xi_0,\quad \sigma_3(\sigma_+\xi_0)=\sigma_+\xi_0. \tag{121}$$

Очевидно, что такое переобозначение не играет никакой роли.

Новая интерпретация естественно объясняет, почему при $\varepsilon=-1$ некоторые из векторов состояний обращаются в нуль, что ранее рассматривалось как парадокс парaквантования [27, 28]. Действительно, при $\varepsilon=-1$ из (37) имеем

$$b_r^+b_s^+b_t^+=-b_t^+b_s^+b_r^+$$

и вектор

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}b_r^+b_s^+b_t^+|0\rangle=p_r^+n_s^+p_t^+\sigma_+\Phi_0$$

обращается в нуль при $r=t$. Но это как раз и необходимо для того, чтобы два $p$-фермиона не оказались в одном и том же состоянии.

Перейдем теперь в $x$-пространство с целью определения типа симметрии волновых функций, на классе которых определено квантование Грина — Волкова. Сделаем это конкретно для парафермионов, подчиняющихся уравнению Дирака. Общий вектор состояния имеет вид [58]

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle = \Psi^{(0)}|0\rangle + \ldots + \int d\sigma^{\mu_1}(x_1)\ldots \\
\ldots \int d\sigma^{\mu_N}(x_N)\left\{\sum_{n=0}^{N} \mathscr{C}(n, f)\,(\overline{\psi^{(+)}}(x_1)\,\gamma_{\mu_1})\ldots\right. \\
\ldots (\overline{\psi^{(+)}}(x_n)\,\gamma_{\mu_n})|x_{n+1}, \ldots, x_{n+f}\rangle\,\gamma_{\mu_{n+1}}\ldots\gamma_{\mu_{n+f}}\times \\
\left.\times\,\Psi^{(n,f)}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+f})\right\} + \ldots,
\end{aligned}
\tag{122}
$$

где $N = n + f$, а интегрирования производятся по пространственно-подобным поверхностям $\sigma$ [66, с. 225]. Нормировочные множители

$$
\mathscr{C}(2l, N-2l) = \mathscr{C}(2l+1, N-2l-1) = [2^N (N-l)!\, l!]^{-1/2}. \tag{123}
$$

Младшие векторы имеют аналогичный (97) вид

$$
|x_1, \ldots, x_f\rangle = \overline{\tilde{\psi}^{(+)}}(x_1)\,\overline{\psi^{(+)}}(x_2)\,\overline{\tilde{\psi}^{(+)}}(x_3)\ldots|0\rangle, \tag{124}
$$

и операторы определяются анзацем Грина

$$
\psi(x) = \psi^1(x) + \psi^2(x); \tag{125а}
$$

$$
\tilde{\psi}(x) = \psi^1(x) - \psi^2(x). \tag{125б}
$$

Амплитуды вектора (122) записываются в виде

$$
\Psi^{(2l,f)}\begin{pmatrix} x_1 & & x_3 & \ldots & x_{2l-1} & & & \\ & x_2 & & x_4 & & x_{2l}; & x_{2l+1} & \ldots\ x_{2l+f} \end{pmatrix} =
$$

$$
= [2^{2l+f}(l+f)!\, l!]^{-1/2}\langle x_{2l+f}, \ldots, x_{2l+1}|\psi^{(+)}(x_{2l})\ldots\psi^{(+)}(x_1)|\Psi\rangle; \tag{126а}
$$

$$
\Psi^{(2l+1,f)}\begin{pmatrix} x_1 & & x_3 & \ldots & x_{2l+1}; & x_{2l+2} & \ldots & x_{2l+1+f} \\ & x_2 & & x_{2l} & & & & \end{pmatrix} =
$$

$$
= [2^{2l+f+1}(l+f+1)!\, l!]^{-1/2}\langle x_{2l+1+f}, \ldots, x_{2l+2}|\psi^{(+)}(x_{2l+1})\ldots\psi^{(+)}(x_1)|\Psi\rangle. \tag{126б}
$$

Эти амплитуды антисимметричны по аргументам, стоящим в одной строке, тогда как относительно аргументов, стоящих в разных строках, они никакой симметрией не обладают. (Для парабозонов антисимметрию следует заменить на симметрию.) Одновременные амплитуды ($x_{10} = x_{20} = \ldots$) определяют вероятность нахождения частиц с координатами $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$. Симметрия волновых функций (126) показывает, что они описывают два сорта фермионов, аргументы которых стоят на четных и на нечетных местах [49] и продолжаются как аргументы младших векторов после точки с запятой [58]. С помощью $\sigma$-преобразования

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &= \sqrt{2}\{\sigma_- \otimes p(x) + \sigma_+ \otimes n(x)\};\\ \bar{\psi}(x) &= \sqrt{2}\{\sigma_+ \otimes \bar{p}(x) + \sigma_- \otimes \bar{n}(x)\};\end{aligned}\right\} \quad (127а)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\psi}(x) &= \sqrt{2}\{\sigma_+ \otimes p(x) + \sigma_- \otimes n(x);\\ \tilde{\tilde{\psi}}(x) &= \sqrt{2}\{\sigma_- \otimes \bar{p}(x) + \sigma_+ \otimes \bar{n}(x)\}\end{aligned}\right\} \quad (127б)$$

можно осуществить в явном виде такой переход к обычным фермионным полям $p(x)$ и $n(x)$. Ниже мы будем называть их *«нуклонами»*. Подчеркнем, однако, что волновые функции (127а) описывают тождественные частицы, возникающие как кванты возбуждения одного параполя $\psi(x)$, но в различных четно-нечетных внутренних состояниях. Наше $\sigma$-преобразование показывает только, какой теории фермионов двух сортов эквивалентна исходная теория тождественных парафермионов.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности формулировки различных взаимодействий в теории парафермионного поля второго порядка. В отличие от обычной теории в данной теории имеется два независимых тока

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)]_- = \bar{p}(x)\gamma_\mu p(x) + \bar{n}(x)\gamma_\mu n(x); \quad (128)$$

$$j'_\mu(x) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)]_+ = \{\bar{p}(x)\gamma_\mu p(x) - \bar{n}(x)\gamma_\mu n(x)\} \otimes \sigma_3. \quad (129)$$

Здесь и всюду в дальнейшем для всех подобного рода произведений полей подразумевается нормальное произведение в смысле вычитания вакуумных средних

$$j_\mu(x) \to j_\mu(x) - \langle j_\mu(x)\rangle_0 \quad (130)$$

и т. п.

Оба тока (128) и (129) локальны: в точках $x$ и $y$, разделенных пространственно-подобным интервалом, все токи $j_\mu(x)$, $j_\mu(y)$, $j'_\mu(x)$, $j'_\mu(y)$ коммутируют между собой [что есть следствие соотношений (77)].

Взаимодействие, включающее ток (128), будет одинаковым для всех состояний парачастиц, и можно назвать его «сильным». На его основе можно было бы создать нечто вроде составной модели Ферми — Янга для мезонов. В «электромагнитное взаимодействие» параполя с электромагнитным полем $\mathcal{A}_\mu(x)$ входит комбинация токов (128) и (129)

$$\mathcal{H}_{\text{э.м}}(x) = \mathcal{A}^\mu(x)\, j_\mu^{\text{э.м}}(x); \quad (131)$$

$$j_\mu^{\text{э.м}}(x) = \frac{e}{2}\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) =$$
$$= e\left\{\bar{p}(x)\gamma_\mu p(x) \otimes \frac{1+\sigma_3}{2} + \bar{n}(x)\gamma_\mu n(x) \otimes \frac{1-\sigma_3}{2}\right\}. \quad (132)$$

Появление множителей $(1 \pm \sigma_3)/2$ связано с несущественным переобозначением заряженных частиц: при нечетном полном числе заряженными будут $p$-частицы, при четном — $n$-частицы.

«Слабое» взаимодействие можно ввести, если предположить существование еще одного, «лептонного» параферми-поля $\lambda(x)$ второго порядка, имеющего с «нуклонным» полем $\psi(x)$ взаимные паракоммутационные соотношения Грина — Волкова (77) (взаимные символы Волкова для них, конечно, обращаются в нуль). В $\sigma$-представлении оно имеет такой же вид, как и исходное поле:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x &= \sqrt{2}\{\sigma_- \otimes \nu(x) + \sigma_+ \otimes e(x)\}; \\ \bar{\lambda}(x) &= \sqrt{2}\{\sigma_+ \otimes \bar{\nu}(x) + \sigma_- \otimes \bar{e}(x)\}. \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

При этом все поля $p$, $n$, $\nu$ и $e$ антикоммутируют друг с другом. Теперь локальное слабое взаимодействие записывается в виде (несущественные сейчас $\gamma$-матрицы опущены)

$$\mathscr{H}_{\text{сл}}(x) = \frac{1}{4}\{\bar{\psi}(x)\bar{\lambda}(x)\psi(x)\lambda(x) + \bar{\lambda}(x)\bar{\psi}(x)\lambda(x)\psi(x)\} =$$
$$= \bar{p}(x)\bar{e}(x)n(x)\nu(x) + \text{э. с.} \,. \qquad (134)$$

Таким образом, в теории парафермионного поля второго порядка удалось не только классифицировать все состояния парафермионов по изоспину, но и сформулировать локальные «сильное», электромагнитное и слабое взаимодействия. При этом можно ограничиться только одним фоковским представлением, поскольку в достаточно большой системе частиц всегда можно выделить подсистему с любыми заданными $I$ и $I_3$.

## 10. ПАРАФЕРМИ-СТАТИСТИКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И СТРАННОСТЬ

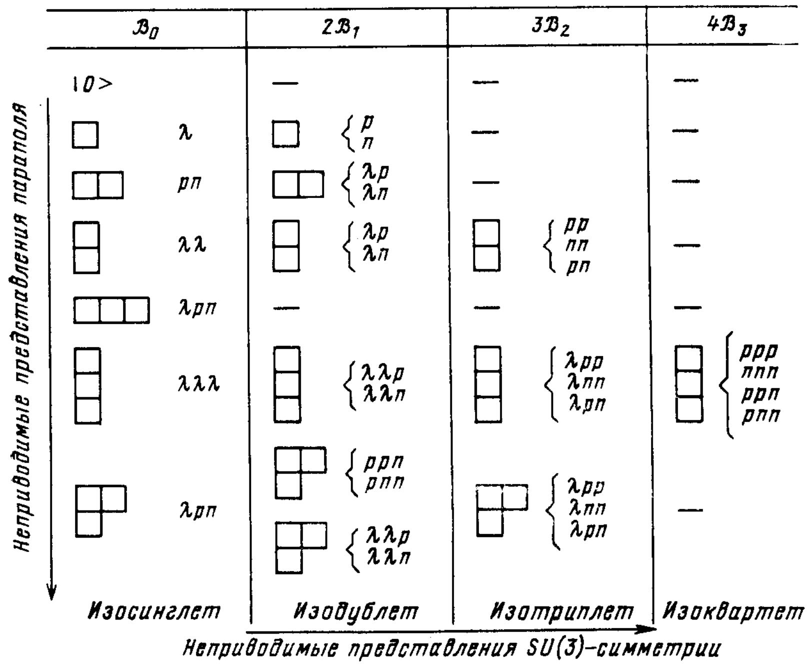
Для случая $\varepsilon = -1$ и $p = 3$ при разбиении большого пространства $\mathscr{A}$ анзаца Грина на НП алгебры параоператоров появляются *эквивалентные* представления

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3 = \bigoplus_{f \in \{0,\,1,\,2,\,\ldots\}} (f+1)\,\mathscr{B}_f, \qquad (135)$$

где множитель $f + 1$ указывает их число.

С учетом свойств симметрии векторов состояний, в том числе и младших векторов, получаем симметризованные состояния парачастиц, изображаемые схемами Юнга в табл. 2 [59]. При сопоставлении этих состояний с состояниями обычных фермионов трех сортов — *«кварков»* $p$, $n$, $\lambda$ — мы принимаем следующую классификацию. Состояния, принадлежащие к различным НП, будем считать состояниями с различным квантовым числом «странность». Состояния эквивалентных НП будем интерпретировать как различные состояния одного изомультиплета с одинаковой странностью. Странностью могут различаться также состояния из одного НП при различии симметрии соответствующих им векторов. В табл. 2 кварковое содержание

Таблица 2. **Неприводимые представления параферми-статистики *третьего* порядка и кварковое содержание состояний парачастиц**




указано справа от соответствующего состояния. Мы убеждаемся, что принятая классификация совпадает с классификацией физической $SU(3)$ и ее изоспиновой подгруппы.

В собственно параполевой теории без анзаца Грина нет смысла рассматривать эквивалентные представления. В ней каждому состоянию из данного НП параполя отвечает целый изомультиплет обычных фермионов: состояниям в фоковском пространстве $\mathscr{B}_0$ соответствуют *изосинглеты*, состояниям в $\mathscr{B}_1$ — *изодублеты* и т. д. Иными словами, мы имеем классификацию состояний по фактор-группе $SU(3)/SU(2)$.

Оказывается, что из парафермионного поля может быть составлен *один фермионный* оператор, отвечающий странному кварку Он, однако, имеет вид бесконечного ряда [59]

$$\lambda^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi^+(\mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{y}\,\{a_1\psi^+(\mathbf{x})\,\psi^+(\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{y}) + a_2\psi^+(\mathbf{y})\,\psi^+(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{y}) + a_3\psi^+(\mathbf{x})\,(:\psi(\mathbf{y})\,\psi^+(\mathbf{y}):) + a_4\psi^+(\mathbf{y})\,(:\psi(\mathbf{y})\,\psi^+(\mathbf{x}):)\} + \ldots, \qquad (136)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{12\sqrt{5}}, & a_2 &= -\frac{1}{12} - \frac{1}{12\sqrt{5}}, \\ a_3 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{5}}, & a_4 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{5}}. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

(Для одноуровневой задачи было показано [56], что для любого нечетного порядка один фермионный оператор всегда может быть построен из парафермионных операторов, тогда как для любого четного порядка это сделать нельзя).

Каждое состояние из НП в табл. 2 может быть теперь охарактеризовано двумя квантовыми числами: полным числом частиц $N$ или «барионным зарядом» $B = N/3$ и «гиперзарядом»

$$Y = B - \int d^3\mathbf{x}\lambda^+(\mathbf{x})\,\lambda(\mathbf{x}). \tag{138}$$

В рамках теории собственно параполя можно сформулировать лишь *сильное* взаимодействие, включающее коммутаторный ток типа (128), а также *промежуточно сильное* взаимодействие, содержащее ток фермионного оператора (136)

$$j_\mu^{(\lambda)}(x) = :\bar{\lambda}(x)\,\gamma_\mu\lambda(x): \tag{139}$$

и имеющее, как и он, вид бесконечного ряда. Во избежание недоразумений заметим, что наше сильное взаимодействие не имеет ничего общего с сильным взаимодействием кварков в квантовой хромодинамике, обусловленным обменом глюонами. Наше сильное взаимодействие следует понимать, скорее, в духе «старых» составных моделей типа модели Саката.

Если пытаться включить в эту схему и различные изоспиновые состояния, а также взаимодействия, различающие их (типа электромагнитного) или обеспечивающие переходы между состояниями из различных НП (типа слабого), то необходимо расширять рамки теории параполя и рассматривать само большое пространство анзаца Грина как физическое пространство, сохранив, однако, его параполевую структуру в виде разделения на НП параполя [41, 59]. В этом случае следует рассматривать теорию не одного, а *трех* параполей

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(1)}(x) + \psi^{(2)}(x) + \psi^{(3)}(x); \\ \psi'(x) &= k\psi^{(1)}(x) + \bar{k}\psi^{(2)}(x) + \psi^{(3)}(x); \\ \psi''(x) &= \bar{k}\psi^{(1)}(x) + k\psi^{(2)}(x) + \psi^{(3)}(x), \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

где $k = \exp(2\pi i/3)$, $\bar{k} = \exp(-2\pi i/3)$.

Возможно, что новая интерпретация внутренних симметрий, основанная на обобщенной алгебре анзаца Грина, поможет разобраться в их физической сущности. В связи с этим уместно вспомнить аналогию с подпространствами в теории сложения высших спинов. При сложении трех спинов 1/2 возникают два эквивалентных представления со спином 1/2 и одно представление со спином 3/2. В рассматриваемом пространстве $\mathscr{A}$ (135) им соотвествуют два состояния $p$ и $n$ из эквивалентных представлений $\mathscr{B}_1$ и состояние $\lambda$ из $\mathscr{B}_0$.

В [41, 72] были получены определенные результаты по классификации состояний для любого порядка.

## 11. ПАРАСТАТИСТИКА И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

В разд. 9 и 10 была рассмотрена симметрия состояний парачастиц, принадлежащих различным НП. Сейчас мы рассмотрим симметрию, скрытую в самом параполе, и возможность построения на ее основе калибровочной теории. Мы вновь воспользуемся анзацем Грина (78). Однако непосредственных преобразований над его компонентами помимо фазовых преобразований над каждой из них мы производить не имеем права из-за их взаимных аномальных соотношений (79). Поэтому наш путь будет состоять в построении аналогов или «копий» калибровочных симметрий в теории параполей [73].

Рассмотрим локальные взаимодействия юкавского типа «ток $\times$ $\times$ поле»

$$\mathscr{H}_{\text{вз}}(x) = j_\mu(x)\, \mathscr{B}^\mu(x). \tag{141}$$

В теории свободного дираковского параполя имеется два независимых сохраняющихся тока в виде коммутатора и антикоммутатора [47, 74]

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2}[\overline{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)]_- = \sum_{A=1}^{p} \overline{\psi}_A(x)\,\gamma_\mu\psi_A(x); \tag{142}$$

$$j'_\mu(x) = \frac{1}{2}[\overline{\psi}(x),\gamma_\mu\psi(x)]_+ = \sum_{A\neq B=1}^{p} \overline{\psi}_A(x)\,\gamma_\mu\psi_B(x). \tag{143}$$

Всюду мы подразумеваем нормальные произведения типа (130). Легко видеть, что ток (142) локален всегда, тогда как свойства локальности тока (143) зависят от порядка параполя. Он локален при $p=2$:

$$j'_\mu = \overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 + \text{э. с.}\ . \tag{144}$$

При $p=3$ он обладает свойствами парабозона, так как состоит из трех антикоммутирующих (при пространственно-подобном разделении) слагаемых

$$j'_\mu = \overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 + \overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_3 + \overline{\psi}_2\gamma_\mu\psi_3 + \text{э.с.}\ . \tag{145}$$

При $p=4$ он также обладает этими свойствами:

$$j'_\mu = (\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 + \overline{\psi}_3\gamma_\mu\psi_4) + (\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_3 + \overline{\psi}_2\gamma_\mu\psi_4) + \\ + (\overline{\psi}_2\gamma_\mu\psi_3 + \overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_4) + \text{э.с.}\ . \tag{146}$$

Однако при $p \geqslant 5$ он уже не имеет определенных даже паралокальных свойств.

Локальный ток (142) может взаимодействовать лишь с обычным бозонным полем, которое мы назовем «электромагнитным» $\mathcal{A}_\mu(x)$:

$$\mathcal{H}_{\text{э.м}}(x) = j_\mu(x)\,\mathcal{A}^\mu(x). \tag{147}$$

Только при $p = 3$ можно образовать локальное взаимодействие тока (143) с парабозонным полем $\mathcal{B}_\mu(x)$ третьего порядка [47]:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}[j'_\mu(x),\ \mathcal{B}^\mu(x)]_+ = \sum_{A\neq B\neq C\neq A=1}^{3} \overline{\psi}_A(x)\,\gamma_\mu\psi_B(x)\mathcal{B}_C^\mu(x). \tag{148}$$

Компоненты $\mathcal{B}^\mu(x)$ подчиняются соотношениям

$$[\mathcal{B}_A^\mu(x),\ \mathcal{B}_B^\nu(y)]_{\varepsilon_{AB}} = -\mathrm{i}\delta_{AB}D^{\mu\nu}(x-y),\quad \varepsilon_{AB} = 1-2\delta_{AB} \tag{149}$$

и имеют с компонентами $\psi(x)$ взаимные соотношения парабозонного типа

$$[\psi_A(x),\ \mathcal{B}_B^\mu(y)]_{\varepsilon_{AB}} = [\overline{\psi}_A(x),\ \mathcal{B}_B^\mu(y)]_{\varepsilon_{AB}} = 0. \tag{150}$$

В остальных случаях мы не можем этого сделать, не выходя за пределы последовательной теории параполей, поскольку взаимодействующие параполя должны удовлетворять взаимным трилинейным соотношениям Грина и порядки их должны совпадать [47]. (Мы не рассматриваем тривиальный случай, когда такие поля подчиняются взаимным фермионным или бозонным соотношениям. В этом случае они, конечно, могут иметь и различные порядки, но из них уже нельзя построить локальное взаимодействие.)

Таким образом, третий порядок оказывается выделенным, и только в этом случае можно рассчитывать на построение лагранжиана типа янг-миллсовского. Это действительно можно сделать, введя нелинейное парабозонное поле

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\mathcal{B}_\nu(x) - \partial_\nu\mathcal{B}_\mu(x) + \frac{\mathrm{i}g}{2}[\mathcal{B}_\mu(x),\ \mathcal{B}_\nu(x)]_-. \tag{151}$$

Его можно переписать через гриновские компоненты:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \sum_{A=1}^{3}\mathcal{F}_{\mu\nu}^A(x); \tag{152}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^A = \partial_\mu\mathcal{B}_\nu^A - \partial_\nu\mathcal{B}_\mu^A + \mathrm{i}g\sum_{A\neq B\neq C\neq A}\mathcal{B}_\mu^B\mathcal{B}_\nu^C. \tag{153}$$

Копией янг-миллсовского лагранжиана будет [73]

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{8}[\mathcal{F}_{\mu\nu}(x),\ \mathcal{F}^{\mu\nu}(x)]_+ + \frac{1}{2}[\overline{\psi}(x),\ (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu - m)\,\psi(x)]_- +$$

$$+\frac{g}{2}[j'_\mu(x),\ \mathcal{B}^\mu(x)]_+ = -\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{3}\mathcal{F}_{\mu\nu}^A\mathcal{F}^{\mu\nu A} + \sum_{A=1}^{3}\overline{\psi}^A(\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu - m)\,\psi^A +$$

$$+g\sum_{A\neq B\neq C\neq A=1}^{3}\overline{\psi}^A\gamma_\mu\psi^B\mathcal{B}^{\mu C}. \tag{154}$$

Отличие от настоящего янг-миллсовского лагранжиана заключается в аномальных соотношениях между гриновскими компонентами. Однако эти соотношения можно, как мы знаем из разд. 7, поменять на нормальные, не повлияв на физические следствия теории. Для свободных полей оператор Клейна выражается в явном виде

$$\mathscr{K} = \exp\{i\pi(N_2 + N_3)\}, \tag{155}$$

где $N_2$ и $N_3$ — операторы чисел частиц с индексами 2 и 3, включая и фермионы, и бозоны. Теперь заменим компоненты анзаца Грина на обычные поля:

$$\Psi_1 = \psi_1\mathscr{K}, \quad \Psi_2 = -i\psi_2\mathscr{K}, \quad \Psi_3 = \psi_3; \tag{156}$$

$$B^1_\mu = \mathscr{B}^1_\mu\mathscr{K}, \quad B^2_\mu = -i\mathscr{B}^2_\mu\mathscr{K}, \quad B^3_\mu = \mathscr{B}^3_\mu. \tag{157}$$

Взаимные соотношения между $\Psi_A$ и $B^A_\mu$ ($A = 1, 2, 3$) нормальные: все бозе-поля коммутируют, все ферми-поля антикоммутируют и коммутируют с бозе-полями. Лагранжиан (154) тождественно переписывается в виде

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}\mathbf{F}^2_{\mu\nu}(x) + \overline{\mathbf{\Psi}}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\mathbf{\Psi}(x) - \\ - ig\mathbf{B}_\mu(x)\cdot[\overline{\mathbf{\Psi}}(x) \times \gamma_\mu\mathbf{\Psi}(x)], \tag{158}$$

где $\times$ означает векторное произведение векторов

$$\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) \tag{159}$$

и

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{B}_\nu - \partial_\nu\mathbf{B}_\mu + g\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu. \tag{160}$$

Лагранжиан (158) есть янг-миллсовский лагранжиан калибровочной симметрии $SO(3)$. Мы обнаруживаем, что в теории параполей может быть сформулирован лишь этот лагранжиан (указание на такую возможность содержится также в [71]) и он единственный!

## 12. ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРАПОЛЕЙ

В теории параполя можно и непосредственно сформулировать *калибровочный принцип*, если воспользоваться не анзацем Грина, а другим, эквивалентным ему представлением параполей с помощью *гиперкомплексных* чисел [62, 75, 76].

Параполе можно представить в виде линейной комбинации обычных ферми- или бозе-полей с нормальными взаимными коммутационными соотношениями

$$\psi(x) = \sum_{A=1}^{p} \alpha_A\Psi_A(x) \tag{161}$$

с коэффициентами $\alpha_A$ — некоторыми алгебраическими величинами — гиперчислами. Соотношения Грина (75) выполняются, если и только если эти гиперчисла удовлетворяют алгебре Клиффорда [76]

$$[\alpha_A, \alpha_B]_+ = 2\delta_{AB}, \quad \alpha_A^+ = \alpha_A. \tag{162}$$

Числа $\alpha_A$ играют роль операторов Клейна. Далее можно потребовать инвариантности теории относительно локальных фазовых преобразований поля (161)

$$\psi'(x) = \exp\{i\phi(x)\}\,\psi(x)\exp\{-i\phi(x)\}, \tag{163}$$

где $\phi(x)$ — произвольное гиперчисло из алгебры Клиффорда, ввести векторное калибровочное гипербозонное поле и получить соответствующий калибровочный лагранжиан [76]. Оказывается, что этот лагранжиан будет гиперскаляром только при $p = 2, 3, 4$. В случаях $p = 2, 4$ порядки параферми- и парабозе-полей не совпадают, и мы выходим за рамки собственно теории параполя. Лишь при $p = 3$ мы вновь получаем последовательную теорию. В этом случае алгебра клиффордовых чисел изоморфна алгебре *кватернионов*. Совершенно естественно поэтому и возникает калибровочная симметрия $SO(3)$. Продемонстрируем этот вывод подробнее [77].

Дираковское параферми-поле представляется суммой

$$\psi(x) = \sum_{A=1}^{3} \Psi_A(x)\,e_A, \quad \bar\psi(x) = -\sum_{A=1}^{3} \bar\Psi_A(x)\,e_A, \tag{164}$$

где $e_A$ — кватернионы, удовлетворяющие алгебре

$$e_A e_B = -\delta_{AB} + \varepsilon_{ABC} e_A, \quad \bar e_A = -e_A, \tag{165}$$

а $\Psi_A(x)$ — нормальные ферми-поля. Далее требуется инвариантность теории относительно пребразований

$$\psi'(x) = \exp\{\varphi(x)\}\,\psi(x)\exp\{-\varphi(x)\}, \tag{166}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная фаза:

$$\varphi(x) = \sum_{A=1}^{3} \varphi^A(x)\,e_A. \tag{167}$$

Вводится парабозонное векторное калибровочное поле

$$\mathscr{B}_\mu(x) = \sum_{A=1}^{3} B_\mu^A e_A, \tag{168}$$

где $B_\mu^A(x)$ — нормальные бозе-поля, и определяется ковариантная производная

$$D_\mu(x) = \partial_\mu + \frac{g}{2}\mathscr{B}_\mu(x). \tag{169}$$

Ковариантная производная всегда должна входить в коммутатор с тем полем, на которое она действует. Тогда

$$[D'_\mu(x), \psi'(x)] = \exp\{\varphi(x)\}\,[D_\mu(x), \psi(x)]_-\exp\{-\varphi(x)\}, \tag{170}$$

если $\mathscr{B}_\mu(x)$ преобразуется по закону

$$\mathscr{B}'_\mu(x) = \exp\{\varphi(x)\}\,\mathscr{B}_\mu(x)\exp\{-\varphi(x)\} + \\ + \frac{2}{g}\exp\{\varphi(x)\}\,\partial_\mu\exp\{-\varphi(x)\}. \qquad (171)$$

Таким образом, мы приходим к калибровочному лагранжиану

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}\mathscr{F}^2_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), (i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\,\psi(x)]_- + \\ + \frac{ig}{4}[\bar{\psi}(x), [\mathscr{B}_\mu(x), \gamma_\mu\psi(x)]_-]_-, \qquad (172)$$

где

$$-i\mathscr{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\mathscr{B}_\nu(x) - \partial_\nu\mathscr{B}_\mu(x) + \frac{g}{2}[\mathscr{B}_\mu(x), \mathscr{B}_\nu(x)]_-. \qquad (173)$$

После подстановки (164) и (168) в (172) и (173) мы получаем лагранжиан (158).

Предпринимались попытки расширения алгебры кватернионов до алгебры *октонионов* с целью включения в теорию гипер(пара)полей калибровочной $SU(3)$-симметрии [78]*. Алгебра октонионов задавалась в *расщепленном* базисе

$$u_0 = \frac{1}{2}(1 + ie_7), \quad u_0^* = \frac{1}{2}(1 - ie_7);$$

$$u_n = \frac{1}{2}(e_n + ie_{n+3}), \quad u_n^* = \frac{1}{2}(e_n - ie_{n+3}), \quad n = 1, 2, 3$$

и имела вид

$$u_0^2 = u_0, \quad u_0u_0^* = 0; \qquad (174а)$$

$$u_0u_n = u_nu_0^* = u_n, \quad u_nu_0 = u_0^*u_n = 0; \qquad (174б)$$

$$u_lu_m = \varepsilon_{lmn}u_n^*, \quad u_mu_n^* = -\delta_{mn}u_0 \qquad (174в)$$

плюс комплексно-сопряженные соотношения. Дираковское октонионное поле предполагалось «*поперечным*», т. е. содержащим лишь единицы $u_n$:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{3} q^n(x)\,u_n, \qquad (175)$$

где $q^n(x)$ — обычные фермионные дираковские поля. Для него предполагалось уравнение Дирака в виде

$$i\gamma_\mu\partial^\mu\psi = m\psi - ig\gamma_\mu\sum_{n=1}^{3}(M^n_\mu\psi)\,u_n^*, \qquad (176)$$

* Представление параполей с помощью комплексной алгебры Клиффорда используется с этой целью в недавнем препринте: Greenbeng O. W., Macrae K .I. Locally Gauge-Invariant Formulation of Parastatistics, University of Maryland (U.S.A.), 1982.

где $M_\mu^n$ — три поперечных октонионных калибровочных векторных мезонных поля ($n = 1, 2, 3$):

$$M_\mu^n = \sum_{m=1}^{3} B_\mu^{mn} u_m, \quad \sum_{n=1}^{3} M_\mu^n u_n^* = 0 \text{ или } \sum_{n=1}^{3} B_\mu^{nn} = 0 \tag{177}$$

или девять вещественных калибровочных бозонных полей $B_\mu^{mn}$ с одним условием. Вакуумный вектор имеет вид

$$\Omega = u_0 \mid 0 \rangle, \tag{178}$$

где $\mid 0 \rangle$ — вакуум для фермионных $q^n$ и бозонных $B_\mu^{mn}$ полей из (175) и (177). Как мы видим, уравнение (176) включает в себя непосредственно октонионные единицы $u_n^*$ и его нельзя записать только через сами поля (175) и (177).

## 13. КВАРКИ: ФЕРМИОНЫ С ЦВЕТОМ ИЛИ ПАРАФЕРМИОНЫ?

В свое время вопрос о статистике кварков обсуждался в связи с трудностями применения кварковой модели к спектроскопии барионов: нужно было, в противоречии принципу Паули, помещать три одинаковых кварка в симметричное состояние. Естественное решение этой проблемы было впервые дано Н. Н. Боголюбовым, Б. В. Струминским и А. Н. Тавхелидзе [79] и независимо Ханом и Намбу [80] (см. также [81, 82]) и заключалось в предположении существования у кварков нового, принимающего три значения внутреннего квантового числа, по которому и производится требуемая принципом Паули антисимметризация. Впоследствии это квантовое число получило название «цвета кварков» и с ним была связана цветовая калибровочная $SU$ (3)-симметрия [83, 84], на основе которой сейчас строится динамическая теория сильных взаимодействий кварков и глюонов — «квантовая хромодинамика». В настоящее время имеются серьезные основания подозревать, что цветовая симметрия *совершенна* и не нарушается никаким образом. До сих пор мы знали о наличии двух абсолютно точных симметрий в природе: перестановочной симметрии тождественных частиц (принцип Паули абсолютен) и $U$ (1)-симметрии электромагнитных взаимодействий (закон сохранения электрического заряда). Теперь, возможно, к ним присоединится третья — цветовая $SU$ (3)-симметрия.

В связи с этим уместно вспомнить *другое* решение проблемы статистики кварков, предложенное О. В. Гринбергом [85] и заключающееся в применении к кваркам параферми-статистики третьего порядка. Вначале это предложение вовсе не подразумевало наличия какой-либо внутренней симметрии. Но, как мы видели, если последовательно развивать этот подход в рамках теории параполя, то мы придем к нелинейному лагранжиану, эквивалентному янг-миллсовскому лагранжиану калибровочной $SO$ (3)-симметрии. Исключительно интересно то обстоятельство, что в этой теории выделяется третий порядок, что могло бы служить обоснованием «трехцветности» кварков. Далее, такая симметрия, заключенная в параполе в скрытом виде, не могла бы быть нарушенной. Но она оказалась не $SU$ (3)-, а всего лишь $SO$ (3)-симметрией!

Что изменилось бы, если бы цветовой симметрией кварков оказалась $SO$ (3)-симметрия? Этот вопрос обсуждался в обзоре [86] и в работе [73]. Условие асимптотической свободы ограничило бы в этом случае число различных сортов кварков двумя! Можно было бы примирить это условие с экспериментальным обнаружением уже пяти сортов («ароматов») кварков $u$, $d$, $s$, $c$, $b$, если расположить их по «поколениям» ($u$, $d$), ($c$, $s$), ($b$, $t$?) и считать с каждым поколением связанной лишь свою тройку глюонов. Но в этом случае отсутствовало бы взаимодействие кварков из различных поколений, переносимое глюонами.

Другая особенность была бы связана с вещественностью $SO$ (3): она не различала бы кварки от антикварков и ее синглетами являлись бы не только мезоны и барионы, построенные, как обычно, из кварка, антикварка и трех кварков соответственно, но и дикварки $q^2$, и аналоги барионов с одним кварком, замененным на антикварк $q^2\overline{q}$, и даже связанные состояния кварка и глюона $qg$. Инфракрасная нестабильность не запрещала бы существование таких объектов в свободном состоянии. Все они имели бы дробные заряды.

Скорее можно ожидать, что $SO$ (3) является точной подгруппой нарушенной $SU$ (3), восстанавливающейся, однако, на малых расстояниях [87]. В этом случае первая трудность с условием асимптотической свободы устраняется, поскольку в асимптотике все восемь глюонов становятся равноправными. Однако остается вторая проблема с возможностью существования дикварковых и тому подобных состояний. Интересно, что эта схема безотносительно к парастатистике была привлечена в работе [87] как раз для объяснения настойчивых наблюдений в опытах милликеновского типа [88] остаточных зарядов $\pm$ (1/3) $e$.

Можно просто *расширить* схему паракватования, считая физическим пространством *все* большое пространство анзаца Грина. Такая схема, конечно, будет эквивалентна цветовому трехмерному пространству, однако с ограничениями, обусловленными аномальными соотношениями между гриновскими компонентами. Более того, в ней можно сохранить параполевую структуру, если вместо одного рассматривать три взаимосвязанных параполя (140). В качестве глюонных полей следует рассматривать тогда три комплексных парабозонных векторных поля третьего порядка

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu(x) &= \mathcal{B}^1_\mu(x) + \mathcal{B}^2_\mu(x) + \mathcal{B}^3_\mu(x); \\ \mathcal{B}'_\mu(x) &= k\mathcal{B}^1_\mu(x) + \overline{k}\mathcal{B}^2_\mu(x) + \mathcal{B}^3_\mu(x); \\ \mathcal{B}''_\mu(x) &= \overline{k}\mathcal{B}^1_\mu(x) + k\mathcal{B}^2_\mu(x) + \mathcal{B}^3_\mu(x), \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

компоненты которых удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &[\mathscr{B}^{\mu}_{A}(x),\ \mathscr{B}^{\nu+}_{B}(y)]_{\varepsilon_{AB}} = -i\delta_{AB}D^{\mu\nu}(x-y);\\ &[\mathscr{B}^{\mu}_{A}(x),\ \mathscr{B}^{\nu}_{B}(y)]_{\varepsilon_{AB}} = [\mathscr{B}^{\mu+}_{A}(x),\ \mathscr{B}^{\nu+}_{B}(y)]_{\varepsilon_{AB}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

и взаимным соотношениям с компонентами парафермионных полей

$$[\mathscr{B}^{\mu}_{A}(x),\ \psi_B(y)]_{\varepsilon_{AB}} = 0 \tag{181}$$

и т. д., где $\varepsilon_{AB} = 1 - 2\delta_{AB}$, а также имеется одно комплексное бозонное поле $\mathscr{H}_{\mu}(x)$, обладающее нормальными соотношениями со всеми полями. Лагранжиан записывается в виде

$$\begin{gathered} \mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}[\mathscr{F}^{+}_{\mu\nu}(x),\ \mathscr{F}^{\mu\nu}(x)]_{+} - \frac{1}{2}\mathscr{H}_{\mu\nu}(x)\mathscr{H}^{\mu\nu+}(x) + \\ + \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x)]_{-} + \\ + \frac{g}{4\sqrt{2}}(-i[\mathscr{B}_{\mu}(x),\ J^{\mu}(x)]_{+} + \text{э. с.}) + \frac{g}{\sqrt{2}}(I^{\mu}(x)\mathscr{H}^{+}_{\mu}(x) + \text{э. с.}), \end{gathered} \tag{182}$$

где тензоры глюонных полей

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\mathscr{B}_{\nu} + \frac{g}{2\sqrt{2}}\mathscr{B}^{+}_{\mu}\mathscr{B}^{+}_{\nu} + \frac{ig}{\sqrt{2}}(\mathscr{H}^{+}_{\mu}\mathscr{B}'_{\nu} + \mathscr{H}_{\mu}\mathscr{B}''_{\nu}) - (\mu \rightleftarrows \nu); \tag{183}$$

$$\mathscr{H}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\mathscr{H}_{\nu} + \frac{ig}{2\sqrt{2}}[\mathscr{B}_{\mu},\ \mathscr{B}''^{+}_{\nu}]_{+} - (\mu \rightleftarrows \nu) \tag{184}$$

и кварковые токи

$$J_{\mu} = \frac{1}{2}[\bar{\psi},\ \gamma_{\mu}\psi]_{+} + \frac{i}{2\sqrt{3}}([\bar{\psi}',\ \gamma_{\mu}\psi']_{+} - [\bar{\psi}'',\ \gamma_{\mu}\psi'']_{+}); \tag{185}$$

$$I_{\mu} = -\frac{i}{2\sqrt{3}}[\bar{\psi},\ \gamma_{\mu}\psi']_{-}. \tag{186}$$

Если совершить над гриновскими компонентами преобразование Клейна (156), (157), то лагранжиан (182) превратится в янг-милл-совский лагранжиан калибровочной $SU(3)$:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \bar{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{g}{2}\gamma^{\mu}\sum_{a=1}^{8} G^{a}_{\mu}\lambda^{a} - m\right)\Psi, \tag{187}$$

где

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}G^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}G^{a}_{\mu} + g\sum_{b,\,c=1}^{8} f^{abc}G^{b}_{\mu}G^{c}_{\nu}. \tag{188}$$

Обычным глюонным полям $G^a_\mu$ сопоставляются компоненты комплексных полей

$$\left.\begin{aligned} &B^A_\mu = (b^A_\mu + i\tilde{b}^A_\mu)/\sqrt{2} \ \text{и} \ \mathscr{H}_\mu = (h_\mu + i\tilde{h}_\mu)/\sqrt{2};\\ &G^1_\mu = b^3_\mu, \quad G^2_\mu = \tilde{b}^3_\mu, \quad G^3_\mu = h_\mu, \quad G^4_\mu = b^2_\mu;\\ &G^5_\mu = -\tilde{b}^2_\mu, \quad G^6_\mu = b^1_\mu, \quad G^7_\mu = \tilde{b}^1_\mu, \quad G^8_\mu = \tilde{h}_\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (189)$$

Если положить $\mathscr{H}_\mu = 0$, а поля $\mathscr{B}^A_\mu$ считать мнимыми, то мы возвратимся к лагранжиану (154), эквивалентному янг-миллсовскому лагранжиану $SO$ (3)-симметрии.

Интересно, что в такой теории все состояния, принадлежащие не фоковскому представлению, будут динамически запрещены из-за инфракрасной нестабильности (если, конечно, ее удастся доказать вообще), поскольку все они не являются синглетами. Запрещены будут и несинглетные состояния из фоковского пространства.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наш анализ показал, что:

1. Принцип неразличимости тождественных частиц не запрещает существование парастатистик. С математической точки зрения им соответствует ли-алгебраический подход к квантованию полей, когда каждой алгебре Ли классических групп сопоставляется определенная обобщенная схема квантования.

2. Неприводимые представления алгебры параоператоров строятся в полной аналогии с теорией составных высших спинов. Состояния, входящие в различные НП, образуют мультиплеты внутренних симметрий типа изоспиновой $SU(2)$ при $p = 2$, $SU(3)/SU(2)$ при $p = 3$ и т. д. Формулировка самих симметрий требует, однако, выхода за рамки собственно теории параполя и перехода в большое пространство анзаца Грина. При этом возникает возможность построения «составной модели» внутренних симметрий по аналогии с составной моделью высших спинов. Преимущества такого подхода к описанию «горизонтальных симметрий» пока что не выяснены.

3. С логической точки зрения точное вырождение следовало бы описывать парастатистикой, а не с помощью введения фиктивных внутренних пространств, если, конечно, последние не имеют какого-либо динамического основания типа составной структуры. Здесь, может быть, уместно провести аналогию со вторичным квантованием, которое можно считать наиболее последовательным способом описания тождественных частиц как квантов возбуждения одного поля, поскольку при этом нет надобности вводить не имеющие прямого смысла индексы тождественных частиц.

Как мы видели, при формулировке лагранжианов янг-миллсовского типа в теории параполя оказался однозначно выделенным третий порядок, что могло бы служить основанием для понимания *трехцветности* кварков. Но *калибровочной симметрией при этом оказывается лишь* $SO(3)$! Включение же в рассмотрение $SU(3)$ калибровочной симметрии *требует выхода за рамки теории одного параполя* и расширения ее до теории *трех* взаимосвязанных полей.

Из сказанного можно сделать вывод о том, что до настоящего времени параполевой подход не дал каких-либо заметных преимуществ в описании внутренних симметрий. Все же возникающие при таком подходе ограничения вселяют надежду, что при его дальнейшем развитии может быть пролит свет на природу физических симметрий.

Мне очень приятно принять участие в данном сборнике, посвященном памяти моего учителя Юрия Михайловича Широкова, одобрительное отношение которого к изучению изложенной выше проблемы статистики тождественных частиц всегда являлось для меня неоценимой поддержкой.

Я хотел бы выразить также глубокую признательность А. М. Балдину, С. Б. Герасимову, В. А. Матвееву, В. К. Митрюшкину, А. Н. Тавхелидзе и Д. В. Ширкову за неоднократные обсуждения и полезные замечания, относящиеся к затронутым здесь вопросам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gentile G.**— Nuovo cimento, 1940, v. 17, p. 493; Ibid., 1942, v. 19, p. 106.
2. **Messiah A. M. L., Greenberg O. W.**— Phys. Rev., 1964, v. 136B, p. 248.
3. **McCarthy I. E.**— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, v. 51, p. 131.
4. **Guénault A. M., McDonald D. K. C.**— Molec. Phys., 1962, v. 5, p. 525.
5. **Ben-Abraham S. I.**— Amer. J. Phys., 1970, v. 38, p. 1335.
6. **Паули В.** Общие принципы волновой механики. М.— Л.: ОГИЗ, 1947. с. 192.
7. **Дирак П.** Принципы квантовой механики, М.: Наука, 1979.— с. 279.
8. **Witmer E. E., Vinti J. P.**— Phys. Rev., 1936, v. 47, p. 538.
9. **Pandres D., Jr.**— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 305.
10. **Galindo A., Morales A., Nuñez-Lagos R.**— J. Math. Phys. 1962, v. 3, p. 324.
11. **Barut A. O., Chika H., Limić N.**— Preprint IC/65/51, Trieste, 1965.
12. **Borchers H. J.**— Commun. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 281.
13. **Steinmann O.**— Nuovo cimento, 1966, v. 44A, p. 755.
14. **Flicker M., Leff H. C.**— Phys. Rev., 1967, v. 163, p. 1353.
15. **Girardeau M. D.**— J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 1302.
16. **Salzmann W. R.**— Phys. Rev., 1970, v. 2A, p. 1664.
17. **Simonius M.**— Phys. Lett., 1970, v. 33A, p. 59.
18. **Каплан И. Г.**— УФН, 1975, т. 117, с. 691.
19. **Сарры М. Ф.**— ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 1348.
20. **Hartle J. B., Taylor J. R.**— Phys. Rev., 1969, v. 178, p. 2043.
21. **Hartle J. B., Stolt R. H., Taylor J. B.**— Phys. Rev., 1970, v. 2D, p. 1759.
22. **Stolt R. H., Taylor J. R.**— Nucl. Phys., 1970, v. 19B, p. 1; Nuovo cimento, 1971, v. 5A, p. 185.
23. **Dresden M.**— In: Brandeis Summer Inst. Theor. Phys. Brandeis University, 1963, p. 377.
24. **Doplicher S., Haag R., Roberts J. E.**— Comment. Math. Phys., 1971, v. 23, p. 199, 1974, v. 35, p. 49.
25. **Okayama T.**— Prog. Theor. Phys., 1952, v. 7, p. 517.
26. **Kamefuchi S., Takahashi Y.**— Nucl. Phys., 1962, v. 36, p. 177.

27. **Galindo A., Indurain F.**— Nuovo cimento, 1963, v. 30, p. 1040.
28. **Yamada M.**— Nucl. Phys., 1968, v. 6B, p. 596.
29. **Greenberg O. W.**— In: Mathematical Theory of Elementary Particles. Eds Goodman and Segal, MIT-press, Cambridge (Massachusetts) — Lond., 1966, p. 29.
30. **Landshoff P. V., Stapp H. P.**— Ann. Phys. (N.Y.), 1967, v. 45, p. 72.
31. **Ohnuki Y., Kamefuchi S.**— Ann. Phys. (N. Y.), 1970, v. 57, p. 543.
32. **Боголюбов Н. Н.**, Избранные труды. Т. 2. Киев, Наукова думка, 1970.
33. **Govorkov A. B.**— J. Phys. A: Math. Gen., 1980, v. 13, p. 1673.
34. **Green H. S.**— Phys. Rev., 1953, v. 90, p. 170.
35. **Волков Д. В.**— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1560; 1960, т. 38, с. 519.
36. **Ryan C., Sudarshan E. C. G.**— Nucl. Phys., 1963, v. 47, p. 207.
37. **Geyer B.**— Nucl. Phys., 1968, v. 8B, p. 323.
38. **Kademova K. V.**— Nucl. Phys., 1970, v. 15B, p. 350; Intern. J. Theor. Phys., 1970, v. 3, p. 109, 295; **Kademova K. V., Kálnay A. J.**— Ibid., 1970, v. 3, p. 115; **Kademova K. V., Palev T. D.**— Ibid., 1970, v. 3, p. 337; **Kademova K. V., Kraev M. M.**— Ibid., 1970, v. 3, p. 185; 1971, v. 4, p. 159.
39. **Alabiso C., Duimio F.**— Nuovo cimento, 1972, v. 10A, p. 499.
40. **Bracken A. J., Green H. S.**— Nuovo cimento, 1972, v. 9A, p. 349.
41. **Bracken A. J., Green H. S.**— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1784.
42. **Palev T. D.**— Rep. Math. Phys., 1978, v. 14, p. 311, 315.
43. **Palev T. D.**— Preprint JINR E17-10550, Dubna, 1977.
44. **Говорков А. Б.**— ТМФ, 1979, т. 41, с. 318.
45. **Fano F.**— Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, p. 74.
46. **Bialynicki-Birula I.**— Nucl. Phys., 1963, v. 49, p. 605.
47. **Greenberg O. W., Messiah A. M. L.**— Phys. Rev., 1965, v. 138B, p. 1155.
48. **Говорков А. Б.** — ТМФ, 1983, т. 54, с. 361.
49. **Chernikov N. A.**— Acta Physica Polonica, 1962, v. 21, p. 51.
50. **Scharfstein H.**— Nuovo cimento, 1963, v. 30, p. 740.
51. **Govorkov A. B.**— Preprint JINR E2-7485, Dubna, 1973.
52. **Omote M., Ohnuki Y., Kamefuchi S.**— Prog. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 1948; **Ganchev A. Ch., Palev T. D.**— J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 797; **Ганчев А. Х., Палев Ч. Д.** Препринт ОИЯИ, Р2-11941, Дубна, 1978.
53. **Araki H.**— J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 267.
54. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
55. **Cusson R. Y.**— Ann. Phys. (N. Y.), 1969, v. 55, p. 22.
56. **Говорков А. Б.**— ТМФ, 1971, т. 7, с. 230.
57. **Говорков А. Б.**— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1785.
58. **Govorkov A. B.**— Ann. Phys. (N.Y.), 1969, v. 53, p. 349.
59. **Govorkov A. B.** — Intern. J. Theor. Phys., 1973, v. 7, p. 49.
60. **Ohnuki Y., Kamefuchi S.**— Ann. Phys. (N.Y.), 1973, v. 78, p. 64; Prog. Theor. Phys., 1973, v. 50, p. 1696.
61. **Kibble T. W. B., Polkinghorne J. C.**— Proc. Roy. Soc., 1957, v. 243A, p. 252.
62. **Scharfstein H.**— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 1707.
63. **Bloore F. J., Lovely R. M.**— Nucl. Phys., 1972, v. 49B, p. 392.
64. **Аматуни А. Ц.**— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 925.
65. **Dell'Antonio G. F., Greenberg O. W., Sudarshan E. C. G.**— In: Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics. Ed. F. Gürsey. N.Y., Gordon and Breach, 1964.
66. **Швебер С.** Введение в релятивистскую квантовую теорию поля: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
67. **Klein O.**— J. Phys. Radium, 1938, v. 9, p. 1.
68. **Govorkov A. B.**— Preprint JINR E2-3003, Dubna, 1966.
69. **Drühl K., Haag R., Roberts J. E.**— Commun. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 204.
70. **Ohnuki Y., Kamefuchi S.**— Progr. Theor. Phys., 1973, v. 50, p. 258.
71. **Greenberg O. W., Nelson C. A.**— Phys. Rep., 1977, v. 32C, p. 69.

72. **Ramakrishnan A., Vasudevan R., Chandrasekaran P. S.**— J. Math. Analysis and Applications, 1971, v. 35, p. 249.
73. **Говорков А. Б.**— ТМФ, 1982, т. 53, с. 283.
74. **Freund P. G. O.**— Phys. Rev., 1976, v. 13, p. 2322.
75. **Domokosh G., Kövesi-Domokosh S.**— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1477.
76. **Говорков А. Б.** Препринт ОИЯИ, Р2-82-296, Дубна, 1982.
77. **Govorkov A. B.**— Preprint JINR E2-82-470, Dubna, 1982.
78. **Günaydin M., Gürsey F.**— Phys. Rev., 1974, v. 9D, p. 3387.
79. **Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н.** Препринт ОИЯИ, Д-1969, Дубна, 1965, Tavkhelidze A.— In: High Energy Physics and Elementary Particles. Trieste, 1965, Vienna, IAEA, 1965, p. 763.
80. **Han M.-Y., Nambu Y.**— Phys. Rev., 1965, v. 139B, p. 1006.
81. **Freund P. G. O.**— Phys. Lett., 1965, v. 15, p. 352.
82. **Miyamoto Y.**— Progr. Theor. Phys. Suppl., 1965, Extra Number, p. 187.
83. **Fritzch H., Gell-Mann M., Leutwyler H.**— Phys. Lett., 1973, v. 47B, p. 365.
84. **Weinberg S.**— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 494.
85. **Greenberg O. W.**— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 598.
86. **Marciano W., Pagels H.**— Phys. Rep., 1978, v. 36C, p. 137.
87. **Slansky R., Goldman T., Shaw G. L.**— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 887.
88. **LaRue G. S., Fairbank W. M., Hebard A. F.**— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 967.