

НЕСТАБИЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА

П. Экнер

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматриваются общие свойства нестабильных систем (частиц, ядер и т. д.) Сформулирован основной критерий для существования решения обратной задачи распада. Рассмотрено влияние повторных измерений на экспоненциальность законов распада и измеряемое время жизни. Оценка порядка этих эффектов проведена в рамках модели распада заряженных каонов в пузырьковой камере. Эти соображения дают физическое основание для полугруппового приближения при описании динамики нестабильных систем. Показано, что всякую такую полугруппу можно характеризовать так называемым псевдогамильтонианом. Дается обзор строгих подходов к определению интегралов Фейнмана. Показано, как в рамках некоторых из этих подходов можно выразить эволюционный оператор, соответствующий псевдогамильтониану шредингеровского типа с локальным комплексным потенциалом. В качестве примера рассмотрен многомерный затухающий гармонический осциллятор.

General properties of unstable quantum systems (as elementary particles, nuclei etc.) are discussed. The basic criterion is formulated for existence of a solution to the inverse decay problem. Further we discuss influence of repeated measurements on the decay law exponentiality and the measured lifetime; an order of magnitude of this effect is estimated within a model describing the decay of charged kaons in a bubble chamber. These considerations can be used to justify physically the semigroup approximation for describing dynamics of unstable systems. Each such semigroup can be characterized by a so-called pseudo-Hamiltonian; relations of the latter to the total Hamiltonian of the system are given. Further we review rigorous approaches to the Feynman path integrals, and we show how the evolution operator corresponding to Schrödinger pseudo-Hamiltonian with a local complex potential can be expressed within some of these approaches. As an example, the multidimensional damped harmonic oscillator is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Важность попыток полного теоретического описания нестабильных систем вытекает из простого факта, что объекты, рассматриваемые в микрофизике, в большинстве случаев нестабильны. Если, например, ограничиться элементарными частицами, то из двадцати условно стабильных по-настоящему стабильны пять (в рамках экспериментально достижимой точности: γ , ν_e , ν_μ , e , p); кроме того, недавние экспериментальные и теоретические результаты [указания на существование ненулевой массы покоя $\bar{\nu}_e$, попытки объединения сильных и электрослабых взаимодействий в рамках групп $SU(5)$, $SO(10)$ и др.] подсказывают, что нейтрино и протон также могут распадаться.

Вначале несколько слов об истории вопроса. После открытия Беккерелем естественной радиоактивности Элстер и Гейтель сформулировали в 1899 г. эмпирический закон, согласно которому количество радиоактивного препарата со временем экспоненциально уменьшается:

$$N(t) = N(0) \exp(-\Gamma t), \quad (1)$$

при этом каждый вид распада характеризуется своим временем жизни Γ^{-1} . Элементарное объяснение, которое предложил Швейдлер в 1905 г., основывается на предположении, что вероятность распада каждого из ядер не зависит от момента его возникновения. Надо отметить, что для того времени это была довольно дерзкая гипотеза, так как в ней предполагалось, что распад отдельного ядра нельзя описать детерминистическим способом. Однако средствами классической физики невозможно объяснить *ad hoc* предположение, сделанное Швейдлером, не говоря уже об определении константы Γ . Такая возможность появилась впервые после создания квантовой механики. Первую попытку такого рода предпринял в 1928 г. Гамов в своей полуклассической теории α -радиоактивности [1].

Первую полностью квантовую теорию распада создали в 1930 г. Вайскопф и Вигнер [2], рассмотревшие затухание излучения возбужденного атома. Она основана на предположении, вытекающем из опыта, что закон распада, т. е. вероятность нахождения атома в момент времени t в начальном (возбужденном) состоянии, имеет форму (1). Распределение интенсивности излучения тогда дается соотношением типа Брейта — Вигнера, в котором ширина спектральной линии равна сумме вероятностей всех энергетически разрешенных переходов из возбужденного состояния. Метод Вайскопфа — Вигнера оказался удобным для описания распада ряда других систем. В некоторых случаях (например, для распада с нарушением CP -четности [3]) необходимо исходное предположение заменить более общим (так называемым *условием Вайскопфа — Вигнера*), в соответствии с которым временное развитие в пространстве состояний нестабильной системы определяется семейством операторов $\{V(t) : t \geq 0\}$, образующих полугруппу:

$$V(t)V(t') = V(t+t'), \quad t, t' \geq 0. \quad (2)$$

Таким образом, обобщенный метод Вайскопфа — Вигнера, в котором предполагается справедливым условие (2) и генератор полугруппы $V(\cdot)$ вычисляется при помощи теории возмущений, имеет весьма широкую область практического применения. Однако с ним связаны также некоторые серьезные трудности, вытекающие из самого условия (2), которое несовместимо с полуограниченностью спектра оператора полной энергии [4—12]. Поэтому полугрупповое описание временного развития нестабильных систем надо считать только приближенным, если мы не хотим отказаться от основных постулатов квантовой теории.

Среди других проблем, встречающихся при попытках построения общей теории нестабильных квантовых систем, исходящей из «первых принципов», назовем несколько наиболее важных.

а. *Релятивистская инвариантность*: основным вопросом является выбор представления группы Пуанкаре \mathcal{P} в пространстве состояний \mathcal{H}_n нестабильной системы. Простейшая возможность — выбрать это представление неунитарным с экспоненциальным убыванием нормы векторов при временных сдвигах [13]. Аналогичные результаты получаются также в других подходах [14], в частности при рассмотрении так называемой полугруппы Пуанкаре [15]. Однако для полного описания надо взять пространство состояний \mathcal{H} (включающее продукты распада — см. разд. 1) и задать в нем унитарное приводимое представление \mathcal{P} [16]. Попытка связать представления в \mathcal{H}_n и \mathcal{H} предпринята в работе [8], однако она страдает серьезным недостатком [17].

б. *Формулировка теории на квантово-полевои уровне*: средства квантовой теории полей фактически используются при вычислении вероятностей перехода, нужных для приближенного описания Вайскопфа — Вигнера. Однако физику с теоретическим складом ума непременно хочется знать, что представляет собой поле, основными квантами которого являются нестабильные частицы. Имеются разные попытки построения таких теорий, однако они оказались либо чисто феноменологическими [18], либо сводящимися к случаю свободного поля [5]. Не столь претенциозной, но практически более успешной программой является рассмотрение разрешимых моделей (см., например, [6, 7, 11] для модели Ли, [19] — для модели ван Кампена и т. п.). Сюда следует отнести и многочисленные работы, изучающие процесс достижения термодинамического равновесия; для примера назовем работы [20, 21].

в. *Связь с теорией рассеяния*: в первую очередь возможность описывать метастабильные частицы и резонансы на единой основе. Хорошей иллюстрацией является теория нерелятивистского потенциального рассеяния (см., например, [22]). Из нее мы знаем, что существует важное различие между двумя случаями: если энергетическое разрешение настолько хорошо, что можно определить по сечению рассеяния и фазовому сдвигу резонанс, тогда соответствующее время измерения таково, что не имеет смысла говорить о временной эволюции данного состояния как самостоятельного объекта, и наоборот. Аналогичные заключения можно сделать также для релятивистских нестабильных частиц [16]. С другой стороны, единое феноменологическое описание резонансов и метастабильных частиц полезно, например, в аналитической теории S -матрицы [23], в кварковых моделях [24]. Это подчеркивает важность изучения связи между процессами рассеяния и распада.

При рассмотрении проблем указанного типа удобно выделить те свойства, которые являются общими для всех нестабильных квантовых систем. Этот подход (так называемое *кинематическое понима-*

ние — впервые оно было явно сформулировано Уильямсом [8]), во-первых, дает возможность определить рамки для изучения конкретных динамических свойств распадающихся микрообъектов и, во-вторых, позволяет широко применять методы функционального анализа (см., например, [4, 8—10, 12, 16, 17, 25, 26]). Краткое изложение некоторых результатов этого подхода приведено в двух следующих разделах.

Прежде чем начать изложение, скажем несколько слов по поводу содержания настоящего обзора. Разд. 3, 4 посвящены рассмотрению случая, когда нестабильная система подвергается многократному измерению. Такое положение часто встречается в экспериментах и может служить одним из путей объяснения трудностей, связанных с экспоненциальностью законов распада. Оказывается, что неэкспоненциальность в такого рода экспериментах может проявляться в зависимости измеряемого среднего времени жизни от плотности измерений. Чтобы оценить порядок этого эффекта, мы рассмотрим в разд. 4 модель, описывающую распад заряженных каонов в пузырьковой камере. Она показывает, что даже в оптимальных экспериментальных условиях эффект очень мал и его трудно уловить. В разд. 5 мы вернемся к «кинематическому пониманию» и обсудим так называемое приближение ограниченной энергии. Рассуждения, приведенные в разд. 1—5, дают физическое основание для полугруппового приближения при описании временного развития нестабильных систем. Всякую такую полугруппу можно характеризовать ее генератором, или, другими словами, уравнением Шредингера с феноменологическим несамосопряженным гамильтонианом (псевдогамильтонианом). В разд. 6 мы обсудим свойства псевдогамильтонианов, в частности их связь с соответствующими операторами полной энергии.

Вторая часть настоящего обзора посвящена интегралам Фейнмана и их применению к описанию временного развития нестабильных систем. Сначала (в разд. 7) мы приведем краткий обзор важнейших строгих подходов к определению интегралов Фейнмана, ограничиваясь при этом интегралами в лагранжевой форме в плоском конфигурационном пространстве. Затем обсудим, как при помощи интегралов Фейнмана выражается решение уравнения Шредингера с псевдогамильтонианом, содержащим локальный комплексный потенциал. В качестве примера в разд. 9 рассмотрим многомерный затухающий гармонический осциллятор, описываемый комплексным квадратичным потенциалом, найдем явный вид пропагатора, вычисляя соответствующий интеграл Фейнмана, и обсудим свойства этого решения в одномерном случае. В заключительном разделе будут обсуждены последние результаты, связанные с «путями Фейнмана», которые подсказывают, что возможности интегрирования по путям для описания динамики квантовых систем, в том числе нестабильных, далеко еще не исчерпаны.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ КИНЕМАТИКИ НЕСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМ

Начнем с формулировки постулатов. Обозначим \mathcal{H}_u , \mathcal{H} соответственно гильбертовы пространства состояний рассматриваемой нестабильной системы (НС) и изолированной системы, состоящей из данной НС и ее продуктов распада. Пусть далее $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ — унитарное (сильно непрерывное) представление однопараметрической группы временных сдвигов (оператор эволюции),

$$U(t) = \exp(-iHt), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(для простоты будем чаще всего пользоваться системой единиц $c = \hbar = 1$), где H — полный гамильтониан системы. Предположим, что:

а) \mathcal{H}_u является собственным подпространством в \mathcal{H} ;

б) не существует $t > 0$, для которого подпространство $\mathcal{H}_u = E_u \mathcal{H}$ было бы инвариантно относительно $U(t)$.

Редуцированный оператор эволюции определен соотношением $V(t) = E_u U(t) E_u$, из которого вытекает, что $\{V(t)\}$ — сильно непрерывное однопараметрическое сжимающее семейство и

$$V^+(t) = V(-t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

При этом $\{V(t)\}$ не является группой, так как (2) не может быть справедливо для всех $t, t' \in \mathbb{R}$ из-за постулата б). *Закон распада* (ЗР) системы, состояние которой в начальный момент времени $t = 0$ определяется матрицей плотности ρ , $\text{Ran } \rho \subset \mathcal{H}_u$, задается соотношением

$$P_\rho : P_\rho(t) = \text{Tr}(V^+(t) V(t) \rho). \quad (5)$$

Это непрерывная функция, удовлетворяющая условию $0 \leq P_\rho(t) \leq P_\rho(0) = 1$.

Как уже отмечалось, для большого числа НС экспериментально проверена справедливость ЗР типа (1), $P(t) = \exp(-\Gamma t)$, $t \geq 0$.

В таком случае *начальная скорость распада* — $\dot{P}(+0)$ явно не равна нулю. С другой стороны, формальное дифференцирование соотношения (5) дает $\dot{P}_\rho(0) = 0$. Трудность заключается именно в формальности этого рассуждения: Хорвитц и др. [9] показали, что для ρ , соответствующего чистому состоянию ψ , имеет место $\dot{P}_\psi(0) = 0$, если $\dim \mathcal{H}_u < \infty$, $\{V(t)\}$ является сжимающей полугруппой и среднее значение энергии в состоянии ψ конечно. Однако оказывается, что среди этих условий только последнее является существенным. Введем понятие *состояния с конечной энергией*: это любое состояние ρ , для которого интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda d \text{Tr}(\rho E_\lambda) \quad (6)$$

существует (в собственном смысле); при этом $E_\lambda \equiv E_H ((-\infty, \lambda))$ означает разложение единицы гамильтониана H . Множество таких состояний обозначим $M(H)$. Верно следующее утверждение [17, 25]:

Теорема 1: Если $\rho \in M(H)$, то $\dot{P}_\rho(0) = 0$.

Экспоненциальным ЗР соответствуют энергетические распределения типа Брейта — Вигнера, для которых интеграл (6) существует только в смысле главного значения; поэтому отмеченный выше парадокс не имеет места. Надо, однако, подчеркнуть, что приведенное утверждение *не дает* возможности подтвердить или опровергнуть условие (2). Дело в том, что экспериментально можно измерять (с определенной точностью) только поведение ЗР на отрезках времени, а не непосредственно начальную скорость распада. С другой стороны, экспериментально нельзя решить вопрос о принадлежности данного состояния множеству $M(H)$ [17, 25] (это уточняет утверждение о физически реализуемых состояниях, содержащихся в классических монографиях [27, 28] — см. дальше разд. 5 и более подробную дискуссию в [29, разд. 7.2.3]).

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАСПАДА И СВОЙСТВА СПЕКТРА ГАМИЛЬТониАНА

Возникает, естественно, вопрос, можно ли только из данных об одной НС восстановить полное описание распада? Строгая формулировка этой проблемы появилась впервые в работах [8, 9] под названием *обратной задачи распада*; имеется однопараметрическое семейство $\{V(t)\}$ операторов сжатия на пространстве \mathcal{H}_u , удовлетворяющих условию (4), и спрашивается, при каких условиях существует гильбертово пространство $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_u$ и однопараметрическая сильно непрерывная группа $\{U(t)\}$ на \mathcal{H} , такая, что для всех $t \in \mathbf{R}$ справедливо $V(t) = E_u U(t) \upharpoonright \mathcal{H}_u$. Основной критерий существования и однозначности решения вытекает из теории унитарных продолжений (дилатаций) Сёкефальви — Надя (см., например, [30, гл. 1], а также [8, 9, 17]). Существенным является здесь условие *положительной определенности*: операторную функцию $V: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ считают положительно определенной, если для любых n натурального и $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}_u$ верно

$$\sum_{i,j=1}^n (\varphi_i, V(t_i - t_j) \varphi_j) \geq 0. \quad (7)$$

Теорема 2: Для функции $V: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ существует тройка $\{\mathcal{H}, U(\cdot), E_u\}$ с требуемыми свойствами тогда и только тогда, если V положительно определена, слабо непрерывна и $V(0) = I_u$. Кроме того, если выполнено *условие минимальности*

$$\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{t \in \mathbf{R}} U(t) \mathcal{H}_u}, \quad (8)$$

то эта тройка однозначна с точностью до изометрического изоморфизма: ее называют *минимальным унитарным продолжением* (МУП) операторной функции V .

Теорема заимствована из монографии [30], где также доказано, что всякая непрерывная сжимающая полугруппа на \mathcal{H}_u удовлетворяет условиям, т. е. допускает МУП. Постулат б) из предыдущего раздела влечет за собой условие

$$V^+(t) V(t) \neq I_u, \quad t > 0. \quad (9)$$

Среди операторных функций, допускаемых этим условием и теоремой 2, можно выбирать редуцированные операторы эволюции на основе дальнейших (физически мотивированных) требований. Одним из таких является полуограниченность спектра $\sigma(H)$ гамильтониана; однако известен ряд случаев, когда это условие *не выполняется* [4, 7—10]:

а) $\{V(t) : t \geq 0\}$ является непрерывной сжимающей полугруппой;

б) $V(\cdot)$ непрерывна и равенство (2) верно для всех $t \geq T_r \geq 0$, $t' \geq 0$;

в) существует ненулевой вектор $\varphi \in \mathcal{H}_u$ и $\gamma > 0$ так, что для всех $t \geq 0$ справедливо $\|V(t)\varphi\| \leq \exp(-\gamma t)$;

г) $\dim \mathcal{H}_u = 1$ и интеграл $\int_{\mathbf{R}} \ln |(\varphi, V(t)\varphi)| \frac{dt}{1+t^2}$ расходится.

Любое из условий а) — г) означает, что $\sigma(H)$ неограничен; если, кроме того, выполнено некоторое из условий а) — в), то $\sigma(H) = \mathbf{R}$. Отсюда вытекают *необходимые условия* для того, чтобы $\sigma(H)$ был ограничен снизу; они явно не выполняются для редуцированных операторов эволюции типа Вайскопфа — Вигнера.

Можно вывести также *достаточное условие* (не требующее явной формы МУП, нахождение которой — задача, в общем, весьма сложная). Для этого понадобится обобщение теоремы Бохнера — Хинчина [12], согласно которому всякая функция V , удовлетворяющая условиям теоремы 2, выражается следующим образом:

$$V(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\lambda t} dF_{\lambda}, \quad (10)$$

где $\lambda \mapsto \int_{\Delta} dF_{\lambda}$ — некая положительная операторная борелева мера на \mathbf{R} , носитель которой обозначим $\sigma[V]$. Важно, что операторы можно найти при помощи следующего обобщения преобразования Фурье — Стильтьеса:

$$\Phi(\xi + i\eta) = \int_0^{\infty} V(t) e^{i t(\xi + i\eta)} dt, \quad \eta > 0; \quad (11a)$$

$$\frac{1}{2} [\Omega_0(\lambda - 0) + \Omega_0(\lambda + 0)] = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_0^\lambda \operatorname{Re} \Phi(\xi + i\eta) d\xi; \quad (11б)$$

$$E_\lambda = -w - \lim_{\kappa \rightarrow -\infty} \Omega_0(\kappa) + \Omega_0(\lambda + 0). \quad (11в)$$

Требуемое условие для полуограниченности $\sigma(H)$ дано следующим утверждением [12]:

Теорема 3: Пусть V — редуцированный оператор эволюции и H — гамильтониан, соответствующий минимальному унитарному продолжению. Тогда $\sigma(H) = \sigma[V]$.

В отличие от V знания законов распада, т. е. операторной функции $t \mapsto V^+(t)V(t)$, недостаточно для восстановления полного описания распада [12]. Приведем еще другие свойства спектра [9, 10]:

Теорема 4: а. Если $w - \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$, тогда $\sigma(H)$ непрерывен.

б. Если, кроме того, $(\psi, V(\cdot)\psi) \in L(\mathbf{R})$ для любого $\psi \in \mathcal{H}_u$, тогда $\sigma(H)$ абсолютно непрерывен.

Пользуясь преобразованием (11) и ограниченностью $|\psi, V(\cdot)\psi|$, можно легко показать, что в условиях теоремы 4б для каждого $\psi \in \mathcal{H}_u$ существует функция $g_\psi \in L(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, такая, что

$$(\psi, V(t)\psi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\lambda t} g_\psi(\lambda) d\lambda,$$

причем $g_\psi(\cdot)$ можно отсюда получить обратным преобразованием Фурье.

3. ПОВТОРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Упомянутые выше трудности с экспоненциальным ЗР привели к идее, что экспоненциальности на самом деле вызвана тем, что в большинстве реальных экспериментов НС подвергается не одному, а многократно повторяющемуся измерению (как, например, в фотоэмульсиях, пузырьковых камерах и т. п. — см. [16, 31—34]). Идею эту легко принять: классический вывод Швейдлером экспоненциальности ЗР основывался на предположении, что система не помнит свою историю. Неэкспоненциальность, наоборот, означает существование памяти; естественно, повторные измерения могут эту память ослабить или уничтожить.

Для того чтобы описать влияние повторных измерений, надо прежде всего знать, что происходит при редукции состояния. Предположим, что:

А) если в данном измерении НС найдена *нераспавшейся*, то результатом редукции является ее *первоначальное состояние* (см. [16, 31, 32] о физических аргументах в пользу этого предположения).

Ввиду ситуации в реальных экспериментах разумно учесть возможность, что измерения могут осуществляться в случайные момен-

ты времени. Структуру измерительной установки (для простоты будем говорить о камере) поэтому опишем функцией $W(\cdot, \cdot)$, значения которой $W(t, t')$ задают вероятность того, что НС, подготовленная в момент t , не измерялась в течение отрезка времени (t, t') . Обозначим $E(\tau, t)$ вероятность того, что НС, подготовленная в момент времени τ , доживет до момента t , т. е., что она будет найдена нераспавшейся во всех измерениях, осуществленных до этого времени. В частности, функцию $E(\cdot) = E(0, \cdot)$ назовем *измеряемым законом распада*. Точнее говоря, измеряемый ЗР определяется формулой

$$N(t) = \int_{\tau_0}^0 G_0(\tau) E(\tau, t) d\tau,$$

так как подготовку начального состояния также нужно считать случайным процессом, который описывается плотностью первого измерения $G_0(\cdot)$. Мы можем, однако, позволить себе такое упрощение, потому что интересующие нас свойства переносятся полностью из $E(\cdot)$ на $N(\cdot)$. Функцию $P(\cdot)$, значения которой задают вероятность того, что НС, подготовленная в $t = 0$ и не подвергающаяся затем измерению, будет найдена нераспавшейся при измерении в момент t , назовем *первичным законом распада*. В соответствии с результатами разд. 1 предположим только, что она непрерывна и $0 \leq P(t) \leq P(0) = 1$.

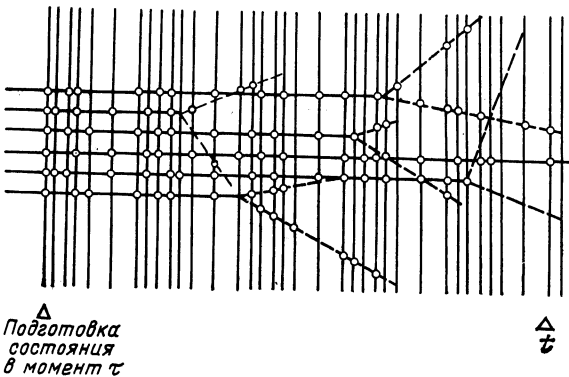


Рис. 1. Схема, эксперимента со случайными повторными измерениями:
 —○— — измерение; — — — — продукты распада

При вычислении $E(t)$ надо принимать во внимание вклады от процессов, когда НС в течение $(0, t)$ не измерялась, когда измерялась однажды, дважды и т. д. (и всегда была найдена нераспавшейся — рис. 1). Выражая эти вклады при помощи P, W и суммируя соответ-

ствующий ряд, получаем [34, 35]

$$E(t) = W(0, t) + \int_0^t \dot{W}(\tau, t) f(\tau) d\tau, \quad (12a)$$

где f является решением уравнения Вольтерра второго рода

$$f(t) = -W(0, t) P(t) - \int_0^t \dot{W}(\xi, t) P(t - \xi) f(\xi) d\xi; \quad (12b)$$

при этом $\dot{W}(t, t') \equiv \partial W(t, t') / \partial t$. Если предположить, что:

Б) $W(t, t')$ непрерывна по каждому из аргументов и неубывающая по отношению к первому, $0 \leq W(t, t') \leq W(t', t') = 1$, и производная $\dot{W}(t, t')$ является ограниченной и измеримой по t .

Тогда из основной теоремы для уравнений Вольтерра вытекает, что для уравнений (12) *существует в точности одно решение* $E(\cdot)$, которое является непрерывным, неубывающим и $E(0) = 1$.

Однако найти это решение и рассмотреть его свойства — задача в общем непросто. Отметим поэтому несколько важных частных случаев, из которых можно получить представление о поведении общего решения (см. дискуссию в работе [36]):

I. *Камера периодической структуры и экспоненциальный первичный ЗР*. Предположим, что $P(t) = \exp(-\Gamma t)$, $t \geq 0$, и, кроме того,

$$W(t, t') = \exp \left\{ - \int_t^{t'} \varphi(\tau) d\tau \right\}, \quad (13)$$

где φ — ограниченная измеримая функция, периодическая с периодом t_c . Из соотношения (13) следует

$$W(t, t') W(t', t'') = W(t, t''), \quad t \leq t' \leq t'' \quad (14)$$

(независимо от предположения периодичности). Это условие не всегда выполняется в реальных экспериментах. Им можно, например, пользоваться в случае пузырьковых камер (за исключением точек вблизи концов треков), но оно не годится для измерений в фотоэмульсиях.

II. *Идеализированная искровая камера*. Предположим, что точки, в которых может осуществляться измерение, расположены на расстоянии t_c друг от друга, $t_n = nt_c$, и что W ступенчатая функция, $W(t_n, t) = \exp(-a(m - n))$ для $t \in (t_m, t_{m+1})$. К этому случаю нельзя применить полученный выше результат о существовании, так как не выполнено предположение Б). Однако уравнения (12) теперь сводятся к выражению $E(t)$ в виде конечной суммы. Легко вывести [37], что функция $E(\cdot)$ в этом случае также ступенчатая и неубывающая.

III. *Однородная камера* [32, 36]: $W(t, t') = \exp[-\lambda(t' - t)]$.

Поведение измеряемого ЗР в этих случаях можно описать следующим образом [36, 37]: если плотность измерений, которую можно

характеризовать величиной

$$v_{\varphi} = t_c^{-1} \int_0^{t_c} \varphi(t) dt,$$

достаточно велика, тогда существует положительное γ , такое, что

$$E(t) = \Phi(t) \exp(-\gamma t), \quad t \geq 0,$$

и функция $\Phi(\cdot)$ — асимптотически периодическая с периодом t_c . При этом плотность измерений сравнивается с обратным (первичным) средним временем жизни данной НС,

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

В первом случае требуется $v_{\varphi} > \Gamma = T^{-1}$, в третьем $v_{\varphi} = \lambda > T^{-1}$ (во втором случае масштаб для сравнения также дается величиной T^{-1} , однако условие для v_{φ} более сложно — см. [37]). Кроме того, в третьем случае периодом t_c можно считать любое положительное число:

$$\Phi_{III}(t) = A + B(t), \quad A > 0,$$

причем существует $\alpha_0 > 0$ так, что для всех $\alpha \leq \alpha_0$ верно $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) e^{\alpha t} = 0$. Что касается измеряемого обратного среднего времени жизни γ , в первом случае $\gamma = \Gamma$. С другой стороны, γ в общем *зависит не только от $P(\cdot)$, но и от структуры камеры* [16, 38]. Мы получаем следующие уравнения [32, 36, 37]:

$$(e^a - 1) \sum_{k=1}^{\infty} P(kt_c) \exp(k(\gamma t_c - a)) = 1, \quad (15)$$

$$\lambda \int_0^{\infty} P(t) \exp[(\gamma - \lambda)t] dt = 1 \quad (16)$$

для случаев II и III соответственно. При условиях, отмеченных выше, каждое из этих уравнений имеет одно и только одно решение $\gamma \in (0, v_{\varphi})$. Интересно рассмотреть предельные случаи для уравнения (15): $a = v_{\varphi} t_c \gg 1$ соответствует работе [16], с другой стороны, при закреплённом v_{φ} и $t_c \rightarrow 0$ уравнение (15) переходит в (16). В случае однородной камеры из свойств уравнения (16) вытекает следующее важное утверждение [36]: для неэкспоненциального $P(\cdot)$ решение $\gamma(\lambda)$ не только может, но и *должно* зависеть от частоты измерений λ ; точнее говоря, соотношение $\gamma(\lambda) = \Gamma$ на некотором открытом отрезке значений λ верно тогда и только тогда, если $P(t) = \exp(-\Gamma t)$, $t \geq 0$.

Надо отметить еще один предельный случай. Предположим, что начальная скорость распада равна нулю. При большой плотности измерений тогда естественно ожидать [16], что γ^{-1} будет намного больше T , и в пределе континуального измерения распад вообще

не будет наблюдаться. Оказывается, что это явление опять связано с полуограниченностью гамильтониана; оно составляет суть так называемого «квантового парадокса Зенона» (см. [39], а также [40]). В условиях реальных экспериментов, однако, мы находимся далеко от этого парадоксального положения [35, 38, 41]; в следующем разделе мы это проиллюстрируем на простой модели. Другие вопросы, связанные с непрерывным наблюдением, будут обсуждаться в заключительном разделе.

4. МОДЕЛЬ: РАСПАД ЗАРЯЖЕННЫХ КАОНОВ В ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ

Рассмотрим более подробно поведение нестабильных частиц в пузырьковой камере. В уравнения (12) подставим $W(t, t') = \exp[-\lambda(t)(t' - t)]$, где λ медленно меняется с временем, т. е. $|\frac{d\lambda^{-1}(t)}{dt}| \ll 1$. Если функции P, f медленно меняются (в той же шкале времени), тогда значения интегралов в (12) мало чувствительны к замене функции W другой, обладающей следующими свойствами:

а) $W(t, t')$ существенно ненулевая только для $t' - t \leq \lambda^{-1}(t)$,

б) $\int_t^{\infty} W(t, t') dt' = \lambda^{-1}(t)$, т. е. среднее расстояние между пузырями (измерениями) сохраняется.

Лучше всего подходит модификация:

$$W(t, t') = \begin{cases} 1, & t \leq t' < t + \lambda^{-1}(t); \\ 0, & t + \lambda^{-1}(t) \leq t', \end{cases} \quad (17a)$$

которая позволяет найти явное выражение для $E(\cdot)$. Предположим дальше, что первичный ЗР выражается в следующей форме:

$$P(t) = N^2 (e^{-\Gamma t} + M(t)). \quad (18)$$

Предположим, что почти моноэнергетический пучок проходит сквозь камеру. Тогда естественно все величины выражать как функции положения x частицы. Кроме того, первичный ЗР надо выражать в собственном времени: если частица движется между двумя измерениями в точках x_1, x_2 со скоростью βc , тогда соответствующая разность времен равна

$$t'_2 - t'_1 = (c\beta\gamma)^{-1} (x_2 - x_1), \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Наше модельное предположение (17a) гласит, что измерения осуществляются в точках x_1, x_2, x_3, \dots , причем

$$x_{i+1} - x_i = L(x_i), \quad \left| \frac{d}{dx} L^{-1}(x) \right| \ll 1. \quad (17b)$$

Из предположений (17), (18) легко вывести [35] форму измеряемого ЗР:

$$E(x) = E_0(x) e^{K(x)},$$

где

$$E_0(x) = \exp \left\{ -\Gamma \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{c\beta(\xi)\gamma(\xi)} \right\}$$

— экспоненциальная часть, модифицированная соотношениями между собственным и лабораторным временами, и поправка из-за неэкспоненциальности P равна

$$K(x) \approx \int_{x_0}^x [2 \ln N + M(\Delta t'(\xi)) e^{\Gamma \Delta t'(\xi)}] \frac{d\xi}{L(\xi)}, \quad (19)$$

где $\Delta t'(\xi) = L(\xi) [c\beta(\xi)\gamma(\xi)]^{-1}$. В качестве первичного ЗР рассмотрим простейшую модификацию экспоненциального закона:

$$P(t) = \left| \frac{N\delta}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-iEt} \frac{dE}{E^2 + \delta^2} \right|^2, \quad (20)$$

где $\delta = \frac{1}{2} \Gamma$ и N — нормировочный фактор. Для нас важен только случай $\varepsilon \gg \delta$, $\delta t \gg 1$, для которого легко находим

$$N \approx 1 + \frac{2\delta}{\pi\varepsilon}; \quad (21a)$$

$$|M(t)| \leq \frac{4\delta}{\pi\varepsilon}. \quad (21b)$$

Функцию $M(\cdot)$ можно выразить явным образом [35]. Если ограничиться членами низшего порядка по δ/ε , δt , то получается

$$M(t) \approx \frac{4\delta}{\pi\varepsilon} [\cos(\varepsilon t) + \varepsilon t \operatorname{si}(\varepsilon t)] e^{-\delta t}. \quad (21в)$$

Эта функция осциллирует с убывающей амплитудой; ее график вместе с соответствующим $P(\cdot)$ приведен на рис. 2. В качестве частиц выберем заряженные каоны:

$$m = 493 \text{ МэВ}/c^2, \quad \Gamma = 5,32 \cdot 10^{-14} \text{ МэВ}.$$

Камера характеризуется средним расстоянием между пузырьками, которое определено соотношением

$$L = C\beta^2. \quad (22a)$$

Дальше надо знать зависимость β от x . Она дается потерями энергии, для которых вместо формулы Бете — Блоха примем приближенное выражение

$$-dE/dx = D\beta^{-2}. \quad (22б)$$

Параметры подбираем так, чтобы они соответствовали водородной камере при нормальных условиях [42]:

$$C = 0,07 \text{ см}, \quad D = 0,155 \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-1}.$$

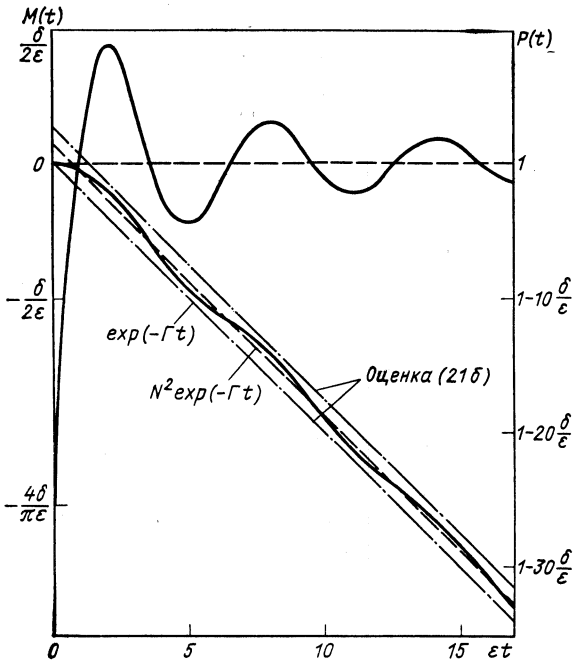


Рис. 2. Закон распада (20) и функции (21б) для $\delta \ll \epsilon$, $\delta t \ll 1$

Тогда для $\beta \leq 0,9$ погрешность приближенного выражения не превышает 20 %, что для грубой оценки достаточно. При помощи (21) и (22) можно вычислить [35] поправку (19):

$$K(x) \approx \frac{2}{\pi c} \frac{\delta}{\epsilon} \left\{ x + \frac{mc^2}{D} \left[\sqrt{F^2 - 4} - \sqrt{\left(F - \frac{D}{mc^2} x \right)^2 - 4} \right] \right\},$$

где $F = \gamma(0) + \gamma(0)^{-1}$ и $\gamma(0)$ — фактор Лоренца при $x = 0$; график функции $K(\cdot)$ при четырех значениях начального момента каона приведен на рис. 3. На рис. 4 показана схема эксперимента, в котором можно (по крайней мере, в принципе) измерять поправку $K(x)$. Изменение в первичном ЗР можно осуществить искусственно при помощи энергетического фильтра, роль которого может играть, например, установка типа массового спектрометра. Чтобы избавиться от $E_0(\cdot)$, надо сравнить, какая доля частиц проходит через плоскость x при двух разных ширинах энергетической щели ϵ_1, ϵ_2 . В частности, для $\epsilon_1 \ll \epsilon_2$ получаем

$$\frac{N(\epsilon_1, x) - N(\epsilon_2, x)}{N(\epsilon_2, x)} \approx K(\epsilon_1, x).$$

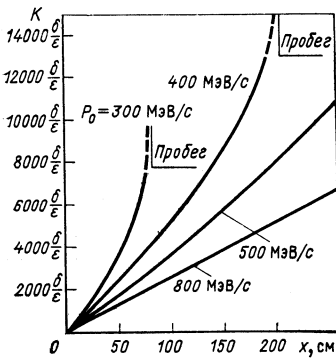


Рис. 3. Поправка (19) к измеряемому закону распада

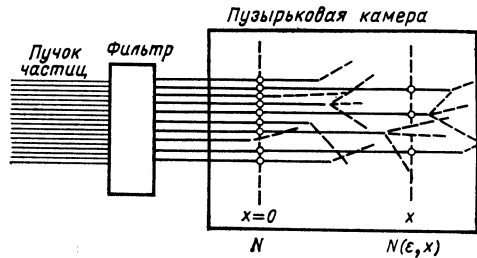


Рис. 4. Схема измерения отклонений от экспоненциального закона распада

Принимая во внимание достижимые значения энергетического разрешения ϵ , мы приходим к заключению [35], что рассматриваемый эффект имеет порядок $\leq 10^{-7}$. Это число можно увеличить, если вместо каонов рассматривать подходящие нестабильные ядра, у которых ионизация, т. е. плотность измерений, в Z^2 раз больше. Однако даже в этом случае сомнительно, что удастся добиться экспериментального подтверждения.

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГИИ

Результаты предыдущего раздела показывают, что влияние «энергетического обрезания», т. е. приближения гамильтониана ограниченным оператором, на поведение ЗР может быть незначительным. Похоже, что это верно во всех практически осуществимых случаях, даже если отклонения усиливаются в процессе повторных измерений. С другой стороны, возникает вопрос, каким образом такое приближение сказывается при рассмотрении других задач теории распада, в частности обратной задачи распада.

Введем понятие *состояния с ограниченной энергией*: это любое состояние ρ , для которого существует $b > 0$, так что

$$\text{Tr}(\rho E_\lambda) = \begin{cases} 0, \dots & \lambda \leq -b, \\ 1, \dots & \lambda > b \end{cases}$$

[см. (6)]; множество этих состояний обозначим $B(H)$. Простые свойства таких состояний сводятся к следующему [26]:

Теорема 5: а. Для любого состояния ρ существует однопараметрическое семейство $\{\rho_b\} \subset B(H)$, такое, что $\lim_{b \rightarrow \infty} \text{Tr} |\rho - \rho_b| = 0$.

б. Если состояние нестабильной системы $\rho \in B(H)$, то закон распада $P_\rho(\cdot)$ является сужением целой функции на $[0, \infty)$.

Второе утверждение показывает, как возможно для $\rho \in B(H)$ усилить утверждение теоремы 1; при этом вопрос об ограничен-

ности энергии в данном состоянии опять нельзя разрешить экспериментально. Семейство $\{\rho_b\}$ можно построить явно: например,

$$\rho_b = N_b E^{(b)} \rho E^{(b)}, \quad (23)$$

где $E^{(b)} = E_H(\Delta_b)$, $\Delta_b = (-b, b)$ и N_b — нормировочный фактор. Соотношение (23) означает именно «энергетическое обрезание». Состояние ρ_b получим после проведения (с положительным результатом) на системе в состоянии ρ «да — нет» эксперимента [43]: «принадлежит ли значение полной энергии отрезку Δ_b ?».

Рассмотрим сейчас, как данное приближение повлияет на описание распада. В соответствии с постулатом б) из разд. 1 в общем $[E_u, E^{(b)}] \neq 0$, т. е. включение $\text{Ran } \rho_b \subset \mathcal{H}_u$ может быть неверно. В связи с отмеченной выше интерпретацией естественно принять $\mathcal{H}_u^b = E^{(b)} \mathcal{H}_u$ в качестве *приближенного пространства состояний* (для данных НС и параметра b). Аналогичным образом определим *приближенный редуцированный оператор эволюции*

$$V_b : V_b(t) = E_u^{(b)} U(t) E_u^{(b)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Основной вопрос состоит в том, в каком смысле $E_u^{(b)}$ приближает E_u при $b \rightarrow \infty$. Интерес представляют прежде всего следующие возможности:

сильный операторный предел (C): $s - \lim_{b \rightarrow \infty} E_u^{(b)} = E_u$;

предел в операторной норме (H): $u - \lim_{b \rightarrow \infty} E_u^{(b)} = E_u$.

Разумеется, что (C) вытекает из (H). Если $\dim \mathcal{H}_u < \infty$, можно доказать [26], что выполнено требование (H). С другой стороны, (H) в общем неверно для $\dim \mathcal{H}_u = \infty$; вопрос о справедливости (C) остается в этом случае открытым. Можно вывести следующие утверждения [26]:

Теорема 6: Из (C) вытекает $s - \lim_{b \rightarrow \infty} V_b(t) = V(t)$ и $\lim_{b \rightarrow \infty} P_{\rho_b}(t) = P_{\rho}(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $\text{Ran } \rho \subset \mathcal{H}_u$. Если, кроме того, верно (H), то $u - \lim_{b \rightarrow \infty} V_b(t) = V(t)$ и предел для законов распада является равномерным в \mathbf{R} .

Теорема 7: Если $\{\mathcal{H}, U(\cdot), E_u\}$ является минимальным унитарным продолжением операторной функции $V(\cdot)$, то МУП приближенного редуцированного оператора эволюции $V_b(\cdot)$ равно $\{\mathcal{H}^b = E^{(b)} \mathcal{H}, U_b(\cdot) = E^{(b)} U(\cdot), E_u^{(b)}\}$.

Эти результаты допускают естественную физическую интерпретацию, подробная дискуссия по которой приведена в [26]. Главное значение рассматриваемого приближения состоит в том, что оно позволяет нам на более глубоких теоретических основах оправдать использование метода Вайскопфа — Вигнера вопреки его отмеченным недостаткам.

6. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПСЕВДОГАМИЛЬТониАНЫ

В квантовой механике часто пользуются несопряженными операторами для феноменологического описания неизолированных систем. В качестве примера можно назвать оптическую модель для рассеяния частиц на атомных ядрах [44—47]. Временное развитие системы при этом определяется уравнением типа Шредингера

$$i \frac{d\psi}{dt} = H_p \psi, \quad (24)$$

где H_p — феноменологический несамосопряженный гамильтониан на пространстве Гильберта \mathcal{H}_p . Как правило, мы интересуемся только системами диссипативными, т. е. такими, для которых выполнено

$$\text{Im} (\psi, H_p \psi) \leq 0, \quad \psi \in D(H_p). \quad (25)$$

Если H_p не зависит от времени, то из (24), (25) формально вытекает, что временная эволюция в \mathcal{H}_p описывается сжимающей полугруппой

$$V(t) = \exp(-iH_p t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Таким образом, существует естественная связь между несамосопряженными гамильтонианами и условием Вайскопфа — Вигнера. Если мы хотим, в духе предыдущих разделов, включить феноменологическое описание в стандартный квантотеоретический формализм, надо найти минимальное унитарное продолжение полугруппы $\{V(t)\}$. Трудности, связанные с неограниченностью получаемого при этом гамильтониана, можно преодолеть как и раньше: феноменологическое описание не претендует на абсолютную точность, поэтому вполне допустимо слабое нарушение условия (2).

На практике чаще всего встречаются феноменологические гамильтонианы типа

$$H_p = -\frac{1}{2} \Delta + U, \quad (27)$$

где Δ — оператор Лапласа на $L^2(\mathbf{R}^d)$ и U — «потенциал», в частности оператор умножения на комплексную функцию $U(\cdot)$, $\text{Im} U(x) \leq 0$. К таким случаям нельзя непосредственно применять рассуждения предыдущего раздела [надо было бы сначала проверить выполнение условия (C)]. Однако приближенность условия (2) можно толковать также другим способом: вместо того чтобы считать полный гамильтониан заданным и менять состояния (добавлением энергетического фильтра), мы можем считать заданным множество состояний (т. е. пространство \mathcal{H}_p) и рассматриваемую «приближенность» понимать как проявление того факта, что нельзя с предельной точностью определить полный гамильтониан. Если предположить, что полугруппа $\{V(t)\}$ непрерывна и что точность полугруппового приближения зависит от состояния системы, можно приведенное выше требование сформулировать более конкретно: для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и произвольного конечного подмножества $M \subset \mathcal{H}_p$ существует тройка $\{\mathcal{H}', H', P'\}$ так, что:

- а) $\mathcal{H}_p = P' \mathcal{H}'$,

б) H' — самосопряженный и полуограниченный,

в) $\| (P'e^{-iH't} - V(t))\psi \| < \varepsilon$ для всех $\psi \in M$, $t \in [0, T]$.

Конечность множества M и отрезка времени $[0, T]$ не вызывает трудностей, так как во всяком реальном эксперименте точность полугруппового приближения проверяют именно при таких условиях. Оказывается, что \mathcal{H}' , P' можно выбрать независимо от ε , T , M [48]:

Теорема 8: Пусть $\{V(t)\}$ — непрерывная сжимающая полугруппа и $\{\mathcal{H}, U(t) = e^{-iHt}, P\}$ — ее минимальное унитарное продолжение. Для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и конечного $M \subset \mathcal{H}_p$ существует последовательность $\{f_n\}$ вещественных борелевых функций, такая, что

а) $\{\mathcal{H}, f_n(H), P\}$ удовлетворяет условиям а) — в) для всех достаточно больших n ;

б) $f_n(H)$ сходится к H в сильном резольвентном смысле.

Таким образом, можно сформулировать определение: линейный оператор H_p на \mathcal{H}_p назовем *псевдогамильтонианом*, если iH_p порождает непрерывную сжимающую полугруппу $\{V(t)\}$ на \mathcal{H}_p (это, в частности, означает, что H_p плотно определен и замкнут). Самосопряженный оператор H на $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_p$, порождающий минимальное унитарное продолжение полугруппы $\{V(t)\}$, будем называть *квазигамильтонианом*, соответствующим H_p .

Основной критерий того, чтобы плотно определенный замкнутый оператор H_p являлся псевдогамильтонианом, вытекает непосредственно из теоремы Хилле — Йосида (см. [48; 49, теорема X.48]). В частности, для этого достаточно выполнения условий (25) и $\text{Im}(\psi, H_p^+\psi) \leq 0$ для всех $\psi \in D(H_p^+)$. Рассмотрим дальше обобщенные операторы Шредингера типа (27) с локальным комплексным потенциалом U . Обозначим H_0 оператор на \mathcal{H}_p , действие которого на векторы области определения $D(\Delta) \cap D(U)$ дается соотношением (27). Если дальше обозначить \bar{H} замыкание оператора H_0 , то имеет место [48]:

Теорема 9: Пусть H — обобщенный оператор Шредингера на $L^2(\mathbb{R}^d)$ с локальным комплексным потенциалом U . Условие

$$\text{Im} U(x) \leq 0 \quad (28)$$

почти всюду в \mathbb{R}^d является необходимым для того, чтобы H принадлежал классу псевдогамильтонианов. Если, кроме того, H^+ является обобщенным оператором Шредингера, соответствующим комплексносопряженному потенциалу \bar{U} , т. е. если $H^+ = -\frac{1}{2}\Delta + U^+$, тогда условие (28) является в то же время достаточным.

Другие достаточные условия, более подходящие для практических применений, можно вывести при помощи теории возмущений, в первую очередь следующей леммы типа Като — Реллиха (см. [48; 49, разд. X.8]):

Лемма: Пусть H — замыкаемый плотно определенный оператор, такой, что \bar{H} является псевдогамильтонианом, и пусть B — замкну-

тый аккретивный оператор, $D(B) \supset D(H)$. Если существуют неотрицательные константы $a < 1$ и b , такие, что

$$\|B\varphi\| \leq a \|H\varphi\| + b \|\varphi\| \text{ для всех } \varphi \in D(H),$$

тогда $D(\bar{H}) \subset D(B)$, оператор $\bar{H} - iB$ замкнут и принадлежит классу псевдогамильтонианов.

Отсюда, например, получается достаточное условие для обобщенных операторов Шредингера на $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \leq 3$ [48]:

Теорема 10: Пусть H — обобщенный оператор Шредингера на $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \leq 3$, с локальным комплексным потенциалом U , удовлетворяющим условию (28). Если $U \in L^2(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$, то $D(H) = D(\Delta)$ и $H = -\frac{1}{2}\Delta + U$ является псевдогамильтонианом (без замыкания!).

Другие свойства псевдогамильтонианов, в том числе связь между собственными значениями псевдогамильтониана и спектральными характеристиками соответствующего ему квазигамильтониана, рассмотрены в [48]. Отметим дальше, что не только локальные абсорбтивные потенциалы интересны с точки зрения физических применений. В качестве примера можно указать нелокальный оптический потенциал Фешбаха [45, 47, 50]. Теория рассеяния для псевдогамильтонианов далеко еще не завершена. Пока существует только ряд интересных частных результатов [47, 50—52].

7. ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА — ОБЩИЙ ОЧЕРК

Математические методы, порожденные физикой, часто оказываются плодотворными дважды: сначала как удобная, но более менее формальная техника вычислений и после того как теория, основанная на строгом рассмотрении первоначальной идеи на подходящем математическом языке. Так, например, δ -функция чрезвычайно полезна для вычислений, однако полная сила этой идеи (которая, без сомнений, превосходит намерения Дирака) проявилась только после создания теории обобщенных функций. Поэтому легко понять, почему столько соблазна в попытках построить математически корректную теорию интеграла Фейнмана. Опишем здесь несколько подходов к этой проблеме; более полное рассмотрение можно найти в большом числе обзорных работ и монографий: см., например, [53—56], где обсуждается математическая сторона дела, и [57—59, 107], где даны некоторые физические применения. Отметим также монографии [60, 61], посвященные применению математически хорошо определенных методов функционального интегрирования (в первую очередь интеграла Винера) в квантовой физике.

Центром внимания в физических применениях является описание динамики при помощи интегралов по путям. Если ограничиться простейшим примером одной бесспиновой частицы со свободным гамильтонианом $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, которая взаимодействует с внешним полем, описываемым потенциалом V , то тогда знаменитый результат Фейнмана (см. [62, 63, гл. 3]) гласит, что волновая функция в момент

времени t равна

$$\left(\exp \left[-\frac{i}{\hbar} (H_0 + V) t \right] \psi \right) (x) = \int_{\Gamma_x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(\gamma) \right\} \psi(\gamma(0)) D\gamma, \quad (29)$$

где ψ — волновая функция в начальный момент $t = 0$,

$$S(\gamma) = \int_0^t \left[\frac{1}{2} m |\dot{\gamma}(\tau)|^2 - V(\gamma(\tau)) \right] d\tau \quad (30)$$

классическое действие вдоль γ и Γ_x означает пространство всех путей γ , концы которых лежат в точке x (в дальнейшем мы будем опять предполагать $\hbar = c = 1$ и по возможности также $m = 1$). Таким образом, главной задачей является осмысление формального выражения в правой части уравнения (29) или более общих выражений типа

$$\int_{\Gamma_x} \exp \left\{ \frac{i}{2s} \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau \right\} f(\gamma) D\gamma, \quad (31)$$

где f — комплексный функционал на пространстве путей Γ_x и s — вещественный параметр, или, наконец, еще более общих операторных интегралов Фейнмана [64—66].

Первый и, по-видимому, самый популярный путь для достижения результата был предложен Фейнманом в его оригинальной работе [62]. Он состоит в замене множества всех путей множеством ломаных путей [скорость частицы предполагается постоянной в отрезках времени $(j\delta, j\delta + \delta)$, $\delta = t/n$, $j = 0, 1, \dots, n-1$]; в этом случае можно (31) определить естественно как интеграл по соответствующему конечномерному пространству путей. Построение завершается предельным переходом $n \rightarrow \infty$. Ясно, что при этом не надо ограничиваться эквидистантными разбиениями; любая последовательность разбиений $\sigma = \{\tau_j : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t\}$ отрезка $[0, t]$ годится для этой цели, если только длины подотрезков в ней стремятся к нулю. Важно прежде всего следующее свойство: для цилиндрических функционалов (грубо говоря, это те, которые зависят только от «конечного числа переменных») выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_x} \exp \left\{ \frac{i}{2s} \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau \right\} f(\gamma(\tau_0), \dots, \gamma(\tau_{n-1})) D\gamma = \\ = \prod_{j=0}^{n-1} (2\pi i s \delta_j)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ \frac{i}{2s} \sum_{k=0}^{n-1} \right. \\ \left. \times |\gamma_{k+1} - \gamma_k|^2 \delta_k^{-1} \right\} f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) d^d \gamma_0, \dots, d^d \gamma_{n-1}, \quad (32) \end{aligned}$$

где $\delta_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ и d означает размерность конфигурационного пространства. Это соотношение настолько естественно, что кажется

разумным требовать его выполнение для любого определения функционального интеграла (31).

Отметим, что одно из возможных построений меры Винера начинается как раз из формулы (32) для $s = -i$ (см. [49, разд. X.11] и [61]). В этом случае, однако, можно задачу выполнить в рамках теории меры, несмотря на тот факт, что в бесконечном пространстве не существует трансляционно-инвариантная мера типа Лебега (см. [55; 67, гл. 1]): грубо говоря, сингулярности экспоненциального члена и $D\gamma$ сокращаются и формальное выражение

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau \right\} D\gamma$$

заменяется $dw(\gamma)$, где w — мера Винера. С другой стороны, аналогичные рассуждения нельзя применить к интегралу Фейнмана, так как экспоненциальный член в этом случае является осциллирующей функцией. Эту трудность можно было бы преодолеть, определяя интеграл Фейнмана как предел (когда параметр s достигает вещественной оси снизу), если бы подходящие меры существовали для s из нижней комплексной полуплоскости (это предложение принадлежит И. М. Гельфанду и А. М. Яглому [68]). К сожалению, эти меры существуют тогда и только тогда, если $s = -ic$, $c > 0$.

Интегралы Винера сами по себе могут быть также использованы для определения и вычисления интегралов Фейнмана. Такой метод основывается на аналитическом продолжении: предположим, например, что мы знаем интеграл Винера $I_s(f) = \int_{\Gamma} f(\gamma) dw_{1s}(\gamma)$, где

Γ — соответствующее пространство путей и w_{1s} — мера Винера с дисперсией is (см. [67, § 13]) при $1 - \delta \leq is \leq 1$ для некоторого $\delta > 0$, и что $I_s(f)$ являются граничными значениями функции $s \rightarrow I_s(f)$ аналитической (например) в области, изображенной на рис. 5; тогда можно определить интеграл Фейнмана от f как аналитическое продолжение $I_s(f)$ в точку $s = 1$. Заметим, что, поскольку s пропорционально m^{-1} , данное определение сводится к аналитическому продолжению по массе; оно принадлежит Камерону [71] и разные его модификации можно найти, например, в работах [64—66].

Альтернативный подход основан на аналитическом продолжении по времени; среди его применений можно назвать в первую очередь конструктивные методы евклидовой квантовой теории поля, столь бурно развивающиеся в течение последних десяти лет [66, 72]. Описание динамики в этом подходе исходит из выражения для $\exp(- (H_0 + V) t)$, аналогичного (29). Это так называемая формула

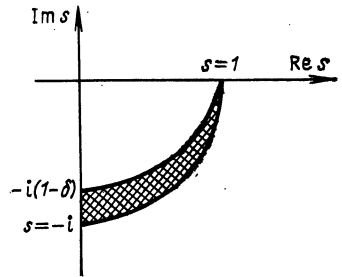


Рис. 5. Определение интеграла Фейнмана аналитическим продолжением по массе

Фейнмана — Каца, впервые полученная Кацем в 1951 г. (см. [49, разд. X.11]).

Следующая группа определений развивает на строгом уровне оригинальную идею Фейнмана в том смысле, что «интегралы» типа (31) в них получаются «секвенциально», т. е. как предел некоторой последовательности «конечномерных» интегралов. Таким путем Нельсону [64] одному из первых удалось вывести строгий вариант формулы (29). Его метод был основан на формуле Ли — Троттера; это вызвало необходимость небольшого отклонения от эвристического

предложения Фейнмана: функционал $\exp \left\{ -i \int_0^t V(\gamma(\tau)) d\tau \right\}$ надо

было заменить в приближающихся интегралах выражениями, содержащими суммы Дарбу — Римана $\exp \left\{ -i \sum_{j=0}^{n-1} V(\gamma(\tau_j)) \delta_j \right\}$,

где $\tau_j = jt/n$, $\delta_j = t/n$, $j = 0, \dots, n-1$. Если взять, например, размерность конфигурационного пространства $d \leq 3$, то результат Нельсона затрагивает потенциалы $V \in L^2(\mathbf{R}^d) + L^\infty(\mathbf{R}^d)$. Его можно дальше обобщить для случая потенциалов, зависящих от времени [73], для гармонического осциллятора [74] и т. п. Вообще говоря, секвенциальные методы этого типа пользуются самой большой популярностью в физической литературе.

Существуют также определения, которые не требуют «конечномерных» приближений. Вместо этого к формальной «мере Фейнмана» добавляется еще один экспоненциальный фактор, который превращает ее в хорошую гауссовскую меру на данном пространстве путей; этот фактор затем устраняется предельным переходом. Такой подход принадлежит Ито [75]; в его рамках удалось доказать основную динамическую формулу (29) при $d = 1$ для разных потенциалов: $V \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$, т. е. для таких, которые являются преобразованием Фурье некоторой ограниченной меры на конфигурационном пространстве (заметим, что потенциалы из этого класса ограничены и непрерывны), и далее для линейного потенциала и потенциала гармонического осциллятора. Отметим также метод, недавно предложенный Я. Тарским (см. [54, с. 254—279]), который в какой-то степени объединяет «конечномерные» (цилиндрические) приближения с методом Ито.

Очередная группа определений использует существенно преобразование Фурье. Сюда следует отнести метод Девит — Морет [76, 77], в котором несуществующая мера Фейнмана заменяется «проективной обобщенной функцией» (прораспределением); она определяется своим преобразованием Фурье. Этим методом можно вычислять разные интегралы по путям, представляющие физический интерес [55]. Для нас более важным является определение Албеверио и Хэкрона (см. [53, 54, с. 8—13]), в котором пространство траекторий имеет структуру гильбертова пространства (обозначим его \mathcal{H}) и «ин-

тегрируемыми» являются функционалы, представляющие собой преобразования Фурье конечных мер на \mathcal{H} (более подробные сведения мы приведем в следующем разделе). В рамках этого подхода доказана основная динамическая формула (29) для потенциалов $V \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$.

Однако первоначальное определение Албеверио и Хэк-Крона не позволяет «интегрировать» некоторые функционалы, важные с физической точки зрения, как, например, экспоненциальный функционал, соответствующий потенциалу гармонического осциллятора. Поэтому предложены разные обобщения. Первое из них принадлежит снова Албеверио и Хэк-Крону (см. [53; 54, с. 19—23]); оно основано на замене стандартного скалярного произведения в пространстве путей [см. (34)] квадратичной формой, которая не обязательно положительно определена. Другими словами, экспоненциальный член, входящий в «фейнмановскую меру», может в этом подходе содержать также фактор от потенциальной энергии. Существенный недостаток обобщенного определения заключается в том, что оно в общем не является расширением первоначального. Дальнейшее обобщение в этом направлении можно найти в работе [86].

Можно попытаться расширить класс «интегрируемых» функционалов прямо добавлением к нему преобразований Фурье обобщенных функций. В этом направлении получены частные результаты [78]; основным препятствием здесь выступает тот факт, что мало известно про обобщенные функции «бесконечного числа аргументов». Иную возможность расширения представляют собой приближения ломаными путями. Начало этому подходу положено в работах Трумена (см. [70, 79, 80] и [54, с. 73—102], а также [69]), его дальнейшее обобщение и подробное обсуждение можно найти в работе [81]. Привлекательной чертой этого подхода является то, что он ближе к эвристическим рассуждениям Фейнмана, чем упомянутый выше метод Нельсона, так как в приближениях здесь встречаются интегралы от экспоненты точного классического действия, а не приближающих его сумм Дарбу — Римана.

Подходы типа Нельсона, Албеверио, Хэк-Крона и Трумена к определению интегралов Фейнмана мы обсудим более подробно в дальнейшем. В заключение этого раздела приведем некоторые другие определения и проблемы. Иногда оказывается полезным рассматривать не интеграл Фейнмана в отдельности, а так называемые отображения Фейнмана [70, 82] (это понятие тесно связано с комплексным винеровским интегралом Камерона [66, 69, 71]), т. е. семейство отображений, характеризуемых комплексным параметром s [см. (31)]. Этот подход позволяет в какой-то степени объединить методы, основанные на аналитическом продолжении с секвенциальными и рассматривать (для определенного класса функционалов) интегралы Фейнмана и Винера на единой основе. Отметим дальше, что в приведенных выше рассуждениях мы ограничились функциональными интегралами в конфигурационном пространстве или «лагранжевыми». Что касается функциональных интегралов в фазо-

вом пространстве или «гамильтоновых», которые были введены также Фейнманом [83], мы можем сослаться, например, на работы [56, 84, 85] и приведенную в них литературу. Интеграл Фейнмана в фазовом пространстве можно также определять при помощи преобразования Фурье: при этом экспонента от потенциального члена порождает (для определенного класса потенциалов) обобщенную меру, по которой интегрируется экспонента от кинетической части действия [87]. Отметим дальше, что гамильтонова форма интегралов Фейнмана удобна для рассмотрения вопросов, связанных с квантованием [56, 84], однако это обстоятельство не играет большой роли для гамильтонианов шредингеровского типа, так как для них все квантования совпадают. Наконец, мы не будем здесь рассматривать квазиклассическое приближение и применения интегралов Фейнмана для нахождения классического предела динамики квантовых систем; об этом можно прочитать, например, в работах [88—90].

8. ШРЕДИНГЕРОВСКИЕ ПСЕВДОГАМИЛЬТОНИАНЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА

Начнем с более подробного описания некоторых из упомянутых выше определений интеграла Фейнмана. Сутью подхода Албеверио и Хэк-Крона (АН) является соотношение типа равенства Парсевала

$$(2\pi i)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left\{\frac{i}{2}|x|^2\right\} f(x) d^n x = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left\{-\frac{i}{2}|y|^2\right\} \tilde{f}(y) d^n y, \quad (33)$$

где $f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} \tilde{f}(y) d^n y$, которое выполнено, например, для

любой быстроубывающей функции, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Левая часть равенства есть выражение типа интеграла Фейнмана [см. (31)], поэтому естественно воспользоваться правой стороной как определением в случае, когда \mathbf{R}^n заменено (бесконечномерным) пространством путей и левая сторона теряет смысл. Таким образом, исходным пунктом АН определения является выбор пространства траекторий \mathcal{H} , которому здесь приписывается структура вещественного сепарабельного пространства Гильберта. В соответствии с формулами (31), (32) целесообразно для квантовомеханической системы с d степенями свободы, конфигурационным пространством которой является \mathbf{R}^d , в качестве \mathcal{H} брать $AC_0[J^t; \mathbf{R}^d]$, т. е. множество всех путей γ в \mathbf{R}^d , соответствующих отрезку времени $J^t = [0, t]$, которые абсолютно непрерывны, имеют квадратично-интегрируемые производные и для которых $\gamma(t) = 0$. Норма в пространстве \mathcal{H} дана соотношением

$$\|\gamma^2\| = (\gamma, \gamma) = \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau. \quad (34)$$

Отметим, что пути из пространства \mathcal{H} можно эквивалентным образом характеризовать тригонометрическими рядами [79, 91]. Множе-

ство «интегрируемых функционалов» обозначим $\mathcal{F}(\mathcal{H})$: оно состоит из всех $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида:

$$f(\gamma) = \int_{\mathcal{H}} e^{i(\gamma, \gamma')} d\mu_f(\gamma'), \quad (35)$$

где μ_f — некоторая конечная комплексная борелева мера на пространстве путей \mathcal{H} . Для таких функционалов определим по аналогии с формулой (33) интеграл Фейнмана $I_{\text{АН}}: \mathcal{F}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ отношением

$$I_{\text{АН}}(f) \equiv \int_{\mathcal{H}}^{\text{АН}} \exp\left\{\frac{i}{2} \|\gamma\|^2\right\} f(\gamma) D\gamma = \int_{\mathcal{H}} \exp\left\{-\frac{i}{2} \|\gamma\|^2\right\} d\mu_f(\gamma). \quad (36)$$

Свойства отображения $I_{\text{АН}}(\cdot)$ подробно рассмотрены, например, в работах [53, 79, 82]. Назовем несколько важнейших:

нормировка: для единичного функционала выполнено $I_{\text{АН}}(1) = 1$;

$I_{\text{АН}}(f)$ от цилиндрического функционала f выражается формулой типа (32);

в случае, когда \mathcal{H} разлагается в ортогональную сумму $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, имеет место *аналог теоремы Фубини*;

имеются *формулы преобразования* для линейной неоднородной замены «интеграционной переменной» γ , аналогичные формулам Камерона — Мартина для интеграла Винера.

Следует, однако, подчеркнуть, что название «интеграл» для отображения $I_{\text{АН}}(\cdot)$ только условно. Так, например, для него *не* имеет места одно из важнейших свойств интеграла Лебега — теорема о мажорируемой сходимости: контрпример показан в [82]. Этот факт имеет определенные следствия, например, для строгого обоснования эвристических рассуждений о классическом пределе квантовой механики [79].

Перейдем сейчас к расширению АН-определения при помощи ломаных путей. Пусть σ — некоторое разбиение $\{\tau_k : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t\}$ отрезка J^t . Обозначим $\delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ и $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k$. Каждому σ отвечает проекционный оператор $P(\sigma)$ на пространстве \mathcal{H} :

$$(P(\sigma)\gamma)(\tau) = \gamma(\tau_k) + [\gamma(\tau_{k+1}) - \gamma(\tau_k)] \delta_k^{-1}(\tau - \tau_k) \quad (37)$$

(если $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$), который любому γ сопоставляет ломаный путь $P(\sigma)\gamma$, проходящий через точки $\gamma(\tau_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда можно определить отображение $I_{PP}(\cdot)$:

$$I_{PP}(f) := \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} I_{\text{АН}}(f \circ P(\sigma)), \quad (38)$$

если $f \circ P(\sigma) \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ для всякого разбиения σ и данный предел существует. Определение (38) представляет собой расширение АН-определения: техникой воспроизводящего ядра можно доказать [81], что $I_{PP}(f)$ существует и равно $I_{\text{АН}}(f)$ для любого $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Возможна также другая формулировка: пользуясь цилиндричностью функционала $f \circ P(\sigma)$ и свойствами $I_{\text{АН}}(\cdot)$, соотношение (38) можно переписать в виде

$$I_{PP}(f) = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} [(2\pi i)^n \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{n-1}]^{-d/2} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_{k+1} - \gamma_k|^2 \delta_k^{-1} \right\} \times \\ \times f_{\sigma}(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) d^d \gamma_0 \dots d^d \gamma_{n-1}, \quad (39)$$

где $\gamma_k = (P(\sigma)\gamma)(\tau_k)$ и $f_{\sigma}(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) = f(P(\sigma)\gamma)$. Кратный интеграл может существовать (в смысле главного значения) также для некоторых функционалов f , для которых $f \circ P(\sigma)$ не принадлежит $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Следовательно, формулировка определения [69, 70, 80], исходящая непосредственно из формулы (39), является более широкой, чем приведенная выше, однако в ней утеряна связь с АН-определением. Кроме того, вычисление многомерных несобственных интегралов чувствительно к предельной процедуре [55, 82], т. е. здесь легко можно допустить ошибку.

Отметим, наконец, определение фейнмановского интеграла на основе формулы произведения типа Ли — Тротера: для функционалов $f = f_{V, \varphi, x, t}$ следующего вида:

$$f(\gamma) = \exp \left\{ -i \int_0^t V(\gamma(\tau) + x) d\tau \right\} \varphi(\gamma(0) + x) \quad (40)$$

определяется

$$I_{LT}(f) := \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} [(2\pi i)^n \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{n-1}]^{-d/2} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \exp \{ i S_{\sigma}(\gamma_0, \dots, \gamma_n) \} \varphi(\gamma_0 + x) d^d \gamma_0 \dots d^d \gamma_{n-1}, \quad (41)$$

где $\gamma_n \equiv 0$; несобственные интегралы определены как $\int_{\mathbb{R}^d} d^d \gamma \equiv \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{|\gamma| \leq c} d^d \gamma$, все пределы понимаются в L^2 -смысле, и

$$S_{\sigma}(\gamma_0, \dots, \gamma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{\delta_k} \right)^2 - V(\gamma_k + x) \right] \delta_k. \quad (42)$$

Если потенциал V явно зависит от времени, тогда $V(\gamma_k + x)$ в последней формуле следует заменить на $V(\gamma_k + x, \tau_k)$ (см. [73, 92]). Сравнение $I_{PP}(f)$ для функционалов типа (40) с $I_{LT}(f)$ показывает разницу, о которой говорилось выше: в первом случае в экспоненте имеется *точное действие*, в другом — *римановское приближение* к нему. В рассматриваемых случаях оба метода дают те же результа-

ты (см. теорему 11), однако оценить их относительную скорость сходимости — задача весьма трудная [93].

После этих предварительных сведений обратимся к вопросу, как выражается динамика системы, описываемой предингеровским псевдогамильтонианом при помощи интегралов Фейнмана. Начнем со случая, в котором все определенные выше фейнмановские интегралы существуют и их значения совпадают [92, 94].

Теорема 11: Предположим, что $V \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^d)$, т. е. что V является преобразованием Фурье некоторой конечной комплексной борелевой меры на \mathbf{R}^d . Если V дальше удовлетворяет условию диссипативности (28), то $H_p = -\frac{1}{2} \Delta + V$ является псевдогамильтонианом и функция ψ : $\psi(x, t) = I_{\text{АН}}(f) = I_{\text{РР}}(f) = I_{\text{LT}}(f)$, где $f = f_{V, \varphi, x, t}$ дано соотношением (40), удовлетворяет уравнению (24) с начальными данными $\psi(\cdot, 0) = \varphi$.

Если ограничиться только одним или двумя из названных определений, то утверждение теоремы допускает ряд обобщений:

потенциалы из $\mathcal{F}(\mathbf{R}^d)$ ограничены и непрерывны, однако от последнего предположения можно отказаться: утверждение теоремы будет верно для *любого ограниченного* измеримого потенциала V , если в качестве фейнмановского интеграла взять I_{LT} [92]. Отметим также, что аналогичные результаты выведены недавно [95—97] при помощи аналитического фейнмановского интеграла Камерона — Сторвика [65, 66, 71];

можно *избавиться также от предположения об ограниченности потенциала*. В работе [92], например, утверждение доказано для $V \in L^2(\mathbf{R}^d) + L^\infty(\mathbf{R}^d)$ при $d \leq 3$ (см. теорему 10) для фейнмановского интеграла I_{LT} (ограничение на размерность здесь может быть снято заменой L^2 подходящим L^p , так как это делается для вещественнозначных потенциалов [73]);

опять для I_{LT} можно допустить *потенциалы, зависящие от времени*, если только эта зависимость будет достаточно гладкая и условие диссипативности останется в силе в течение рассмотренного отрезка времени [92]. Аналогичный результат для фейнмановского интеграла $I_{\text{АН}}$ и потенциалов со значениями в $\mathcal{F}(\mathbf{R}^d)$ вытекает из работы [97];

затухающий гармонический осциллятор для I_{LT} и $I_{\text{РР}}$, который будет рассмотрен в следующем разделе.

9. ПРИМЕР: ЗАТУХАЮЩИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Чтобы проиллюстрировать результаты, приведенные выше, рассмотрим в качестве примера многомерный затухающий гармонический осциллятор, описываемый псевдогамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \Delta + x \cdot (A - iW)x, \quad (43)$$

где Δ , как всегда, оператор Лапласа на \mathbf{R}^d и A, W — матрицы $d \times d$ с положительными собственными значениями. В отличие

от большинства подходов к описанию затухающего осциллятора (см. обзорную работу [98]) мы не пытаемся получить псевдогамильтониан (43) квантованием классического затухающего осциллятора. Такой подход осмыслен только тогда, когда речь идет о конкретной квантовой системе, у которой механизм затухания в разумной мере похож на классический случай. В духе общей дискуссии о псевдогамильтонианах (см. разд. 6) мы будем только предполагать, что присутствие мнимой части в потенциале является феноменологическим описанием того, как наш осциллятор взаимодействует с окружающей его средой. Отметим также, что по сравнению с известными результатами мы не предполагаем ни зависимости частоты от времени [99], ни присутствия внешних сил [100]. С другой стороны, мы не ограничиваем размерность — и обобщение на случай $d > 1$ для комплексного гармонического потенциала нетривиально, так как матрицы A , W , в общем, не допускают одновременную диагонализацию.

Сначала надо проверить, что (43) действительно является псевдогамильтонианом, так как $V(x) = x \cdot (A - iW) x$ не принадлежит классу потенциалов, охватываемых теоремой 10. Это доказательство можно выполнить итерационным применением леммы из разд. 6 (оно приведено в работе [101]). Затем надо вычислить соответствующий интеграл Фейнмана. Это можно сделать по-разному. Самым простым путем является применение формулы Ли — Тротера, т. е. вычисление правой части соотношения (41) для последовательности эквидистантных разбиений, как это сделано в работе [101]. При этом частный выбор последовательности, удобный для вычислений, не имеет принципиального значения: существование $I_{LT}(f)$ в этом случае вытекает из теоремы, доказанной в [92]. Кроме того, применение формулы Ли — Тротера гарантирует, что полученное выражение представляет собой сжимающую полугруппу, т. е. что оно удовлетворяет уравнению типа Шредингера (24) с псевдогамильтонианом (43). Вычисление $I_{PP}(f)$ более сложно. Правую часть выражения (39), где f определено соотношениями (40) и (43), можно опять вычислить для эквидистантных разбиений; это сделано в работе [94], и результат совпадает с $I_{LT}(f)$. Однако выражения, соответствующие общей последовательности разбиений, слишком сложны; чтобы установить существование $I_{PP}(f)$, надо было бы проверить, что $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, как это сделано в работе [97] для $A = 0$.

Перейдем теперь к описанию результатов:

Теорема 12: Оператор (43) с естественной областью определения является псевдогамильтонианом. Явный вид соответствующей полугруппы $V(t) = \exp(-iHt)$ получается из формулы $(V(t)\varphi)(x) = I_{LT}(f_V, \varphi, x, t)$ в следующем виде:

$$(V(t)\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_t(x, y) \varphi(y) d^d y; \quad (44a)$$

$$G_t(x, y) = (2\pi i)^{-d/2} [\det(\Omega^{-1} \sin \Omega t)]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{2} [x \cdot (\Omega \operatorname{ctg} \Omega t) x + y \cdot (\Omega \operatorname{ctg} \Omega t) y] - iy \cdot (\Omega \operatorname{cosec} \Omega t) x \right\}; \quad (44б)$$

$$\Omega = -[2(A - iW)]^{1/2}. \quad (44в)$$

Рассмотрим основные свойства решения (44). Начнем с «незатухающего» предела: предположим $d = 1$, $\Omega = \omega - i\nu$ и что функция φ имеет компактный носитель. Если $\omega t \neq k\pi$, тогда

$$\lim_{\nu \rightarrow 0+} (V(t)\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} K_t(x, y) \varphi(y) d^d y;$$

$$K_t(x, y) = (2\pi i)^{-d/2} \left(\frac{\omega}{|\sin \omega t|} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{2 \sin \omega t} [(x^2 + y^2) \cos \omega t - 2xy] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\pi i}{2} \operatorname{Ent} \frac{\omega t}{\pi} \right\},$$

где последний фактор есть не что иное, как масловская поправка. С другой стороны, для $\omega t = k\pi$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ мы имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow 0+} (V(t)\varphi)(x) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} k\pi \right\} \varphi((-1)^k x).$$

Таким образом, мы получили новый (и очень естественный) вывод «расширенной» формулы Фейнмана [102].

Рассмотрим далее *классический предел*. Для простоты ограничимся волновыми пакетами в форме «смещенного основного состояния» $\varphi = \varphi_{\alpha, \kappa}$:

$$\varphi(x) = (\pi \lambda^2)^{-1/4} \exp \left\{ -(2\Lambda^2)^{-1} (x - \alpha)^2 + \frac{i}{\hbar} \kappa x \right\}, \quad (45)$$

где $\Lambda^2 = \hbar(m\Omega)^{-1}$, $\lambda^2 = \hbar(m\omega)^{-1}$ (при этом опять предполагаем $d = 1$ и $\Omega = \omega - i\nu$). Пропагатор, соответствующий неединичным значениям массы m и постоянной Планка \hbar , получается из (44б) заменой $t \rightarrow \hbar t m^{-1}$, $\Omega \rightarrow m\Omega \hbar^{-1}$. Из соотношений (44), (45) вытекает [101]:

$$|(V(t)\varphi)(x)|^2 = (\pi \lambda^2)^{-1/2} \exp \{-\nu t + \lambda^2 (x - x_0(t))^2 + y(t)\},$$

$$x_0(t) = (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) e^{-\nu t}, \quad \beta = (m\omega)^{-1} (\kappa - m\alpha\nu)$$

и функция y быстро стремится к конечному пределу с ростом t . Таким образом, мы получаем гауссов волновой пакет со следующими свойствами:

- а) высота пика уменьшается приблизительно как $e^{-\nu t}$;
- б) его ширина λ сохраняется; в классическом пределе, когда $\alpha^2 + \beta^2 \gg \lambda^2$, ею можно пренебречь;
- в) пик движется вдоль траектории $x = x_0(t)$.

Как отмечалось в начале раздела, оператор (43) не получен в результате квантования, и поэтому классический предел может

отличаться от поведения классического затухания осциллятора. Такое различие в действительности существует: указанная траектория соответствует классическому осциллятору с начальным положением α , но с импульсом $\kappa - 2m\alpha v$ вместо κ , являющегося средним значением квантовомеханического оператора импульса в состоянии φ .

Отметим, однако, что этой разницей можно пренебречь в случае слабого затухания, когда $v \ll \omega$.

При $d = 1$ также легко найти *точечный спектр* псевдогамильтониана (43): собственные значения $\lambda_n = \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и соответствуют собственным векторам

$$\psi_n : \psi_n(x) = N_{nn}^{-1/2} H_n(\Omega^{1/2}x) \exp\left(-\frac{1}{2}\Omega x^2\right),$$

где H_n — полиномы Эрмита. Видно, что собственные значения укладываются на полупрямую, проходящую из начала координат через четвертый квадрант комплексной плоскости. Таким образом, чем выше n , тем короче время жизни собственного состояния ψ_n . Важно, что ввиду ненормальности псевдогамильтониана H его собственные векторы в общем неортогональны; их скалярные произведения $(\psi_n, \psi_m) = N_{nn}^{-1/2} N_{mm}^{-1/2} N_{nm}$ приведены в [101].

10. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ: О «ПУТЯХ ФЕЙНМАНА»

Возвратимся снова к проблеме континуального наблюдения, отмеченной в конце разд. 3. Рассмотрим квантовую систему с гильбертовым пространством состояний \mathcal{H} , временное развитие которой определяется гамильтонианом H . Предположим, что задана проекторнозначная функция $E(\cdot)$ на отрезке $[0, b]$. Тогда для любого разбиения σ отрезка $[0, t] \subset [0, b]$ можно ввести

$$U_E(t, 0; \sigma) = E(t) e^{-iH\delta_{n-1}} E(\tau_{n-1}) e^{-iH\delta_{n-2}} \dots e^{-iH\delta_0} E(0)$$

(см. обозначения, введенные в разд. 7, 8). Этому выражению легко придать физический смысл, если $E(\tau)$ понимать как «да — нет» эксперимент, произведенный над системой в момент времени τ . Поэтому разумно понимать операторную функцию

$$U_E : U_E(t, 0) = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} U_E(t, 0; \sigma) \quad (46)$$

(в случае, когда она существует) как *эволюционный оператор* данной системы *при наличии континуального измерения*, описанного функцией $E(\cdot)$.

Результаты, известные по отношению к этой проблеме, касаются прежде всего случая, когда функция E постоянная. Самым знаменитым среди них является упомянутый выше «парадокс Зенона» [39]. Это утверждение можно вывести даже из более слабых предположений [103], если воспользоваться формулой произведения Чернова [104]:

Теорема 13: Пусть $E(\tau) = P$ для всех τ , где P — ортопроектор на \mathcal{H} . Предположим, что H — полуограниченный самосопряженный оператор на \mathcal{H} , область определения $D(H)$ которого плотна в $P\mathcal{H}$, и пусть существует антиунитарный оператор θ , такой, что $\theta P \theta^{-1} = P$, $\theta e^{-iHt} \theta^{-1} = e^{iHt}$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Если $U_E(t, 0)$ существует для $0 \leq t \leq b$ хотя для одного $b > 0$, тогда существует самосопряженный оператор H_P , который является расширением PHP , и такой, что $U_E(t, 0) = \exp(-iH_P t) P$ для всех $t \geq 0$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы континуальное наблюдение заставляет систему не выходить из подпространства состояний $P\mathcal{H}$.

Недавно Ахаронов и Варди [105] рассмотрели случай, когда функция прибора $E(\cdot)$ непостоянная и ее значениями являются одномерные проекторы. Они пришли к выводу, что континуальное измерение опять заставляет состояние системы двигаться вдоль «пути в \mathcal{H} », определенного функцией $E(\cdot)$, которому придается значение «индивидуального пути Фейнмана». В частности, если H является шредингеровским гамильтонианом в $L^2(\mathbf{R})$ и $E(\cdot)$ соответствует гауссову волновому пакету, который движется вдоль траектории $x_0(\cdot)$ в \mathbf{R} , то тогда авторы заключают, что $U_E(t, 0)$ умножает этот волновой пакет на хорошо известный экспоненциальный фактор $\exp(iS(x_0))$, где $S(x_0)$ — действие вдоль x_0 . Оказывается, что результаты работы [105] можно вывести строго и, что более важно, они не зависят от ряда частных предположений, сделанных в этой работе об измерительном приборе и гамильтониане. Верно, например, следующее утверждение [103]:

Теорема 14: Пусть $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ и $x_0 \in C^1[0, b; \mathbf{R}^d]$. Предположим, что для каждого $t \in [0, b]$ одномерный проектор $E(t)$ соответствует вектору $\psi_t : \psi_t(x) = \psi(x - x_0(t))$, и что H — самосопряженный оператор (гамильтониан) или псевдогамильтониан на $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^d)$, такой, что $D(H) \supset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, и функция $t \mapsto H\psi_t$ непрерывна в $[0, b]$. Тогда для $\varphi_t \equiv U_E(t, 0)\varphi$ выполняется соотношение

$$\varphi_t = \exp \left\{ i \int_0^t \left[\sum_{k=1}^d \dot{\mathcal{Q}}_k(t) \dot{\mathcal{P}}_k(t) - \mathcal{E}(t) \right] dt \right\} (\psi_0, \varphi) \psi_t$$

для всех $t \in [0, b)$ и $\varphi \in \mathcal{H}$, где

$$\mathcal{E}(t) = (\psi_t, H\psi_t), \quad \mathcal{P}_k(t) = (\psi_t, P_k\psi_t), \quad \mathcal{Q}_k(t) = (\psi_t, Q_k\psi_t).$$

Желательно найти аналогичное утверждение для более общих функций $E(\cdot)$, включая бесконечномерные. Следующий случай особенно важен: пусть $H = -\frac{1}{2}\Delta$ — свободный гамильтониан на $L^2(\mathbf{R}^d)$ и $E(t)$ проектирует на $L^2(M_t)$, $M_t \subset \mathbf{R}^d$. Пользуясь опре-

делениями (41) и (46), легко найти

$$(U_E(t, 0)\psi)(x) = \chi_{M_t}(x) \int_{\Gamma(M)}^{LT} \psi(\gamma(0) + x) \exp\left\{\frac{i}{2} \|\gamma\|^2\right\} D\gamma,$$

где χ_{M_t} — характеристическая функция множества M_t и $\Gamma(M)$ состоит из всех путей из пространства $AC_0[J^t; \mathbf{R}^d]$ (см. разд. 8), для которых $\gamma(\tau) + x \in M_\tau$ при каждом $\tau \in [0, t]$. Таким образом, $U_E(t, 0)$ может в некотором смысле *заменить несуществующую меру Фейнмана* (см. [106] и аналогичную проблему для меры Винера [61]).

Другим важным свойством приведенного выше результата является то, что он не требует, чтобы гамильтониан имел определенную форму (например, оператора Шредингера), и ему даже не надо быть самосопряженным. Это вселяет надежду, что метод интеграла Фейнмана найдет свои применения также для более общих гамильтонианов (псевдогамильтонианов), чем диссипативные операторы Шредингера с локальными комплексными потенциалами, которые рассматривались в предыдущих разделах.

Отметим наконец, что более полное обсуждение материала настоящего обзора, и также многих других проблем можно найти в монографии [108].

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность прежде всего И. Бланку, И. Долейши, М. Гавличеку и Г. И. Колеро-ву, вместе с которыми получены некоторые из приведенных выше результатов. Наряду с этим он обязан Л. А. Дадашеву, А. Дегасперису, П. Физиеву, И. Форманеку, Э.-М. Ильгенфрицу, Г. В. Джонсону, Р. Котепккому, Г. Ласснеру, В. Ласснеру, М. Локаичеку, Д. Робашкику, Б. Саймону, О. Г. Смолянову, Я. Старой, И. Толару, И. Улегле, В. Вотрубе и многим другим за плодотворные дискуссии и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gamow G.— Z. Phys., 1928, Bd 51, S. 204—212.
2. Weisskopf V. F., Wigner E. P.— Ibid., 1930, Bd 63, S. 54—73; Bd 65, S. 18—29.
3. Dosch H. G.— In: Weak interactions. Springer Tracts in Modern Physics, v. 52. Springer, Berlin, 1970, p. 79—90.
4. Халфин Л. А.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1371—1382.
5. Matthews P. T., Salam A.— Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 283—287; 1959, v. 115; p. 1079—1084.
6. Höhler G.— Z. Phys., 1958, Bd 152, S. 542—565.
7. Lévy M.— Nuovo cimento, 1959, v. 13, p. 115—143; v. 14, p. 612—624.
8. Williams D. N.— Commun. Math. Phys., 1971, v. 21, p. 314—333.
9. Horwitz L. P., Lavita J. A., Marchand J.-P.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 2537—2543.
10. Sinha K. B.— Helv. Phys. Acta, 1972, v. 45, p. 619—628.
11. Demuth M.— Math. Nachr., 1976, v. 73, p. 65—72.
12. Exner P.— Commun. Math. Phys., 1976, v. 50, p. 1—10.
13. Zwanziger D.— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 2818, 2819.

14. Jersák J.— Czech. J. Phys. B, 1969, v. 19, p. 1523—1532.
15. Schulman L. S.— Ann. Phys., 1970, v. 59, p. 201—218.
16. Beskow A., Nilsson J.— Arkiv fys., 1967, v. 34, p. 561—569.
17. Havlíček M., Exner P.— Czech. J. Phys. B, 1973, v. 23, p. 594—600.
18. Lukierski J.— Fortschr. Phys., 1980, v. 28, p. 259—268.
19. Широков М. И.— Ядерная физика, 1975, т. 21, с. 674—687.
20. Senitsky I. R.— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 2827—2838.
21. Davies E. B., Eckmann J.-P.— Helv. Phys. Acta, 1975, v. 48, p. 731—742.
22. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966.
23. Collins P. D. B., Squires E. J. Regge poles in particle physics, Springer Tracts on Modern Physics. Vol. 45. Springer, Berlin, 1968.
24. Kokkede J. J. J. The Quark Model. N. Y., W. A. Benjamin, 1969.
25. Exner P.— Czech. J. Phys. B, 1976, v. 26, p. 976—982.
26. Exner P.— Rep. Math. Phys., 1980, v. 17, p. 275—285.
27. Wightman A. S., Streater R. F. PCT, Spin, Statistics and All That. N. Y., W. A. Benjamin, 1964.
28. Боголобов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
29. Blank J., Exner P. Vybrané kapitoly z matematické fyziky: teorie lineárních operatorů na Hilbertově prostoru. III. Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1980.
30. Sz.-Nagy B., Foias C. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. Amsterdam, North-Holland, 1970.
31. Ekstein H., Siegert H. J. F.— Ann. Phys., 1971, v. 68, p. 509—520.
32. Fonda L., Ghirardi G. C., Rimini A., Weber T.— Nuovo cimento A, 1973, v. 15, p. 689—704; v. 18, p. 805.
33. Fonda L., Ghirardi G. C., Rimini A.— Rep. Progr. Phys., 1978, v. 41, p. 587—631.
34. Exner P.— Czech. J. Phys. B, 1977, v. 27, p. 117—126.
35. Dolejší, J., Exner P.— Ibid., p. 855—864.
36. Exner P.— Ibid., p. 361—372.
37. Exner P.— Ibid., p. 233—246.
38. Degasperis A., Fonda L., Ghirardi G. C.— Nuovo cimento A, 1974, v. 21, p. 471—484.
39. Misra B., Sudarshan E. C. G.— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 756—763.
40. Misra B., Sinha K. B.— Helv. Phys. Acta, 1977, v. 50, p. 99—104.
41. Chiu C. B., Sudarshan E. C. G., Misra B.— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 520—529.
42. Particle Data Group — Rev. Mod. Phys., 1976, v. 48, N 2.
43. Jauch J. M. Foundations of Quantum Mechanics, Reading, Addison-Wesley, 1968.
44. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 448—464.
45. Feshbach H.— Ann. Phys., 1958, v. 5, p. 357—396; 1962, v. 19, p. 287—313.
46. Úlehla I., Gomolčák L., Pluhař Z. Optical Model of the Atomic Nucleus, Prague, Czech. Acad. Sci. Publ., 1964.
47. Davies E. B.— Ann. Inst. H. Poincaré A, 1978, v. 29, p. 395—413.
48. Blank J., Exner P., Havlíček M.— Czech. J. Phys. B, 1979, v. 29, p. 1325—1341.
49. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, v. 2, N. Y., Academic Press, 1975.
50. Exner P., Úlehla I.— J. Math. Phys., 1983, v. 24, p. 1542—1547.
51. Kato T.— Math. Ann., 1966, v. 162, p. 258—279.
52. Martin Ph. A.— Nuovo cimento B, 1975, v. 30, p. 217—238.
53. Albeverio S. A., Hoegh-Krohn R. J. Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, Lecture Notes in Mathematics, v. 523. Springer, Berlin, 1976.

54. Feynman Path Integrals. Lecture Notes in Physics, v. 106 (S. Albeverio et al., eds). Berlin, Springer, 1979.
55. DeWitt-Morette C., Maheswari A., Nelson B.— Phys. Rep., 1979, v. 50, p. 255—372.
56. Березин Ф. А.— УФН, 1980, т. 132, с. 497—548.
57. Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М.— УФН, 1972, т. 106, с. 593—616.
58. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
59. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973, гл. VII.
60. Glimm J., Jaffe A. Quantum Physics: A Functional Integral Point of View. N. Y., Springer, 1981.
61. Simon B. Functional Integration and Quantum Physics. N. Y., Academic Press, 1979.
62. Feynman R. P.— Rev. Mod. Phys., 1948, v. 20, p. 348—368.
63. Feynman R. P., Hibbs A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals. N. Y., McGraw Book Co., 1965.
64. Nelson E.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 332—343.
65. Cameron R. H., Storvick D. A.— J. Math. Mech., 1968, v. 18, p. 517—552.
66. Johnson G. W., Skoug D. L.— J. Funct. Anal., 1973, v. 12, p. 129—152.
67. Kuo H.-H. Gaussian Measures in Banach Spaces, Lecture Notes in Mathematics, v. 463. Berlin, Springer, 1975.
68. Гельфанд И. М., Яглом А. М.— УМН, 1956, т. 11, с. 77—114.
69. Cameron R. H.— J. Math. and Phys., 1960, v. 39, p. 126—140.
70. Truman A.— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1742—1750; 1979, v. 20, p. 1832—1833.
71. Cameron R. H.— J. Anal. Math., 1962—1963, v. 10, p. 287—361.
72. Simon B. The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory. Princeton, Princeton University Press, 1974.
73. Faris W.— J. Funct. Anal., 1967, v. 1, p. 93—108.
74. Combe Ph., Rideau G., Rodriguez R., Sirugue-Collin M.— Rep. Math. Phys., 1978, v. 13, p. 279—294.
75. Ito K.— In: Proc. 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II/1. Berkeley, Univ. California Press, 1967, p. 145—161.
76. DeWitt-Morette C.— Commun. Math. Phys., 1972, v. 28, p. 47—67.
77. DeWitt-Morette C.— Ibid., 1974, v. 37, p. 68—89.
78. Berg H. P., Tarski J.— J. Phys. A, 1981, v. 14, p. 2207—2213.
79. Truman A.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1852—1862.
80. Truman A.— Ibid., 1977, v. 18, p. 1499—1509.
81. Exner P., Kolerov G. I.— Intern. J. Theor. Phys., 1982, v. 21, p. 397—417.
82. Exner P., Kolerov G. I.— Czech. J. Phys. B, 1981, v. 31, p. 1207—1224.
83. Feynman R. P.— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 108—128.
84. Mizrahi M. M.— Nuovo cimento, 1981, v. 61, p. 81—98.
85. Tarski J.— Preprint IC/81/192, Trieste, 1981.
86. Угланов А. В.— ДАН СССР, 1978, т. 246, с. 1406—1409.
87. Маслов В. П., Чеботарев А. М.— ТМФ, 1976, т. 28, с. 291—307.
88. Albeverio S. A., Hoegh-Krohn R. J.— Inventiones Math., 1977, v. 46, p. 59—106.
89. DeWitt-Morette C.— Ann. Phys., 1976, v. 97, p. 367—399; v. 101, p. 682—683.
90. Truman A.— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 2308—2315.
91. Exner P., Kolerov G. I.— Czech. J. Phys. B, 1981, v. 31, p. 470—474.
92. Exner P., Kolerov G. I.— Lett. Math. Phys., 1982, v. 6, p. 153—159.
93. Cameron R. H.— J. d'Anal. Math., 1968, v. 21, p. 337—371.
94. Exner P., Kolerov G. I.— Phys. Lett. A, 1981, v. 83, p. 203—206.
95. Johnson G. W., Skoug D. L.— Pacif. J. Math., 1981, v. 93, p. 313—324.
96. Johnson G. W., Skoug D. L.— J. Funct. Anal., 1981, v. 41, p. 277—289.
97. Johnson G. W. Preprint of the University of Nebraska, Lincoln, 1981.

98. Dekker H.— Phys. Rep., 1981, v. 80, p. 1—112.
99. Khandekar D. C., Lawande S. V.— J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 1870—1877.
100. Brinati J. R., Mizrahi S. S.— Ibid., 1980, v. 21, p. 2154—2158.
101. Exner P.— J. Math. Phys., 1983, v. 24, p. 1129—1135.
102. Horváthy P. A.— Intern. J. Theor. Phys., 1979, v. 18, p. 245—250.
103. Exner P.— Lett. Math. Phys., 1982, v. 6, p. 215—220.
104. Chernoff P. R.— Bull. Amer. Math. Soc., 1970, v. 76, p. 395—398.
105. Aharonov Y., Vardi M.— Phys. Rev. D, 1980, v. 21, p. 2235—2240.
106. Friedman C. N.— Ann. Phys., 1976, v. 98, p. 87—97.
107. Marinov M. S.— Phys. Rep., 1980, v. 66, p. 1—57.
108. Exner P. Open Quantum Systems and Feynman Integrals. Dordrecht, D. Reidel, to appear.