«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 3

УДК 530.145.531.19

МЕТОД КЛАСТЕРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЕВКЛИДОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

А. Л. Ребенко

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Для описания модельных систем квантовой теории поля, теории элементарных частиц и классической статмеханики развивается метод евклидовых полей. Для функции Грина и функций распределения построены кластерные разложения и доказана их сходимость. Использованием кластерных разложений доказано существование предельных функций Грина при снятии объемного обрезания.

The euclidean field method is discussed to describe model systems of the quantum field theory, elementary particles theory and classical statistical mechanics. The cluster expansions for Green's functions and distribution functions are constructed and proved their convergence. The existence of Green's functions without volume cut-off is proved by means of the cluster expansions.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы успехи квантовой теории поля, теории элементарных частиц и статистической механики в значительной степени обусловлены применением евклидовых методов. Переход к мнимому времени, который сначала осуществлялся как технический прием, позволяющий избежать значительных математических трудностей (см. [1—3]), впоследствии обогатился идейным содержанием [4—8], а с начала 70-х годов, когда были открыты евклидовы поля [9—16], превратился в мощный метод исследования модельных систем квантовой теории поля и статистической физики [14, 17, 18]. Особенно замечательным явилось применение евклидово-полевой формулировки в бурно развивающемся в настоящее время направлении теории элементарных частиц — квантовой хромодинамике [19, 20]. Глубокие аналогии между квантовой теорией поля и статистической механикой [6—8, 17, 21, 22] позволили значительно расширить арсенал математических средств и применить в теории поля метод кластерных разложений и контурную технику [23, 24], что в свою очередь дало обратное воздействие: методы кластерных разложений стали наиболее эффективным средством при доказательстве существования термодинамических пределов для классических и квантовых систем взаимодействующих частиц [25—28]. Кластерные разложения имеют чрезвычайно важное значение для практических приложений, так как их сходимость позволяет исследовать даже те модельные системы, в которых разложения по константе взаимодействия расходятся [29].

Целью настоящего обзора является описание метода кластерных разложений для исследования непрерывных модельных систем квантовой теории поля и классической статистической механики. В отличие от [30], где на примере решетчатых моделей подробно изложены общие свойства кластерных разложений, мы покажем, как работает этот метод при исследовании конкретной полевой модели с лагранжианом взаимодействия $\lambda\,(:\varphi^4:)_2$. Впервые для полиномиальных моделей сходимость кластерных разложений была доказана в [23]. В настоящей работе мы попытаемся упростить построение и доказательство сходимости кластерного разложения, используя некоторые конструкции работы [25]. Выбор модели прежде всего преследует эту цель и помогает провести изложение основных идей, лежащих в основе доказательства сходимости, сравнительно просто.

В разд. 1 и 2 мы кратко изложим метод евклидовых полей, позволяющий записать функции Грина или же коэффициентные функции S-матрицы [14] в удобном для исследования виде, и сформулируем основные задачи. В разд. 3 мы построим кластерные разложения для локальных моделей квантовой теории поля. Разделы 4 и 5 посвящены доказательству сходимости кластерных разложений. В разд. 6 доказано существование предельных функций Грина при устремлении объема системы к бесконечности. И, наконец, разд. 7 посвящен применению метода кластерных разложений в классической статмеханике.

В заключение выражаю благодарность В. А. Загребнову и В. Б. Приезжеву за дискуссии, стимулирующие написание настоящего обзора.

1. МЕТОД ЕВКЛИДОВЫХ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

Прежде всего отметим, что речь пойдет о построении евклидовых бозонных полей, хотя для фермионов спина $^1/_2$ свободные евклидовы ферми-поля были построены в [11, 12, 16, 31]. Кроме того, определение, приведенное ниже, является более общим, чем в работе Нельсона [15], и не включает понятия марковости.

Основой для построения бозонного евклидова поля является некоторая обобщенная функция $V(x, y)$; $x, y \in R^d$ — евклидово d-мерное пространство. Свойства, которым должна удовлетворять функция $V(x, y)$, можно разбить на два типа: некоторые общие свойства, необходимые для построения евклидова поля, и свойства, которые зависят от рассматриваемой модели. К общим свойствам относятся:

1. Пусть E — некоторое счетно-гильбертово пространство. Тогда для $f \in E$ билинейный функционал

$$C(f,\ f) = \int dx\, dy\, \overline{f(x)}\, V(x,\ y)\, f(y) > 0; \tag{1}$$

$$V(x,\ y) = V(y,\ x).$$

2. Условие непрерывности. Для $f \in E$ существует постоянная B, не зависящая от f, такая, что

$$C(f, f) \leqslant B \| f \|^2_{E_k}. \tag{2}$$

Первое условие совпадает с условием положительной определенности обобщенной функции $V(x, y)$, если $V(x, y) = V(x - y)$.

Условия (1), (2) позволяют построить некоторое гильбертово пространство $\mathscr{H}_E$ типа пространства Фока. Для двух последовательностей $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}_E$ можно определить скалярное произведение следующим образом:

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{N=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_N dy_1 \ldots dy_N \times$$
$$\times \overline{\Psi_N(x_1, \ldots, x_N)}\, V(x_1, y_1) \ldots V(x_N, y_N)\, \Phi_N(y_1, \ldots, y_N).$$

В евклидовой области такое пространство впервые было построено в работе [9] при условии, что $V(x, y)$ — свободная функция Грина. Вектор Ω $(= 1, 0 \ldots)$ будем называть вакуумным вектором. Если

$$V(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{e^{ik(x-y)}}{\sqrt{k^2 + m_0^2}}, \quad x, y, k \in R^3, \tag{3}$$

то пространство $\mathscr{H}_E$ совпадает с обычным фоковским пространством. По аналогии с определением свободного бозе-поля в фоковском пространстве определим некоторые операторнозначные обобщенные функции

$$a(x) = a^+(x) + a^-(x), \tag{4}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} [a^-(x), a^+(y)]_- = (\Omega, a(x)\, a(y)\, \Omega) = V(x, y), \\ [a(x), a(y)]_- = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и для $f \in E$ оператор $a(f) = \int dx\, f(x)\, d(x)$ будет существенно-самосопряженным оператором в $\mathscr{H}_E$ и

$$(\Omega, a(f)\, a(g)\, \Omega) = C(f, g);$$
$$[a(f), a(g)]_- = 0.$$

В случае, когда $V(x, y)$ имеет вид (3), операторы (4), (5) соответствуют обычному квантовому полю в начальный момент времени.

Пусть далее $\mathscr{C}$ есть линейная оболочка $\{\exp[ia(f)]\}$. Замыкание множества $\mathscr{C}$ образует максимальную коммутативную алгебру $\mathfrak{M} = \{m\}$ операторов в $\mathscr{H}_E$ с циклическим вектором Ω, причем

$$\overline{\mathfrak{M}\Omega} = \mathscr{H}_E.$$

Согласно теории Гельфанда — Наймарка — Сигала [33, 34] пространство $\mathscr{H}_E$ унитарно эквивалентно пространству $L_2(d\mu, \Sigma_0)$, где Σ_0 — спектр алгебры $\mathfrak{M}$; $d\mu$ — нормированная мера на Σ_0 (подробно см. [14]).

Условия (1), (2) определяют также некоторое случайное обобщенное поле, которое строится следующим образом. Определим функционал

$$F\{f\} = e^{-\frac{1}{2}C(f,\, f)}.$$

Тогда из теоремы Бохнера следует, что он является характеристическим функционалом некоторого обобщенного случайного процесса, а если E — ядерное пространство, тогда по теореме Минлоса [35] этот процесс продолжается до вполне аддитивной меры в E^*, так что

$$e^{-\frac{1}{2}C(f,\, f)} = \int d\mu(\varphi)\, e^{i\varphi(f)},$$

где $d\mu(\varphi)$ — указанная мера с ковариацией

$$C(f,\ g) = \int d\mu(\varphi)\, \varphi(f)\, \varphi(g)$$

или

$$V(x,\ y) = \int d\mu(\varphi)\, \varphi(x)\, \varphi(y).$$

Построенные таким образом поля есть гауссовы поля. Вероятностный подход к евклидовой теории поля эквивалентен операторному. Эта эквивалентность дает возможность более глубоко проникнуть в сущность исследуемых проблем с различных точек зрения. Эквивалентность этих подходов может быть выражена формулой

$$\int d\mu(\varphi)\, F(\varphi) = (\Omega,\ F(a)\,\Omega), \tag{6}$$

где $F(\cdot)$ — функция такая, что выражение (6) конечно. Мы в дальнейшем будем строить изложение на языке операторных средних, так как это более привычный язык для исследования модельных систем квантовой теории поля и теории элементарных частиц.

2. ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА ЧЕРЕЗ ЕВКЛИДОВЫ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь конкретную реализацию функции $V(x,\ y)$:

$$V(x,\ y) = S_0(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int dk\, \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m_0^2}. \tag{7}$$

$S_0(x,\ y)$ — это двухточечная свободная функция Грина со свободными граничными условиями, т. е. удовлетворяющая уравнению

$$(-\Delta_x + m_0^2)\, S_0(x,\ y) = -\delta(x-y),$$

$$S_0(x) \to 0;\ |x| \to \infty.$$

Поле $a(x)$, построенное по $S_0(x-y)$, называется свободным евклидовым полем со свободными граничными условиями. Случайное поле $\varphi(x)$, построенное по $S_0(x-y)$, есть марковское и совпадает с евклидовым полем, определенным в [15].

Свободная N-точечная евклидова функция Грина выражается через поле $a(x)$ следующим образом:

$$S_N^0(x_1, \ldots, x_N) = (\Omega,\ a(x_1) \ldots a(x_N)\,\Omega).$$

Рассмотрим теперь случай нетривиального взаимодействия с лагранжианом

$$\mathscr{L}(\tilde{x}) = -\lambda : \varphi_0^4(\tilde{x}) :;\ \tilde{x} = (x^0,\ \mathbf{x}). \tag{8}$$

Здесь $\varphi_0(\tilde{x})$ — свободное квантовое поле, удовлетворяющее релятивистскому уравнению Клейна — Гордона (см. [36]). Функции Грина в представлении взаимодействия определяются обычным образом:

$$G_N(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N) = S_0^{-1}(\Omega,\ T(\varphi_0(\tilde{x}_1) \ldots \varphi_0(\tilde{x}_N)\,S)\,\Omega);$$
$$S = T\exp\left[-i\lambda \int d\tilde{x} : \varphi_0^4(\tilde{x}) :\right];$$
$$S_0 = (\Omega,\ S\Omega).$$

Аналитическое продолжение этих функций в область с чисто мнимым $x^0 = ix^d$ (в физическом реальном случае $d = 4$) определяет функции Швингера или евклидовы функции Грина $S_N(x_1, \ldots, x_N)$. Эти функции удовлетворяют известным уравнениям Швингера [4, 6, 7], которые для модели (8) имеют вид

$$\begin{aligned} S_N(x_1, \ldots, x_N) = {} & -4\lambda \int dy S_0(x_1 - y)\, S_{N+2}(y, y, y, x_2, \ldots, x_N) + \\ & + 12\lambda S_0(0) \int dy S_0(x_1 - y)\, S_N(y, x_2, \ldots, x_N) + \\ & + \sum_{j=2}^{N} S_0(x_1 - x_j)\, S_{N-2}(x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N). \end{aligned} \tag{9}$$

Формальное решение этих уравнений можно представить в виде

$$S_N(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\left(\Omega,\ a(x_1) \ldots a(x_N)\, e^{-\lambda \int :a^4(x):dx}\,\Omega\right)}{\left(\Omega,\ e^{-\lambda \int :a^4(x):dx}\,\Omega\right)}. \tag{10}$$

Чтобы убедиться в том, что (10) удовлетворяет системе (9), можно применить, например, обобщенную теорему Вика [36, 37]. Аналогичные рассуждения можно провести для коэффициентных функций матрицы рассеяния и выразить их через операторы $a(x)$ (подробнее см. [14]).

Выражение (10) является формальным, так как, разложив экспоненту в (10) в ряд по λ и вычислив среднее, получим обычный неперенормированный ряд теорий возмущений. Чтобы избежать ультрафиолетовых расходимостей, понизим размерность пространства-времени до двух ($d = 2$). Объемные расходимости возникают из-за появления вакуумных вкладов в числителе и знаменателе выражения (10). Формальным пересуммированием мы можем добиться их сокращения, однако доказать сходимость или суммируемость полученного после сокращения ряда является трудной задачей. В связи с этим обычно поступают следующим образом. Вначале рассматривают некоторую аппроксимацию $S_N^\Lambda (x_1, \ldots, x_N)$ функций Швингера. Последовательность таких функций можно получить из (10), если выполнить интегрирование в (10) по некоторому конечному объему $\Lambda \subset R^2$. Мы рассмотрим другой тип обрезания. Вместо двухточечной функции $S_0 (x - y)$ рассмотрим функцию Грина $S (x, y)$ с граничными условиями Дирихле на $\partial\Lambda$-границе некоторой открытой области $\Lambda \subset R^2$, т. е. функция $S (x, y)$ будет решением задачи

$$(-\Delta_x + m_0^2) S (x, y) = -\delta (x - y), \ \ x, \ y \in \Lambda; S (x, y) |_{\partial\Lambda} = 0.$$

Функция $S (x, y)$ удовлетворяет условиям (1), (2) (см. [18, § VII.1]), и согласно конструкции разд. 1 порождает соответствующее поле $a (x)$, исчезающее вне Λ.

Пусть теперь $w (x_1, \ldots, x_N)$ некоторая гладкая функция, носитель которой по каждой переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, сосредоточен в некоторой фиксированной области X_0. Тогда, обозначив

$$\boldsymbol{S}_N^\Lambda = \int dx_1 \ldots dx_N \ w (x_1, \ldots, x_N) \ S_N^\Lambda (x_1, \ldots, x_N); \tag{11}$$

$$\mathcal{A} (a, X_0) = \int dx_1 \ldots dx_N w (x_1, \ldots, x_N) \, a (x_1) \ldots a (x_N),$$

получим из (10)

$$\boldsymbol{S}_N^\Lambda = \frac{\left(\Omega, \ \mathcal{A} (a, X_0) \, e^{-\lambda \int :a^4 (x): dx} \Omega\right)}{\left(\Omega, \ e^{-\lambda \int :a^4 (x): dx} \Omega\right)}. \tag{12}$$

Основная задача состоит в доказательстве существования предела

$$\lim_{\Lambda \to R^2} \boldsymbol{S}_N^\Lambda = \boldsymbol{S}_N. \tag{13}$$

Следует отметить, что доказательство того, что выражение (12) строго определено, не является тривиальным, так как оператор $\int : a^4 (x) : dx$ не ограничен снизу. Доказательство существования среднего (12) читатель может найти в [14].

В последующих разделах покажем, каким образом кластерные разложения позволяют доказать существование предела (13).

3. ПОСТРОЕНИЕ КЛАСТЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Введем обозначения

$$\left(\Omega, \mathcal{A}(a, X_0)\, e^{-\lambda \int\limits_X :a^4(x):dx}\, \Omega\right) = \langle \mathcal{A} \rangle^X; \tag{14}$$

$$\langle 1 \rangle^X = S_0(X).$$

Пусть $\Lambda = \bigcup\limits_{i=1}^{|\Lambda|} Y_i$; $Y_i \cap Y_j = \varnothing$; $i \neq j$ и $|Y_j| = 1$, $j = 1, \ldots, |\Lambda|$.

Далее пусть $X_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i$; $X_n^c = \Lambda \setminus X_n$. Выберем для простоты $X_0 \subset X_1 \equiv Y_1$. (В противном случае нужно взять X_1 как объединение нескольких единичных квадратов, покрывающих X_0.)

Суть кластерного разложения состоит в том, чтобы на каждом этапе разложения выразить среднее $\langle \mathcal{A} \rangle^\Lambda$, учитывающее взаимодействие всех точек области Λ, через некоторые средние, которые учитывают только взаимодействие точек областей X_n и X_n^c отдельно ($n = 1, \ldots, |\Lambda|$).

1-й шаг разложения. Определим функцию [25]:

$$S(x, y; s_1) = p(x, y; s_1)\, S(x, y), \quad 0 \leqslant s_1 \leqslant 1; \tag{15}$$

$$p(x, y; s_1) = \chi_{Y_1}(x)\, \chi_{Y_1}(y) + \chi_{X_1^c}(x)\, \chi_{X_1^c}(y) + $$
$$+ s_1[\chi_{Y_1}(x)\, \chi_{X_1^c}(y) + \chi_{X_1^c}(x)\, \chi_{Y_1}(y)],$$

где χ_X — характеристическая функция области X. При $s_1 = 1$ $p(x, y; 1) = 1$ и $S(x, y; 1) = S(x, y)$, а при $s_1 = 0$ функция $S(x, y; 0)$ учитывает взаимодействие точек областей $X_1 = Y_1$ и X_1^c отдельно, т. е. она не равна нулю, только когда (x, y) лежат либо в X_1, либо в X_1^c, и равна нулю, когда они отделены контуром ∂X_1.

Операторы, построенные по $S(x, y; s_1)$, обозначим $a_1(x)$, а операторы, соответствующие $S(x, y; 0)$, обозначим $a_0(x)$, соответствующие средние обозначим $\langle \mathcal{A} \rangle_{s_1}^X$. Выполним первый шаг разложения, применив тождество

$$\langle \mathcal{A} \rangle^\Lambda = \langle \mathcal{A} \rangle_0^\Lambda + \int\limits_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} \langle \mathcal{A} \rangle_{s_1}^\Lambda. \tag{16}$$

Так как среднее $\langle \mathcal{A} \rangle_0^\Lambda$ содержит только операторы $a_0(x)$, соответствующие $S(x, y; 0)$, то, учитывая, что $X_0 \subset X_1$, а

$$\int\limits_\Lambda :a_0^4(x):dx = \int\limits_{X_1} :a_0^4(x):dx + \int\limits_{X_1^c} :a_0^4(x):dx,$$

первое слагаемое в (16) можно переписать в виде

$$\langle \mathcal{A} \rangle_0^\Lambda = \langle \mathcal{A} \rangle_0^{X_1} \langle 1 \rangle_0^{X_1^c} = \langle \mathcal{A} \rangle_0^{X_1} \langle 1 \rangle^{X_1^c} = \langle \mathcal{A} \rangle_0^{X_1} \cdot S_0 (X_1^c). \tag{17}$$

Так как x и y лежат в X_1^c, то $S(x, y; 0) = S(x, y)$ и $\langle \cdot \rangle_0^{X_1^c} = \langle \cdot \rangle^{X_1^c}$. Формула (17) выражает тот факт, что взаимодействие между точками в X_1 и точками в X_1^c отсутствует, а следовательно, вакуумные средние распадаются на произведение. Доказательство этой формулы легко провести для полиномов. Затем нужно учесть следующее: бозевские операторы образуют кольцо [38], слабое замыкание которого содержит все ограниченные функции от операторов поля, и обобщить (17) на случай ограниченных функций. Переход к неограниченным функциям выполняется с помощью обычной аппроксимации неограниченных операторов ограниченными (см., например, [14, § 14]). Используя такую же процедуру, можно доказать другую важную формулу, которую получаем для второго слагаемого (16):

$$\frac{d}{ds_1} \langle \mathcal{A} \rangle_{s_1}^\Lambda = \frac{1}{2} \int dx \int dy \frac{d}{ds_1} S(x, y; s_1) \times$$
$$\times \left\langle \frac{\delta^2}{\delta a(x)\, \delta a(y)} \mathcal{A} \right\rangle_{s_1}^\Lambda = \langle \Delta_1 \mathcal{A} \rangle_{s_1}^\Lambda. \tag{18}$$

Здесь так же, как, например, в [36, § 47], производные по операторным полям нужно понимать в следующем смысле:

$$\frac{\delta F(a)}{\delta a(x)} = \frac{\delta F(a + \eta)}{\delta \eta(x)} \bigg|_{\eta = 0},$$

где $\eta(x)$ — некоторая достаточно гладкая функция. В формуле (18) вариационный оператор действует как на $\mathcal{A}$, так и на весовой фактор $\exp\left[-\lambda \int\limits_\Lambda : a_1^4(x): dx\right]$. Учитывая явный вид $S(x, y; s_1)$, преобразуем оператор Δ_1 к виду

$$\Delta_1 = \int\limits_{X_1} dx \int\limits_{X_1^c} dy \frac{d}{ds_1}(s_1)\, S(x, y) \frac{\delta^2}{\delta a(x)\, \delta a(y)} =$$
$$= \sum_{Y_2} \int\limits_{X_1} dx \int\limits_{Y_2} dy \frac{d}{ds_1}(s_1)\, S(x, y) \frac{\delta^2}{\delta a(x)\, \delta a(y)} = \sum_{Y_2} \Delta_1(X_1, Y_2), \tag{19}$$

где сумма по Y_2 означает сумму по различным расположениям квадратика Y_2 в X_1^c. Подставляя формулы (17)—(19) в (16), получаем

$$\langle \mathcal{A} \rangle^\Lambda = \langle \mathcal{A} \rangle_0^{X_1} S_0(X_1^c) + \sum_{Y_2} \int\limits_0^1 ds_1 \langle \Delta_1(X_1, Y_2) \mathcal{A} \rangle_{s_1}^\Lambda. \tag{20}$$

2-й шаг разложения. В каждом члене суммы по Y_2 определяем функцию

$$\begin{aligned} S(x, y; s_1, s_2) &= p(x, y; s_1, s_2) S(x, y); \\ p(x, y; s_1, s_2) &= \chi_{Y_1}(x) \chi_{Y_1}(y) + \\ &+ \chi_{Y_2}(x) \chi_{Y_2}(y) + \chi_{X_2^c}(x) \chi_{X_2^c}(y) + \\ &+ s_1 [\chi_{Y_1}(x) \chi_{Y_2}(y) + \chi_{Y_2}(x) \chi_{Y_1}(y)] + \\ &+ s_1 s_2 [\chi_{Y_1}(x) \chi_{X_2^c}(y) + \chi_{X_2^c}(x) \chi_{Y_1}(y)] + \\ &+ s_2 [\chi_{Y_2}(x) \chi_{X_2^c}(y) + \chi_{X_2^c}(x) \chi_{Y_2}(y)]. \end{aligned} \tag{21}$$

При $s_2 = 1$ $S(x, y; s_1, 1) = S(x, y; s_1)$, а при $s_2 = 0$ функция $S(x, y; s_1, 0)$ учитывает взаимодействие точек областей $X_2 = Y_1 \cup Y_2$ и X_2^c отдельно. Соответствующие операторы обозначим $a_2(x)$ и $a_{1,0}(x)$. Далее, применив к выражению $\langle \Delta_1(X_1, Y_2) \mathcal{A} \rangle_{s_1}^{\Lambda}$ в (20) формулу типа (16), получим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle^{\Lambda} &= \langle \mathcal{A} \rangle_0^{X_1} S_0(X_1^c) + \sum_{Y_2} \int_0^1 ds_1 \langle \Delta_1(X_1, Y_2) \mathcal{A} \rangle_{s_1 0}^{\Lambda} + \\ &+ \sum_{Y_2} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \frac{d}{ds_2} \langle \Delta_1(X_1, Y_2) \mathcal{A} \rangle_{s_1 s_2}^{\Lambda}. \end{aligned} \tag{22}$$

Так как производные в $\Delta_1(X_1, Y_2)$ локализованы в X_2, имеет место факторизация типа (17). Учитывая также (18)—(21), получаем для (22)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle^{\Lambda} &= \langle \mathcal{A} \rangle_0^{X_1} S_0(X_1^c) + \sum_{Y_2} \int_0^1 ds_1 \langle \Delta_1(X_1 Y_2) \mathcal{A} \rangle_{s_1 0}^{X_2} S_0(X_2^c) + \\ &+ \sum_{Y_2, Y_3} \int_0^1 ds_1 ds_2 \langle \Delta_2(X_2, Y_3) \Delta_1(X_1, Y_2) \mathcal{A} \rangle_{s_1 s_2}^{\Lambda}, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2(X_2, Y_3) &= \int_{X_2} dx \int_{Y_3} dy \frac{d}{ds_2} \{s_1 s_2 [\chi_{Y_1}(x) \chi_{X_2^c}(y) + \\ &+ \chi_{X_2^c}(x) \chi_{Y_1}(y)] + s_2 [\chi_{Y_2}(x) \chi_{X_2^c}(y) + \\ &+ \chi_{X_2^c}(x) \chi_{Y_2}(y)]\} S(x, y) \frac{\delta^2}{\delta a(x) \delta a(y)} = \\ &= \sum_{j=1}^{2} \int_{Y_j} dx \int_{Y_3} dy \frac{d}{ds_2} (s_j \ldots s_2) S(x, y) \frac{\delta^2}{\delta a(x) \delta a(y)} = \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{d}{ds_2} (s_j \ldots s_2) \Delta_{j,3}. \end{aligned} \tag{24}$$

n-й шаг разложения. Аналогично (15) и (21) определяем

$$S(x, y; s_1, \dots s_n) = p(x, y; s_1, \dots, s_n)\, S(x, y);$$

$$p(x, y; s_1, \dots, s_n) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{X}_{Y_j}(x)\, \mathrm{X}_{Y_j}(y) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} [\mathrm{X}_{Y_i}(x)\, \mathrm{X}_{Y_j}(y) + \mathrm{X}_{Y_j}(x)\, \mathrm{X}_{Y_i}(y)]. \quad (25)$$

Здесь $\mathrm{X}_{Y_{n+1}}$ — характеристическая функция области

$$Y_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right)^c = X_n^c .$$

Как и раньше, при $s_n = 0$ функция (25) учитывает взаимодействие точек областей $X_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i$ и X_n^c отдельно. При $n = |\Lambda|$ остаточный член, содержащий оператор Δ_n, будет включать выражение

$$\frac{d}{ds_n} S(x; y; s_1, \dots, s_n),$$

которое по построению отлично от нуля только тогда, когда x и y разделены контуром $\partial X_{|\Lambda|} \equiv \partial\Lambda$. Однако в этом случае $S(x, y) = 0$, так как x или y лежит вне Λ. Следовательно, разложение обрывается и мы окончательно имеем

$$\langle \mathcal{A} \rangle^{\Lambda} = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \sum_{\bar{y}} \int ds \langle \Delta_{n-1}(X_{n-1}, Y_n) \dots \Delta_1(X_1, Y_2)\, \mathcal{A} \rangle_s^{X_n} S_0(X_n^c).$$

Здесь $\bar{y} = \{Y_2, \dots, Y_n\}$; $s = (s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$ и $\Delta_k(\mathrm{X}_k, Y_{k+1}) =$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{Y_j} dx \int_{Y_{k+1}} dy \frac{d}{ds_k} (s_j \dots s_k)\, S(x, y) \frac{\delta^2}{\delta a(x)\, \delta a(y)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{d}{ds_k} (s_j \dots s_k)\, \Delta_{j,k+1}. \quad (26)$$

Чтобы закончить построение, преобразуем произведение операторов Δ в (26)

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Delta_k(X_k, Y_{k+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{d}{ds_k} (s_j \dots s_k) \Delta_{j,k+1} =$$

$$= \sum_{T} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d}{ds_j} (s_{T(j+1)} \dots s_j)\, \Delta_{T(j+1),\, j+1}, \quad (27)$$

где сумма по T означает сумму по всем возможным парам $[T(j+1), j+1]$ таким, что $T(j+1) < j+1$.

Введем обозначения

$$q(T, s) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d}{ds_j} (s_{T(j+1)} \ldots s_j) \tag{28}$$

и

$$\Delta(T, \bar{y}) = \prod_{j=1}^{n-1} \Delta_{T(j+1), j+1}. \tag{29}$$

Тогда окончательно для выражения (12) получим разложение

$$S_N^{\Lambda} = \frac{\langle \mathcal{A} \rangle^{\Lambda}}{S_0(\Lambda)} = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \sum_{\bar{y}} \sum_{T} \int dsq(T, s) \langle \Delta(T, \bar{y}) \mathcal{A} \rangle_s^{X_n} \frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)}. \tag{30}$$

При $\Lambda \to R^2$ ряд (30) становится бесконечным, и для доказательства его сходимости необходимо оценить величину его членов. Разделы 4 и 5 посвятим этим оценкам, выполняя их в следующем порядке. Оценим вначале интеграл по ds и суммы по T и $\bar{y}$. Затем оценим число членов, возникающих после применения операторов Δ_k, и, наконец, оценим все вакуумные средние.

4. СХОДИМОСТЬ КЛАСТЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ. КОМБИНАТОРИКА

Начнем оценку ряда (30) с выражения

$$\sum_{T} \int dsq(T, s) \langle \Delta(T, \bar{y}) \mathcal{A} \rangle_s^{X_n}.$$

Вынося из-под интеграла максимум среднего $\langle \ldots \rangle$, получаем

$$\left| \sum_{T} \int dsq(T, s) \langle \Delta(T, \bar{y}) \mathcal{A} \rangle_s^{X_n} \right| \leqslant \sup_{s, T} \left| \langle \Delta(T, \bar{y}) \mathcal{A} \rangle_s^{X_n} \right| \sum_{T} \int dsq(T, s). \tag{31}$$

Справедлива следующая простая оценка [25, 39]:

$$\sum_{T} \int dsq(T, s) \leqslant e^{n-1}. \tag{32}$$

Доказательство:

$$\sum_{T} \int dsq(T, s) = \int ds_1 \ldots ds_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} \frac{d}{ds_i} (s_j \ldots s_i) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 ds_1 \ldots ds_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} (s_j \ldots s_{i-1}) e^{\sum_{j=1}^{n-1} s_{n-1} \ldots s_j} = J_{n-1}.$$

Выделим $(n-1)$-й член в произведении

$$J_{n-1}=\int\limits_0^1 ds_1\ldots ds_{n-2}\prod_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{i}(s_j\ldots s_{i-1})\int\limits_0^1 ds_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(s_{n-2}\ldots s_j)\times$$
$$\times\exp\left[s_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}s_{n-2}\ldots s_j\right].$$

Интегрируя по s_{n-1} и применяя элементарное неравенство

$$\int\limits_0^1 dsx\mathrm{e}^{sx}\leqslant \mathrm{e}^x,$$

получаем

$$J_{n-1}\leqslant \mathrm{e}J_{n-2}.$$

Отсюда следует (32), а для ряда (30) получим оценку

$$S_N^\Lambda\leqslant\sum_{n=1}^{|\Lambda|}\mathrm{e}^{n-1}\sup_{s,T}\sum_{\bar y}|\langle\Delta(T,\bar y)\mathscr{A}\rangle_s^{X_n}|\frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)}. \tag{33}$$

Приступим теперь к оценке суммы по $\bar y$. Результат можно сформулировать в виде следующей леммы:

Лемма 1 [23, 25]. Существует постоянная $\delta_1>0$, такая, что

$$\sum_{\bar y}|\langle\Delta(T,\bar y)\mathscr{A}\rangle_s^{X_n}|\leqslant C_{\delta_1}^{n-1}\sup_{\bar y}\langle\Delta(T,\bar y)\mathscr{A}\rangle_s^{X_n}\mathrm{e}^{\delta_1 d(T,\bar y)}, \tag{34}$$

где

$$\left.\begin{aligned}d(T,\bar y)&=\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{dist}(Y_{T(i+1)},Y_{i+1});\\ C_{\delta_1}&=\sum_{k=1}^{\infty}8k\mathrm{e}^{-\delta_1(k-1)}.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим сумму по Y_2

$$\sum_{Y_2}(\ldots)\leqslant\sup_{Y_2}\mathrm{e}^{\delta_1\operatorname{dist}(Y_1,Y_2)}(\ldots)\sum_{Y_2}\mathrm{e}^{-\delta_1\operatorname{dist}(Y_1,Y_2)}.$$

Так как квадрат Y_1 фиксирован, то суммирование по Y_2 выполним по спирали, т. е. сначала Y_2 пробегает 1-й слой вокруг Y_1, затем 2-й и т. д. Тогда

$$\sum_{Y_2}\mathrm{e}^{-\delta_1\operatorname{dist}(Y_1,Y_2)}\leqslant\sum_{k=1}^{\frac{\sqrt{|\Lambda|}-1}{2}}8k\mathrm{e}^{-\delta_1(k-1)}\leqslant C_{\delta_1}.$$

Оценивая аналогично остальные суммы по $Y_3, \ldots, Y_n$, приходим к оценке (34). Оценка (33) примет вид

$$S_N^\Lambda \leqslant \sum_{n=1}^{|\Lambda|} (C_{\delta_1} e)^{n-1} \sup_{s,\, T,\, \bar{y}} e^{\delta_1 d(T, \bar{y})} |\langle \Delta(T, \bar{y}) \mathscr{A} \rangle_s^{X_n}| \frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)}. \tag{36}$$

В заключение раздела оценим число членов, возникающих в результате применения оператора $\Delta(T, \bar{y})$ к выражению $\mathscr{A}(a_s, X_0) \exp[-\lambda \int_{X_n} : a_s^4(x) : dx]$. Напомним, что оператор $\Delta(T, \bar{y})$ имеет вид

$$\Delta(T, \bar{y}) = \prod_{i=1}^{n-1} \int_{Y_{T(i+1)}} dx \int_{Y_{i+1}} dy\, S(x, y) \frac{\delta^2}{\delta a(x)\, \delta a(y)}. \tag{37}$$

Каждая производная в $\Delta(T, \bar{y})$ локализована в каком-либо единичном квадрате, причем наибольшее число производных, локализованных в каком-нибудь одном квадрате, не превышает $n-1$.

Обозначим n_k число производных в $\Delta(T, \bar{y})$, локализованных в квадрате Y_k, а a_k — число полей $a_s(x)$ в $\mathscr{A}(a_s, X_0)$, локализованных в Y_k. Число членов, возникающих в результате n_k дифференцирований, не превосходит

$$N_k = (a_k + 4)(a_k + 8) \ldots (a_k + 4n_k) \leqslant 4^{n_k} \frac{\left(\left[\frac{a_k}{4}\right] + n_k\right)!}{\left[\frac{a_k}{4}\right]!}.$$

Здесь $\left[\frac{a_k}{4}\right]$ — целая часть $a_k/4$. Воспользуемся элементарной оценкой

$$\frac{(m+n)!}{m!\, n!} \leqslant 2^{m+n}.$$

Тогда получим

$$N_k \leqslant 2^{\left[\frac{a_k}{4}\right]} \cdot 8^{n_k} n_k!$$

Число членов, возникающих в результате применения всех производных, не превосходит величины

$$\prod_k N_k \leqslant C_1(\mathscr{A})\, 8^{2(n-1)} \prod_k n_k! \tag{38}$$

Для того чтобы оценить величину $\prod_k n_k!$, представим $d(T, \bar{y})$ в таком виде:

$$d(T, \bar{y})=\frac{1}{2}\sum_k\sum_{i=1}^{n_k}\operatorname{dist}(Y_k, Y_{ik}),$$

где Y_{ik} — квадраты, в которых локализованы производные, связанные с n_k — производными, локализованными в Y_k формулой (37). Нетрудно проверить, что даже в самом неблагоприятном случае, когда все квадраты Y_{ik} близко расположены к Y_k, найдутся некоторые константы $\alpha>0$; $\beta>0$; $\varepsilon>0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n_k}\operatorname{dist}(Y_k, Y_{ik})+\alpha\geqslant\beta n_k^{1+\varepsilon}.$$

Тогда можно подобрать такие константы $\delta_2>0$ и A, что

$$n_k!\leqslant e^{n_k\ln n_k}\leqslant Ae^{\frac{1}{2}\delta_2\beta n_k^{1+\varepsilon}}\leqslant Ae^{\frac{1}{2}\delta_2\sum\limits_{i=1}^{n_k}\operatorname{dist}(Y_k, Y_{ik})+\frac{1}{2}\delta_2\alpha}$$

и

$$\prod_k n_k!\leqslant e^{\delta_2 d(T, \bar{y})}C_{\delta_2}^{n-1}; \tag{39}$$

$$C_{\delta_2}=e^{\frac{1}{2}\delta_2\alpha+\ln A}. \tag{40}$$

Учитывая (38), (39), получаем оценку для величины (36)

$$S_N^\Lambda\leqslant C_1(\mathscr{A})\sum_{n=1}^{|\Lambda|}(64eC_{\delta_1}C_{\delta_2})^{n-1}\sup_{s,\,T,\,\bar{y},\,\#}e^{(\delta_1+\delta_2)\,d(T,\bar{y})}|\langle R_\#\rangle_s^{X_n}|\,\frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)}, \tag{41}$$

где $R_\#$ — мономы по полям $a_s(x)$, которые получаются в результате применения оператора $\Delta(T, \bar{y})$. Они имеют вид

$$R_\#=(-\lambda)^{2(n-1)-N+m_0}\int\limits_{X_0}dx_0^{(1)}\ldots dx_0^{(m_0)}\int\limits_{Y_1}dx_1^{(1)}\ldots dx_1^{(m_1)}\ldots$$

$$\ldots\int\limits_{Y_n}dx_n^{(1)}\ldots dx_n^{(m_n)}\,w(x_0^{(1)},\ldots, x_0^{(m_0)}, x_1^{(i_1)},\ldots$$

$$\ldots, x_1^{(i_{N-m_0})})\prod_{j=1}^{n-1}S(x_{T(j+1)}^{\pi_{T(j+1)}}, x_{j+1}^{(1)})\,a_s(x_0^{(1)})\ldots$$

$$\ldots a_s(x_0^{(m_0)}):a_s^{n_1}(x_1^{(1)}):\ldots:a_s^{n_{m_n}}(x_n^{(m_n)}):. \tag{42}$$

Здесь $0 \leqslant m_0 \leqslant N$; $1 \leqslant m_k \leqslant n-1$; $k=1, \ldots, n$; $0 \leqslant n_k \leqslant 3$. Нижний индекс переменной $x_k^{(i_k)}$ означает, что $x_k^{(i_k)} \in Y_k$, а $1 \leqslant i_k \leqslant \leqslant m_k$; $\pi_{T(j+1)}$— индекс переменной в $Y_{T(j+1)}$.

5. СХОДИМОСТЬ КЛАСТЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ. ОЦЕНКИ ВАКУУМНЫХ СРЕДНИХ

Используя свойство симметричности оператора $R_{\#}$, среднее $\langle R_{\#}\rangle_s^{X_n}$ можно оценить следующим образом:

$$|\langle R_{\#}\rangle_s^{X_n}| = |(\Omega,\ R_{\#} e^{-\lambda \int_{X_n} :a_s^4(x):dx} \Omega)| = |(R_{\#}\Omega,\ e^{-\lambda \int_{X_n} :a_s^4(x):dx} \Omega)| \leqslant$$
$$\leqslant \| R_{\#}\Omega \| \cdot \left\| \exp\left[-\lambda \int_{X_n} :a_s^4(x):dx \right] \Omega \right\|. \qquad (43)$$

Второй сомножитель в формуле (43) можно представить в виде

$$\left\| \exp\left[-\lambda \int_{X_n} :a_s^4(x):dx \right] \Omega \right\| = \left(\Omega,\ \exp\left[-2\lambda \int_{X_n} :a_s^4(x):dx \right] \Omega \right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 2

Существует такая постоянная M, не зависящая от X_n, что имеет место неравенство

$$\left(\Omega,\ \exp\left[-2\lambda \int_{X_n} :a_s^4(x):dx \right] \Omega \right)^{1/2} \leqslant e^{\lambda M |X_n|} = e^{\lambda M n} = C_0^n. \qquad (44)$$

Доказательство. Используя незначительные обобщения функции $S(x, y)$ [см. (25)], доказательство формулы (44) можно провести аналогично доказательству существования среднего (12), которое выполнено в [14]. Можно также перейти по формуле (6) к гауссовым интегралам и воспользоваться рассуждениями работы [40]. С точки зрения стандартной теории возмущений, не содержащей расходящихся диаграмм $d = 2$, оценка (44) очевидна, так как выражает тот факт, что сумма всех вакуумных диаграмм равна $\exp[\widetilde{S}_0]$, где $\widetilde{S}_0$ — сумма всех связных вакуумных вкладов, каждый из которых пропорционален объему.

Приступим теперь к оценке первого сомножителя в формуле (43), который имеет вид

$$\| R_{\#}\Omega \| = (\Omega,\ R_{\#}^2\Omega)^{1/2}.$$

Используя (42), выражение для $R_{\#}^2$ можно представить в виде

$$R_{\#}^2 = R'_{\#} = \int_{Y_{j_1}} dx_1 \ldots \int_{Y_{j_{M_{\#}}}} dx_{M_{\#}} W(x_1, \ldots, x_{M_{\#}}) \prod_{\nu=1}^{M_{\#}} :a_s^{n_\nu}(x_\nu):. \qquad (45)$$

Из определения (42) ясно, что среди квадратов Y_{j_k} могут быть повторяющиеся. Используя обычную полевую технику [36], получаем

$$(\Omega,\ R'_{\#}\Omega)=\sum_G I_{\#}(G,\ W,\ s), \tag{46}$$

где

$$I_{\#}(G,\ W,\ s)=\int\limits_{Y_{j_1}} dx_1 \ldots \int\limits_{Y_{j_{M_{\#}}}} dx_{M_{\#}}\times$$
$$\times\ W(x_1,\ \ldots,\ x_{M_{\#}})\prod_{l\in G} S(x_{l^+},\ x_{l^-};\ s); \tag{47}$$

$I_{\#}(G,\ W,\ s)$ — есть вклад некоторого графа G; l — некоторая линия в графе G, а $S\ (x_{l^+},\ x_{l^-};\ s)$ — соответствующий пропагатор. В формуле (46) мы переставили порядок интегрирования и взятие среднего. Эту процедуру и все дальнейшее можно более строго обосновать, если ввести в функцию $S\ (x,\ y)$ импульсное обрезание (см. [40]). Применив к (47) неравенства Шварца, получим

$$|I_{\#}(G,\ W,\ s)|\leqslant\|W\|_2\left(\int\limits_{Y_{j_1}} dx_1 \ldots \int\limits_{Y_{j_{M_{\#}}}} dx_{M_{\#}}\left|\prod_{l\in G} S(x_{l^+},\ x_{l^-};\ s)\right|^2\right)^{1/2}. \tag{48}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3 [40]. Для $n_* = \sup\limits_{\nu} n_\nu$ справедлива оценка

$$\int\limits_{Y_{j_1}} dx_1 \ldots \int\limits_{Y_{j_{M_{\#}}}} dx_{M_{\#}}\prod_{l\in G} |S(x_{l^+},\ x_{l^-};\ s)|^2\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{l\in G}\|S(\cdot,\ \cdot;\ s)\|^2_{L_{2n_*}(Y_{l^+},\ Y_{l^-})}, \tag{49}$$

где

$$\|S(\cdot,\ \cdot;\ s)\|_{L_{2n_*}(Y_{l^+},\ Y_{l^-})}=\left(\int\limits_{Y_{l^+}} dx\int\limits_{Y_{l^-}} dy\ |S(x,\ y,\ s)|^{2n_*}\right)^{\frac{1}{n_*}}.$$

Доказательство. Выделим в графе G некоторые ν-вершины. Пусть α_ν — все линии, соединяющие эти ν-вершины между собой; β_ν— линии, соединяющие какую-либо из ν-вершин с остальными; γ_ν— линии, соединяющие вершины, не входящие в α_ν (рис. 1).

Определим теперь такую величину

$$A_\nu = \int\limits_{Y_{j_1}} dx_1 \ldots \int\limits_{Y_{j_\nu}} dx_\nu \prod_{l \in \alpha_\nu} |S(x_{l^+};\ x_{l^-};\ s)|^2 \times$$

$$\times \prod_{l_1 \in \beta_\nu} \|S(x_{l_1^+},\ \cdot;\ s)\|^2_{L_{2n_*}(Y_{l_1^-})} \prod_{l_2 \in \gamma_\nu} \|S(\cdot,\ \cdot;\ s)\|^2_{L_{2n_*}(Y_{l_2^+},\ Y_{l_2^-})}. \qquad (50)$$

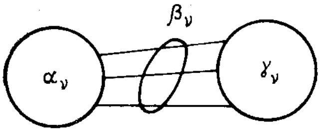

Рис. 1. Разбиение графа G на подграфы α_ν и γ_ν

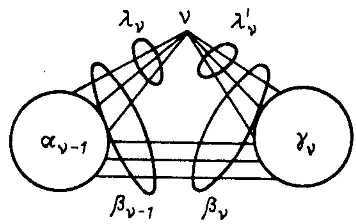

Рис. 2. Разбиение графа G на подграфы $\alpha_{\nu-1}$, γ_ν и отдельную вершину ν

Перенормировав все вершины, выделим из α_ν ν-ю вершину и обозначим λ_ν линии, соединяющие ν-ю вершину с остальными вершинами группы α_ν, т. е. $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \cup \lambda_\nu$; λ'_ν — линии, соединяющие ν-ю вершину с остальными вершинами, не входящими в α_ν, т. е. $|\lambda_\nu| + |\lambda'_\nu| = n_\nu$ (рис. 2). Ясно, что

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu \diagdown \lambda_\nu; \\ &\beta_\nu = (\beta_{\nu-1} \diagdown \lambda_\nu) \cup \lambda'_\nu; \quad \gamma_\nu \cup \lambda'_\nu = \gamma_{\nu-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Распишем теперь выражение (50) следующим образом:

$$A_\nu = \int\limits_{Y_{j_1}} dx_1 \ldots \int\limits_{Y_{j_{\nu-1}}} dx_{\nu-1} \prod_{l \in \alpha_{\nu-1}} |S(x_{l^+},\ x_{l^-};\ s)|^2 \times$$

$$\times \prod_{l_1 \in \beta_{\nu-1} \diagdown \lambda_\nu} \|S(x_{l_1^+},\ \cdot;\ s)\|^2_{L_{2n_*}(Y_{l_1^-})} \times$$

$$\times \prod_{l_2 \in \gamma_\nu} \|S(\cdot,\ \cdot;\ s)\|^2_{L_{2n_*}(Y_{l_2^+},\ Y_{l_2^-})} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{Y_{j_\nu}} dx_\nu \prod_{l \in \lambda_\nu} |S(x_{l^+},\ x_\nu;\ s)|^2 \prod_{l' \in \lambda'_\nu} \|S(x_\nu,\ \cdot;\ s)\|^2_{L_{2n_*}(Y_{l'^-})} \right). \qquad (52)$$

Применим неравенство Гельдера к интегралу в круглых скобках J_ν, выделив одну функцию $S(x, y; s)$ из произведения $\prod\limits_{l \in \lambda_\nu}$. Тогда

$$J_\nu \leqslant \Big(\int\limits_{Y_{j_\nu}} dx_\nu \, | S(x_{l_{\mathrm{I}}^+}, x_\nu; s) |^{2p} \Big)^{1/p} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{Y_{j_\nu}} dx_\nu \Big[\prod_{l \in \lambda_\nu \setminus \mathrm{I}} | S(x_{l^+}, x_\nu; s) |^2 \prod_{l' \in \lambda'_\nu} \| S(x_\nu, \cdot; s) \|^2_{L_{2n_*}(Y_{l'^-})} \Big]^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Выбирая $p = n_*$; $q = n_*/(n_* - 1)$, выделяя следующую функцию $S(x, y, s)$ из $\prod\limits_{l \in \lambda_\nu \setminus \mathrm{I}}$ и применяя неравенство Гельдера, получаем

$$J_\nu \leqslant \| S(x_{l_{\mathrm{I}}^+}, \cdot; s) \|^2_{L_{2n_*}(Y_{l_{\mathrm{I}}^-})} \Big\{ \Big(\int\limits_{Y_{l_\nu}} dx_\nu \, | S(x_{l_{\mathrm{II}}^+}, x_\nu; s) |^{\frac{2n_*}{n_*-1} p} \Big)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{Y_{j_\nu}} dx_\nu \Big[\prod_{l \in (\lambda_\nu \setminus \mathrm{I}, \mathrm{II})} | S(x_{l^+}, x_\nu; s) |^2 \times$$

$$\times \prod_{l' \in \lambda'_\nu} \| S(x_\nu, \cdot; s) \|^2_{L_{2n_*}(Y_{l'^-})} \Big]^{\frac{n_*}{n_*-1} q} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}^{\frac{n_*-1}{n_*}}.$$

Далее выбрав $p = n_* - 1$; $q = (n_* - 1)/(n_* - 2)$ и выделив следующую функцию $S(x, y; s)$, повторив этот процесс $|\lambda_\nu| + |\lambda'_\lambda| - 1$ раз, получим неравенство

$$J_\nu \leqslant \prod_{l \in \lambda_\nu} \| S(x_{l^+}, \cdot; s) \|^2_{L_{2n_*}(Y_{l^-})} \prod_{l' \in \lambda'_\nu} \| S(\cdot, \cdot; s) \|^2_{L_{2n_*}(Y_{l'^+}, Y_{l'^-})}.$$

Подставляя последнее неравенство в (52) и учитывая (51), получаем

$$A_\nu \leqslant A_{\nu-1},$$

откуда

$$A_{M_\#} \leqslant A_0,$$

что и доказывает лемму 3, так как $A_{M_\#}$ есть левая часть неравенства (49), а A_0 — его правая часть. Для того чтобы завершить оценку интеграла в формуле (48), приведем неравенство, доказательство которого читатель может найти в [23, § 7]:

$$\| S(\cdot, \cdot; s) \|_{L_{2n_*}(Y_{j_1}, Y_{j_2})} \leqslant$$

$$\leqslant K_* m_0^{-\frac{1}{n_*}} \exp[-m_0 (1 - \delta) \operatorname{dist}(Y_{j_1}, Y_{j_2})], \quad \delta > 0; \qquad (53)$$

$$K_* = K_*(n_*, \delta).$$

Использовав явный вид функции W [см. формулы (42) и (45)] и неравенство (53), легко получить оценку

$$\|W\|_2 \leqslant \lambda^{4(n-1)-2n} \mathscr{A} \, \|w\|_2 \left(\frac{K_*}{m_0^{\alpha_*}}\right)^{2(n-1)} e^{-2m_0(1-\delta)\, d(T, \bar{y})}; \tag{54}$$

α_* — минимальное α, возникшее в результате применения неравенства Гельдера.

Оценим в заключение сумму по G в формуле (46). Пусть Y_k — некоторый квадрат, в котором локализовано N_k полей в формуле (42). Выберем в Y_k какой-то определенный набор полей $a_s(x)$, которые в графе G спарены с полями, локализованными в некоторых Y'_k. Тогда сумму по G можно представить как сумму по всем возможным спариваниям фиксированных полей в Y_k, т. е. по всевозможным выборам Y'_k, и сумму по всевозможным выборам полей в середине Y_k. Последняя сумма включает не больше чем $\prod_k N_k!$ членов. Тогда, учитывая (53), получаем

$$\left|\sum_G I_{\#}(G, W, s)\right| \leqslant \left(\prod_k N_k!\right) \sum_{Y'} \prod_{l \in G} \frac{K_*}{m_0^{1/n_*}} e^{-m_0(1-\delta)\operatorname{dist}(Y_l, Y'_l)} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_k N_k! \prod_{l \in G} \sum_{Y'_l (Y_l \text{ фиксировано})} e^{-m_0(1-\delta)\operatorname{dist}(Y_l, Y'_l)} \leqslant C'^{\,n-1}_{m_0} \prod_k N_k! \tag{55}$$

Для модели (8) максимальное число полей, которые могут появиться после применения оператора $\Delta(T, \bar{y})$, не превышает числа $\prod_k (a_k + 3n_k)$. Тогда в R' число

$$N_k \leqslant 2a_k + 6n_k,$$

а

$$\prod_k N_k! \leqslant \prod_k (2a_k + 6n_k)! \leqslant C'_2(\mathscr{A}) \prod_k 2^{6n_k} (6n_k)! \leqslant C_2(\mathscr{A}) \prod_k (12)^{6n_k} (n_k!)^6.$$

Используя оценку (39), получаем

$$\prod_k N_k! \leqslant C_2(\mathscr{A}) (12^6 C_{\delta_2})^{n-1} e^{6\delta_2 d(T, \bar{y})}. \tag{56}$$

Окончательно, учитывая формулы (43), (44), (54), (55) и (56), получаем

$$\left.\begin{aligned} |\langle R_{\#}\rangle_s^{Xn}| &\leqslant C_2(\mathscr{A}) (12^6 C_{\delta_2} C'_0)^{n-1} e^{6\delta_2 d(T, \bar{y})}; \\ C'_0 &= C_0 C'_{m_0}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Подставив в (41), получим

$$S_N^\Lambda \leqslant C(\mathscr{A})\,\|w\|_2 \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \left(64\cdot 12^6 e C_{\delta_1} C_{\delta_2}^2 C_0' \frac{K_*}{m_0^{\alpha_*}}\right)^{n-1} \times$$

$$\times \sup_{s,\,T,\,\bar{y},\,\#} e^{-(m_0-\delta_1-7\delta_2-m_0\delta)\,d(T,\,\bar{y})} \frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)}. \tag{58}$$

Доказательство сходимости кластерного разложения (30) завершает следующая лемма.

Лемма 4 [23, 25]. Для достаточно больших m_0 и достаточно малых λ найдется константа C_*, не зависящая от m_0 и λ, такая, что

$$\frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)} \leqslant C_*^{|X_n|} = C_*^n. \tag{59}$$

Доказательство. Как и в разд. 3, построим кластерное разложение для $S_0(X_n^c)$:

$$S_0(X_n^c) = \sum_{m=1}^{|X_n^c|} \mathscr{K}(X_m')\, S_0(X_n^c \setminus X_m'), \tag{60}$$

где

$$\mathscr{K}(X_m') = \sum_{\bar{y}} \sum_{T} \int ds\, q(T,\ s)\, \langle \Delta(T,\ \bar{y})\, 1\rangle_s^{X_m'}. \tag{61}$$

Пусть $X_m'' = X_m' \cup X_n$, тогда $X_n^c \setminus X_m' = \Lambda \setminus X_m'' = X_m''^c$. Перепишем ряд (60) в таком виде:

$$S_0(X_n^c) = \sum_m \mathscr{K}(X_m'' \setminus X_n)\, S_0(X_m''^c). \tag{62}$$

Пусть теперь Δ — последний квадрат в X_n. Определим

$$X^* = X_n \setminus \Delta.$$

Перепишем (62), заменив X_n на X^* и выделив 1-й член разложения:

$$S_0(X^{*c}) = \mathscr{K}(X_n \setminus X^*)\, S_0(X_n^c) + \sum_{\substack{m \\ X_n \not\subseteq X_m''}} \mathscr{K}(X_m'' \setminus X^*)\, S_0(X_m''^c). \tag{63}$$

Решая (63) относительно $S_0(X_n^c)$, получаем

$$S_0(X_n^c) = \frac{1}{\mathscr{K}(\Delta)} \Bigl[S_0(X^{*c}) - \sum_{\substack{m \\ X_n \not\subseteq X_m''}} \mathscr{K}(X_m'' \setminus X^*)\, S_0(X_m''^c) \Bigr]. \tag{64}$$

Это уравнение напоминает уравнение Кирквуда — Зальцбурга, если ввести последовательность функций ρ на множествах из Λ. Определим в пространстве таких последовательностей норму

$$\| \rho \|_\xi = \sup_X |e^{-\xi|X|} \rho (X)|. \tag{65}$$

Тогда, если ввести в уравнение (64) обозначения

$$\begin{gathered} \rho (X) = S_0 (X_n^c), \ \rho (\varnothing) = S_0 (\Lambda); \\ \delta (X) = 0, \ \delta (\varnothing) = 1 \end{gathered} \tag{66}$$

и определить оператор

$$(Q\rho) (X) = \frac{1}{\mathscr{K} (\Delta)} \Big\{ \rho (X^*) - \sum_{\substack{m \\ X \nsubseteq X''_m}} \mathscr{K} (X''_m \diagdown X^*) \rho (X''_m) \Big\}, \tag{67}$$

уравнение (64) можно переписать в виде

$$\rho = S_0 (\Lambda) \delta + Q\rho. \tag{68}$$

Исходя из определения (65), норма оператора Q оценивается следующим соотношением:

$$\| Q \|_\xi \leqslant \mathscr{K} (\Delta)^{-1} \{ e^{-\xi} + \sup_X \sum_{\substack{m \\ X \nsubseteq X''_m}} | \mathscr{K} (X''_m \diagdown X^*) | e^{\xi |X''_m \diagdown X^*|} \}. \tag{69}$$

Для $\mathscr{K}(\Delta)$, используя (6) и неравенство Йенсена, получаем

$$\mathscr{K} (\Delta) = \int d\mu e^{-\lambda \int\limits_\Delta : \varphi^4(x) : dx} \geqslant e^{-\lambda \int d\mu \int\limits_\Delta : \varphi^4(x) : dx} = e^0 = 1. \tag{70}$$

Сумма в (69) начинается со второго члена разложения, а значит, содержит хотя бы один вариационный оператор Δ_k [см. (26)]. Проделывая оценки, аналогичные доказательству сходимости ряда (30), легко установить, что эта сумма пропорциональна константе $1/m_0^{\alpha*}$ и при достаточно больших m_0 мала. Выбирая также достаточно большое ξ, легко добиться оценки

$$\| Q \|_\xi \leqslant 1/2.$$

Тогда общее решение уравнения (68) можно записать в виде ряда

$$\rho = (1 - Q)^{-1} S_0 (\Lambda) \delta = S_0 (\Lambda) \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \delta$$

и получить на ρ следующую оценку:

$$\| \rho \|_\xi \leqslant 2 S_0 (\Lambda).$$

Так как

$$e^{-\xi|X|} \rho (X) \leqslant \sup_X e^{-\xi|X|} \rho (X) \leqslant 2 S_0 (\Lambda),$$

с учетом (66) получим оценку (59). Окончательно для S_N^Λ будем иметь

$$S_N^\Lambda \leqslant C_N(\mathcal{A}) \| w \|_2 \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \Big(\frac{\lambda}{m_0^{\alpha_*}} 2^{30} C_{\delta_1} C_{\delta_2}^2 C_0' C_* K_* \Big)^{n-1} \times$$
$$\times \sup_{s,\, T,\, \bar{y},\, \ne} e^{-(m_0-\delta_1-7\delta_2-m_0\delta)d(T,\,\bar{y})}.$$

Выбирая λ достаточно малым, а m_0 достаточно большим, легко установить ограниченность последовательности S_N^Λ, а значит, и сходимость кластерного разложения.

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

Ограниченность последовательности S_N^Λ, которую мы доказали в предыдущем разделе, еще не гарантирует единственность предела. Чтобы доказать единственность, установим как следствие кластерных разложений следующую теорему.

Теорема 1. Для достаточно малых λ/m_0 существует константа $K = K(\mathcal{A})$ такая, что

$$\left| \sum_{\substack{n \\ X_0 \subset X_n \\ X' \cap X_n \ne \varnothing}} \mathcal{K}(X_n) \frac{S_0(X_n^c)}{S_0(\Lambda)} \right| \leqslant K e^{-\frac{1}{2}\operatorname{dist}(X,\, X_0')}. \tag{71}$$

Доказательство. Сумма в формуле (71) означает, что она включает только те члены кластерного разложения (30), в которых X_n пересекается с некоторой фиксированной областью X_0' в Λ. По построению кластерного разложения ясно, что

$$\operatorname{dist}(X_0,\, X_0') \leqslant |X_n| + d(T,\, \bar{y}). \tag{72}$$

Следовательно, оставив в правой части (70) члены, соответствующие условию $X_0' \cap X_n \ne \varnothing$, и выбрав соответствующим образом m_0, δ_1, δ_2, δ, получим [используя (72)] неравенство

$$e^{-(m_0-\delta_1-7\delta_2-m_0\delta)d(T,\,\bar{y})} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\operatorname{dist}(X_0,\, X_0')} e^{-m_0 d'(T,\,\bar{y})} e^{\frac{1}{2}n},$$

а вместе с ним и неравенство (71). Докажем теперь, что последовательность S_N^Λ есть последовательность Коши. Пусть Λ_1 и Λ_0 два произвольных объема. Тогда

$$S_N^{\Lambda_1} - S_N^{\Lambda_0} = \int_0^1 ds \frac{d}{ds} S_N^{\Lambda_s}. \tag{73}$$

Пусть $X_1(x)$, $X_0(x)$ — характеристические функции объемов Λ_1, Λ_0 соответственно. Тогда $X_s(x) = sX_1(x) + (1-s)X_0(x)$. Пусть далее

$$V_\Lambda = -\lambda \int_\Lambda :a^4(x): dx = -\lambda \int X_\Lambda(x) :a^4(x): dx.$$

Тогда

$$\frac{d}{ds} S_N^{\Lambda_s} = \frac{d}{ds} \frac{\langle \mathscr{A} \rangle^{\Lambda_s}}{S_0(\Lambda_s)} = \frac{\langle \mathscr{A} V_{\Delta\Lambda} \rangle^{\Lambda_s}}{S_0(\Lambda_s)} - \frac{\langle \mathscr{A} \rangle^{\Lambda_s}}{S(\Lambda_s)} \frac{\langle V_{\Delta\Lambda} \rangle^{\Lambda_s}}{S_0(\Lambda_s)},$$

где

$$V_{\Delta\Lambda} = \frac{d}{ds} V_{\Lambda_s} = -\lambda \int (X_1(x) - X_0(x)) :a^4(x): dx = -\lambda \int_{\Delta\Lambda} :a^4(x): dx.$$

Так как $\operatorname{supp} \mathscr{A}$ лежит в фиксированной области, а $\operatorname{supp} V_{\Delta\Lambda}$ удаляется от $\operatorname{supp} \mathscr{A}$, если $\Lambda_1, \Lambda_0 \nearrow R^2$, то сходимость (73) к нулю при $\Lambda_1, \Lambda_0 \nearrow R^2$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2 [23]. Пусть $d = \operatorname{dist}(X_0, X_0')$. Тогда существует константа $M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ такая, что

$$\left| \frac{\langle \mathscr{A}(X_0) \mathscr{B}(X_0') \rangle^\Lambda}{S_0(\Lambda)} - \frac{\langle \mathscr{A}(X_0) \rangle^\Lambda}{S_0(\Lambda)} \frac{\langle \mathscr{B}(X_0') \rangle^\Lambda}{S_0(\Lambda)} \right| \leqslant M_{\mathscr{A},\mathscr{B}} e^{-\frac{1}{2}d}. \tag{74}$$

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, чтобы свести кластерное разложение к членам, которые содержат области X_0 и X_0', а члены, в которых X_0 и X_0' лежат соответственно в X_n и X_n^c или наоборот, равны нулю в силу некоторой искусственной симметрии. Следуя Жинибру [41], мы построим такую симметрию следующим образом. Пусть $\mathscr{H}_E^*$ означает изоморфную копию пространства $\mathscr{H}_E$, Ω^* — вакуумный вектор в $\mathscr{H}_E^*$. Определим

$$\tilde{\mathscr{H}}_E = \mathscr{H}_E \otimes \mathscr{H}_E^*; \quad \tilde{\Omega} = \Omega \otimes \Omega^*.$$

Операторы в $\mathscr{H}_E^*$ обозначаются $a^*(x)$. Обозначим также

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\langle \mathscr{A}\mathscr{A}^* \rangle}^\Lambda &= (\tilde{\Omega}, \mathscr{A}(a)\mathscr{A}(a^*) e^{-\lambda V_\Lambda} e^{-\lambda V_\Lambda^*} \tilde{\Omega}); \\ \tilde{S}_0(\Lambda) &= (\tilde{\Omega}, e^{-\lambda V_\Lambda} e^{-\lambda V_\Lambda^*} \tilde{\Omega}). \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Ясно, что средние инвариантные относительно симметрии $a^* \to a$.

Рассмотрим выражение

$$\widetilde{\langle (\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)(\mathscr{B} - \mathscr{B}^*) \rangle}^\Lambda$$

и применим к нему кластерное разложение. Так как

$$\operatorname{supp} \mathscr{A} = \operatorname{supp} \mathscr{A}^* = \operatorname{supp} (\mathscr{A} - \mathscr{A}^*);$$
$$\operatorname{supp} \mathscr{B} = \operatorname{supp} \mathscr{B}^* = \operatorname{supp} (\mathscr{B} - \mathscr{B}^*)$$

с учетом симметрии $a^* \to a$, те члены кластерного разложения, в которых $\mathscr{A} - \mathscr{A}^*$ и $\mathscr{B} - \mathscr{B}^*$ входят соответственно в X_n и X_n^c или наоборот, равны нулю. Оставшиеся члены совпадают с левой частью (71). Следовательно, из теоремы 1 следует, что

$$\left|\frac{\overline{\langle(\mathscr{A}-\mathscr{A}^*)\,(\mathscr{B}-\mathscr{B}^*)\rangle^{\Lambda}}}{\widetilde{S}_0\Lambda}\right| \leqslant K e^{-\frac{1}{2}d}. \qquad (76)$$

Используя определение (75), нетрудно показать, что левая часть (76) представляет собой выражение

$$2\left|\frac{\langle\mathscr{A}\mathscr{B}\rangle^{\Lambda}}{S_0(\Lambda)} - \frac{\langle\mathscr{A}\rangle^{\Lambda}}{S_0(\Lambda)}\,\frac{\langle\mathscr{B}\rangle^{\Lambda}}{S_0(\Lambda)}\right|,$$

что и доказывает теорему 2.

7. МЕТОД КЛАСТЕРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрим теперь систему классических частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала $V(x, y)$. Пусть система находится в объеме Λ, а $V(x, y)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 (см. разд. 1). Рассмотрим функционал

$$Q\{\eta\} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \int_{\Lambda^N} dx_1 \ldots dx_N \eta(x_1) \ldots \eta(x_N)\, e^{-\beta \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant N} V(x_i, x_j)}, \qquad (77)$$

где z — активность рассматриваемых частиц; $\beta = 1/kT$; T — температура. Из определения (77) легко видеть, что большая статистическая сумма и функции распределения системы могут быть определены следующим образом:

$$Z_\Lambda = Q\{1\};$$
$$\rho^{\Lambda}(x_1, \ldots, x_N) = Z_\Lambda^{-1} \left.\frac{\delta Q\{\eta\}}{\delta\eta(x_1) \ldots \delta\eta(x_N)}\right|_{\eta=1}. \qquad (78)$$

Для того чтобы выразить функции распределения через евклидовы поля, нужно наложить на $V(x, y)$ еще одно дополнительное условие

$$V(x, x) < \infty. \qquad (79)$$

Используя определения (4) и (5), выражение (77) представляем в виде

$$Q\{\eta\} = (\Omega, e^{z\int_\Lambda dx\, \eta(x)\, :\, e^{i\sqrt{\beta}\, a(x)}:}\, \Omega). \qquad (80)$$

Условие (79) обеспечивает существование оператора $:\exp[i\sqrt{\beta}\, a(x)]:$, так как $:\exp[i\sqrt{\beta}\, a(x)]: =$ $= \exp[\beta V(x, x)] \exp[i\sqrt{\beta}\, a(x)]$. В эквивалентности выражений (77) и (80) легко убедиться, если разложить экспоненту в (80) в ряд по

z и вычислить соответствующие средние. Из (78) получаем следующее представление для функций распределения:

$$\rho^{\Lambda}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\left(\Omega, \prod_{j=1}^{n} : e^{i\sqrt{\beta}a(x_j)} : e^{z\int_{\Lambda} dx : e^{i\sqrt{\beta}} : a(x)} \Omega\right)}{\left(\Omega, e^{z\int_{\Lambda} dx : e^{i\sqrt{\beta}} : a(x)} \Omega\right)}. \tag{81}$$

В этом случае построение кластерного разложения и доказательство существования термодинамического предела $\Lambda \nearrow R^3$ ничем не отличаются от уже описанных в предыдущих разделах. Однако в реальном случае потенциал $V(x, y)$ не удовлетворяет условиям 1 и 2 и (79), так как содержит короткодействующую составляющую. Рассмотрим, например, систему частиц, взаимодействующих посредством потенциала

$$\Phi(x, y) = V(x, y) + W(x, y), \tag{82}$$

где $V(x, y)$, как и прежде, удовлетворяет условиям 1 и 2 и (79), а $W(x, y)$ можно представить в виде

$$W(x, y) = v(x-y) + w(x, y), \tag{83}$$

причем $v(x)$ абсолютно интегрируемый и удовлетворяет условию стабильности, а $w(x, y) \geqslant 0$. Для удобства дальнейшего построения будем считать, что $V(x, y)$ отличен от нуля, если $x, y \in \Lambda$, а $W(x, y) \neq 0$ при $x, y \in \Lambda'$; $\Lambda \subset \Lambda'$. Для реальных систем взаимодействующих частиц представление (82), (83) для потенциала $\Phi(x, y)$ можно обеспечить введением дополнительной регуляризации [25, 28], которая снимается в пределе бесконечного объема $\Lambda \nearrow R^3$. В этом случае большая статистическая сумма и функции распределения могут быть представлены в виде

$$Z_{\Lambda, \Lambda'} = (\Omega, Q\{1, 1; a\}\Omega); \tag{84}$$

$$\rho^{\Lambda, \Lambda'}(x_1, \ldots, x_n) = Z^{-1}_{\Lambda, \Lambda'} \left(\Omega, \frac{\delta Q\{\eta, y; a\}}{\delta\eta(x_1)\ldots\delta\eta(x_n)} \Omega\right)\Bigg|_{\eta=y=1} = Z^{-1}_{\Lambda, \Lambda'}(\Omega, \rho_n^{\Lambda, \Lambda'}(x_1, \ldots, x_n; a)\Omega),$$

где

$$Q\{\eta, y; a\} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{y^N}{N!} \int_{\Lambda'^N} dx_1 \ldots dx_N e^{-\beta \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} W(x_i, x_j)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} \eta(x_j) z_\beta(x_j) e^{i\sqrt{\beta}a(x_j)} = \sum_{N=0}^{\infty} y^N Q_N\{\eta; a\}, \quad z_\beta(x) = ze^{\beta V(x, x)}, \tag{85}$$

а операторы $a(x)$ построены по $V(x, y)$.

Следуя работе [39] (см. также [42]), представим операторнозначный функционал $Q\,\{\eta,\, y;\, a\}$ в виде экспоненты от разложения по связным функциям потенциала $W\,(x,\, y)$. Введем для этого следующие обозначения:

$$u_{ij} = u\,(x_i,\ x_j) = e^{-\beta w_{ij}} - 1;\quad w_{ij} = w\,(x_i,\ x_j); \tag{86}$$

$$v'_{ij} = v\,(x_i - x_j) - \frac{1}{\beta}\,\frac{u_{ij}}{1 + s_i \ldots s_{j-1} u_{ij}}\,; \tag{87}$$

$$K_m(\eta,\ a) = \frac{(-\beta)^{m-1}}{m} \int dx_1 \ldots dx_m \prod_{j=1}^{m} \eta\,(x_j)\, z_\beta\,(x_j) \times$$

$$\times\, e^{i\sqrt{\beta}\,a(x_j)} \int_0^1 ds_1 \ldots ds_{m-1} e^{-\beta W(\sigma_{m-1})} \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{m} [s_1 \ldots s_{k-2} v'_{k1} + s_2 \ldots s_{k-2} v'_{k2} + \ldots + s_{k-2} v'_{k,\,k-2} + v'_{k,\,k-1}] =$$

$$= \sum_T K_m\,(\eta,\ a;\ T); \tag{88}$$

$$W\,(\sigma_{m-1}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \left[s_i \ldots s_{j-1} v\,(x_i - x_j) - \frac{1}{\beta} \ln\,(1 + s_i \ldots s_{j-1} u_{ij}) \right] =$$

$$= W\,(v,\ \sigma_{m-1}) + W\,(u,\ \sigma_{m-1}); \tag{89}$$

$$K_m\,(\eta,\ a;\ T) = \frac{[(-\beta)^{m-1}}{m} \int dx_1 \ldots dx_m \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \eta\,(x_j)\, z_\beta\,(x_j)\, e^{i\sqrt{\beta}\,a(x_j)} \int_0^1 d\sigma_{m-1} f\,(T,\ \sigma_{m-1}) \prod_{i=2}^{m} \times$$

$$\times\, v'_{i,\,T(i)} e^{-\beta W(\sigma_{m-1})}; \tag{90}$$

$$\sigma_{m-1} \equiv \{s_1,\ \ldots,\ s_{m-1}\};\ f\,(T,\ \sigma_{m-1}) = \prod_{i=2}^{m-} (s_{i-1} s_{i-2} \ldots s_{T(i+1)}),\ m > 2;$$

$$f\,(T,\ \sigma_1) = 1;\ s_{i-1} s_{i-2} \ldots s_{T(i+1)} = 1;\ i = T\,(i+1).$$

Сумма по T — это сумма по всем выражениям, которые получаются, если перемножить все члены в квадратных скобках (88). Нетрудно видеть, что в этой сумме $i > T\,(i)$. Сумма по T — это сумма по всевозможным таким парам $(i,\ T\,(i))$. Выделим в exp $[-\beta \sum_{i<j} W\,(x_i,\, x_j)]$

выражения (85) член, учитывающий взаимодействие 1-й частицы со всеми остальными, и применим формулу (тождество)

$$\prod_{j=2}^{N} e^{-\beta v_{1j}-\beta w_{1j}} = 1 + \int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1}\left[\prod_{j=2}^{N} e^{-\beta s_1 v_{1j}}(1+s_1 u_{1j})\right]. \tag{91}$$

Выполнив дифференцирование, подставим (91) в выражение для Q_N. Далее отделяя члены, учитывающие взаимодействие 1-й и 2-й частицы со всеми остальными, от членов, учитывающих другие взаимодействия, применим формулу, аналогичную (91). Продолжая этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем все члены, получаем для Q_N и $Q\{\eta, y; a\}$ следующее представление:

$$Q\{\eta, y; a\} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{y^N}{N} \sum_{i=1}^{N} iK_i Q_{N-i}. \tag{92}$$

Дифференцируя (92) по y и меняя порядок суммирования, получаем

$$\frac{dQ}{dy} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m y^{m-1} K_m\right) Q,$$

откуда в силу условия $Q\{\eta, 0; a\} = 1$ имеем

$$Q\{\eta, 1; a\} = e^{\sum_{m=1}^{\infty} K_m(\eta;\, a)} = e^{Q^T\{\eta;\, 1;\, a\}}, \tag{93}$$

а в силу (84)

$$\rho_n^{\Lambda,\Lambda'}(x_1, \ldots, x_n; a) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma_k} \rho_{n_1}^T(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}; \Lambda, \Lambda'; a) \ldots$$
$$\ldots \rho_{n_k}^T(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}}; \Lambda, \Lambda'; a) \times$$
$$\times e^{Q^T\{1,\, 1;\, a\}} = \tilde{\rho}_n^T(x_1, \ldots, x_n; \Lambda, \Lambda'; a)\, e^{Q^T\{1,\, 1;\, a\}}, \tag{94}$$

где σ_k — это сумма по всевозможным разбиениям $x_1, \ldots, x_n$ на k подмножеств $(n_1 + \ldots + n_k = n)$, а

$$\rho_m^T(x_1, \ldots, x_m; \Lambda, \Lambda'; a) = \left.\frac{\delta^m Q^T\{\eta, 1; a\}}{\delta\eta(x_1) \ldots \delta\eta(x_m)}\right|_{\eta=1} =$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{T} \sum_{\mathcal{J}_m^{(k)}} \int_{\Lambda'^{k-m}} (dx)^{k-m} \prod_{j=1}^{k} z_\beta(x_j)\, e^{i\sqrt{\beta}\alpha(x_j)} J^{(k)}(T; x_1, \ldots, x_k);$$

$$J^{(k)}(T; x_1, \ldots, x_k) = (-\beta)^{k-1} \int d\sigma_{k-1} f(T, \sigma_{k-1}) \prod_{r=2}^{k} v'_{rT(r)} e^{-\beta W(\sigma_{k-1})}. \tag{95}$$

Здесь сумма по $\mathscr{S}_m^{(k)}$ — это сумма по различным расстановкам переменных $x_1, \ldots, x_m$ в графе T, состоящего из k-вершин. Преобразуем теперь выражение для $Q^T\{1, 1; a\}$, переходя от разложения по $\exp[\mathrm{i}\sqrt{\beta}\, a(x_j)]$ к разложению по $\varepsilon(x_j) = \exp[\mathrm{i}\sqrt{\beta}\, a(x_j)] - 1$:

$$Q^T\{1, 1; a\} = \\ = Q_0^T + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda'^n} (dx)^n \varepsilon(x_1) \ldots \varepsilon(x_n)\, \rho_n^T(x_1, \ldots, x_n; \Lambda'), \quad (96)$$

где

$$\rho_n^T(x_1, \ldots, x_n; \Lambda') = \rho_n^T(x_1, \ldots, x_n; \Lambda, \Lambda'; a)|_{a=0} \quad (97)$$

и

$$Q_0^T = \int_{\Lambda'} dx\, \rho_1^T(x).$$

Подставляя (96) в (94) и (84) и сокращая на $\exp[Q_0^T]$, получаем

$$\rho_n^{\Lambda, \Lambda'}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(\Omega, \tilde{\rho}_n^T(x_1, \ldots, x_n; \Lambda, \Lambda'; a)\, e^{E_1(a; \Lambda, \Lambda')}\Omega)}{(\Omega, e^{E_1(a; \Lambda, \Lambda')}\Omega)}, \quad (98)$$

где

$$E_1(a; \Lambda, \Lambda') = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda'^m} (dx)^m \varepsilon(x_1) \ldots \varepsilon(x_m)\, \rho_m^T(x_1, \ldots, x_m; \Lambda'). \quad (99)$$

Так как потенциал $W(x, y)$ является стабильным и допускает разложение (83), в выражениях для функций распределения $\rho_m^T(x_1, \ldots, x_m; \Lambda')$, построенных по $W(x, y)$, можно совершить предельный переход $\Lambda' \nearrow R^3$ (подробнее см. [39]). Однако в силу того, что $\varepsilon(x) = 0$, если $x \notin \Lambda$, интегрирование в (99) фактически выполняется по Λ. Кроме того, будем считать, что все интегрирования в $\tilde{\rho}_n^T$ также выполняются по Λ. Пусть для определенности внешние переменные $\tilde{\rho}_m^T(x_1, \ldots, x_m; \Lambda; a)$ лежат в X_0. Введем следующее обозначение:

$$\mathscr{A}(a; X_0; \Lambda) = \int (dx)^n w(x_1, \ldots, x_n)\, \tilde{\rho}_n^T(x_1, \ldots, x_n; \Lambda; a); \quad (100)$$

$$\operatorname{supp} w \subset (\otimes X_0)^n.$$

Учитывая (94), выражение (100) можно записать в виде

$$\mathscr{A}(a; X_0; \Lambda) = \sum_{\pi} \mathscr{A}_\pi(a; X_0; \Lambda) = \sum_{\pi} \mathscr{A}_\pi(\Lambda), \quad (101)$$

где $\mathscr{A}_\pi(a;\ X_0;\ \Lambda)$ соответствует конкретному разбиению переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ в формуле (94). Выделим, кроме того, в выражении для $E_1(a;\ \Lambda)$ локальную по объему часть и введем обозначения

$$E_1(a;\ \Lambda) = V_\Lambda(a) + E(a;\ \Lambda);\ \ V_\Lambda(a) = \rho_1^T \int\limits_\Lambda \varepsilon(x)\,dx;$$

$$E(a;\ \Lambda) = E(\Lambda) =$$
$$= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \int\limits_\Lambda dx_1 \ldots \int\limits_\Lambda dx_m \varepsilon(x_1) \ldots \varepsilon(x_m) \rho_m^T(x_1, \ldots, x_m). \quad (102)$$

Обозначим

$$\langle e^{E(\Lambda)} \mathscr{A}_\pi(\Lambda)\rangle^\Lambda = (\Omega,\ \mathscr{A}_\pi(\Lambda)\, e^{E(\Lambda)} e^{V_\Lambda(a)}\Omega); \quad (103)$$

$$\langle e^{E(\Lambda)}\rangle^\Lambda = Z(\Lambda)$$

и

$$\rho^\pi(w;\ \Lambda) = \frac{\langle e^{E(\Lambda)} \mathscr{A}_\pi(\Lambda)\rangle^\Lambda}{Z(\Lambda)}. \quad (104)$$

Построение кластерного разложения для выражения (104) в значительной степени отличается от описанного в разд. 3 по двум причинам. Прежде всего величина $E(\Lambda)$ не аддитивно зависит от Λ и при разбиении Λ на X_n и X_n^c экспонента в выражении (104) не разбивается на произведение экспонент. Кроме того, величина $\mathscr{A}_\pi(\Lambda)$ содержит операторы $a(x)$, локализованные не только в области X_0, но и во всем Λ. В связи с этим на 1-м шаге разложения определим величины

$$\mathscr{A}_\pi(\lambda;\ s_1) = \mathscr{A}_\pi(X_1) + s_1 \mathscr{A}_\pi(X_1;\ X_1^c) \quad (105)$$

и

$$E(\Lambda;\ s_1) = E(X_1) + E(X_1^c) + s_1 E(X_1;\ X_1^c), \quad (106)$$

так что $\mathscr{A}_\pi(\Lambda;\ 1) = \mathscr{A}_\pi(\lambda)$, а $E(\Lambda;\ 1) = E(\Lambda)$.

Тогда для (103) имеем

$$\langle e^{E(\Lambda)} \mathscr{A}_\pi(\Lambda)\rangle^\Lambda = \langle e^{E(X_1)+E(X_1^c)} \mathscr{A}_\pi(X_1)\rangle_0^\Lambda +$$
$$+ \int\limits_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} \langle e^{E(\Lambda;\ s_1)} \mathscr{A}_\pi(\Lambda;\ s_1)\rangle_{s_1}^\Lambda. \quad (107)$$

Первое слагаемое (107) разбивается на произведение аналогично (17)

$$\langle e^{E(X_1)+E(X_1^c)} \mathscr{A}_\pi(X_1)\rangle_0^\Lambda = \langle e^{E(X_1)} \mathscr{A}_\pi(X_1)\rangle_0^{X_1} Z(X_1^c), \quad (108)$$

так как

$$V_\Lambda(a) = V_{X_1}(a) + V_{X_1^c}(a).$$

Второе слагаемое имеет вид

$$\int_0^1 ds_1 \langle e^{E(\Lambda;\, s_1)} \Delta_1 \mathcal{A}_\pi (\Lambda; s_1) \rangle_{s_1}^{\Lambda}; \tag{109}$$

$$\Delta_1 = \frac{d}{ds_1} + \frac{dE(\Lambda;\ s_1)}{ds_1} + \frac{1}{2} \int dx \int dy \frac{d}{ds_1} V(x,\ y;\ s_1) \times$$
$$\times \left\{ \frac{\delta E(\Lambda;\ s_1)}{\delta a(x)} + \frac{\delta}{\delta a(x)} \right\} \left\{ \frac{\delta E(\Lambda;\ s_1)}{\delta a(y)} + \frac{\delta}{\delta a(y)} \right\}. \tag{110}$$

Интегральная часть оператора Δ_1 преобразуется так же, как и (19). Далее

$$\frac{dE(\Lambda;\ s_1)}{ds_1} = \frac{d}{ds_1}(s_1)\, E(X_1;\ X_1^c),$$

где согласно определениям (106) и (102) $E(X_1;\ X_1^c)$ имеет вид (102); только в каждом члене суммы по m в (102) имеется интегрирование по X_1 и X_1^c. Это дает возможность представить $E(X_1;\ X_1^c)$ в виде

$$E(X_1;\ X_1^c) = \sum_{Y_2} E_{Y_2}(X_1;\ X_1^c), \tag{111}$$

где $E_{Y_2}(X_1;\ X_1^c)$ имеет такой же вид, как и $E(X_1;\ X_1^c)$, только в одном из интегралов в каждом члене суммы по m вместо интегрирования по X_1^c выполняется интегрирование по Y_2. Тогда

$$\Delta_1 = \sum_{Y_2} \left[C_{Y_2} \frac{d}{ds_1} + \frac{d}{ds_1}(s_1)\, E_{Y_2}(X_1;\ X_1^c) + \int_{X_1} dx \int_{Y_2} dy \frac{d}{ds_1}(s_1) \times \right.$$
$$\left. \times V(x,\ y) \left\{ \frac{\delta E(\Lambda;\ s_1)}{\delta a(x)} + \frac{\delta}{\delta a(x)} \right\} \left\{ \frac{\delta E(\Lambda;\ s_1)}{\delta a(y)} + \frac{\delta}{\delta a(y)} \right\} \right]. \tag{112}$$

Здесь C_{Y_2} — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sum_{Y_2} C_{Y_2} = 1. \tag{113}$$

Для выполнения последующих шагов разложения введем следующие определения:

$$E(\Lambda;\ s_1,\ \ldots,\ s_n) = \sum_{l=1}^{n+1} E(Y_l) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant l < m \leqslant n+1} s_l \ldots s_{m-1} E(Y_l,\ \ldots,\ Y_m); \qquad Y_{n+1} = X_n^c; \tag{114}$$

$$E(X_n;\ s_1,\ \ldots,\ s_{n-1}) = E(X_n;\ s) = E(\Lambda,\ s_1,\ \ldots,\ s_{n-1},\ 0) - E(X_n^c)$$

и

$$E(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \ldots, j_m} \int_{V_{j_1}} dx_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{V_{j_m}} dx_m \varepsilon(x_1) \ldots \varepsilon(x_m) \rho_m^T(x_1, \ldots, x_m), \tag{115}$$

где $V_{j_1}, \ldots, V_{j_m}$ принимает одно из значений $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$, а сумма по $j_1, \ldots, j_m$ берется по всевозможным таким значениям так, что в каждом члене суммы по m присутствуют интегрирования по всем $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$. На каждом этапе разложения величины $E_{Y_{n+1}}(Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_n; X_n^c)$, $i = 1, \ldots, n$, представляются в виде разложения

$$E_{Y_{n+1}}^{s_{n+1}}(Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_n; X_n^c) =$$
$$= E(Y_i, \ldots, Y_{n+1}) + s_{n+1} E(Y_i, \ldots, Y_{n+1}; X_{n+1}^c). \tag{116}$$

Операторы Δ_k имеют вид

$$\Delta_k(X_k, Y_{k+1}; s_1, \ldots, s_k) = C_{Y_{k+1}} \frac{d}{ds_k} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \frac{d_i^{\prime}}{ds_k}(s_j, \ldots, s_k) \Big[E(Y_j, \ldots, Y_{k+1}) +$$
$$+ \int_{Y_j} dx \int_{Y_{k+1}} dy V(x, y) \left\{ \frac{\delta E(X_{k+1}; s_1, \ldots, s_k)}{\delta a(x)} + \frac{\delta}{\delta a(x)} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\delta E(X_{k+1}; s_1, \ldots, s_k)}{\delta a(y)} + \frac{\delta}{\delta a(y)} \right\} \Big], \tag{117}$$

а для величин $\mathcal{A}_\pi$ определим

$$\mathcal{A}_\pi(\Lambda; s_1, \ldots, s_n) = \sum_{k=1}^{n+1} s_1, \ldots, s_{k-1} \mathcal{A}_\pi(X_0; Y_1, \ldots, Y_k)$$

и

$$\mathcal{A}_\pi(X_0, X_n; s) = \mathcal{A}_\pi(\Lambda; s_1, \ldots, s_{n-1}; 0). \tag{118}$$

Тогда кластерное разложение для выражения (104) будет иметь вид

$$\rho^\pi(w, \Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|_l} \sum_{\bar{y}} \int ds \frac{Z(X_n^c)}{Z(\Lambda)} \Big\langle e^{E(X_n; s)} \prod_{k=1}^{n-1}{}^{*} \Delta_k(X_k, Y_{k+1}; s_1, \ldots$$
$$\ldots, s_k) \mathcal{A}_\pi(a; X_0, X_n; s) \Big\rangle_s^{X_n}. \tag{119}$$

Здесь П* означает, что произведение выполняется в порядке убывания индекса k. При выполнении разложения (119) нужно учесть следующий факт. Для того чтобы производные d/ds_k в выражении для Δ_k действовали только на $\mathcal{A}_\pi$ (Λ; $s_1, \ldots, s_k$) и для того чтобы в выражениях для $\Delta_{k-1}, \ldots, \Delta_1$ стояли величины $\frac{\delta E(X_k; s_1, \ldots, s_{k-1})}{\delta a(x)}, \ldots$, вместо $\frac{\delta E(\Lambda; s_1, \ldots, s_k)}{\delta a(x)}, \ldots$ нужно на каждом этапе разложения новую переменную интегрирования вставлять в выражения для $\Delta_{k-1}, \ldots, \Delta_1$ в виде произведений $s_{k+1}s_k$.

Сходимость кластерного разложения (119) при $\Lambda \nearrow R^3$ для ионных систем была доказана в [25], а для ионно-дипольных — в [28, 42].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dyson F. J.**— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1736.
2. **Schwinger J.**— Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 664.
3. **Nakanishi N.**— Progr. Theoret. Phys., Kyoto, 1952, v. 17, p. 401.
4. **Schwinger J.**— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, v. 44, p. 956; Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 721.
5. **Nakano T.**— Progr. Theoret. Phys., 1959, v. 21, p. 241.
6. **Фрадкин Е. С.** Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук. М., ИТЭФ АН СССР, 1960.
7. **Symanzic K.**— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 510; **Proc.** of the Intern. School of Physics Enrico Fermi/Ed. R. Jost.— Varena: Acad. **Press**, 1969.
8. **Ефимов Г. В.** Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
9. **Петрина Д. Я.**— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, с. 1052.
10. **Ivanov S. S.** Preprint ITP-70-27. Kiev, 1970.
11. **Rebenko A. L.** Preprint ITP-71-37E. Kiev, 1971.
12. **Ребенко А. Л.**— ТМФ, 1972, т. 11, с. 301.
13. **Иванов С. С., Ребенко А. Л.**— ТМФ, 1973, т. 11, с. 190.
14. **Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.** Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. М.: Наука, 1979;—ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 3.
15. **Нельсон Э.**— В кн.: Конструктивная квантовая теория поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1977, с. 74—98.
16. **Osterwalder K., Schrader R.**— Helv. Phys. Acta, 1973, v. 46, p. 277.
17. **Guerra F., Rosen L., Simon B.**— Ann. Math., 1975, v. 101, p. 111.
18. **Саймон Б.** Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
19. **Coleman S.**— In: The Whys of Subnuclear Physics/Ed. A. Sichichi, N. Y.: Plenum Press, 1979.
20. **Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.**— УНФ, 1982, т. 136, вып. 4, с. 553.
21. **Fivel D.**— Phys. Rev., 1971, v. D4, p. 1653.
22. **Петрина Д. Я., Скрипник В. И.**— ТМФ, 1971, т. 8, с. 369.
23. **Глимм Дж., Джаффе А., Спенсер Т.**— В кн.: Конструктивная квантовая теория поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1977, с. 169—267.
24. **Глимм Дж., Джаффе А., Спенсер Т.**— В кн.: Евклидовая квантовая теория поля. Марковский подход: Пер. с англ. М.: Мир, 1978, с. 65—131.
25. **Brydges D., Federbush P.**—Commun. Math. Phys., 1976, v. 49, p. 233; 1977, v. 53, p. 19; 1980, v. 73, p. 197.
26. **Park Y. M.**— Commun. Math. Phys., 1979, v. 70, p. 161.
27. **Rebenko A. L.** Preprint ITP-80-43E. Kiev, 1980.

28. **Ребенко А. Л.**— ТМФ, 1982, т. 53, № 3;— ДАН СССР, 1982, т. 267, с. 1350.
29. **Jaffe A.**— Commun. Math. Phys., 1966, v. 1, p. 127.
30. **Малышев В. А.**— УМН, 1980, т. 35, вып. 2, с. 3.
31. **Ребенко А. Л.** Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния в квантовой электродинамике. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. М., Ин-т математики, 1972.
32. **Rebenko A. L.** Preprint ITP-74-34E. Kiev, 1974.
33. **Гельфанд И. М., Наймарк М. А.**— Матем. сб., 1943, т. 12 (54), с. 197.
34. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца. М.: Гостехиздат, 1956.
35. **Минлос Р. А.**— Тр. Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, с. 497.
36. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
37. **Поливанов М. К.**— ДАН СССР, 1955, т. 100, с. 1061.
38. **Березин Ф. А.** Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
39. **Brydges D., Federbush P.**— J. Math. Phys., 1975, v. 19, p. 2064.
40. **Dimock J., Glimm J.**— Adv. Math., 1974, v. 12, p. 58.
41. **Ginibre J.**— Commun. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 310.
42. **Ребенко А. Л.**— В кн:. Физика многочастичных систем. Вып. 3. Киев: Наукова думка, 1983, с. 77—108.