«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1987, ТОМ 18, ВЫП. 4

УДК 530.1

ЭВОЛЮЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЫ Н. Н. БОГОЛЮБОВА И НЕЛОКАЛЬНОСТЬ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ГИДРОДИНАМИКЕ ТВЕРДЫХ СФЕР

Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников

Московский государственный университет, Москва

Обсуждаются функциональная гипотеза Н. Н. Боголюбова и ее фундаментальная роль в построении наиболее адекватного способа описания многочастичных процессов установления равновесия в макросистемах.

The Bogolubov functional hypotesis and its fundamental role for constructing the most adequat method of describing many-particle processes of an approach to the equilibrium in macrosystems is described.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение явлений переноса, происходящих на гидродинамической стадии приближения макроскопических систем к равновесному состоянию,— одно из важнейших приложений кинетической теории.

В течение длительного периода развития статистической механики считалось вполне естественным, что эти явления могут быть описаны локальными уравнениями гидродинамики, которые, в свою очередь, должны быть получены построением приближенных решений локального кинетического уравнения.

Тот факт, что локальность кинетических уравнений в статистической механике — следствие пренебрежения конечностью размеров области взаимодействия частиц системы и длительностью времени этого взаимодействия, ясно сознавался на самой ранней стадии развития кинетической теории. Предполагалось, однако, что как нелокальные эффекты, связанные с протяженностью процесса бинарного взаимодействия, так и процессы многократных столкновений могут быть учтены в виде поправок к локальному уравнению.

До появления строгих математических методов построения кинетических уравнений, связанных с именем Н. Н. Боголюбова [1], попытки рассмотрения этих эффектов носили эвристический характер (например, в уравнении Энскога для систем твердых сфер интеграл столкновений Больцмана модифицировался учетом размеров сталкивающихся сфер).

Н. Н. Боголюбов создал динамическую теорию кинетических явлений, позволяющую в рамках впервые предложенных им чрезвычайно наглядных и допускающих точную математическую формулировку принципов получать локальные кинетические уравнения либо непосредственно уравнения гидродинамики, которые содержат эффекты как многократных соударений, так и эффекты протяженности в пространстве и во времени процесса бинарного столкновения.

Анализ свойств приближенных решений точного динамического уравнения Лиувилля позволил Н. Н. Боголюбову сформулировать его знаменитую функциональную гипотезу, давшую ключ к пониманию связи между механикой микрочастиц и кинетическими уравнениями и послужившую основой всего последующего развития неравновесной статистической механики.

Физический смысл функциональной гипотезы, как известно, состоит во введении понятия о различных стадиях процесса приближения макроскопических систем к равновесию, с характерным для каждой стадии масштабом времени и способом сокращения описания неравновесных состояний. При этом локальное уравнение Больцмана и соответствующие ему локальные уравнения гидродинамики возникают как приближения низших порядков по безразмерному параметру (nr_0^3), где n — плотность числа частиц системы, r_0 — характерный размер области взаимодействия.

До 70-х годов нашего века основные усилия были направлены на микроскопическое обоснование феноменологических законов Ньютона и Фурье и вычисление входящих в них коэффициентов переноса, определяющих связь между тензором напряжений, вектором теплового потока и тензором скорости деформаций и градиентом локальной температуры:

$$P_{ik}=p\delta_{ik}-2\eta S_{ik}-\varkappa\delta_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,; \tag{1}$$

$$S_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,; \tag{2}$$

$$q_j=-\frac{\lambda}{k_B}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\,.$$

Здесь λ, η, $\varkappa$ — коэффициенты теплопроводности, сдвиговой и объемной вязкости; $\mathbf{u}$, θ — гидродинамическая скорость и локальная температура; k_B — постоянная Больцмана; p — локальное давление. Если взаимодействие частиц носит короткодействующий характер (что заведомо выполняется для твердых сфер), для газов умеренной плотности ($nr_0^3 \sim 0{,}1 \div 0{,}3$, n — равновесная плотность числа частиц, r_0 — диаметр сферы) можно пренебречь эффектами объемной вязкости.

Использование связей (1), (2) в макроскопических законах сохранения приводит к хорошо известным уравнениям Навье — Стокса:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0;\\ \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}(-p\delta_{ik}+2\eta S_{ik});\\ \rho\frac{\partial\theta}{\partial t}+\rho u_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=-\frac{2}{3}m\left(-\frac{\lambda}{k_B}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}+p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-2\eta S_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\end{gathered} \tag{3}$$

[$\rho(\mathbf{x}, t) = mn(\mathbf{x}, t)$ — локальная равновесная плотность массы].

В теории, имеющей дело с локальным кинетическим уравнением для одночастичной функции распределения $f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ [1—3] вида

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} = \Phi\{f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1\}, \tag{4}$$

уравнения (3) представляют собой результат первого приближения по макроскопическим градиентам при построении решений (4) методом Чепмена — Энскога. Структура функционала Φ определяется динамикой взаимодействия частиц в системе.

Н. Н. Боголюбовым [1] был дан метод вычисления последовательных членов разложения Φ по степеням параметра nr_0^3, при котором k-й член содержит вклад $(k+1)$-частичных соударений, а также эффекты нелокальности столкновений меньшего числа частиц. Естественным следствием подобной структуры функционала Φ должно было бы являться вириальное разложение для коэффициентов переноса. Однако при дальнейшем весьма трудоемком анализе свойств трех- и четырехчастичных операторов столкновения было выяснено [2—4], что высшие члены вириального разложения расходятся, т. е. коэффициенты переноса не являются аналитическими функциями параметра nr_0^3 в окрестности точки $nr_0^3 = 0$. В работах Коэна, Дорфмана [2, 3] и [4, см. цитированную там литературу] была установлена причина расходимостей в вириальных разложениях в трехмерных системах: они обусловлены коррелированными последовательностями двукратных соударений в системе из четырех частиц, происходящими на расстояниях, существенно превышающих среднюю длину свободного пробега. Поскольку на таких расстояниях неизбежны столкновения более высоких порядков, для устранения расходимостей необходим последовательный учет столкновений произвольной кратности [3]. Действительно, расходимости возникают, если рассматривать динамические процессы в изолированных небольших группах частиц. В макроскопической системе такие группы неизбежно подвергаются внешнему воздействию в течение промежутка времени $t_{mfp} \sim (nr_0^3)^{-1} t_{\text{coll}}$. Это обстоятельство должно приводить к сокращению всех расходимостей при суммировании ряда, определяющего функционал

$$\Phi\{f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1\} = \Phi^{(0)}\{f_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1\} + \\ + nr_0^3\Phi^{(1)}\{f_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1\} + (nr_0^3)^2\Phi^{(2)}\{f_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1\} \ldots,$$

однако следствием такой процедуры является неаналитичность локального кинетического уравнения по параметру (nr_0^3) в окрестности точки $nr_0^3 = 0$. С физической точки зрения появление расходимостей этого типа указывает на отсутствие четкой границы между периодом первоначальной хаотизации и кинетической стадией приближения системы к равновесному состоянию. Если мы хотим сохранить локальную структуру кинетических уравнений, для последовательного и непротиворечивого их вывода необходим способ, отличный от разложения в ряд функционала Ф по параметру nr_0^3. До настоящего времени такой способ не найден. Не вполне ясно, удастся ли при этом сохранить локальную структуру кинетического уравнения (4).

Эти трудности локальной теории, однако, не создают никаких препятствий для построения высших приближений по градиентам, приводящих вместо (3) к уравнениям Барнетта и т. д.

Эволюция функций распределения определяется иерархией Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона (ББГКИ), которая для систем из твердых сфер имеет вид [5]:

$$\frac{\partial f_1(t,1)}{\partial t}+L_0(1)f_1(t,1)=n\int dx_2\overline{T}(1,2)f_2(t,1,2);$$

$$\frac{\partial f_2(t,1,2)}{\partial t}+(L_0(1,2)-\overline{T}(1,2))f_2(t,1,2)=$$

$$=n\int dx_3[\overline{T}(1,3)+\overline{T}(2,3)]f_3(t,1,2,3), \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где $f_1(t,1)=f_1(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)$; $x_i=(\mathbf{r}_i,\mathbf{v}_i)$; $L_0(1)=\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1}$; $L_0(1,2)=\sum_{i=1}^{2}L_0(i)$; $\overline{T}(i,j)$ — оператор двухчастичного соударения:

$$\overline{T}(i,j)\psi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)=r_0^2\int\limits_{\mathbf{v}_{ij}\sigma\geqslant 0}d\sigma(\mathbf{v}_{ij}\sigma)\times$$

$$\times[\delta(\mathbf{r}_{ij}-\sigma r_0)\psi(\mathbf{v}_i^*,\mathbf{v}_j^*)-\delta(\mathbf{r}_{ij}+\sigma r_0)\psi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)], \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_{ij}=\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j,\quad \mathbf{r}_{ij}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j,\quad \mathbf{v}_{i,j}^*=\mathbf{v}_{ij}+\sigma(\mathbf{v}_{ij}\sigma),$$

σ — единичный вектор. Решения системы (5) должны удовлетворять граничному условию ослабления корреляций:

$$f_s(t,1,2,\ldots,i,\ldots,j,\ldots,s)\to$$

$$\to f_1(t,i)f_1(t,j)f_{s-2}(t,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,$$

$$j+1,\ldots,s-2)$$

при $|\mathbf{r}_{ij}|\to\infty$.

Предположение о локальности кинетического уравнения для $f_1(t,\mathbf{r},\mathbf{v})$ следует из более общей гипотезы о представлении $f_s(t,1,\ldots,s)$ в виде функционалов $\tilde{f}_s(x_1,\ldots,x_s\mid f_1(t,x_1),\ldots$ $\ldots f_1(t,x_s))$. Как уже отмечалось выше, при этом формальное расцепление иерархии (5) в пренебрежении корреляциями высших порядков приводит к расходимостям для коэффициентов переноса. В экспериментах [6, 7] по машинному моделированию эволюции систем из твердых дисков и сфер были получены аргументы в пользу существования дальнодействующих корреляций, обусловленных взаимодействием частиц с коллективными возбуждениями в системе — слабо затухающими со временем гидродинамическими модами.

В частности, для систем твердых дисков эти дальнодействующие корреляции несовместимы с описанием гидродинамического этапа релаксации к равновесию уравнениями Навье — Стокса, так как интегралы от временных корреляционных функций микроскопических токов, определяющие коэффициенты λ и η, оказываются расходящимися при $t \to \infty$ [4]. Для трехмерных систем аналогичные расходимости возникают на стадии вычислений коэффициентов Барнетта [8—10]. Наблюдаемая в экспериментах асимптотическая зависимость корреляторов $\langle J(0)\, J(t) \rangle$ от времени имеет вид $\langle J(0)\, J(t) \rangle \sim t^{-d/2}$, где d — размерность пространства; при $d = 2$ расходимость интегралов от корреляторов имеет логарифмический характер. Отметим, что в линейном приближении локальное кинетическое уравнение Больцмана приводит к экспоненциальному убыванию со временем корреляций любых микроскопических величин.

Эти обстоятельства, свидетельствующие о противоречивости описания гидродинамического режима на основе локального кинетического уравнения, привели к формулировке новой аппроксимации в иерархии ББГКИ, связанной с именем Н. Н. Боголюбова [11], Эрнста и Дорфмана [12].

Подход Эрнста и Дорфмана первоначально имел целью микроскопическое обоснование феноменологической теории взаимодействующих мод [13], успешно применявшейся для описания асимптотики временных автокорреляционных функций и кинетических явлений вблизи критической точки в жидкостях, и носил формальный характер.

Н. Н. Боголюбов установил парадоксальную аналогию между новой аппроксимацией цепочки и приближениями в микроскопической теории неравновесной плазмы, известными с середины 50-х годов, в математическую формулировку которых им также был внесен основополагающий вклад. Действительно, коллективные явления, обусловленные дальнодействующими корреляциями, играют основную роль в динамике плазмы. Предложенная Н. Н. Боголюбовым идея заключалась в том, что для описания подобных же эффектов в системе твердых сфер (изменений функции распределения на расстояниях и в интервале времени, существенно превышающих длину и время свободного пробега) можно использовать разработанные в теории плазмы приближенные подходы. Таким образом, в отличие от традиционной схемы [1, 14, 15], в которой функции f_s аппроксимировались рядами по степеням плотности,

$$f_s(t, 1, \ldots, s) = f_s^{(0)}(1, \ldots, s)\, f_1(t, 1) \ldots f_1(t, s) + \\ + n f_s^{(1)}(1, \ldots, s/f_1(t, 1), \ldots, f_1(t, s)) + \ldots$$

и выражения для $f_s^{(\alpha)}$ находились из (5) с учетом ослабления корреляций, новой аппроксимацией предполагалось [11, 12], что в низшем порядке по плотности взаимодействие частиц с коллективными возбуждениями можно описать, пренебрегая в (5) трехчастичной корреляционной функцией $g_3(t, 1, 2, 3)$:

$$g_3(t, 1, 2, 3) = f_3(t, 1, 2, 3) - \prod_{i=1}^{3} f_1(t, i) - \sum_{\substack{i=1 \\ k,\, l \neq i,\, k > l}}^{3} f_1(t, i)\, g_2(t, k, l) = 0, \tag{7}$$

где

$$g_2(t, 1, 2) = f_2(t, 1, 2) - f_1(t, 1)\, f_1(t, 2).$$

При этом не делается заранее никаких предположений о временной зависимости $g_2(t, 1, 2)$. Эта зависимость должна непосредственно определяться из уравнений (5), которые при условии (7) образуют замкнутую систему:

$$\frac{\partial f_1(t, 1)}{\partial t} + L_0(1)\, f_1(t, 1) = n \int dx_2 \overline{T}(1, 2) \{ f_1(t, 1)\, f_1(t, 2) + g_2(t, 1, 2) \}; \tag{8а}$$

$$\frac{\partial g_2(t, 1, 2)}{\partial t} + \{ \mathscr{L}(t, 1) + \mathscr{L}(t, 2) - \overline{T}(1, 2) \}\, g_2(t, 1, 2) = \overline{T}(1, 2)\, f_1(t, 1)\, f_1(t, 2). \tag{8б}$$

Для упорядочения обозначений здесь введены операторы $\mathscr{L}(t, i)$ [11, 12], действие которых на функции аргумента (i) определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(t, i)\, \chi(i) = L_0(i)\, \chi(i) - n \int dx_3 \overline{T}(i, 3) [f_1(t, i)\, \chi(3) + f_1(t, 3)\, \chi(i)]. \tag{9}$$

В левой части уравнения (8б) обычно опускают множитель $\overline{T}(1, 2)$, приводящий в линеаризованном варианте к поправкам высшего порядка по плотности. Однако, как отмечалось в [11], пренебрежение этим множителем может существенно изменить поведение $g_2(t, 1, 2)$ в области $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim r_0$. Если же нас интересуют корреляции на расстояниях, сравнимых с длиной свободного пробега, указанное выше пренебрежение вполне оправдано.

Решения (8а), (8б) можно полностью определить, задавая начальные условия для $f_1(t, 1)$, $g_2(t, 1, 2)$ при некотором значении t_0. Пренебрегая вкладом начальных корреляций [12] [приводящим к величинам более высокого порядка по плотности, чем отклонения $f_1(t_0, 1)$ от равновесного значения], можно представить решение (8б) в виде [10]:

$$g_2(t, 1, 2) = \int_0^t Q(t)\, Q^{-1}(\tau)\, \overline{T}(1, 2)\, f_1(\tau, 1)\, f_1(\tau, 2)\, d\tau, \tag{10}$$

где

$$Q(t) = T\exp\left(\int_0^t (\mathscr{L}(\tau, 1) + \mathscr{L}(\tau, 2))\, d\tau\right), \qquad (11)$$

T — операция упорядочения по времени, которая необходима здесь вследствие того, что операторы $\mathscr{L}(\tau, i)$, взятые в различные моменты времени, не коммутируют. В (10) и (11) для удобства положено $t_0 = 0$.

Подстановка (10) в (8а) приводит к нелокальному кинетическому уравнению для одночастичной функции распределения f_1, причем следует ожидать, что оно содержит также новые нелинейные эффекты, обусловленные функциональной зависимостью операторов $\mathscr{L}(\tau, i)$ от f_1 [10].

1. ПОСТРОЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В настоящее время не известно асимптотическое поведение решений (8а), (8б) при произвольных начальных условиях, так как отсутствует даже формулировка утверждения, аналогичного H-теореме Больцмана. Отметим, что подобная ситуация имела место и для (обобщенного) уравнения Энскога до 1978 г., когда доказательство H-теоремы в этом важном случае было найдено Резибуа [16]. Естественно предположить, что и в системе, описываемой уравнениями (8а), (8б) в течение интервала времени, по порядку не превышающего среднее время свободного пробега $t_{mfp} \sim \left(nr_0^2\left(\frac{\theta}{m}\right)^{1/2}\right)^{-1}$, достигается состояние, близкое к «квазиравновесному», описываемому максвелловскими функциями распределения

$$f_1(t, 1) \sim f_M(1);$$
$$q_2(t, 1, 2) \sim f_M(1)\, f_M(2)\, g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \qquad (12)$$

где

$$f_M(1) = \rho(\mathbf{r}, t)\left(\frac{m}{2\pi\theta(\mathbf{r}_1, t)}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t))}{2\theta(\mathbf{r}_1, t)}\right\}. \qquad (13)$$

Заметим, что указанные выше качественно новые особенности решений систем уравнений (8а), (8б) проще исследовать, не принимая во внимание эффекты конечности области соударения в операторах $\overline{T}_{ij}$. В дальнейшем мы будем использовать вместо $\overline{T}_{ij}$ операторы $\widetilde{T}_{ij}$, действие которых на функции вида $\chi(i, j)$ определяется формулой

$$T(i, j)\chi(i, j) =$$
$$= r_0^2 \int_{\mathbf{v}_{ij}\sigma \geqslant 0} d\sigma\, (\mathbf{v}_{ij}\sigma)\{\chi(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i^*, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j^*) - \chi(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)\}\,\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \qquad (14)$$

Для самосогласованности этого приближения следует положить в (12) $g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0$.

Законы сохранения для бинарных соударений, содержащиеся в (8а), (8б), допускают стандартную формулировку в терминах макроскопических параметров ρ, $\mathbf{u}$, θ, определяющих квазиравновесную функцию распределения (13):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\rho\mathbf{u})=0;\\
\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial r_k}\right)=-\frac{\partial P_{ik}}{\partial r_k};\\
\frac{3}{2}\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_k\frac{\partial}{\partial r_k}\right)\theta=-\left(P_{ik}S_{ik}+\frac{\partial q_k}{\partial r_k}\right),
\end{gathered}\tag{15}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
P_{ik}&=\int(v_i-u_i)(v_k-u_k)f_1(t,x_1)\,d\mathbf{v}_1;\\
q_k&=\frac{1}{2}\int(v_k-u_k)(v_i-u_i)^2f_1(t,x_1)\,d\mathbf{v}_1.
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

В соответствии со структурой оператора столкновений (14) мы опускаем в (16) «потенциальные» части тензора напряжений и вектора потока тепла, учет которых приведет лишь к поправкам к больцмановым значениям коэффициентов переноса.

Таким образом, проблема построения гидродинамических уравнений состоит в вычислении интегралов (16) с приближенными решениями системы (8а), (8б) специального вида: именно такие решения должны определяться градиентами макроскопических параметров, входящих в (13). Способ построения приближенных решений такого рода фактически восходит к Чепмену и Энскогу. В современной формулировке, данной Н. Н. Боголюбовым в работе [17], он состоит во введении формального параметра однородности μ в те члены уравнений (8а), (8б), которые содержат временные и пространственные градиенты. Причем это введение должно быть произведено таким образом, чтобы наличие множителя μ соответствовало бы предположению о малом изменении свойств системы при ее пространственных трансляциях как целого [17] (в конце вычислений должно быть положено $\mu=1$). Далее, решения модифицированных таким образом уравнений обычно представляются в виде рядов по параметру μ. Для системы (8а), (8б) эти решения выглядят так [8]:

$$\left.\begin{aligned}
f_1(t,1)&=f_M(1)\,(1+\mu\varphi_1(t,1)+\mu^2\varphi_2(t,1)+\ldots),\\
g_2(t,1,2)&=f_M(1)\,f_M(2)\,(\mu\psi_1(t,1,2)+\mu^2\psi_2(t,1,2)+\ldots).
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Однако подробный анализ возникающей при этом системы уравнений для φ_α, ψ_α показывает, что уже третий член первого из рядов (17) содержит расходимости [9], обусловленные сингулярностями так называемых кольцевых операторов, свойства которых будут обсуждаться ниже. Этот факт свидетельствует о том, что модифицированная система (8а), (8б)

$$\mu\left(\frac{\partial f_1(t,1)}{\partial t}+\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}f_1(t,1)\right)=$$
$$=n\int dx_2T(1,2)\{f_1(t,1)f_1(t,2)+g_2(t,1,2)\};\tag{18а}$$
$$\mu\left(\frac{\partial g_2(t,1,2)}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}{2}\frac{\partial g_2(t,1,2)}{\partial \mathbf{R}}\right)+(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial g_2(t,1,2)}{\partial \boldsymbol{\rho}}=$$
$$=n\sum_{i=1}^{2}\int dx_3T(i,3)\,[f_1(t,i)\,g_2(t,3-i,3)+f_1(t,3)\,g_2(t,1,2)]+$$
$$+T(1,2)f_1(t,1)f_1(t,2);\tag{18б}$$
$$\mathbf{R}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2},\quad \boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$$

не имеет решений $\{f_1, g_2\}$, близких к $\{f_M(1), 0\}$ и аналитических по μ в окрестности точки $\mu=0$.

Поясним вышесказанное следующим простым примером [9]. Если система настолько близка к равновесному состоянию, что можно пренебречь в правой части (18а), (18б) отличием $n(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\theta(\mathbf{r}, t)$ от их равновесных значений, то из (17), (18а), (18б) следует

$$\psi_\alpha(t,x_1,x_2)=\left[(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}}-n(\Lambda_0(1)+\Lambda_0(2))\right]^{-1}\times$$
$$\times T(1,2)(1+P_{1,2})\,\varphi_2(t,2)-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}}-n(\Lambda_0(1)+\Lambda_0(2))\right]^{-1}\times$$
$$\times T(1,2)(P_{1,2}+1)\frac{1}{n\Lambda_0(1)+\hat{z}}\,\pi(t,1),\tag{19}$$

где $P_{1,2}$— оператор, переставляющий аргументы функций $P_{1,2}\psi(1)=\psi(2)$; $\Lambda_0(i)$ — линеаризованный оператор Больцмана

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda_0(i)\,\psi(i,j)=r_0^2\int dx_kf_{eq}(x_k)\,T(ik)\,(\psi(i,j)+\psi(k,j));\\&\pi(t,1)=[f_M(1)]^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1}\right)f_M(1);\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

$\hat{z}$ — кольцевой оператор, действие которого на функцию $\pi(t, 1)$ определяется соотношением

$$\hat{z}\pi(t,1)=\int dx_2T(1,2)\left[(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-n(\Lambda_0(1)+\Lambda_0(2))\right]^{-1}\times$$
$$\times T(1,2)(1+P_{1,2})\,\pi(t,1).$$

Вклад в $\varphi_2(t, 1)$, соответствующий (19), содержит компоненты вида

$$\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\{i\mathbf{q}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)-n(\Lambda_0(1)+\Lambda_0(2))\}^{-2}\frac{1}{n(\Lambda_0(1)+z)}\frac{\partial\pi(t,\mathbf{R},\mathbf{v}_1)}{\partial t}.\tag{21}$$

Выражение $\{i\mathbf{q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - n(\Lambda_0(1) + \Lambda_0(2)\}^{-2}\chi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ при малых $\mathbf{q}$ имеет сингулярность, обусловленную теми членами разложения $\chi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ в двойной ряд по собственным функциям операторов $\pm i\mathbf{q}\mathbf{v}_i - n\Lambda_0(i)$, для которых собственные значения этих операторов обращаются в нуль при $q \to 0$. Действительно, оператор

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1) = i\mathbf{q}\mathbf{v}_1 - n\Lambda_0(1) \tag{22а}$$

имеет пять таких собственных функций, отвечающих гидродинамическим модам. В нулевом приближении теории возмущений по малому параметру $i\mathbf{q}\mathbf{v}_1$ эти функции имеют вид:

1. Функции, соответствующие звуковым модам с собственными значениями $\left\{\pm i \mid \mathbf{q} \mid \left(\frac{5\theta}{3m}\right)^{-1/2} \Gamma q^2\right\}$:

$$\psi_{1,2}^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}) = \frac{mv^2}{\theta\sqrt{30}} \pm \frac{\mathbf{q}\mathbf{v}}{|\mathbf{q}|}\left(\frac{m}{2\theta}\right)^{1/2}. \tag{22б}$$

2. Функция, соответствующая тепловой моде с собственным значением $-D_T\mathbf{q}^2$:

$$\psi_3^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{mv^2}{\theta} - 5\right). \tag{22в}$$

3. Функции, соответствующие модам сдвиговой вязкости с собственным значением $-D_\eta\mathbf{q}^2$:

$$\psi_{4,5}^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{\theta}\right)^{1/2}\mathbf{e}_i\mathbf{v}, \quad \mathbf{e}_i\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{e}_i^2 = 1. \tag{22г}$$

Здесь D_η, D_T — коэффициенты кинематической вязкости и термодиффузии, $\Gamma = \frac{2}{3}(D_T + 2D_\eta)$, все собственные значения вычислены в первых двух порядках теории возмущений по малому параметру $|\mathbf{q}|$.

Сравнивая приведенные выше собственные значения $S(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1)$ с (21), легко заметить, что подынтегральное выражение в (21) может иметь особенность типа $1/\mathbf{q}^4$ при малых $\mathbf{q}$. Эта особенность приводит к расходимости интеграла, определяющего функцию второго приближения метода Чепмена — Энскога $\varphi_2(1)$ [9].

Таким образом, разложение (17) не приводит нас к искомым гидродинамическим уравнениям, не содержащим расходимостей, и необходимо искать иной способ построения приближенных решений (18а), (18б).

Такой способ был предложен в работе [10] и состоит в выборе следующего вида решений:

$$f_1(t, 1) = f_M(1)(1 + \mu\varphi_1(t, 1 \mid \mu)), \tag{23}$$

$$g_2(t, 1, 2) = f_M(\xi_1, \mathbf{v}_1) f_M(\xi_2, \mathbf{v}_2)(\mu\psi_1(t, 1, 2 \mid \mu)), \quad \xi_{1,2} = \mathbf{R} \pm \frac{\rho\mu}{2},$$

причем порядок $\varphi_1(t, 1 \mid \mu)$, $\psi_1(t, 1, 2 \mid \mu)$ должен быть найден из системы (18а), (18б).

Поскольку в силу законов сохранения произведения $f_M(i)\,f_M(j)$ можно переносить влево от операторов $T(i, j)$, уравнения (18а) с учетом (23) приобретают вид

$$[f_M(1)]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}\right]f_M(1)=n\Lambda(1,\mathbf{r}_1)\,\varphi_1(t,1)+$$
$$+n\int d\mathbf{v}_2 f_M(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_2)\,\widetilde{T}(1,2)\,\psi_1(t,\mathbf{r}_1,0;\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2), \tag{24а}$$

где введены обозначения

$$\psi_1(t,1,2\mid\mu)=\psi_1(t,\mathbf{R},\boldsymbol{\rho};\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2);\quad\left(\mathbf{R}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2},\ \boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right);$$
$$T(1,2)=\widetilde{T}(1,2)\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2);$$
$$\Lambda(i,\xi)\,\chi(\mathbf{v}_i)=\int d\mathbf{v}_3 f_M(\xi,\mathbf{v}_3)\,\widetilde{T}(i,3)\,[\chi(\mathbf{v}_i)+\chi(\mathbf{v}_3)],\quad i=1,2.$$

Отметим, что в силу (23) уравнение (24а) не содержит в явном виде параметра однородности.

Второе уравнение системы (18а), (18б) приобретает вид

$$\left[\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)+(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}}+\right.$$
$$\left.+\mu\mathscr{L}(t,\mathbf{R},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)-n(\Lambda(1,\xi_1)+\Lambda(2,\xi_2))\right]\psi_1(t,\mathbf{R},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=$$
$$=\delta(\boldsymbol{\rho})\,\widetilde{T}(1,2)\,[\varphi_1(t,\mathbf{R},\mathbf{v}_1)+\varphi_2(t,\mathbf{R},\mathbf{v}_2)]. \tag{24б}$$

Здесь мы ввели обозначения:

$$\mathscr{L}(t,\mathbf{R},\boldsymbol{\rho};\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}+\frac{1}{\mu}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right]\times$$
$$\times\ln f_M(\xi_1,\mathbf{v}_1)\,f_M(\xi_2,\mathbf{v}_2).$$

Выделяя в (24б) члены нулевого и первого порядков по μ, найдем

$$\left\{(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}}-n(\hat{\Lambda}_0(1,\mathbf{R})+\hat{\Lambda}_0(2,\mathbf{R}))+\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{3}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{n\boldsymbol{\rho}}{2}\left(\frac{\partial\hat{\Lambda}_0(1,\mathbf{R})}{\partial\mathbf{R}}-\frac{\partial\hat{\Lambda}_0(2,\mathbf{R})}{\partial\mathbf{R}}\right)+\widetilde{\mathscr{L}}_0\right]\right\}\psi_1(t,\mathbf{R},\boldsymbol{\rho};\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=$$
$$=\delta(\boldsymbol{\rho})\,\widetilde{T}(1,2)\,[\varphi_1(t,\mathbf{R},\mathbf{v}_1)+\varphi_2(t,\mathbf{R},\mathbf{v}_2)]; \tag{24в}$$
$$\widetilde{\mathscr{L}}_0=\sum_{\alpha=1}^{2}\{f_M(\mathbf{R},\mathbf{v}_\alpha)\}^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_\alpha\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\right]f_M(\mathbf{R},\mathbf{v}_\alpha),$$
$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_0(1,\mathbf{R})}{\partial\mathbf{R}}\chi(\mathbf{v}_1)=\int d\mathbf{v}_3\frac{\partial f_M(\mathbf{R},\mathbf{v}_3)}{\partial\mathbf{R}}\widetilde{T}(1,3)\,[\chi(\mathbf{v}_1)+\chi(\mathbf{v}_3)],$$

$\hat{\Lambda}_0(i,\ \mathbf{R})$ — линеаризованные операторы типа (20) с заменой $f_{eq}(x)$ квазиравновесной максвелловской функцией $f_M(\mathbf{R},\ \mathbf{v}_3)$. Выразив в (24б) временные производные $\partial f_M/\partial t$ через гидродинамические уравнения нулевого приближения (15) при $P_{ik} = \frac{\theta}{m}\delta_{ik}$, $\mathbf{q} = 0$, получим

$$n\hat{\Lambda}_0(1,\ 2)\,\varphi_1(t,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1) + n\int d\mathbf{v}_2 f_M(\mathbf{r},\ \mathbf{v}_2)\,\tilde{T}(1,\ 2)\,\psi_1(t,\ \mathbf{r},\ 0;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2) = -\frac{1}{2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{V}_1) + \frac{m}{\theta}S_{ik}B_{ik}(\mathbf{V}_1); \qquad (25а)$$

$$\left[\mu\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}} - \frac{n\rho}{2}\left(\frac{\partial\hat{\Lambda}_0(1)}{\partial\mathbf{R}} - \frac{\partial\hat{\Lambda}_0(2)}{\partial\mathbf{R}}\right) + \mathscr{L}_0\right) + (\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\rho} - n\left(\hat{\Lambda}_0(1,\ \mathbf{R}) + \hat{\Lambda}_0(2,\ \mathbf{R})\right)\right]\psi_1(t,\ \mathbf{R},\ \mathbf{r};\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2) = \delta(\rho)\,\hat{T}(1,\ 2)\left[\varphi_1(t,\ \mathbf{R},\ \mathbf{v}_1) + \varphi_2(t,\ \mathbf{R},\ \mathbf{v}_2)\right], \qquad (25б)$$

где

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}\sum_{\alpha=1}^{2}\mathbf{A}(\mathbf{V}_\alpha) + \frac{m}{\theta}S_{ik}\sum_{\alpha=1}^{2}B_{ik}(\mathbf{V}_\alpha);$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha\left(\frac{m\mathbf{V}_\alpha}{\theta} - 5\right);\quad B_{ik}(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_{i\alpha}\mathbf{V}_{k\alpha} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\mathbf{V}_\alpha^2;$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r},\ t).$$

Отметим, что система (25а), (25б) линейна. При отбрасывании в (25б) линейного по μ члена ее решения содержат расходимости. Удерживая этот член, можно представить решение (25б) в формальном виде

$$\psi_1(t,\ \mathbf{R},\ \mathbf{r};\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\mu}\int_0^t \hat{Q}(t,\ \mu)\,\hat{Q}^{-1}(\tau,\ \mu)\,\delta(\rho)\,\tilde{T}(1,\ 2)\times(\varphi_1(t,\ \mathbf{R},\ \mathbf{v}_1) + \varphi_1(t,\ \mathbf{R},\ \mathbf{v}_2))\,d\tau,$$

где

$$\hat{Q}(t,\ \mu) = T\exp\int_0^t\left\{-\frac{(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}} - \mathscr{L}_0 - \frac{n\rho}{2}\left(\frac{\partial\hat{\Lambda}_0(1)}{\partial\mathbf{R}} - \frac{\partial\hat{\Lambda}_0(2)}{\partial\mathbf{R}}\right) + \frac{1}{\mu}\left((\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\frac{\partial}{\partial\rho} - n\left(\hat{\Lambda}_0(1,\ \mathbf{R}) + \hat{\Lambda}_0(2,\ \mathbf{R})\right)\right)\right\}d\tau, \qquad (26)$$

причем в подынтегральном выражении (26) все операторы $\hat{\Lambda}_0$, а также слагаемое $\mathscr{L}_0$ должны быть взяты в момент времени $t = \tau$. С учетом (26) не составляет труда найти решение (25а), определяющее согласно формулам (16), (23) искомые уравнения гидродинамики:

$$\varphi_1(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}_1)=\frac{1}{n(\Lambda_0(1)+\hat{z})}\left\{\frac{1}{2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{v}_1)+\frac{m}{\theta}S_{ik}B_{ik}(\mathbf{v}_1)\right\},$$

где

$$\hat{z}\chi(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}_1)=\frac{1}{\mu}\int d\mathbf{v}_2 f_M(\mathbf{r},\ \mathbf{v}_2)\,\widetilde{T}(1,\ 2)\times$$

$$\times\int_0^t\hat{Q}(t,\ \mu)\,\hat{Q}^{-1}(\tau,\ \mu)\,\delta(\rho)\,\widetilde{T}(1,\ 2)\,(\chi(\tau,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}_1)+$$

$$+\chi(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}_2))\,d\tau|_{\rho=0}. \tag{27}$$

При этом на заключительном этапе, выделив ведущую сингулярность по μ при $\mu\to 0$, следует положить в конечных формулах $\mu=1$. Естественно, эта программа требует явного вычисления всех входящих в (23), (26), (27) интегралов и в общем случае практически не может быть реализована. В следующих разделах мы рассмотрим, каким образом удается построить решения подобных гидродинамических уравнений в простых случаях.

2. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОД ОТ ВОЛНОВОГО ВЕКТОРА

Изложенный в разд. 1 способ построения уравнений гидродинамики на основе кинетических уравнений (8а), (8б) существенно упрощается, если система находится в состоянии, настолько близком к равновесному, что можно пренебречь в (23)—(27) всеми степенями $|n-\rho(\mathbf{r},\ t)|$, $|\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)|$, $|\theta_0-\theta(\mathbf{r},\ t)|$ выше первой. В этом случае оказывается значительно более удобным исходить непосредственно из кинетических уравнений (8а), (8б) [12], считая, что

$$f(t,\ 1)=f_{eq}(1)\,(1+\delta f(t,\ 1));$$

$$g(t,\ 1,\ 2)=f_{eq}(1)\,f_{eq}(2)\,(g_{eq}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+\delta g(t,\ 1,\ 2)),$$

и пренебрегая всеми степенями $\delta f(t,\ 1)$, $\delta g(t,\ 1,\ 2)$ выше первой. Полученная таким образом система линейных кинетических уравнений значительно проще исходной; в частности, операторы $\mathcal{L}(t,\ i)$ (9) становятся обычными линейными операторами, коммутирующими в различные моменты времени: связь между $\delta g(t,\ 1,\ 2)$ и $\delta f(t,\ 1)$ вида (10) не содержит операции T-упорядочения. Исследование этой системы, проведенное Эрнстом и Дорфманом, привело к открытию нового эффекта, обусловленного нелокальностью кинетических уравнений,— неаналитической зависимости частот гидродинамических возбуждений от волнового вектора. Так, для акустических мод было найдено, что

$$\omega(k)=ck+\frac{i}{2}\left(\Gamma k^2+\sum_{n=1}^{\infty}k^{3-2^{-n}}C_n+d_1k^2\ln k+\ldots\right),$$

где c и Γ — скорость звука и коэффициент затухания, которые получаются из линеаризованного уравнения Больцмана. Для мод сдвиговой вязкости и теплопроводности найдены аналитические разложения, содержащие как бесконечный степенной ряд по k с показателями степеней между $^5/_2$ и 3, так и логарифмические слагаемые. Коэффициенты являются функциями плотности и температуры.

В дальнейшем было показано, что разложения, подобные приведенному выше, имеют место и в феноменологической теории взаимодействующих гидродинамических мод [13]. Таким образом, при $k = 0$ частоты как функции k обладают точкой ветвления, причем риманова поверхность функции $\omega(k)$ содержит бесконечное число листов.

При использовании преобразований Лапласа и Фурье

$$\left.\begin{aligned} \delta\tilde{f}(z,\ 1) &= \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\delta f(t,\ 1); \\ \delta\tilde{\tilde{f}}(z,\ \mathbf{k},\ \mathbf{v}) &= \int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\delta\tilde{f}(z,\ 1) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

можно получить из (8а), (8б) линейное интегральное уравнение для $\delta\tilde{\tilde{f}}$ [10]:

$$[z + i\mathbf{k}\mathbf{v} - n\hat{\Lambda}_0(\mathbf{v}) - n\hat{R}(\mathbf{k},\ \mathbf{v},\ z)]\,\delta\tilde{\tilde{f}}(z,\ \mathbf{k},\ \mathbf{v}) = \delta\tilde{f}(0,\ \mathbf{k},\ \mathbf{v}), \tag{29}$$

где $\delta\tilde{f}(0,\ \mathbf{k},\ \mathbf{v})$ — значение фурье-образа $\delta f(t,\ 1)$ в момент времени $t = 0$; $\hat{R}(\mathbf{k},\ z,\ \mathbf{v})$ — кольцевой оператор:

$$\begin{aligned} \hat{R}(\mathbf{k},\ z,\ \mathbf{v}_1)\chi(\mathbf{v}_1) &= \int d\mathbf{v}_2 f_{\text{eq}}(\mathbf{v}_2) \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\tilde{T}(1,\ 2)\,(z + i\mathbf{q}\mathbf{v}_1 + i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{v}_2 - \\ &- n\hat{\Lambda}_0(\mathbf{v}_1) - n\hat{\Lambda}_0(\mathbf{v}_2))^{-1}\tilde{T}(1,\ 2)\,(1 + P_{1,2})\,\chi(\mathbf{v}_1). \end{aligned} \tag{30}$$

Гидродинамические уравнения могут быть построены по решениям (29) следующим образом. Макроскопические переменные вводятся как средние по скоростям от функций, соответствующих гидродинамическим модам (22б), (22в):

$$a_k^{(i)}(\mathbf{r},\ t) = \int f_{eq}(\mathbf{v})\,\psi_i^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v})\,\delta f(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v})\,d\mathbf{v} = \langle\psi_i^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}),\ \delta f(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v})\rangle, \tag{31}$$

где $\langle\ldots\rangle$ означает скалярное произведение с весом $f_{eq}(\mathbf{v})$. В гильбертовом пространстве функций $\{f\}$, определяемой таким скалярным произведением, можно ввести операторы проектирования на гидродинамическое пространство и его ортогональное дополнение по формулам [18]:

$$\left.\begin{aligned} Pf(\mathbf{v}) &= \sum_i \psi_i^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}) \langle \psi_i^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}),\ f(\mathbf{v})\rangle, \\ P_\perp f(\mathbf{v}) &= (1-P) f(\mathbf{v}). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Отметим, что эти операторы являются эрмитовыми. Проектируя (29) на оба эти пространства, можно найти искомые линеаризованные уравнения гидродинамики для величин $\tilde{\tilde{a}}^{(i)}(k,\ z)$:

$$\sum_{j=1}^{5} \hat{G}_{ij} \tilde{\tilde{a}}^{(j)}(\mathbf{k},\ z) = \tilde{\tilde{a}}^{(i)}(k,\ 0) + \\ + \langle \psi_i^{(\mathbf{k})},\ \mathscr{L} P_\perp (z - P_\perp \mathscr{L} P_\perp)^{-1} P_\perp \delta\tilde{f}(0,\ \mathbf{k},\ \mathbf{v})\rangle, \tag{33}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \hat{G}_{ij} &= z\delta_{ij} - \langle \psi_i^{(\mathbf{k})},\ \mathscr{L}\psi_i^{(\mathbf{k})}\rangle - \\ &- \langle \psi_i^{(\mathbf{k})},\ \mathscr{L} P_\perp (z - P_\perp \mathscr{L} P_\perp)^{-1} P_\perp \mathscr{L}\psi_j^{(k)}\rangle; \\ \mathscr{L} &= -\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{v} + n\hat{\Lambda}_0(\mathbf{v}) + n\hat{R}(\mathbf{k},\ z,\ \mathbf{v}). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Обсудим роль различных слагаемых в правой части (33). Первое из них представляет собой значение фурье-образа одной из макроскопических переменных в момент времени $t = 0$ и имеет нулевой порядок по $|\ \mathbf{k}\ |$ и z. Второе слагаемое можно переписать в виде

$$\langle \mathscr{L}^+ \psi_i^{(\mathbf{k})},\ P_\perp (z - P_\perp \mathscr{L} P_\perp)^{-1} P_\perp \delta\tilde{f}(0,\ \mathbf{k},\ \mathbf{v})\rangle.$$

Пользуясь соотношениями

$$\hat{\Lambda}_0 \psi_i^{(\mathbf{k})} = 0,\quad \hat{R}(\mathbf{k},\ z,\ \mathbf{v})\, \psi_i^{(\mathbf{k})} = 0, \tag{35}$$

можно показать, что это слагаемое имеет порядок $|\ \mathbf{k}\ |$ и в гидродинамическом пределе может быть опущено. Физическая причина этого очевидна: начальные значения проекции функции распределения на пространство, ортогональное гидродинамическому, не должны в соответствии с принципом сокращения описания влиять на эволюцию макроскопических переменных. Таким образом, проблема состоит в вычислении элементов матрицы $\hat{G}_{ij} = z\delta_{ij} + \mathrm{i}\mathbf{k}\Omega_{ij}(\mathbf{k}) + k^2 u_{ij}(\mathbf{k},\ z)$, т. е. скалярных произведений вида

$$\mathrm{i}k\Omega_{ij}(k) = \mathrm{i}\ \langle \varphi_i^{(\mathbf{k})},\ \mathbf{k}\mathbf{v}\psi_j^{(\mathbf{k})}\ \rangle; \tag{36}$$

$$k^2 u_{ij}(k,\ z) = \langle \psi_i^{(\mathbf{k})},\ \mathbf{k}\mathbf{v} P_\perp (z - P_\perp \mathscr{L} P_\perp)^{-1} P_\perp\, \mathbf{k}\ \mathbf{v}\psi_j^{(\mathbf{k})}\ \rangle. \tag{37}$$

Отметим, что при записи элементов матрицы (34) в виде (36), (37) мы использовали соотношения (35). Интегралы (36) легко вычисляются с учетом явного вида функций $\{\psi_i^{(\mathbf{k})}\}$. В результате находим

$$\Omega_{11} = -\Omega_{22} = (5m/3\theta)^{1/2}. \tag{38}$$

Все остальные элементы матрицы Ω равны нулю. Не составляет труда и нахождение функций вида $P_\perp(\mathbf{k}, \mathbf{v})\,\psi_j^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v})$. Применение формулы (32) для проекционного оператора $P_\perp$ дает

$$u_{ij}(k, z) = \langle \hat{j}_i^{(\mathbf{k})}, (z - P_\perp \mathscr{L} P_\perp)^{-1} \hat{j}_j^{(\mathbf{k})} \rangle, \tag{39}$$

где

$$\hat{j}_{1,2}^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}) = \left(\frac{mv^2}{\theta} - 5\right)\frac{\mathbf{ev}}{\sqrt{30}} \pm \left(\frac{m}{2\theta}\right)^{1/2}\left((\mathbf{ev})^2 - \frac{1}{3}\mathbf{v}^2\right);$$

$$\hat{j}_3(\mathbf{v}) = \left(\frac{mv^2}{\theta} - 5\right)\frac{\mathbf{ev}}{\sqrt{10}}; \quad \hat{j}_{4,5}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{\theta}\right)^{1/2}(\mathbf{ev})(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{v});$$

$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют с $\mathbf{e}$ ортонормированный базис. Мы можем сразу заключить, что $u_{4j} = u_{j4} = \delta_{j4}u_{44}$, $u_{5j} = u_{j5} = \delta_{j5}u_{55}$ — матрица u_{ij} (39) разделяется на верхний блок (3×3) и нижний диагональный блок (2×2). Дальнейшие упрощения в (39) можно произвести, замечая, что в гидродинамической области, где z и $|\mathbf{k}|$ малы, можно пренебречь величинами z и $P_\perp(\mathbf{kv})\,P_\perp$ в выражении $(z - P_\perp \mathscr{L} P_\perp)^{-1}$, входящем в (39). Используя соотношения $P_\perp \hat{j}_i^{(\mathbf{k})} = \hat{j}_i^{(\mathbf{k})}$, $P_\perp \Lambda_0 = \Lambda_0$, можно переписать (39) в виде

$$u_{ij}(\mathbf{k}, z) = -\frac{1}{n}\langle \hat{j}_i^{(\mathbf{k})}, (\Lambda_0 + \hat{R}(\mathbf{k}, z, \mathbf{v}))^{-1} \hat{j}_j^{(\mathbf{k})} \rangle. \tag{40}$$

Действие оператора $\hat{R}(\mathbf{k}, z, \mathbf{v})$ (30) на функции аргумента $\mathbf{v}_1$ можно переписать в виде

$$\hat{R}(\mathbf{k}, z, \mathbf{v}_1)\chi(\mathbf{v}_1) = \int d\mathbf{v}_2 f_{\text{eq}}(2) \int' \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \widetilde{T}(1, 2) \sum_{i,j}{}' \frac{1}{z - z_i(\mathbf{q}) - z_j(\mathbf{k}-\mathbf{q})} \times$$

$$\times \| \psi_i^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}_1)\psi_j^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}(\mathbf{v}_2)\rangle\rangle \langle\langle \psi_j^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}(\mathbf{v}_2)\psi_i^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}_1) \| \widetilde{T}(1, 2)(1 + P_{1,2})\chi(\mathbf{v}_1) +$$

$$+ \widetilde{R}_{\text{reg}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, z)\chi(\mathbf{v}_1) = \hat{R}_s(\mathbf{k}, z, \mathbf{v}_1)\chi(\mathbf{v}_1) + \hat{R}_{\text{reg}}(\mathbf{k}, z, \mathbf{v}_1)\chi(\mathbf{v}_1). \tag{41}$$

Область интегрирования по $\mathbf{q}$ в первом слагаемом в (41) ограничена сферой радиуса q_0, где q_0^{-1} имеет порядок средней длины свободного пробега; суммирование производится по тем значениям индексов (i, j), для которых сумма собственных значений, соответствующих функциям $\psi_i^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}_1)$, $\psi_j^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}(\mathbf{v}_2)$, $z_i(\mathbf{q}) + z_j(\mathbf{k}-\mathbf{q})$, имеет порядок $\mathbf{q}^2$, $\mathbf{k}^2$, $\mathbf{kq}$ при $|\mathbf{k}|$, $|\mathbf{q}| \to 0$. Именно это слагаемое (второе определяется соотношением $\hat{R}_{\text{reg}} = \hat{R} - \hat{R}_s$) обладает интересующими нас особенностями в области малых $\mathbf{k}$, z, в то время как $\hat{R}_{\text{reg}}$ приводит лишь к поправкам высших порядков по плотности.

Преобразования (41), заключающиеся в вычислении действия оператора $\widetilde{T}$ на функции $\psi_i^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}_1)\,\psi_j^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}(\mathbf{v}_2)$, приводят к следующему результату:

$$\hat{R}_s = \Lambda_0(\mathbf{v})\, S_{\mathbf{k}, z}\Lambda_0(\mathbf{v}),$$

где

$$S_{\mathbf{k},z}(\mathbf{v})\chi(\mathbf{v})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}{}' \int{}' \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\frac{\psi_i^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v})\,\psi_j^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}(\mathbf{v})}{z-z_i(\mathbf{q})-z_j(\mathbf{k}-\mathbf{q})}\langle\psi_j^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}(\mathbf{v})\,\psi_i^{(\mathbf{q})}(\mathbf{v}),\ \chi(\mathbf{v})\rangle. \tag{42}$$

Производя в (40) замену $\hat{R}\to\hat{R}_s$ и используя соотношение

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}BA^{-1}+\ldots,$$

найдем интересующую нас особенность в гидродинамической матрице $u_{ij}(\mathbf{k},\ z)$:

$$u_{ij}(\mathbf{k},\ z)\approx u_{ij}^{(0)}+\frac{1}{n}\langle\hat{j}_i^{(\mathbf{k})},\ \hat{S}_{\mathbf{k},z}\hat{j}_j^{(k)}\rangle, \tag{43}$$

где

$$u_{ij}^{(0)}=-\frac{1}{n}\langle\hat{j}_i^{(\mathbf{k})},\ \Lambda_0^{-1}\hat{j}_j^{(\mathbf{k})}\rangle.$$

Первое слагаемое в (43) соответствует преобразованию Лапласа и Фурье линеаризованных уравнений Навье — Стокса. Второе слагаемое можно представить в форме

$$\tilde{u}_{ij}(\mathbf{k},\ z)=\frac{1}{(2\pi)}\int{}'\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\sum_{\alpha,\beta}{}'\frac{w^i_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\ \mathbf{q})\,w^j_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\ \mathbf{q})}{z-z_\alpha(\mathbf{q})-z_\beta(\mathbf{k}-\mathbf{q})}, \tag{44}$$

где

$$w^i_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\ \mathbf{q})=\langle\hat{j}_i^{(\mathbf{k})},\ \psi_\alpha^{(\mathbf{q})}\psi_\beta^{(\mathbf{k}-\mathbf{q})}\rangle.$$

Функция $\tilde{u}_{ij}(\mathbf{k},\ z)$ в области малых $|\mathbf{k}|$, z имеет особенности, связанные с сингулярностью подынтегрального выражения в (44). В частности, при $\mathbf{k}=0$, $\tilde{u}_{ij}\sim\mathrm{const}\sqrt{z}$; при $z\sim k,\ k^2$, $\tilde{u}_{ij}\sim\mathrm{const}\sqrt{k}+O(k\ln k,\ k^2,\ \ln k)$. Эти особенности проявляются в решениях обобщенных гидродинамических уравнений (33) двояким образом. Во-первых, частоты гидродинамических мод, определяемые условием

$$\det(z\delta_{ij}+\mathrm{i}k\Omega_{ij}+k^2u_{ij}(\mathbf{k},\ z))=0, \tag{45}$$

не являются аналитическими функциями волнового вектора $|\mathbf{k}|$. Так как при малых $|\mathbf{k}|$, $z\sim k,\ k^2$, $\tilde{u}_{ij}\sim\mathrm{const}\sqrt{k}$, ясно, что зависимость z от k, определяемая уравнением (45), в общем случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned}z_{1,2}&=\pm|\mathbf{k}|\,\mathrm{i}\left(\frac{5m}{3\theta}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\Gamma|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{k}|^{5/2}\Delta_{1/2};\\ z_3&=-D_Tk^2+\Delta_3|\mathbf{k}|^{5/2};\\ z_{4,5}&=-D_\eta k^2+\Delta_{4,5}|\mathbf{k}|^{5/2}.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Явные выражения для величин Δ_i могут быть получены непосредственным вычислением коэффициентов при ведущей особенности в интегралах (44) [16]:

$$\Delta_{1,2} = (1 \mp \mathrm{i})(4\pi)^{-1}\left(\frac{5\theta}{12m}\right)^{1/4}\frac{\theta}{mn}\left[\frac{14}{45(2D_\eta)^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{9(D_\eta + D_T)^{3/2}} + \frac{2^{19/2}}{(11)!!\,\Gamma^{3/2}}\right];$$
$$\Delta_3 = (21\pi)^{-1}\left(\frac{5\theta}{12m}\right)^{1/4}\frac{\theta}{mn}\Gamma^{-3/2};$$
$$\Delta_{4,5} = (77\pi)^{-1}\left(\frac{5\theta}{12m}\right)^{1/4}\frac{\theta}{mn}\Gamma^{-3/2},$$

где $\Gamma = \frac{2}{3}(D_T + 2D_\eta)$; D_T, D_η — коэффициенты кинематической вязкости и термодиффузии в модели твердых сфер, определяемые соотношениями

$$D_\eta = -\frac{m}{\theta n}\langle(\mathbf{e}_1\mathbf{v})(\mathbf{e}_2\mathbf{v}),\ \Lambda_0^{-1}(\mathbf{e}_1\mathbf{v})(\mathbf{e}_2\mathbf{v})\rangle;$$
$$D_T = -\frac{1}{10n}\left\langle\left(\frac{mv^2}{\theta} - 5\right)(\mathbf{c}\mathbf{v}),\ \Lambda_0^{-1}\left(\frac{mv^2}{\theta} - 5\right)(\mathbf{e}\mathbf{v})\right\rangle.$$

Детальное вычисление корней уравнения (45), основанное на методе последовательных приближений, показывает, что в разложении (46) имеются также члены вида $|\mathbf{k}|^{3-2^{-n}}$, $n = 2$ ... Этот факт, впервые обнаруженный в [13], указывает на возможность присутствия логарифмических точек ветвления функций $z_j(\mathbf{k})$. Относительная величина неаналитических по $|\mathbf{k}|$ членов в (46) в газах умеренной плотности оказывается весьма малой. Это обстоятельство крайне затрудняет обнаружение указанных членов при экспериментальном исследовании распространения гидродинамических возмущений в газах и жидкостях. В то же время сам факт наличия подобной неаналитичности противоречит описанию системы твердых сфер на основе линеаризованных уравнений Барнетта.

Существование точек ветвления $u_{ij}(\mathbf{k}, z)$ приводит также к новым особенностям решений гидродинамических уравнений (33). В частности, зависимость этих решений от времени определяется обратным преобразованием Лапласа:

$$\tilde{a}^{(i)}(\mathbf{k}, t) = \int\limits_{\Gamma}\frac{dz e^{zt}}{2\pi\mathrm{i}}(z + \mathrm{i}k\Omega(\mathbf{k}) + k^2 u(\mathbf{k}, t))_{ij}^{-1}\tilde{a}^{(i)}(\mathbf{k}, 0), \qquad (47)$$

где контур Γ проходит параллельно мнимой оси справа от всех особенностей подынтегрального выражения. Помимо полюсов, определяемых соотношением (45), в (47) могут давать вклад интегралы по разрезам

$$-\infty < z + \mathrm{i}\,|\mathbf{k}|\left(\frac{5\theta}{3m}\right)^{1/2} < 0, \quad -\infty < z \leqslant \frac{1}{2}D_{T,\eta}k^2,$$

которые соответствуют точкам ветвления $\tilde{u}_{ij}(\mathbf{k}, z)$ в комплексной плоскости [19, 20].

Асимптотика гидродинамических мод $\tilde{a}^{(i)}$ $(\mathbf{k}, t)$, при $t \to \infty$ определяемая полюсными вкладами, имеет стандартный вид:

$$\tilde{a}^{(1,2)}(\mathbf{k}, t) \sim \exp\left\{\pm ik\left(\frac{5\theta}{3m}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\Gamma k^2 t\right\}\{1+O(k)\},$$
$$\tilde{a}^{(3)}(\mathbf{k}, t) \sim \exp\{-k^2 D_T t\}\{1+O(\mathbf{k}^2)\},$$
$$\tilde{a}^{(4,5)}(\mathbf{k}, t) \sim \exp\{-k^2 D_\eta t\}\{1+O(k^2)\}.$$

При малых t/τ_i $\left(\tau_i = \left\{\frac{2}{\Gamma k^2}, \frac{1}{D_T k^2}, \frac{1}{D_\eta k^2}\right\}\right)$ вклад полюсов является преобладающим. Вклад разрезов становится существенным при $t/\tau_i \gg \gg 1$, так как точки ветвления $u_{ij}(\mathbf{k}, z)$ расположены справа от соответствующих полюсов. В частности, для гидродинамических мод вязкости и теплопроводности асимптотика при $t \to \infty$, обусловленная разрезами, имеет вид [20]:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}^{(3)}(\mathbf{k}, t) &\sim \exp\left\{-\frac{k^2}{2} D_T t\right\} f_T(t); \\ \tilde{a}^{(4,5)}(\mathbf{k}, t) &\sim \exp\left\{-\frac{k^2}{2} D_\eta t\right\} f_\eta(t), \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где $f_T(t)$, $f_\eta(t)$ убывают при $t \to \infty$ степенным образом. Отметим также, что z — зависимость гидродинамической матрицы (47) не позволяет записать гидродинамические уравнения для $\tilde{a}^{(i)}(\mathbf{k}, t)$ в локальной форме по переменной t.

3. ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ БЕЗ ТЕПЛООБМЕНА: НЕАНАЛИТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЯЗКОСТИ ОТ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ

Здесь мы рассмотрим наиболее простое нелинейное явление в обобщенной гидродинамической теории для системы твердых сфер, возникающее при изучении стационарного однородного потока с заданным простым распределением локальной макроскопической скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(u_0 + \mathbf{x}\mathbf{r}), \tag{49}$$

где векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$ перпендикулярны (для простоты в дальнейшем будем считать, что $\mathbf{u}$ направлен по оси y, а градиент скорости $\mathbf{x}$ — по оси x). Величина $\mathbf{x}$ предполагается настолько малой, что можно пренебречь эффектами $\sim |\mathbf{x}|^2$ (в частности, теплообменом). Таким образом, можно считать заданными значения всех макроскопических переменных ($\rho(\mathbf{r}, t) = \theta(\mathbf{r}, t) = \text{const}$), и проблема состоит в вычислении тензора напряжений (16) и, в частности, его недиагональной компоненты:

$$R_{xy} = \int f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}\,(v_x(v_y - u_0 - |\mathbf{x}|\, x)). \tag{50}$$

Стандартные вычисления на основе уравнения Больцмана в приближении Навье — Стокса показывают, что $\lim\limits_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{P_{xy}}{|\mathbf{x}|} = -\eta$, где η — постоянный коэффициент вязкости. Приближение Барнетта должно приводить к разложению для $P_{xy}/|\mathbf{x}|$ вида

$$\frac{P_{xy}}{|\mathbf{x}|} = -\eta + \eta_B |\mathbf{x}|, \tag{51}$$

т. е. к линейной зависимости от градиента скорости. Однако, как впервые было показано Кавасаки и Гантоном [21], при учете эффектов сингулярностей в кольцевом операторе зависимость (51) не имеет места, так как выражение для η_B содержит расходящиеся интегралы. В работах [21, 22] в рамках феноменологического подхода, учитывающего взаимодействие гидродинамических мод, было показано, что зависимость P_{xy} от $|\mathbf{x}|$ не является аналитической. Мы покажем, как этот результат возникает в гидродинамической теории, основанной на кинетических уравнениях (8а), (8б) [23].

Для нахождения функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, определяющей тензор напряжений, можно, как и в разд. 1, использовать обобщенный метод Чемпена — Энскога, вводя разложения, подобные (23):

$$\left.\begin{aligned} &f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_M(1)(1 + |\mathbf{x}|\, h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \delta h(\mathbf{r}, \mathbf{v}; |\mathbf{x}|));\\ &g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) =\\ &= f_M(1) f_M(2)\, \delta g\left(\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где функция распределения $f_M(1)$ фиксирована;

$$f_M(1) = n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}(\mathbf{r}_1))}{2\theta}\right], \tag{53}$$

причем зависимость макроскопической скорости $\mathbf{u}$ от координат определяется формулой (49). Подстановка функций (52) в уравнения (8а) и выделение членов различного порядка по $|\mathbf{x}|$ позволяют получить два уравнения, одно из которых определяет $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, а другое устанавливает связь между $\delta h(\mathbf{r}, \mathbf{v}; |\mathbf{x}|)$ и $\delta g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; |\mathbf{x}|)$:

$$\begin{aligned} &h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m}{\theta}\Lambda^{-1}(\mathbf{V})(\mathbf{V}_x\mathbf{V}_y),\\ &\delta h(\mathbf{r}, \mathbf{v}; |\mathbf{x}|) = -n\Lambda^{-1}(\mathbf{V})\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\times\\ &\times \int d\mathbf{V}_2 \Phi_M(\mathbf{V}_2) T_0(1, 2)\, \delta\tilde{g}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \end{aligned} \tag{54}$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi_M(\mathbf{V}_2) = n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m\mathbf{V}_2^2}{2\theta}\right\};$$

$$\delta\tilde{g}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \int d\boldsymbol{\xi}\, \delta g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2; |\mathbf{x}|),\ \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

Уравнение для $\delta\tilde{g}$, позволяющее вместе с (54) определить $\delta h(\mathbf{r}, \mathbf{v}; |\mathbf{x}|)$, должно быть получено из уравнения (8б) кинетической системы с учетом (52). Для записи этого уравнения в компактной форме чрезвычайно существенным является линейная зависимость макроскопической скорости от координат (49). Действительно, из (49) следует, что δg зависит лишь от x-компоненты вектора $\mathbf{r}$. Таким образом, в уравнении (8б) вместо x можно ввести новую переменную $u_y = u_0 + x|\mathbf{x}|$ и представить дифференциальный оператор

$$\hat{\Omega} = \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

в виде

$$\hat{\Omega} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{|\mathbf{x}|}{2} (v_{1x} + v_{2x}) \frac{\partial}{\partial u_y}. \tag{55}$$

Далее, в операторах $\mathcal{L}_i$ (9) можно произвести разложение по степеням $|\mathbf{x}|$, используя δ-функции в операторах $\overline{T}(1,2)$, $\overline{T}(2,3)$ и определение f_M:

$$\begin{gathered} \overline{T}(1,\ 3) f_1(3) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) T(1,\ 3) f_1(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_3) = \\ = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) T(1,\ 3) f_1(\mathbf{r} + \xi,\ \mathbf{v}_3) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) T(1,\ 3) = \\ = \Phi_M(\mathbf{V}_3) \left[1 + \frac{1}{2} \xi_y |\mathbf{x}| \frac{m}{\theta} \mathbf{V}_{3y} + |\mathbf{x}| h(\mathbf{r},\ \mathbf{v}_3)\right]. \end{gathered} \tag{56}$$

Вычисление фурье-образа обеих частей уравнения (8б) по переменной ξ с учетом (55) и (56) позволяет представить искомое уравнение для $\delta\tilde{g}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ в виде [23]:

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \Lambda(\mathbf{v}_1) - \Lambda(\mathbf{v}_2) + \\ & \qquad + |\mathbf{x}| \hat{R}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]\, \delta\tilde{g}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \\ & \qquad\qquad = |\mathbf{x}|\, T(1,2)(1 + P_{1,2})\, h(\mathbf{v}_1), \end{aligned} \tag{57}$$

где для упрощения записи введены обозначения $h(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = h(\mathbf{v}_1)$,

$$\begin{gathered} \tilde{R}(\mathbf{k},\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2)\, \chi(\mathbf{k},\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2) = \\ = \left[-\frac{1}{2}(v_{1x} + v_{2x}) \left(\frac{\partial}{\partial v_{1y}} + \frac{\partial}{\partial v_{2y}}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{d}{dk_x} (1 - P_{1,2})\, \hat{\Lambda}\left(\mathbf{v}_1 \middle| \frac{m\mathbf{v}_{1y}}{2\theta}\right) - \right. \\ \left. -(1 + P_{1,2})\, \hat{\Lambda}(\mathbf{v}_1 \mid h(\mathbf{v}_1))\right] \chi(\mathbf{k},\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2), \end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\Lambda}(\mathbf{v}_1 \mid \psi(\mathbf{v}_1))\, \chi(\mathbf{v}_1) = \\ & \qquad = n \int d\mathbf{v}_2 T(1,2)(1 + P_{12})\, \Phi_M(\mathbf{v}_2)\, \psi(\mathbf{v}_2)\, \chi(\mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Отметим, что из (57) и (58) следует, что $\delta\tilde{g}$ не зависит от первого из этих аргументов. Согласно (52), (54) компонента тензора напряжений P_{xy} (50) может быть представлена в виде суммы двух слагаемых, первое из которых линейно по $|\mathbf{x}|$ и определяется функцией

$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в приближении Навье — Стокса. Второе слагаемое определяется функцией $\delta\tilde{g}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$:

$$\delta P_{xy} = -mn^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_2\, \Phi_M(\mathbf{v}_1) \times$$
$$\times \Phi_M(\mathbf{v}_2)\, v_{1x} v_{1y} \Lambda^{-1}(\mathbf{v}_1)\, T(1, 2)\, \delta\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \qquad (59)$$

Из (57) сразу следует, что δP_{xy} содержит регулярную часть, пропорциональную $|\mathbf{x}|$ и являющуюся поправкой высшего порядка по плотности к $(-\eta\,|\mathbf{x}|)$ — приближению Навье — Стокса. Разложение решения (57) в ряд по степеням $|\mathbf{x}|$ приводит к расходимостям, обусловленным механизмом, обсуждавшимся в предыдущих разделах.

Действительно, представляя $\delta\tilde{g}$ в виде

$$\delta\tilde{g} = |\mathbf{x}|\, \delta\tilde{g}^{(1)} + |\mathbf{x}|^2 \delta\tilde{g}^{(2)} + \ldots,$$

видим, что из (57) следует

$$\left.\begin{aligned} \delta\tilde{g}^{(1)} &= \hat{Q}T(1, 2)(1 + P_{1,2})\, h(\mathbf{v}_1), \\ \delta\tilde{g}^{(2)} &= -\hat{Q}\hat{R}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\, \hat{Q}T(1, 2)(1 + P_{1,2})\, h(\mathbf{v}_1), \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

где $\hat{Q} = [i\mathbf{k}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \hat{\Lambda}(\mathbf{v}_1) - \hat{\Lambda}(\mathbf{v}_2)]^{-1}$.

Из (60) следует, что при малых $|\mathbf{k}|$ $\delta\tilde{g}^{(2)}$ содержит члены $\sim \frac{\text{const}}{|\mathbf{k}|^4}$, для которых интеграл (59) расходится. Следовательно, решение (57) не является в окрестности точки $|\mathbf{x}| = 0$ аналитической функцией $|\mathbf{x}|$. Качественное исследование его ведущей сингулярности несложно: представим $\delta\tilde{g}$ в виде двойного ряда по собственным функциям линеаризованного оператора Больцмана $\psi_\lambda^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}_1)$, $\psi_\mu^{(-\mathbf{k})}(\mathbf{v}_2)$:

$$\delta\tilde{g} \sim x \sum_{\lambda, \mu}{}' \psi_\lambda^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}_1)\, \psi_\mu^{(-\mathbf{k})}(\mathbf{v}_2)\, B^{\lambda\mu}(\mathbf{k}) + \delta\tilde{g}_{\text{reg}}. \qquad (61)$$

Знак Σ' в (61) означает суммирование по тем собственным значениям $\hat{\Lambda}_0$, для которых собственные функции (22а)—(22в) являются также собственными функциями нулевого приближения для операторов $-i\mathbf{k}\mathbf{v}_1 + \Lambda(\mathbf{v}_1)$, $i\mathbf{k}\mathbf{v}_2 + \Lambda(\mathbf{v}_2)$, причем $\hat{Q}\psi_\lambda^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}_1)\, \psi^{(-\mathbf{k})}(\mathbf{v}_2) \sim$ $\sim (k^2)^{-1} \psi_\lambda^{(\mathbf{k})}(\mathbf{v}_1)\, \psi^{(-\mathbf{k})}(\mathbf{v}_2)$ при малых $|k|$. Из (57) следует, что величины $B^{\lambda\mu}(\mathbf{k})$ в области малых $|\mathbf{k}|$ имеют порядок $(k^2 + \text{const}\, x)^{-1}$. Подстановка (61) в выражение (59) позволяет найти порядок вклада этих величин в $\delta P_{xy}(\mathbf{x})$:

$$\delta P_{xy} \sim |\mathbf{x}| \int_0^{k_0} \frac{d\mathbf{k}\, k^2}{k^2 + \text{const}\,|\mathbf{x}|} \sim |\mathbf{x}|^{3/2}. \qquad (62)$$

Результат (62) находится в качественном согласии с предсказаниями феноменологического подхода [21, 22]. Таким образом, приближение Барнетта, приводящее к разложению (51) для P_{xy}, в рассматриваемой теории не имеет места: зависимость P_{xy} от градиента скорости не является аналитической, и выход за рамки приближения Навье — Стокса должен осуществляться построением обобщенных гидродинамических уравнений. Точное вычисление коэффициента при $|\mathbf{x}|^{3/2}$ в (62) проводится следующим образом: уравнение [57] нужно спроектировать на подпространство произведений функций (22б)—(22г), соответствующих гидродинамическим модам, и использовать разложение (61), пренебрегая в нем слагаемым $\delta\widetilde{g}_{\mathrm{reg}}$. В результате получается замкнутая система уравнений для функций $B^{\lambda\mu}(\mathbf{k})$ [23]:

$$\sum_{\{\nu,\rho\}} [\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\rho}(D_\lambda + D_\mu)k^2 + xR^{\lambda\mu}_{\nu\rho}(\mathbf{k})]\,B^{\nu\rho}(\mathbf{k}) =$$

$$= -\frac{nm}{\theta}\langle\psi^{(\mathbf{k})}_\lambda(\mathbf{v}_1)\,\psi^{(-\mathbf{k})}_\mu(\mathbf{v}_1)\,v_{1x}v_{1y}\rangle. \qquad (63)$$

Суммирование в (63) проводится только по тем значениям индексов ν, ρ, для которых собственные значения оператора $i\mathbf{k}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \Lambda(\mathbf{v}_1) - \Lambda(\mathbf{v}_2)$, соответствующие функциям $\psi^{(\mathbf{k})}_\nu(\mathbf{v}_1)\,\psi^{(-\mathbf{k})}_\rho(\mathbf{v}_2)$, имеют порядок k^2 при $\lambda = 1,2$:

$$D_\lambda = \begin{cases} \dfrac{\Gamma}{2}, & \lambda = 1,2, \\ D_T, & \lambda = 3, \\ D_\eta, & \lambda = 4,5, \end{cases}$$

где Γ, D_T, D_η — коэффициенты затухания звуковых мод, теплопроводности и кинематической вязкости в приближении Навье—Стокса. Величины $R^{\lambda\mu}_{\nu\rho}(\mathbf{k})$ — матричные элементы оператора $R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$:

$$R^{\lambda\mu}_{\nu\rho}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{v}_1\,d\mathbf{v}_2\,\Phi_M(\mathbf{v}_1)\,\Phi_M(\mathbf{v}_2)\,\psi^{(\mathbf{k})}_\lambda(\mathbf{v}_1)\,\psi^{(-\mathbf{k})}_\mu(\mathbf{v}_2)\,\psi^{(\mathbf{k})}_\nu(\mathbf{v}_1)\,\psi^{(-\mathbf{k})}_\rho(\mathbf{v}_2).$$

Поскольку $R(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ содержит оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dx_k}$, (63) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Ее решения можно найти в виде разложения по степеням $|\mathbf{x}|$, которое, однако, непригодно для вычисления δP_{xy} — каждый член этого разложения будет давать в подынтегральное выражение (59) расходящийся при малых $|\mathbf{k}|$ вклад. В области $|\mathbf{k}| \sim k_0 \sim nr_0^{-2}$ естественно ожидать, что точное решение (63) при $|\mathbf{x}| \ll k_0^2 D_\lambda$ будет соответствовать первому члену этого разложения. Это позволяет записать граничные условия для $|B^{\lambda\mu}(\mathbf{k}, |\mathbf{x}|)$, определяющие вместе с (63) эти функции, в виде

$$B^{\lambda\mu}(\mathbf{k}_0,\ 0) = -\frac{nm}{\theta}(D_\lambda + D_\mu)^{-1} k_0^{-2} \langle \psi_\lambda^{(\mathbf{k}_0)}(\mathbf{v}_1)\, \psi_\mu^{(-\mathbf{k})}(\mathbf{v}_1)\, v_{1x} v_{1y} \rangle.$$

Вычисление интеграла (59) с полученными таким способом функциями $B^{\lambda\mu}(\mathbf{k}, |\mathbf{x}|)$ приводит к следующему выражению [23] для коэффициента при $|\mathbf{x}|^{3/2}$ в асимптотическом разложении δP_{xy} при малых $|\mathbf{x}|$:

$$\delta P_{xy} = -\eta\,|\mathbf{x}| + |\mathbf{x}|^{3/2}\,\theta\left[\frac{M_{\eta\eta}}{(2D_\eta)^{3/2}} + \frac{M_{+-}}{\Gamma^{3/2}}\right], \tag{64}$$

где $M = -0{,}00259$, $M_{+-} = -0{,}00406$.

В экспериментах по моделированию многочастичных динамических событий на ЭВМ [24, 25] были предприняты попытки установить зависимость δP_{xy} от градиента скорости вида (64). Оказалось, что подобная зависимость δP_{xy} действительно имеет место, но коэффициент при $|\mathbf{x}|^{3/2}$ примерно на два порядка превышает теоретическсе значение. Одно из объяснений этого факта [26] состоит в том, что экспериментально исследовались очень плотные системы, для которых могут оказаться существенными более сложные механизмы возникновения неаналитических по $|\mathbf{x}|$ вкладов в P_{xy}; кроме того, в экспериментах были использованы сравнительно большие значения $|\mathbf{x}|$.

Для двумерных систем расходимости в P_{xy} при применении стандартного метода Чепмена — Энскога возникают уже на стадии построения приближения Навье — Стокса [22—28]: модификация метода, подобная рассмотренной выше, приводит к логарифмической зависимости обобщенного коэффициента вязкости от $|\mathbf{x}|$:

$$P_{xy}(\mathbf{x}) \sim \mathrm{const} - \left(\frac{\theta}{32\pi}\right)(D_\eta^{-1} + \Gamma^{-1}) \ln \frac{D_\eta k_0^2}{|\mathbf{x}|}. \tag{65}$$

Появление логарифма в (65) легко понять, оценивая интеграл, аналогичный (62) для двумерного случая:

$$\delta P_{xy} \sim |\mathbf{x}| \int_0^{k_0} \frac{k\,d\,k}{k^2 + \mathrm{const}\,|\mathbf{x}|} \sim |\mathbf{x}| \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

Отметим, что формулы (64) и (65) были получены в простейшем случае линейной зависимости макроскопической скорости от одной из координат. До настоящего времени не найдено ни одной более сложной нелинейной проблемы, для которой удалось бы получить компактное выражение для тензора напряжений и вектора теплового потока, исходя из кинетических уравнений (8а), (8б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время проблема построения гидродинамических уравнений на основе кинетической теории, обобщающих уравнения Навье — Стокса, далека от окончательного разрешения. Такие уравнения должны, как показывают эксперименты по моделированию молекулярной динамики, иметь нелокальный характер и содержать неаналитические зависимости характеристик процессов переноса от градиентов макроскопических переменных. Эти эффекты имеют более высокий порядок по плотности частиц системы по сравнению с динамикой бинарных соударений, приводящей к обычным диссипативным процессам в приближении Навье — Стокса, и обусловлены медленно затухающими дальнодействующими корреляциями, крайне малыми для газов умеренной плотности, которые имеются даже для систем твердых сфер. Однако существование таких эффектов указывает на отсутствие резкой границы между кинетической и гидродинамической стадиями приближения системы к состоянию равновесия. Это проявляется в расходимости формальных разложений по имеющемуся в теории малому параметру. Расходимости характерны также и для кинетической стадии, где они обусловлены коррелированными последовательностями соударений с длительностью, существенно превышающей t_{mfp}.

Таким образом, изучение особенностей функциональной гипотезы Н. Н. Боголюбова применительно к проблеме построения уравнений гидродинамики оказалось чрезвычайно плодотворным и привело к пониманию важной роли кинетических явлений в макроскопических интервалах времени для систем твердых сфер. Дальнейший анализ этого круга проблем, поставленных Н. Н. Боголюбовым несколько десятилетий назад, вероятно, позволит в ближайшие годы дать ответ на вопросы о наиболее адекватном способе описания многочастичных динамических процессов установления равновесия в макросистемах. По-видимому, это потребует значительных изменений в существующем математическом аппарате, использующем разложения по малым параметрам теории. Несомненно одно: последовательное динамическое исследование проблемы будет связано с развитием и обоснованием функциональной гипотезы относительно свойств решений уравнений цепочки Н. Н. Боголюбова.

Авторы выражают глубокую благодарность академику Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе и ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. М.— Л.: Гостехиздат, 1946.
2. **Cohen E. G. D.** Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Amsterdam, 1966.
3. **Heines L. K., Dorfman J. R., Ernst M. H.**//Phys. Rev. 1966. Vol. 144. P. 207—215.
4. **Brush S.** Kinetic Theory. Vol. 3. Oxford, Pergamon Press, 1972.
5. **Ernst M. H., Dorfman J. R., Hoegy W. R., van Leeuwen J. M. J.**//Physica. 1969. Vol. 45. P. 127—146.
6. **Alder B., Wainwright T. T.**//Phys. Rev. 1970. Vol. A1. P. 18—21.
7. **Alder B., Gass D. M., Wainwright T. E.**//Phys. Rev. 1971. Vol. A4. P. 233—237.

8. **Иноземцева Н. Г., Садовников Б. И.**//ТМФ. 1981. Т. 48. № 1. С. 137—144; 1982. Т. 51. № 1. С. 142—149.

9. **Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.**//Physica. 1978. Vol. 94A. P. 615—625; **Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Bochkov S. N.**//Physica. 1982. Vol. 110A. P. 329—338.

10. **Иноземцева Н. Г., Садовников Б. И.** Тр. II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981. С. 351—358.

11. **Bogolubov N. N.** Preprint JZNR E17-10514, Dubna, 1977.

12. **Ernst M. H., Dorfman J. R.**//Physica. 1972. Vol. 51. P. 157—181; J. Stat. Phys. 1975. Vol. 12. P. 311—359.

13. **Pomesu Y.**//Phys. Lett. 1972. Vol. 38A. P. 245—246; **Pomeau Y., Resibois P.**//Phys. Repts. 1975. Vol. 19C. P. 64—139; **Резибуа П., де Ленер М.** Классическая кинетическая теория жидкостей и газов: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.

14. **Ферцигер Дж., Капер Г.** Математическая теория процессов переноса в газах: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.

15. **Уленбек Дж., Форд Дж.** Лекции по статистической механике; Пер. с англ. М.: Мир, 1965.

16. **Resibois P.**//Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40. P. 1409—1411; J. Stat. Phys 1978. Vol. 19. P. 593—609.

17. **Боголюбов Н. Н.** Избранные труды по статистической физике. М.: Наука, 1979. С. 270—292.

18. **Zwanzig R.** Lectures in Theoretical Physica. Vol. III. N.Y.: Interscience Publ., 1961.

19. **Dufty I.**//Phys. Rev. 1972. Vol. A5. P. 2247—2255.

20. **Pomeau Y.**//Phys. Rev. 1972. Vol. A5. P. 2569—2587.

21. **Kawasaki K., Gunton I. D.**//Phys. Rev. 1973. Vol. A8. P. 2048—2064.

22. **Yamada T., Kawasaki K.**//Progr. Theoret. Phys. 1975. Vol. 53. P. 111—124.

23. **Ernst M. H., Cichocki B., Dorfman J. R. e.a.**//J. Stat. Phys. 1978. Vol. 18. P. 237—270.

24. **Ashurst W. T., Hoover W. G.**//Phys. Rev. 1975. Vol. A2. P. 658—678; Phys. Lett. 1977. Vol. 61A. P. 175—177.

25. **Dorfman J. R.**//Physica. 1981. Vol. 106A. P. 77—101.

26. **Onuki A.**//Phys. Lett. 1979. Vol. 70A. P. 31—33.

27. **Evans J. J.**//Phys. Rev. 1980. Vol. A22. P. 290—294.

28. **Иноземцева Н. Г., Садовников Б. И.** Тр. III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. Т. 1. С. 310—319.