«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1987, ТОМ 18, ВЫП. 5

УДК 530.12:531.51

ТРУДНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Н. А. Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются понятия: ковариантность, инвариантность, общий, специальный и кинематический принципы относительности, системы координат и системы отсчета, тензор энергии-импульса гравитационного поля. Рассматривается отношение друг к другу трех канонических теорий гравитации. Излагается теория аффинной связности в применении к рассматриваемым вопросам. Обращается внимание на разнобой в терминологии и на потребность в толковом словаре для гравитационистов. Вносится вклад в составление такого словаря.

We discuss the following concepts: covariance, invariance, the general, special and kinematic principles of relativity, coordinate systems, reference frames, the energy-momentum tensor of gravitational field. The interrelation of three canonical theories of gravity is analysed. The theory of affine connection is applied to the problems under consideration. Attention is drawn to inconsistency in the terminology and necessity of the explanatory dictionary for gravitationalists. A contribution to such a dictionary is made.

ВВЕДЕНИЕ

В теории относительности, как и во всякой развивающейся теории, есть свои трудные вопросы.

Первый вопрос возникает в связи с понятием относительности. Эйнштейн писал: «...теория относительности подобна дому с двумя этажами: специальной теорией относительности и общей теорией относительности» [1, с. 678]. В русском языке для этих теорий устоялись аббревиатуры СТО и ОТО. Из приведенного разъяснения Эйнштейна следует, что СТО не является ни частью, ни частным случаем ОТО. Поэтому пишут СТО, а не ЧТО (частная теория относительности). Возникает вопрос: в каком отношении друг к другу находятся СТО и ОТО?

Положение осложняется тем, что наряду с общим и специальным принципами относительности выдвигается и кинематический принцип. Соответствующая кинематическая теория относительности еще не получила устоявшейся аббревиатуры КТО. Возникший вопрос начинает ветвиться: в каком отношении КТО находится к СТО и ОТО?

Далее, специальный и кинематический принципы относительности тесно связаны с понятием инвариантности, тогда как общий принцип относительности скорее связан с понятием ковариантности, нежели с понятием инвариантности. Понятие ковариантности привело к современной теории многообразий, но даже и теперь оно не достигло той степени ясности, какой достигло понятие инвариантности в прошлом веке. В этом причина современных споров по ОТО, тогда как профессиональные споры по СТО отзвучали полвека тому назад. Возникает второй вопрос: в каком отношении друг к другу находятся понятия инвариантности и ковариантности?

Наконец, понятие ковариантности тесно связано с понятием системы координат, тогда как понятие инвариантности скорее связано с понятием системы отсчета, нежели с понятием системы координат. Чтобы не употреблять слишком часто слово «система», воспользуемся картографической терминологией и вместо «система координат» будем говорить «карта», что не даст нам спутать систему координат с системой отсчета. Чтобы понять, почему нельзя их путать, рассмотрим примеры.

1. Переход от одной инерциальной системы отсчета к другой в старой теории относительности задается преобразованием Галилея $x_г = x - Vt$, $t_г = t$, а в новой — преобразованием Лоренца $x_л = x \operatorname{ch} \Psi - (ct) \operatorname{sh} \Psi$, $ct_л = (ct) \operatorname{ch} \Psi - x \operatorname{sh} \Psi$, где V — относительная скорость систем отсчета; $\operatorname{th} \Psi = Vc^{-1}$; c — скорость света. Их можно равноправно рассматривать как координатные преобразования от карты (x, t) к картам $(x_г, t_г)$ и $(x_л, t_л)$ соответственно.

2. Преобразование Д'Аламбера $u = x - ct$, $v = x + ct$, полезное при решении волнового уравнения $\varphi_{tt} = c^2\varphi_{xx}$, ни в старой, ни в новой теории относительности не является преобразованием от какой-либо системы отсчета к другой. Однако в обоих случаях его можно рассматривать как координатное преобразование от карты (x, t) к карте (u, v).

3. Переход от карты (x, y, t) к карте (x', y', t'), где $x' = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t$, $y' = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t$, $t' = t$, можно рассматривать как преобразование от инерциальной системы отсчета к равномерно вращающейся в старой теории относительности и нельзя так рассматривать в теории относительности новой.

Так вот возникает третий вопрос: в каком отношении друг к другу находятся понятия координатной карты и системы отсчета?

Уже отсюда видно, что терминология теории относительности сильно запутана, а между тем вопросы далеко не исчерпаны.

Теория относительности взяла на вооружение неевклидову геометрию. Сам творец новой геометрии Н. И. Лобачевский много заботился о ее приложениях к физике, астрономии и механике. Теория относительности явилась продолжением его дела [2].

Специальная теория относительности создана в начале века на основе уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_a F_{mn} + \partial_n F_{am} + \partial_m F_{na} = 0; \quad F_{mn} + F_{nm} = 0; \\ &\sum_{m=1}^{4} \partial_m F_a^m = 0; \quad F_a^m = \sum_{n=1}^{4} h^{mn} F_{an}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где F_{mn} — тензор электромагнитного поля; h^{mn} — тензор, определяющий кометрику, о которой будет говориться ниже. В новой теории относительности уравнения (1) играют столь же характерную роль, как в старой теории относительности уравнения Ньютона

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{\mathbf{r}}{r} F(r), \quad m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r} F(r) \tag{2}$$

для двух тел, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r = |\mathbf{r}|$.

Существенно, что в новой теории относительности в пространство инерциальных систем вместо геометрии Евклида вводится геометрия Лобачевского [3]. Не беремся судить, почему Эйнштейн не высказывался в печати по этому вопросу. Что же касается Пуанкаре, то он не осветил этот вопрос в своих печатных трудах, возможно, потому, что, подобно Гауссу, не желал слышать «крика беотийцев». Во всяком случае, незнанием геометрии Лобачевского здесь объяснять никак не приходится. Просто при изложении своих результатов, «чтобы избегнуть всякой неясности», он употреблял другую терминологию. Ведь в ином случае, при построении теории автоморфных функций, он широко пользовался геометрией Лобачевского и в 1882 г. писал: «Если принять эти переименования, то *теоремы Лобачевского верны*, т.е. к этим новым величинам прилагаются все теоремы обычной геометрии, за исключением тех, которые являются следствием постулата Евклида. Эта терминология мне оказала большие услуги в моих изысканиях, но я, чтобы избегнуть всякой неясности, не буду ее здесь употреблять» [4, с. 306].

Как бы то ни было, с введением геометрии Лобачевского в пространство инерциальных систем потребовалось согласовать всю физику, и в частности следующие хорошо разработанные к концу прошлого века ее разделы:

1. Механика абсолютно твердого тела.
2. Механика одной материальной точки.
3. Механика контактных столкновений.
4. Кинетическая теория газа Больцмана.
5. Механика двух тел.
6. Закон всемирного тяготения Ньютона.
7. Теория гравитационного потенциала.

Во всех этих разделах опирались тогда на евклидово пространство инерциальных систем, и ничто в них не указывало на необходимость новой теории относительности, которую ныне обозначают СТО. Что же оказалось?

1. В СТО нет механики абсолютного тела, поскольку в СТО нарушен принцип кинематической относительности.

2. Механика одной материальной точки в поле внешних сил не встретила в СТО принципиальных трудностей. Она была сформулирована Пуанкаре и Эйнштейном. На основе их достижений Минковский развил понятие пространственно-временного мира, в котором в СТО задается геометрия с метрикой

$$\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4}\theta_{ab}d^{a}\otimes d^{b} = -\frac{1}{c^{2}}(dx\otimes dx+dy\otimes dy+dz\otimes dz)+dt\otimes dt \quad (3)$$

и кометрикой

$$\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4}h^{ab}\partial_{a}\otimes\partial_{b}=\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\otimes\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t}\otimes\frac{\partial}{\partial t}, \quad (4)$$

где x, y, z — декартовы координаты и t — время в одной из инерциальных систем отсчета. Движение материальной точки изображается в этом мире траекторией $x^a = x^a(\tau)$, на которой сумма $\theta_{ab}\, dx^a\, dx^b$ положительна. Параметр τ называется собственным временем материальной точки и является мерой ее старения.

3. Механика контактных столкновений точечных частиц также не встретила в СТО принципиальных трудностей. Это получилось потому, что механика контактных столкновений сводится к статике в пространстве инерциальных систем.

4. Кинетическая теория Больцмана хорошо приспосабливается к условиям СТО. Это определяется тем, что все явления, протекающие в разреженном газе, объясняются контактными столкновениями частиц и движением одной частицы во внешнем поле сил в промежутках между столкновениями.

5. Ньютонова механика двух тел, напротив, не приспосабливается к условиям СТО.

6. Закон всемирного тяготения Ньютона разделяет участь механики двух тел.

7. Для теории гравитационного потенциала также не нашлось хорошего места в СТО, и это послужило толчком к созданию ОТО.

В результате дискуссий по вопросам теории относительности получился, как мы видели, большой разнобой в терминологии, что говорит о необходимости создания специального толкового словаря [5]. Мы стараемся внести в него свой посильный вклад [6, 7].

Конечно, некоторые вопросы обсуждаемой здесь теории могут быть решены чисто логически, и в этом отношении дискуссии полезны. Так, они способствовали становлению теории многообразий [8]. Наоборот, теория многообразий помогает более глубокому проникновению в ОТО [9—12].

Для решения других вопросов ОТО, мягко говоря, не хватает экспериментальных данных. Например, одним из важнейших результатов ОТО является предсказание существования гравитационных волн, и давным-давно назрела потребность в постановке экспериментов по обнаружению гравитационных волн в лабораторных условиях [13, 14].

1. ГРУППА, ИНВАРИАНТНОСТЬ, ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Главная идея принципа относительности была сформулирована Клейном в 1872 г. в его Эрлангенской программе [15]. Ниже приводим точную формулировку связанных с нею понятий.

Группа, действующая на множестве. Группа Г (понятие группы предполагается известным) действует на множестве P (понятие множества также считается известным), если выполняются следующие условия.

1. Каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ группы Г отвечает однозначное отображение $p \to P$: $\tilde{p} = \gamma \cdot p$, $p \in P$, $\tilde{p} \in P$.

2. Для любых двух элементов σ и γ группы Г справедливо равенство $(\sigma \cdot \gamma) \cdot p = \sigma \cdot (\gamma \cdot p)$.

3. Единице e группы Г отвечает тождественное отображение $e \cdot p = p$.

С л е д с т в и е. Наряду с отображением $\tilde{p} = \gamma \cdot p$ существует однозначное обратное отображение $p = \gamma^{-1} \cdot \tilde{p}$. Действительно, $p = e \cdot p = (\gamma^{-1} \cdot \gamma) \cdot p = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot p) = \gamma^{-1} \tilde{p}$. Таким образом, отображение $\tilde{p} = \gamma \cdot p$ взаимно однозначно.

Об этих понятиях можно прочитать в [16—18].

Теория относительности. Теория относительности (Г, P) имеет своим предметом те и только те свойства образов, принадлежащих множеству P, которые не изменяются при отображениях $\tilde{p} = \gamma \cdot p$.

Инвариантный, инвариант, инвариантность. Образы, принадлежащие множеству P, которые не изменяются при отображениях $\tilde{p} = \gamma \cdot p$, называются инвариантными относительно группы Г. Их называют также **инвариантами** группы Г.

Если в построенной каким-либо способом теории усматривается инвариантность относительно группы Г, действующей на множестве P, то это есть теория относительности (Г, P).

Введение в геометрию термина «инвариант» принадлежит Сильвестру [19].

Принцип относительности. Принцип относительности исчерпывается желанием, потребностью или необходимостью рассматривать теорию относительности (Г, P).

Пример. Если мы желаем изучать все свойства множества P, то окончательным результатом будет теория относительности (E, P), где E — группа, состоящая из одного элемента e.

Пример. Число элементов множества P (если P — конечное множество) или мощность множества P (если P — бесконечное множество) является инвариантом группы всех взаимно однозначных отображений $P \to P$.

Замечание. Если группа Γ_0 является подгруппой группы Γ, то теория относительности (Γ_0, P) богаче содержанием, чем теория относительности (Γ, P), так как инвариантов группы Γ меньше, чем инвариантов группы Γ_0. Очевидно, что множество инвариантов группы является подмножеством множества инвариантов ее подгруппы. Однако при переходе от группы Γ к ее подгруппе Γ_0 руководящая роль принципа относительности понижается. В случае $\Gamma_0 = \mathrm{E}$ принцип относительности не играет никакой роли.

Арифметическое пространство. Важнейшим примером множества P является арифметическое пространство A_N. Элементами этого пространства являются упорядоченные наборы $(x^1, \ldots, x^N)$ любых действительных чисел. Их называют точками арифметического пространства. Символ N означает целое положительное число. Его называют размерностью арифметического пространства. Геометрия арифметического пространства есть теория относительности (E, A_N). Об этом понятии можно прочитать в [20].

Аффинная группа, действующая на множестве A_N. Аффинная группа Φ, действующая на множестве A_N, представляется линейными неоднородными отображениями

$$\tilde{x}^a = \sum_{b=1}^{N} \Phi^a_b x^b + \Phi^a, \quad a \in \{1, \ldots, N\}, \tag{5}$$

где определитель $\det(\Phi^a_b) \neq 0$. Теорию относительности (Φ, A_N) называют аффинной геометрией, а множество A_N с группой Φ называют аффинным пространством.

Инвариантная метрика в аффинном пространстве. Инвариантная метрика

$$\sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} \theta_{ab} d^a \otimes d^b \tag{6}$$

в аффинном пространстве задается матрицей (θ_{ab}) чисел, преобразующихся при отображении (5) по тензорному правилу

$$\tilde{\theta}_{ab} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \theta_{pq} \Phi^p_a \Phi^q_b. \tag{7}$$

Условие инвариантности $\tilde{\theta}_{ab} = \theta_{ab}$ определяет в группе Φ подгруппу $\theta\Phi$ ортогональных по отношению к метрике (6) отображений. Метрика (6) инвариантна в теории относительности $(\theta\Phi, A_N)$.

Пример. Метрика (3) является частным случаем метрики (6).

Инвариантная кометрика в аффинном пространстве. Инвариантная кометрика

$$\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} h^{ab}\partial_a \otimes \partial_b \tag{8}$$

в аффинном пространстве задается матрицей (h^{ab}) чисел, преобразующихся при отображении (5) по тензорному правилу

$$\tilde{h}^{ab} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} h^{pq}\Phi_p^a\Phi_q^b. \tag{9}$$

Условие инвариантности $\tilde{h}^{ab} = h^{ab}$ определяет в группе Φ ее подгруппу Φh ортогональных по отношению к кометрике (8) отображений. Кометрика (8) инвариантна в теории относительности $(\Phi h, A_N))$.

Пример. Кометрика (4) является частным случаем кометрики (8).

Невырожденная метрика и сопряженная с ней кометрика. Метрика (6) называется невырожденной, если определитель $\theta = \det(\theta_{ab}) \neq \neq 0$. Условие

$$\sum_{p=1}^{N} \theta_{ap}h^{pb} = -\frac{1}{c^2}\delta_a^b, \tag{10}$$

где δ_a^b — символ Кронекера; c — действительное или мнимое, но не равное нулю число, определяет сопряженную с (6) кометрику (8).

Пример. Кометрика (4) сопряжена с метрикой (3).

Невырожденная кометрика и сопряженная с ней метрика. Кометрика (8) называется невырожденной, если определитель $h = \det(h^{ab}) \neq 0$. Условие (10) определяет сопряженную с (8) метрику (6).

Замечание. Метрика (6) и кометрика (8) невырождены и взаимно сопряжены, если они удовлетворяют условию (10). В таком случае условия инвариантности

$$\left.\begin{aligned} \theta_{ab} &= \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} \theta_{pq}\Phi_a^p\Phi_b^q; \\ h^{ab} &= \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} h^{pq}\Phi_p^a\Phi_q^b \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

эквивалентны, так что ортогональные подгруппы $\theta\Phi$ и Φh совпадают.

Факторизующаяся метрика. Метрика (6) называется факторизующейся, если она распадается в произведение

$$\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} \theta_{ab}d^a \otimes d^b = \theta \otimes \theta, \tag{12}$$

где

$$\theta = \sum_{a=1}^{N} \theta_a d^a, \tag{13}$$

а числа θ_a преобразуются при отображении (5) по тензорному правилу

$$\tilde{\theta}_a = \sum_{p=1}^{N} \theta_p \Phi_a^p. \tag{14}$$

Вырожденная кометрика максимального ранга. Если ранг матрицы (h^{ab}) равен $N-1$, то (8) называется вырожденной кометрикой максимального ранга.

Группа Галилея. Группа Галилея является подгруппой аффинной группы, ортогональной по отношению к факторизующейся метрике (12) и по отношению к вырожденной кометрике (8) максимального ранга. Кроме того, считается, что метрика (12) и кометрика (8) сопряжены условием

$$\sum_{p=1}^{N} \theta_{ap} h^{pb} = 0, \tag{15}$$

что квадратичная форма

$$\sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} h^{ab} p_a p_b \tag{16}$$

не принимает отрицательных значений и что $N = 4$.

Старая специальная теория относительности есть теория относительности (группа Галилея, A_4).

Обычно полагают

$$x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^4 = t, \tag{17}$$

где x, y, z — декартовы координаты, а t — время в одной из инерциальных систем отсчета. Тогда

$$(\theta_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (h^{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$(\theta_a) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1),$$

так что

$$\sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \theta_{ab} d^a \otimes d^b = dt \otimes dt, \tag{19}$$

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} h^{ab}\partial_a\otimes\partial_b=\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\otimes\frac{\partial}{\partial z}, \tag{20}$$

$$\theta=\sum_{a=1}^{N}\theta_a d^a=dt. \tag{21}$$

В таком случае группу Галилея составляют отображения

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}^a&=\sum_{b=1}^{3}\Gamma^a_b x^b+V^a t+\Gamma^a,\quad a\in\{1,\ 2,\ 3\},\\ \tilde{t}&=\pm t+\Gamma^4,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где Γ^a, Γ^4 и V^a — произвольные константы; Γ^a_b — константы, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} h^{mn}\Gamma^a_m\Gamma^b_n=h^{ab},\quad a,\ b\in\{1,\ 2,\ 3\}. \tag{23}$$

Уравнения (2) инвариантны относительно отображений (22).

Ортохронная группа Галилея. Ортохронная группа Галилея получается при замене в (22) выражения $\tilde{t}=\pm t+\Gamma^4$ на $\tilde{t}=t+\Gamma^4$. Линейная метрика (21) инвариантна относительно этой группы.

Группа Пуанкаре. Группа Пуанкаре является ортогональной группой по отношению к метрике (3) или, что все равно, ортогональной по отношению к кометрике (4), где c — скорость света.

Новая специальная теория относительности есть теория относительности (группа Пуанкаре, A_4). Уравнения (1) инвариантны относительно группы Пуанкаре.

Теорию, инвариантную относительно группы Пуанкаре, называют релятивистской, а теорию, инвариантную относительно группы Галилея, называют нерелятивистской. Это нелогично, потому что слово «релятивизм» означает относительность. Слово «нерелятивизм» здесь надо брать в кавычки. Мы всегда так будем поступать. Например, метрика (3) и кометрика (4) в «нерелятивистском» пределе $c\to\infty$ переходят в (19) и (20).

Ортохронная группа Пуанкаре. Ортохронная группа Пуанкаре характеризуется условием $\Phi^4_4>0$ в представлении (3).

Группа Лоренца. Группа Лоренца является подгруппой группы Пуанкаре, задаваемой условием $\Phi^a=0$ в аффинном отображении (5).

Инерциальное движение частицы. Инерциальное движение частицы изображается в 4-мерном аффинном пространстве прямой, которая задается уравнениями

$$x^a=p^a\tau+x^a_0,\ a\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}, \tag{24}$$

где τ — параметр, принимающий всевозможные действительные значения, а p^a и x^a_0 — заданные.

Квадрат собственной массы частицы равен

$$m^2 = \sum_{a=1}^{4} \sum_{b=1}^{4} \theta_{ab} p^a p^b. \tag{25}$$

В новой теории относительности для луча света $m^2 = 0$, для тахиона $m^2 < 0$. В старой теории относительности $m^2 \geqslant 0$ и частицы с $m = 0$ мгновенно передают взаимодействие между частицами с $m > 0$.

Инерциальная система. Инерциальная система состоит из частиц с положительной собственной массой. Все частицы, входящие в ее состав, движутся инерциально с одной и той же скоростью. Таким образом, инерциальная система изображается связкой параллельных друг другу прямых.

Пространство Котельникова или пространство инерциальных систем. Точкой пространства Котельникова является инерциальная система. Пространство Котельникова трехмерно. В этом пространстве в старой теории относительности действует геометрия Евклида, а в новой — геометрия Лобачевского. Расстояние s между двумя инерциальными системами, называемое быстротой, в старой теории относительности равно их относительной скорости v, а в новой связано с относительной скоростью v формулой $v/c = \mathrm{th}\, s/c$, где c — скорость света.

Переход от геометрии Евклида к геометрии Лобачевского в пространстве Котельникова означает переход от старой теории относительности к новой.

Таким образом, создание новой теории относительности было предрешено созданием геометрии Лобачевского.

Геометрия Лобачевского все чаще становится рабочим аппаратом в руках физиков, изучающих высокие и сверхвысокие энергии [21, 22].

Группа изометрий пространства Котельникова. Группой изометрических отображений пространства инерциальных систем является однородная ортохронная группа Галилея в старой теории относительности и ортохронная группа Лоренца — в новой. Это есть группа изометрий пространства Евклида в первом случае и пространства Лобачевского — во втором.

Примечание. Данный раздел изложен по образцу [23].

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Отображения $A_4 \to A_4$, относительно которых инвариантна метрика (3) или, что все равно, кометрика (4), обязательно линейные. Такие отображения составляют группу Пуанкаре. Поскольку в пределе $c \to \infty$ группа Пуанкаре переходит в группу Галилея, можно подумать, что отображения $A_4 \to A_4$, относительно которых инвариантны метрика (19) и кометрика (20), тоже обязательно линейные.

Однако это неверно. Такие отображения составляют группу Ньютона [24], а не группу Галилея. Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^a &= \sum_{b=1}^{3} H_b^a(t)\, x^b + H^a(t), \quad a \in \{1, 2, 3\}, \\ \tilde{t} &= \pm t + H^4, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где $H^4 = \Gamma^4$ — произвольная константа; $H^a(t)$ — произвольные функции времени t; $H_b^a(t)$ — функции, удовлетворяющие в каждый момент времени t условиям ортогональности

$$\sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} h^{mn} H_m^a(t)\, H_n^b(t) = h^{ab}, \quad a,\ b \in \{1, 2, 3\}, \tag{27}$$

а в остальном — произвольные.

Кинематический принцип относительности состоит в желании изучать инварианты группы Ньютона. Кинематическая теория относительности является теорией инвариантов группы Ньютона.

Группа Галилея является подгруппой группы Ньютона. Между ними располагается группа отображений

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^a &= \sum_{b=1}^{3} \Gamma_b^a x^b + H^a(t), \quad a \in \{1, 2, 3\}, \\ \tilde{t} &= \pm\, t + \Gamma^4 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$A_4 \to A_4$. Назовем ее группой Галилея — Ньютона.

Ортохронные отображения (26), (28) и (22) представляют различные виды движения твердого тела в старой СТО.

В новой СТО равномерное и прямолинейное движение твердого тела без вращения представляется ортохронным отображением Пуанкаре. Иначе в этой теории твердое тело двигаться не может, и в ней нет места для принципа кинематической относительности.

В группе Галилея — Ньютона содержится подгруппа отображений вида

$$\tilde{x} = x + H(t), \quad \tilde{t} = t, \tag{29}$$

что объясняет ситуацию, описываемую в популярной литературе в образе падающего лифта. Относительное движение замкнутой системы материальных точек не изменится, если к ним приложить силы $F_i = -m_i h(t)$, где i — номер точки, m_i — ее масса. Отображение (29), где $H(t)$ — первообразная функции $h(t)$, устраняет эффект таких сил.

3. ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МЕХАНИКУ

Н. И. Лобачевский завещал: «Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику...» [25, с. 49]. Он считал, что Воображаемая Геометрия допустима «либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений» [26, с. 65].

Согласно квантовой механике малые расстояния означают большие быстроты, так что учет геометрии Лобачевского в тесной сфере молекулярных притяжений можно отнести к замене геометрии Евклида в пространстве инерциальных систем Котельникова на геометрию Лобачевского. Эта замена, как мы видели, означает переход от старой специальной теории относительности к новой теории. Учет же геометрии Лобачевского за пределами видимого мира можно отнести к замене геометрии Евклида в абсолютном пространстве Ньютона геометрией Лобачевского. При такой замене принцип кинематической инвариантности по существу не нарушается, поскольку пространство Лобачевского располагает такой же подвижностью, как и пространство Евклида. Но вот специальный принцип относительности потеряет свою силу. Это и понятно: если (в лучшем случае) одна из точек относительного пространства равномерно движется по некоторой прямой L и пространство это не вращается вокруг оси L, то всякая точка, не лежащая на L, равномерно движется по эквидистанте с базой L. Поскольку в геометрии Лобачевского эквидистанта не прямая линия, то всякая точка, не лежащая на L, движется с ускорением. Следовательно, относительное пространство динамически отличается от абсолютного.

Ньютона не раз порицали за то, что он ввел в свою механику абсолютное пространство. Но кто знает, не допускал ли Ньютон возможным неевклидово решение проблемы параллельных?

В связи с этим интересно заметить, что метрика

$$\operatorname{ch}^2 \frac{r}{k}\, dt^2 - \frac{1}{c^2}\left[dr^2 + k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{k}\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \tag{30}$$

локально реализуемая на «сфере» $x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = k^2$ при выборе координат

$$x_1 = k \operatorname{ch} \frac{r}{k} \cos \frac{ct}{k}; \quad y_1 = k \operatorname{sh} \frac{r}{k} \sin\theta \cos\varphi;$$

$$x_2 = k \operatorname{ch} \frac{r}{k} \sin \frac{ct}{k}; \quad y_2 = k \operatorname{sh} \frac{r}{k} \sin\theta \sin\varphi;$$

$$y_3 = k \operatorname{sh} \frac{r}{k} \cos\theta,$$

вводит геометрию Лобачевского как в базисное пространственно-временно́е многообразие в момент времени t, так и в слой — пространство скоростей материальной точки.

Здесь мы подошли к важнейшему понятию пространства состояний материальной точки. Это есть 7-мерный пучок B времениподобных прямых, касательных к 4-мерному миру X. Точнее, B является косым произведением $B = \bigcup_{x \in X} V(x)$ с базой X, слоем $V(x)$ которого является 3-мерное пространство скоростей Лобачевского, а группой произведения является ортохронная группа Лоренца [27, с. 89]. Это понятие оказало нам большую помощь при построении кинетической теории газа в ОТО. Одночастичная функция распределения, для которой составляется уравнение Больцмана, является скалярной функцией в пучке B. «Релятивистский» интеграл столкновений берется по слою $V(x)$.

4. ТРИ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Мы знаем три канонические теории гравитации: одна основана на законах Кеплера и уравнениях Пуассона, другая — на законах Ньютона. Третья теория — ОТО. Она построена на основе геометрии Римана в пространственно-временно́м мире и геометрии Лобачевского в пространстве скоростей.

Первая каноническая теория гравитации. Законы движения планет выведены Кеплером из наблюдений Тихо Браге [28]. Эти законы таковы [29, с. 89]:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна.

3. Отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит для всех планет одинаково.

Эти законы Ньютон закодировал в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M\mathbf{r}}{r^3}, \tag{31}$$

где M — масса Солнца; γ — постоянная Ньютона.

Движение пробного тела в поле $\varphi(\mathbf{r}, t)$ тяготения остальных масс, размещенных в абсолютном пространстве с плотностью $\rho(\mathbf{r}, t)$, определяется уравнением Ньютона

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = -\nabla\varphi \tag{32}$$

и уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho. \tag{33}$$

Если пробное тело притягивает только одно точечное тело с массой M, помещенное в начало координат, то

$$\rho = M\delta(\mathbf{r}). \tag{34}$$

В таком случае из уравнения (33) следует, что

$$\varphi = -\gamma M/r. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (32), получаем (31).

Подчеркнем, что первая каноническая теория гравитации справедлива только для пробных тел и что масса пробного тела в ее уравнения не входит. Нелепо было бы применять эту теорию к движению двойных звезд.

Вторая каноническая теория гравитации. На основе законов Кеплера Ньютон установил, что потенциал тяготения равен

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \tag{36}$$

Система уравнений (2) с таким потенциалом, т. е. система уравнений

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \gamma \frac{m_2}{r^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1); \qquad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \gamma \frac{m_1}{r^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{37}$$

называется законом всемирного тяготения Ньютона.

Переход от уравнения (31) к уравнениям (37) не является непрерывным. Для разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ из (37) следует уравнение (31) с $M = m_1 + m_2$, тогда как по Кеплеру должно быть $M = m_1$, между тем как $m_2 > 0$. В силу этого третий закон Кеплера верен лишь приближенно [28, 29]. Это связано с тем, что потенциал тяготения пропорционален произведению масс $m_1 m_2$. Степень верности третьего закона Кеплера велика, поскольку планеты по отношению к Солнцу являются пробными телами.

Третья каноническая теория гравитации. Благодаря трудам Лобачевского, открывшего неевклидову геометрию, трудам Гаусса, создавшего внутреннюю геометрию поверхностей, и Римана, обобщившего результаты Гаусса на многомерный случай, стала возможной третья каноническая теория гравитации. Мы рассмотрим ее в той мере, в какой она аналогична первой теории. «Релятивистский» же аналог второй теории гравитации неизвестен.

В третьей теории в пространственно-временно́й мир M вводится риманова метрика

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{4} \sum_{b=1}^{4} g_{ab}(x)\, d^a x \otimes dx^b$$

нормального гиперболического типа. Последнее означает, что в каждой точке $x \in M$ в пучке касательных к M прямых действует геометрия Лобачевского с характерной константой, равной скорости света c.

Уравнение (32) заменяется уравнением геодезических

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \left\{ {a \atop mn} \right\} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} = 0, \tag{38}$$

где

$$\left\{ {a \atop mn} \right\} = \frac{1}{2} g^{ak} (\partial_m g_{kn} + \partial_n g_{km} - \partial_k g_{mn}) \qquad (39)$$

— скобки Кристоффеля. Уравнение Пуассона (33) заменяется уравнением

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ab}, \qquad (40)$$

где R_{ab} — тензор Риччи; T_{ab} — тензор энергии-импульса материи.

Решение уравнения (40) в случае, аналогичном (34), нашел Шварцшильд:

$$ds^2 = c^2 V^2 dt^2 - V^{-2} d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2), \qquad (41)$$

где

$$V^2 = 1 - 2\alpha/\rho; \; \alpha = \gamma M/c^2; \; \rho > 2\alpha.$$

5. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Здесь приводятся сведения об аффинной связности, необходимые для понимания псевдотензора энергии-импульса. Добавочные сведения можно почерпнуть из [20, 30]. Все геометрические объекты в данной работе отнесены к координатному базису $d^a = dx^a$ и дуальному базису $\partial_a = \partial/\partial x^a$.

Аффинная связность. Тензорным полем T типа $\binom{A}{B}$ называем тензорное поле с компонентами $T^{a_1 \ldots a_A}_{b_1 \ldots b_B}$.

Аффинная связность Γ вводится на многообразии с таким расчетом, чтобы ковариантная производная ∇T любого тензорного поля T типа $\binom{A}{B}$ являлась тензорным полем типа $\binom{A}{B+1}$.

Для ковекторного поля полагают

$$\nabla_m T_n = \partial_m T_n - \Gamma^a_{mn} T_a. \qquad (42)$$

Отсюда следует, что компоненты Γ^a_{mn} связности при переходе от координатной карты K к карте $\widetilde{K}$ преобразуются по правилу

$$\widetilde{\Gamma}^a_{mn} = \left(\Gamma^i_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^m} \frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \widetilde{x}^m \partial \widetilde{x}^n} \right) \frac{\partial \widetilde{x}^a}{\partial x^i}. \qquad (43)$$

Из (43) следует, что для любого векторного поля T комбинации

$$\nabla_m T^a = \partial_m T^a + \Gamma^a_{mn} T^n \qquad (44)$$

являются компонентами тензорного поля ∇T типа $\binom{1}{1}$.

Ковариантная производная любого тензорного поля T типа $\binom{A}{B}$ составляется по правилу дифференцирования произведения. Например,

$$\left.\begin{aligned}\nabla_k T_{mn} &= \partial_k T_{mn} - \Gamma^s_{km} T_{sn} - \Gamma^s_{kn} T_{ms};\\ \nabla_k T^a_m &= \partial_k T^a_m - \Gamma^s_{km} T^a_s + \Gamma^a_{ks} T^s_m;\\ \nabla_k T^{ab} &= \partial_k T^{ab} + \Gamma^a_{ks} T^{sb} + \Gamma^b_{ks} T^{as};\\ \nabla_k T^a_{mn} &= \partial_k T^a_{mn} - \Gamma^s_{km} T^a_{sn} -\\ &\quad - \Gamma^s_{kn} T^a_{ms} + \Gamma^a_{ks} T^s_{mn}.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Для скалярной функции T полагают $\nabla_k T = \partial_k T$.

Как это следует из (43), разность

$$S^a_{mn} = \Gamma^a_{mn} - \Gamma^a_{nm} \tag{46}$$

является тензором. Этот тензор называется тензором кручения. Иногда тензором кручения называют половину разности (46).

Рассмотрим оператор

$$\nabla_{kl} = \nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k + S^p_{kl} \nabla_p. \tag{47}$$

В применении к скалярной функции T он дает нуль: $\nabla_{kl} T = 0$. В применении к ковекторному полю T_n он дает следующий результат:

$$\nabla_{kl} T_n = -R^a_{kln} T_a, \tag{48}$$

где

$$R^a_{kln} = \partial_k \Gamma^a_{ln} - \partial_l \Gamma^a_{kn} + \sum_{s=1}^{N} (\Gamma^a_{ks} \Gamma^s_{ln} - \Gamma^a_{ls} \Gamma^s_{kn}). \tag{49}$$

Из (48) следует, что комбинация (49) является тензором. Этот тензор называется тензором кривизны или тензором Римана — Кристоффеля.

Свертка

$$R_{ln} = R^a_{aln} \tag{50}$$

называется тензором Риччи.

В применении к векторному полю T^a оператор (47) дает

$$\nabla_{kl} T^a = R^a_{kln} T^n. \tag{51}$$

Легко просматривается аналогия между формулами (42), (44) и формулами (48), (51). Она распространяется на все тензорные поля.

Например,

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{hl}T_{mn} &= -R^{s}_{klm}T_{sn} - R^{s}_{kln}T_{ms};\\ \nabla_{hl}T^{a}_{m} &= -R^{s}_{klm}T^{a}_{s} + R^{a}_{kls}T^{s}_{m};\\ \nabla_{hl}T^{ab} &= R^{a}_{kls}T^{sb} + R^{b}_{kls}T^{as};\\ \nabla_{kl}T^{a}_{mn} &= -R^{s}_{klm}T^{a}_{sn} - R^{s}_{kln}T^{a}_{ms} + R^{a}_{kls}T^{s}_{mn}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Формулы (52) получаются из формул (45) заменой $\nabla_k - \partial_k$ на ∇_{kl} и Γ^{a}_{km} на R^{a}_{klm}.

В заключение заметим очевидное тождество

$$R^{a}_{kln} + R^{a}_{lkn} = 0. \tag{53}$$

Свернутая связность. Свернутой (аффинной) связностью называем свертку

$$\Gamma_m = \Gamma^{a}_{ma}. \tag{54}$$

Согласно (43) ее компоненты преобразуются следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_m = \frac{\partial x_p}{\partial \tilde{x}^m}\,\Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m}.$$

Эту формулу можно привести к виду

$$\tilde{\Gamma}_m = \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}\left(\Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^p}\ln J\right), \tag{55}$$

где J — якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial (x^1, \ldots, x^N)}{\partial (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)}, \tag{56}$$

так как дифференциал определителя φ любой матрицы (φ^{i}_{k}) равен $d\varphi = \overline{\varphi}^{k}_{i}\, d\varphi^{i}_{k}$, где $\overline{\varphi}^{k}_{i}$ — алгебраическое дополнение элемента φ^{i}_{k}.

Ковариантная производная тензора типа $\binom{0}{N}$ равна

$$\nabla_m \varepsilon_{k_1\ldots k_N} = \partial_m \varepsilon_{k_1\ldots k_N} - \Gamma^{a}_{mk_1}\varepsilon_{ak_2\ldots k_N} - \ldots - \Gamma^{a}_{mk_N}\varepsilon_{k_1\ldots a}.$$

Если этот тензор антисимметричен по любой паре значков $k_1, \ldots, k_N$, то комбинация

$$\Gamma^{b}_{ma}\varepsilon_{k_1\ldots k_N} - \Gamma^{b}_{mk_1}\varepsilon_{ak_2\ldots k_N} - \ldots - \Gamma^{b}_{mk_N}\varepsilon_{k_1\ldots k_{N-1}a}$$

антисимметрична по любой паре значков $a, k_1, \ldots, k_N$. Следовательно, она равна нулю и

$$\nabla_m \varepsilon_{k_1\ldots k_N} = (\partial_m - \Gamma_m)\,\varepsilon_{k_1\ldots k_N}. \tag{57}$$

Аналогично доказывается, что

$$\nabla_{mn}\varepsilon_{k_1\ldots k_N} = -R^a_{mna}\varepsilon_{k_1\ldots k_N}. \qquad (58)$$

Из (49) находим, что

$$\Omega_{mn} = R^a_{mna} = \partial_m\Gamma_n - \partial_n\Gamma_m. \qquad (59)$$

Этот тензор называем кривизной свернутой связности.

На ориентируемом многообразии существует, нигде не обращаясь в нуль, N-форма. Выбрав такой атлас, чтобы якобианы (56) были больше нуля, можно положить $\varepsilon = \varepsilon_{1\ldots N} > 0$ для всех карт, составляющих атлас. Действительно, если $\varepsilon > 0$, то и $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{1\ldots N} = J\varepsilon > 0$. Полагая, что ковариантная производная тензора $\varepsilon_{k_1\ldots k_N}$ равна нулю, из (57) находим

$$\Gamma_m = \partial_m \ln \varepsilon. \qquad (60)$$

В таком случае

$$\Omega_{mn} = 0. \qquad (61)$$

По сути здесь мы имели дело с «продолженным» дифференцированием и «длинной» производной.

Преобразование связности. Пусть теперь на многообразии заданы две связности Γ и $\check{\Gamma}$ с коэффициентами Γ^a_{mn} и $\check{\Gamma}^a_{mn}$ соответственно. Переход от одной из них к другой называется преобразованием связности [30]. Из (43) следует, что разность

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \qquad (62)$$

является тензором. Этот тензор называют тензором аффинной деформации. Подставляя выражение $\check{\Gamma}^a_{mn}$ в формулу (49), получаем закон изменения тензора кривизны при преобразовании связности:

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + S^m_{kl}P^a_{mn} + \nabla_k P^a_{ln} - \nabla_l P^a_{kn} + \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks}P^s_{ln} - P^a_{ls}P^s_{kn}). \qquad (63)$$

Разность

$$P_m = \check{\Gamma}_m - \Gamma_m = P^a_{ma} \qquad (64)$$

есть ковектор аффинной деформации. Из (59) получаем закон изменения тензора кривизны свернутой связности:

$$\check{\Omega}_{kl} = \Omega_{kl} + \partial_k P_l - \partial_l P_k, \qquad (65)$$

что согласуется с (63).

Симметричная связность. Эквиаффинная связность. Дальше будем рассматривать только симметричные связности, т. е. будем полагать

$$\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{nm}, \tag{66}$$

так что тензор кручения будет равняться нулю.

В этом случае

$$R^a_{kln} + R^a_{nkl} + R^a_{lnk} = 0. \tag{67}$$

В результате свертки отсюда получаем

$$\Omega_{kl} + R_{kl} - R_{lk} = 0. \tag{68}$$

Симметричная связность, свертка которой равна (60), называется эквиаффинной. В этом случае тензор Риччи симметричен.

Наряду с алгебраическими тождествами (53) и (67) существует еще одно весьма важное дифференциальное тождество

$$\nabla_i R^a_{kln} + \nabla_l R^a_{ikn} + \nabla_k R^a_{lin} = 0, \tag{69}$$

называемое тождеством Бианки — Падова [30, с. 131].

Для симметричных связностей тензор аффинной деформации также симметричен, т. е.

$$P^a_{mn} = P^a_{nm}. \tag{70}$$

Для симметричных связностей закон (63) запишем в двух эквивалентных видах:

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + \nabla_k P^a_{ln} - \nabla_l P^a_{kn} + \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}); \tag{71}$$

$$R^a_{kln} = \check{R}^a_{kln} + \check{\nabla}_l P^a_{kn} - \check{\nabla}_k P^a_{ln} + \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}). \tag{72}$$

Для эквиаффинных связностей получаем следствие

$$\check{R}_{ln} = R_{ln} + \nabla_a P^a_{ln} - \nabla_l P_n + P_s P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{an}; \tag{73}$$

$$R_{ln} = \hat{R}_{ln} + \check{\nabla}_l P_n - \check{\nabla}_a P^a_{ln} + P_s P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{an}, \tag{74}$$

где

$$P_n = \partial_n \ln \frac{\check{\varepsilon}}{\varepsilon}. \tag{75}$$

Связность Кристоффеля. Зададим на многообразии невырожденный симметричный тензор g_{mn} и потребуем, чтобы его ковариантная производная по симметричной связности Γ^a_{mn} равнялась нулю, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} g=\det(g_{mn})\neq 0, \quad g_{mn}=g_{nm}, \\ S^a_{mn}=0, \quad \nabla_a g_{mn}=0. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Нетрудно убедиться, что в таком случае связность $\Gamma_{mn}^{\ \ a}$ равна скобке Кристоффеля (39), где $g^{ma}g_{an}=\delta^m_n$.

Из равенства $\nabla_a g_{mn}=0$ следует $\nabla_a g^{mn}=0$, а значит, операция опускания и поднятия тензорных индексов с помощью g_{mn} и g^{mn} коммутативна с операцией ковариантного дифференцирования по связности Кристоффеля (39).

Свертка связности (39) равна

$$\Gamma_m=\left\{ {a \atop ma} \right\}=\frac{1}{2}g^{ab}\partial_m g_{ab}=\frac{1}{2g}\partial_m g, \tag{77}$$

т. е. представляется в виде (60), где

$$\varepsilon=\sqrt{|g|}. \tag{78}$$

Следовательно, связность Кристоффеля (39) эквиаффинна.

Полагая в первой из формул (52) $T_{mn}=g_{mn}$, находим, что в случае связности Кристоффеля

$$R^s_{klm}g_{sn}+R^s_{kln}g_{sm}=0. \tag{79}$$

Согласно (53), (79) и (67) тензор

$$R_{klmn}=R^a_{klm}g_{an} \tag{80}$$

таков, что

$$R_{klmn}+R_{lkmn}=0, \ R_{klmn}+R_{klnm}=0, \tag{81}$$

$$R_{klmn}+R_{mkln}+R_{lmkn}=0. \tag{82}$$

Докажем, что из равенств (81) и (82) следует равенство

$$R_{klmn}=R_{mnkl}. \tag{83}$$

Для этого сделаем в (82) все циклические перестановки индексов:

$$R_{klmn}+R_{mkln}+R_{lmkn}=0;$$
$$R_{mnkl}+R_{kmnl}+R_{nkml}=0;$$
$$R_{nklm}+R_{lnkm}+R_{klnm}=0; \ R_{lmnk}+R_{nlmk}+R_{mnlk}=0.$$

Вычитая из верхних равенств нижние, получаем

$$R_{klmn}-R_{klnm}=R_{nklm}+R_{lnkm}-R_{mkln}-R_{lmkn};$$
$$R_{mnkl}-R_{mnlk}=R_{lmnk}+R_{nlmk}-R_{kmnl}-R_{nkml}.$$

Отсюда и из (81) следует (83).

В случае связности Кристоффеля наряду с тензором Риччи (50) рассматриваем скаляр кривизны

$$R = g^{mn} R_{mn} \tag{84}$$

и тензор Эйнштейна

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}, \tag{85}$$

входящий в левую часть уравнений (40).

Свертывая тождества Бианки — Падова (69) с тензором $\delta_a^k g^{in}$, находим

$$2\nabla^n R_{nl} = \nabla_l R. \tag{86}$$

Следовательно, ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна (85) равна нулю.

Координатная связность. Связность, все компоненты которой в некоторой координатной карте $\widetilde{K}$ равны нулю, называем координатной связностью, порожденной картой $\widetilde{K}$. Ту же самую связность порождает любая линейно склеенная с $\widetilde{K}$ карта. Согласно (43) в произвольно склеенной с $\widetilde{K}$ карте коэффициенты координатной связности равны

$$\Gamma_{mn}^a = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^i} \frac{\partial^2 \widetilde{x}^i}{\partial x^m \, \partial x^n}. \tag{87}$$

Тензор кручения и тензор кривизны координатной связности (87) равны нулю:

$$S_{mn}^a = 0, \quad R_{kln}^a = 0.$$

Свертка координатной связности (87) равна

$$\Gamma_m = \Gamma_{ma}^a = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \frac{\partial (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^N)}{\partial (x^1, \ldots, x^N)},$$

так что координатную связность можно считать эквиаффинной, положив $\varepsilon = \varepsilon_0 J^{-1}$, где $\varepsilon_0 = \text{const}$, а J имеет вид (56).

Если в формулах (71) — (74) считать, что связность Γ_{mn}^a координатная, то они примут вид

$$R_{kln}^a = -\nabla_k P_{ln}^a + \nabla_l P_{kn}^a - \sum_{s=1}^{N} (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s); \tag{88}$$

$$R_{kln}^a = -\check{\nabla}_k P_{ln}^a + \check{\nabla}_l P_{kn}^a + \sum_{s=1}^{N} (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s); \tag{89}$$

$$R_{ln} = -\nabla_a P_{ln}^a + \nabla_l P_n - (P_s P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{an}^s); \tag{90}$$

$$R_{ln} = -\check{\nabla}_a P_{ln}^a + \check{\nabla}_l P_n + (P_s P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{an}^s). \tag{91}$$

Если обе связности координатные, то тензор аффинной деформации удовлетворяет следующему условию, записанному в двух эквивалентных видах:

$$\nabla_k P^a_{ln} - \nabla_l P^a_{kn} = -\sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn});$$

$$\check{\nabla}_k P^a_{ln} - \check{\nabla}_l P^a_{kn} = +\sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}).$$

Координатную связность при желании можно представить в виде скобки Кристоффеля (39) и даже неоднозначно. Действительно, возьмем любую неособенную симметричную матрицу (M_{ab}), где M_{ab} — числа, а не функции, и положим в карте K

$$g_{ab} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} M_{pq} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^a} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^b}. \tag{92}$$

Для такого метрического тензора

$$\left\{ {a \atop mn} \right\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n}, \tag{93}$$

в чем нетрудно убедиться. Вообще, для любой (не обязательно неособенной) симметричной матрицы чисел (M_{ab}) ковариантная производная от тензора (92) по связности (87) равна нулю.

Частный вид тензора аффинной деформации. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \check{\nabla}_k g^{ab} &= \partial_k g^{ab} + \check{\Gamma}^a_{ks} g^{sb} + \check{\Gamma}^b_{ks} g^{as}; \\ \partial_k g^{ab} &= -\left\{ {a \atop ks} \right\} g^{sb} - \left\{ {b \atop ks} \right\} g^{as}. \end{aligned} \right\} \tag{94}$$

Следовательно, если в разности (62) вычитаемое равно (39), то

$$\check{\nabla}_k g^{ab} = P^a_{ks} g^{sb} + P^b_{ks} g^{as}. \tag{95}$$

Аналогично имеем

$$\left. \begin{aligned} \check{\nabla}_k g_{mn} &= \partial_k g_{mn} - \check{\Gamma}^s_{km} g_{sn} - \check{\Gamma}^s_{kn} g_{ms}; \\ \partial_k g_{mn} &= \left\{ {s \atop km} \right\} g_{sn} + \left\{ {s \atop kn} \right\} g_{ms}. \end{aligned} \right\} \tag{96}$$

Следовательно,

$$\check{\nabla}_k g_{mn} = -P^s_{km} g_{sn} - P^s_{kn} g_{ms}. \tag{97}$$

Поскольку мы условились рассматривать только симметричные **связности**, то

$$P^a_{mn} = -\frac{1}{2} g^{ak} (\check{\nabla}_m g_{kn} + \check{\nabla}_n g_{km} - \check{\nabla}_k g_{mn}). \tag{98}$$

Обозначим вектор

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn}. \tag{99}$$

Из (95) получаем

$$\Phi^a = (\check{\nabla}_b - P_b) g^{ab}. \tag{100}$$

Если связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ эквиаффинна, то

$$\Phi^a = \frac{\check{\varepsilon}}{\varepsilon} \check{\nabla}_b \left(\frac{\varepsilon}{\check{\varepsilon}} g^{ab} \right). \tag{101}$$

Дальше будем считать, что связность Γ^a_{mn} имеет вид (39), а связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ — (87). Выражение $\check{\varepsilon}^{-1} = J$ будет иметь вид (56).

Преобразование скаляра кривизны. Из формулы (90) следует, что

$$R = g^{mn} (P^a_{mb} P^b_{an} - P_s P^s_{mn}) + \nabla_a \Omega^a, \tag{102}$$

где

$$\Omega^a = P_m g^{ma} - P^a_{mn} g^{mn}. \tag{103}$$

Функционал Гильберта и его вариация. Функционал Гильберта от метрического тензора g^{mn} равен

$$H = \int R \varepsilon \, dx^1 \ldots dx^N. \tag{104}$$

Закон (73) изменения тензора Риччи сразу дает вариацию δH. Действительно, свертывая (73) с тензором $\check{g}^{ln} = g^{ln} + \delta g^{ln}$ и пренебрегая квадратичными поправками, находим

$$\delta R = R_{ab} \delta g^{ab} - \nabla_a \omega^a, \tag{105}$$

где вектор ω^a аналогичен вектору (103):

$$\omega^a = g^{ma} \delta \Gamma^n_{mn} - g^{mn} \delta \Gamma^a_{mn}. \tag{106}$$

Из (78) и (77) следует

$$\delta \varepsilon = -\frac{1}{2} \varepsilon g_{ab} \delta g^{ab}. \tag{107}$$

Таким образом,

$$\delta H = \int (G_{ab} \delta g^{ab} - \nabla_a \omega^a) \varepsilon \, dx^1 \ldots dx^N. \tag{108}$$

Преобразование тензора Эйнштейна. Рассмотрим тензор

$$U^{ambn} = (\varepsilon J)^2 (g^{ab} g^{mn} - g^{an} g^{mb}), \tag{109}$$

где ε имеет вид (78), а $J = \check{\varepsilon}^{-1}$ — (56). Имеем

$$\left.\begin{aligned} U^{ajkb} R_{jk} &= (\varepsilon J)^2 (R^{ab} - R g^{ab}); \\ U^{akij} R^b_{ijk} &= 2 (\varepsilon J)^2 R^{ab}. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

С помощью этих формул и формул (89) и (91) преобразуем тензор (85) следующим образом:

$$\begin{aligned} 2 (\varepsilon J)^2 G^{ab} = U^{akij} (\check{\nabla}_j P^b_{ik} + P^b_{is} P^s_{jk}) + \\ + U^{ajkb} (\check{\nabla}_j P_k - \check{\nabla}_l P^l_{jk} + P_s P^s_{jk} - P^l_{js} P^s_{lk}). \end{aligned} \tag{111}$$

С другой стороны, на основании (75) и (95) находим

$$\begin{aligned} (\check{\nabla}_s + 2P_s) U^{ambn} = P^a_{sk} U^{kmbn} + P^m_{sk} U^{akbn} + \\ + P^b_{sk} U^{amkn} + P^n_{sk} U^{ambk}. \end{aligned} \tag{112}$$

Дальше обозначаем

$$U^{abn} = \check{\nabla}_m U^{ambn}, \quad U^{ab} = \check{\nabla}_n U^{abn}. \tag{113}$$

Из (112) следует

$$U^{abn} = P^b_{mk} U^{amkn} + P^n_{mk} U^{ambk} - P_m U^{ambn}. \tag{114}$$

Теперь находим

$$2 (\varepsilon J)^2 G^{ab} = U^{ab} + V^{ab}, \tag{115}$$

где

$$\begin{aligned} V^{ab} = U^{akij} P^b_{is} P^s_{jk} + U^{ajkb} (P_s P^s_{jk} - P^l_{js} P^s_{lk}) - \\ - P^b_{mk} \check{\nabla}_n U^{amkn} - P^n_{mk} \check{\nabla}_n U^{ambk} + P_m \check{\nabla}_n U^{ambn}. \end{aligned} \tag{116}$$

В последней формуле с помощью (112) можно избавиться от производных $\check{\nabla}_n$. В результате получается

$$V^{ab} = P^a_{km} P^b_{ln} U^{klmn} + A_{mn} U^{ambn} + B^a_{kmn} U^{bkmn} + B^b_{kmn} U^{akmn}, \tag{117}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{mn} &= 2 P_s P^s_{mn} - P^l_{mk} P^k_{ln} - P_m P_n; \\ B^a_{kmn} &= P^a_{km} P_n + P^s_{km} P^a_{sn}. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Полагая здесь $\check{\Gamma}^a_{ma} = 0$, получаем формулы Синга [31, с. 220].

Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля. Как и тензорное поле аффинной деформации

$$P^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^s} \frac{\partial^2 \tilde{x}^s}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right), \tag{119}$$

тензорное поле

$$t^{ab} = -\frac{c^4}{16\pi\gamma} (\varepsilon J)^{-2} V^{ab} \tag{120}$$

(где c — скорость света; γ — постоянная Ньютона) является функционалом карты $\tilde{K}$, в которой компоненты связности $\check{\Gamma}^a_{mn}$ равны нулю. Этот функционал называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Отметим, что значение таких функционалов не меняется при замене в их аргументах карты $\tilde{K}$ на любую линейно склеенную с $\tilde{K}$ карту $\tilde{\tilde{K}}$.

6. ПРОСТАЯ КАРТОГРАФИЯ

Аффинные карты. С помощью функций (5) мы задавали отображение $A_N \to A_N$: точке $(x^1, \ldots, x^N)$ ставилась в соответствие точка $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)$. Но те же функции можно использовать для определения аффинной карты арифметического пространства, считая, что в аффинной карте $\tilde{K}$ точка $(x^1, \ldots, x^N)$ арифметического пространства A_N имеет координаты $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N$ [см. (5)].

В частности, если $\Phi^a_b = \delta^a_b$ и $\Phi^a = 0$, то аффинная карта является главной картой K арифметического пространства. Однако с точки зрения аффинной геометрии нет различия между главной картой K и аффинной картой $\tilde{K}$.

Функция класса v. Однозначная действительная функция $\tilde{x} = f(x^1, \ldots, x^N)$ называется функцией класса v, если она и ее производные всех порядков $u \leqslant v$ существуют и непрерывны в каждой точке $(x^1, \ldots, x^N)$ арифметического пространства A_N. Здесь v может быть любым положительным целым числом.

Регулярное отображение класса v. Взаимно однозначное отображение $A_N \to A_N$ называется регулярным отображением класса v, если оно задается набором

$$\tilde{x}^a = f^a(x^1, \ldots, x^N), \ a \in \{1, \ldots, N\}, \tag{121}$$

функций класса v с якобианом

$$J = \frac{\partial(f^1, \ldots, f^N)}{\partial(x^1, \ldots, x^N)} = \det\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^b}\right), \tag{122}$$

не равным нулю всюду на множестве A_N. В частности, в случае (5)

$$J = \det(\Phi^a_b). \tag{123}$$

Простое многообразие класса v. Множество A_N с группой F_v регулярных отображений класса v называется простым многообразием класса v. Теория такого многообразия является теорией относительности (F_v, A_N).

Группа F_v включает в себя все линейные отображения (5) и многие другие, например:

$$\tilde{x}^a = x^a + \frac{1}{2}\sin x^a, \quad a \in \{1, \ldots, N\}. \tag{124}$$

Глобальные карты класса v. Функции (121) можно использовать для определения глобальной карты класса v, считая, что в глобальной карте точка $(x^1, \ldots, x^N)$ арифметического пространства A_N имеет координаты $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N$, заданные (121).

В частности, если

$$f^a(x^1, \ldots, x^N) = \sum_{b=1}^{N} \Phi^a_b x^b + \Phi^a, \quad a \in \{1, \ldots, N\}, \tag{125}$$

то глобальная карта класса v является аффинной. Однако с точки зрения теории относительности (F_v, A_N) нет различия между аффинной картой и глобальной картой класса v.

Ориентированное аффинное пространство. Аффинная группа Φ содержит подгруппу Φ^+ отображений с определителем (123), большим нуля. Множество A_N с группой Φ^+ называют ориентированным аффинным пространством. Теория такого пространства есть теория относительности (Φ^+, A_N).

Ориентированное простое многообразие класса v. Группа F_v регулярных отображений класса v содержит подгруппу F_v^+ отображений с якобианом (122), большим нуля. Множество A_N с группой F_v^+ называют ориентированным простым многообразием класса v. Теория такого многообразия есть теория относительности (F_v^+, A_N).

Правые и левые карты. Карта, получающаяся из главной преобразованием (121) с положительным якобианом, называется правой. Карта, получающаяся из главной преобразованием (121) с отрицательным якобианом, называется левой.

С точки зрения теории относительности (Φ, A_N) нет различия между левой и правой аффинными картами, а с точки зрения теории относительности (F_v, A_N) нет различия между левой и правой глобальными картами класса v.

Ориентирование простого многообразия. Множество глобальных карт простого многообразия разбивается на два класса по следующему признаку: если якобиан (122) преобразования (121) от карты K к карте $\tilde{K}$ больше нуля, то обе карты относятся к одному классу,

8—01278

а если он меньше нуля, то они относятся к противоположным классам. Называя один из двух таких классов правым, а другой левым, мы ориентируем многообразие.

Введение на простом многообразии структуры аффинного пространства. Множество глобальных карт простого многообразия разбивается на бесконечное множество классов по следующему признаку: если преобразование (121) от карты K к карте $\widetilde{K}$ линейное, то обе карты относятся к одному классу, а если оно нелинейное, то они относятся к разным классам. Называя один из таких классов аффинным, мы вводим на многообразии структуру аффинного пространства.

Пример неглобальной карты. В ряде задач оказываются удобными неглобальные карты простого многообразия. Например, бывают удобными полярные координаты r и φ, определяемые по формулам

$$x^1 = r\cos\varphi;\ x^2 = r\sin\varphi. \tag{126}$$

Они принимают значения из области $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$ и задают неглобальную карту. В отличие от глобальной одна такая карта не составляет атласа. Но уже двумя такими картами можно покрыть все многообразие, и они составляют атлас.

Пример системы уравнений в теории относительности $(F_3,\ A_N)$. Система уравнений

$$S^a_{mn} = 0, \quad R^a_{kln} = 0 \tag{127}$$

для N^3 функций Γ^a_{mn} от $x^1, \ldots, x^N$ инвариантна в теории относительности $(F_3,\ A_N)$.

Общее решение этой системы получается из частного решения

$$\Gamma^a_{mn}(x^1, \ldots, x^N) = 0 \tag{128}$$

с помощью регулярного отображения (121) класса $v = 3$ и закона преобразования (43) компонент аффинной связности. Общее решение удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial f^a}{\partial x^s}\Gamma^s_{mn} = \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^m\,\partial x^n}, \quad a \in \{1, \ldots, N\}. \tag{129}$$

Среди этих решений системы (127) есть решение (128), получающееся из (129) в случае (125).

7. БИМЕТРИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Биметрический формализм (кратко — биметризм) основывается на формулах, приведенных выше в разделе «Преобразование связности». В этом формализме считается, что Γ^a_{mn} и $\check{\Gamma}^a_{mn}$ являются связностями Кристоффеля для двух наперед заданных метрических тензоров g_{mn} и $\check{g}_{mn}$. Отсюда и название — биметрический формализм.

Конформное соответствие. Метрики g_{mn} и $\check{g}_{mn}$ находятся в конформном соответствии, если

$$\check{g}_{mn} = \Omega^2 g_{mn}, \tag{130}$$

где Ω — скалярная функция. В таком случае тензор (62) аффинной деформации равен (98) и равен

$$P^a_{mn} = \Omega^{-1} (\delta^a_n \Omega_m + \delta^a_m \Omega_n - \Omega^a g_{mn}), \tag{131}$$

где $\Omega_n = \partial_n \Omega$; $\Omega^a = g^{as}\Omega_s$. Ковектор (64) аффинной деформации равен

$$P_m = N\Omega^{-1}\Omega_m. \tag{132}$$

Эти формулы упрощаются, если записать Ω в виде

$$\Omega = \Omega_0 e^{-\psi}, \tag{133}$$

где $\Omega_0 = \mathrm{const}$, ψ — скалярная функция. Согласно (63), (131) и (133)

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + \delta^a_k \psi_{ln} - \delta^a_l \psi_{kn} + \psi^a_k g_{ln} - \psi^a_l g_{kn}, \tag{134}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \psi_{kn} &= \nabla_k \nabla_n \psi + \psi_k \psi_n - \frac{1}{2} (\psi, \psi) g_{kn}; \\ \psi^a_n &= g^{as}\psi_{sn}; \quad \psi_n = \partial_n \psi; \quad \psi^a = g^{as}\psi_s; \\ (\psi, \psi) &= g^{mn}\psi_m \psi_n. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Отсюда получаем

$$\check{R}_{ln} = R_{ln} + (N-2)\psi_{ln} + \psi^a_a g_{ln}; \tag{136}$$

$$\Omega^2 \check{R} = R + 2(N-1)\psi^a_a, \tag{137}$$

где

$$\psi^a_a = \Box\psi + \frac{2-N}{2}(\psi, \psi), \quad \Box\psi = g^{mn}\nabla_m \nabla_n \psi. \tag{138}$$

Параметры Бельтрами. Дифференциальным параметром Бельтрами первого рода для скалярной функции ψ называется квадрат (ψ, ψ) ее градиента, входящий в формулы (135).

Дифференциальный параметр Бельтрами второго рода $\Box\psi$ для скалярной функции ψ входит в формулы (138). Его можно представить в виде

$$\Box\psi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\varepsilon g^{ab} \frac{\partial \psi}{\partial x^b} \right), \tag{139}$$

где ε обозначено (78).

Уравнение Клейна — Фока в римановом мире. Если в оригинальном уравнении Клейна — Фока заменить частные производные ковариантными, то получится уравнение

$$\Box\phi + (mc/\hbar)^2\,\phi = 0. \tag{140}$$

Вместо (140) надо рассматривать, однако, уравнение

$$\Box\phi - \frac{N-2}{4(N-1)}\,R\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi = 0, \tag{141}$$

ввиду того, что последнее конформно инвариантно при $m = 0$ [32]. Действительно, полагая

$$\check{\phi} = \Omega^{(2-N)/2}\phi, \tag{142}$$

получаем

$$\Omega^{(N+2)/2}\check{\Box}\check{\phi} = \Box\phi + \frac{N-2}{2}\left[\Box\psi - \frac{N-2}{2}(\psi,\psi)\right]\phi. \tag{143}$$

Сравнивая это с формулами (137), (138), находим тождество

$$\left(\Box - \frac{N-2}{4(N-1)}\,R\right)\phi = \Omega^{\frac{N+2}{2}}\left(\check{\Box} - \frac{N-2}{4(N-1)}\,\check{R}\right)\Omega^{\frac{2-N}{2}}\phi, \tag{144}$$

которое и доказывает сделанное утверждение.

Уравнение (141) соответствует классическому

$$g^{mn}P_mP_n = m^2c^2, \tag{145}$$

так что оператор квадрата импульса равен

$$-\hbar^2\left(\Box - \frac{N-2}{4(N-1)}\,R\right). \tag{146}$$

Тензор энергии-импульса по Гильберту. Гильберт определил тензор энергии-импульса материи [33] как вариационную производную от функции действия по метрическому тензору:

$$\delta S = \frac{1}{2}\int T_{mn}\delta g^{mn}\,dv, \tag{147}$$

где $dv = \varepsilon\, dx^1 \ldots dx^N$.

Рассмотрим это определение на примере скалярного поля ϕ. Действие поля запишем в виде

$$S^{(A)} = \int \mathcal{L}^{(A)}dv, \tag{148}$$

где $A = 1$, если поле удовлетворяет уравнению (140), и $A = 2$, если поле удовлетворяет уравнению (141). При этом

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{1}{2}\left[(\phi,\phi) - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2\right];\\ \mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}^{(1)} + \frac{N-2}{8(N-1)}\,R\phi^2.\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Канонический тензор энергии-импульса

$$T^{(A)}_{mn} = \phi_m \phi_n - \mathcal{L}^{(A)} g_{mn}. \tag{150}$$

При $A = 1$ он совпадает с тензором Гильберта, а при $A = 2$ не совпадает. Во втором случае тензор энергии-импульса Гильберта равен [32]

$$T_{mn} = T^{(2)}_{mn} + \frac{N-2}{4(N-1)} \{R_{mn} - \nabla_m \nabla_n + g_{mn} \Box\} \phi^2. \tag{151}$$

Этот тензор обладает следующими свойствами:

$$T_{mn} = T_{nm}, \quad g^{mn} T_{mn} = \left(\frac{mc}{\hbar} \phi\right)^2, \quad \nabla_n T^{na} = 0. \tag{152}$$

Замечательно, что и в мире Минковского, когда тензор кривизны равен нулю, он отличается от канонического тензора, хотя в этом случае уравнения (140) и (141), очевидно, совпадают.

В связи с этим допустим, что кто-нибудь хочет работать, оставаясь в рамках СТО, и не хочет знать об ОТО вместе с римановой геометрией. Дает ли ОТО и ему что-нибудь полезное? Отвечаю: дает. Например, она дает ему нужный тензор энергии-импульса: ведь чтобы взять вариационную производную по метрическому тензору, необходимо выйти за рамки евклидовой геометрии, а стало быть, и за рамки СТО. Получив нужное, можно вновь ограничить себя удобными рамками.

8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Вопрос о гармонических координатах вновь оказался актуальным в связи с появлением РТГ * [34—37]. Поэтому постараемся изложить теорию гармонических координат как можно проще, не ссылаясь на предыдущий материал.

Гармонические координаты введены Эйнштейном [38] в случае слабых гравитационных полей, а затем де Дондером [39] и Ланчосом [40] в общем случае. С большим успехом они применялись В. А. Фоком [41]. Интересны также в этом направлении работы Розена [42], Папапетру [43], Гупты [44], Р. А. Асанова [45] и других.

В двумерном случае ортогональные гармонические координаты называются изометрическими. Они хорошо изучены [46]. Интересны также координаты, в которых определитель метрического тензора постоянен. Они применялись Эйнштейном на ранних этапах развития ОТО и Шварцшильдом [47] при выводе метрики, носящей его имя. Аналогичные координаты можно ввести в общем случае пространств эквиаффинной связности. Мы будем называть их эквиаффинными.

* РТГ — релятивистская теория гравитации.

Тензор аффинной деформации, порожденный картой. Аффинная связность задается компонентами Γ^a_{mn}, преобразующимися по правилу

$$\Gamma^a_{mn} = \left(\tilde{\Gamma}^b_{pq} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^b}{\partial x^m \partial x^n}\right) \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \tag{153}$$

при переходе от одной координатной карты к другой. Простейшим примером является координатная связность

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial^2 \tilde{x}^b}{\partial x^m \partial x^n}, \tag{154}$$

порожденная картой $\tilde{x}$, в которой ее компоненты равны нулю. Разность

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} = -\tilde{\Gamma}^b_{pq} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^n} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \tag{155}$$

является тензором (частный вид тензора аффинной деформации; мы называем его тензором аффинной деформации, порожденным картой $\tilde{x}$). Для координаты $\tilde{x}^a$ (поскольку любая координата является скалярной функцией)

$$\nabla_m \nabla_n \tilde{x}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^s} P^s_{mn}, \quad P^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \nabla_m \nabla_n \tilde{x}^b. \tag{156}$$

Другим примером является связность Кристоффеля, выражающаяся через метрический тензор $g_{ab}\, dx^a \otimes dx^b = \tilde{g}_{mn}\, d\tilde{x}^m \otimes d\tilde{x}^n$. В этом случае определяется второй дифференциальный параметр Бельтрами. Для координаты $\tilde{x}^a$ он равен

$$\Box \tilde{x}^a = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\varepsilon g^{mn} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^n}\right) = g^{mn} \nabla_m \nabla_n \tilde{x}^a, \tag{157}$$

где $\varepsilon = \sqrt{|g|}$. Имеем вектор

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \check{\nabla}_b (\tilde{\varepsilon} g^{ab}) = \frac{1}{\varepsilon} \check{\nabla}_b (\varepsilon g^{ab}), \tag{158}$$

поскольку ковариантная производная $\check{\nabla}_b$ от якобиана $\left|\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b}\right|$ равна нулю. В базисе $\partial/\partial \tilde{x}^a$ его компоненты равны

$$\Box \tilde{x}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^s} \Phi^s = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^b} (\tilde{\varepsilon} \tilde{g}^{ab}) = -\tilde{g}^{mn} \tilde{\Gamma}^a_{mn}. \tag{159}$$

Координаты $\tilde{x}^a$ называются гармоническими, если все $\Box \tilde{x}^a = 0$, что эквивалентно ковариантному условию: все $\Phi^a = 0$.

Третьим примером является эквиаффинная связность, когда

$$\Gamma_m = \Gamma^a_{ma} = \partial_m \ln \varepsilon, \tag{160}$$

где ε меняется по правилу

$$\varepsilon = \frac{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)}{\partial(x^1, \ldots, x^N)} \tilde{\varepsilon} \tag{161}$$

при замене карты $\tilde{K}$ картой K. В этом случае ковектор аффинной деформации градиентен:

$$P_m = P^a_{ma} = \partial_m \ln \tilde{\varepsilon}. \tag{162}$$

В эквиаффинных координатах $\tilde{\varepsilon} = \text{const}$ и $P_m = 0$.

Гармоническая карта Эйнштейна. В случае слабого гравитационного поля Эйнштейн полагал, что компоненты g_{ab} равны [38]

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \Delta_{ab}, \tag{163}$$

где η_{ab} не зависят от координат, а Δ_{ab} очень малые величины. С точностью до первого порядка малости

$$g = \eta\,(1 + \Delta^s_s), \quad g^{ab} = \eta^{ab} - \Delta^{ab}, \tag{164}$$

где η — определитель матрицы (η_{ab}), числа η^{ab} находятся из условия $\eta^{ak}\eta_{kb} = \delta^a_b$ и

$$\Delta_{as}\eta^{sb} = \Delta^b_a = \eta_{as}\Delta^{sb}. \tag{165}$$

Согласно (164)

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x^b}(\varepsilon g^{ab}) = -\frac{\partial}{\partial x^b}\theta^{ab}, \tag{166}$$

где

$$\theta^{ab} = \Delta^{ab} - \frac{1}{2}\Delta^s_s\eta^{ab}. \tag{167}$$

Условия гармоничности $\Phi^a = 0$ в данном случае означают как раз те самые условия

$$\frac{\partial}{\partial x^b}\theta^{ab} = 0, \tag{168}$$

которые накладывал Эйнштейн на метрику (163). Они означают, что декартовы координаты для метрики

$$d\check{s}^2 = \eta_{ab}\,dx^a \otimes dx^b \tag{169}$$

являются гармоническими координатами для метрики

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a \otimes dx^b. \tag{170}$$

Заметим, что связность Кристоффеля для метрики (169) является координатной связностью.

Гармоническая карта Фока. Метрика Шварцшильда в гармонической карте Фока имеет вид

$$ds^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\alpha}\,c^2\,dt^2 - \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\alpha)^2}{x^2+y^2+z^2}\,(dx^2+dy^2+dz^2) - \\ -\alpha^2\,\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\alpha}\,\frac{(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}. \qquad (171)$$

В связи с этим Фок писал: «...сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x, y, z? Нам представляется единственно правильным второе определение» [10, с. 273].

Как видно, Фок придавал реальный смысл связности $\check{\Gamma}^a_{mn}$, компоненты которой в выбранной им карте равны нулю. Такая связность наделяет мир Шварцшильда структурой аффинного пространства, но не дает никакой информации о группе Лоренца. Однако дальше Фок писал: «*В случае изолированной системы масс существует координатная система, а именно гармоническая, которая определяется путем наложения добавочных условий однозначно, с точностью до преобразований Лоренца*» [10, с. 445].

Отсюда можно сделать вывод (который мы и сделали в [6]), что вместе с метрикой Шварцшильда (171) Фок рассматривал метрику

$$d\check{s}^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (172)$$

хотя и не сообщил об этом в своей книге [10].

Но и Эйнштейн в статье [38] вместе с метрикой де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)c^2\,dt^2 - \left(1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (173)$$

рассматривал метрику Минковского (172), а при больших значениях суммы квадратов $x^2+y^2+z^2$ метрика Шварцшильда переходит в метрику де Ситтера.

Таким образом, подход Эйнштейна к проблеме тяжелого источника гравитационного поля отличается от подхода Фока в несущественном, только в том, что первый рассматривал поле вдали от источника, а второй — всюду в области $x^2+y^2+z^2 > \alpha^2$. По сути же подход Фока в этой проблеме совпадает с подходом Эйнштейна.

Заканчивая обзор, не можем не согласиться с бытующим мнением, что теория относительности запутанна:

«ДАР * (размышлял в этот вечер циник Дормэс Джессэп) — это довольно крупная организация, такая же путаная, как теософия,

* ДАР — Дочери американской революции.

теория относительности или фокусы индусских факиров. И все они в чем-то схожи» [48, с. 9].

Кому-то посчастливится ее распутать?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Эйнштейн А.** Что такое теория относительности? (1919). Собр. науч. трудов. Т. 1: Пер. с нем. М.: Наука, 1965. С. 677—681.
2. **Широков П. А.** Н. И. Лобачевский как творец новой геометрической системы (1943), Избр. работы по геометрии. Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1966. С. 419—428.
3. **Котельников А. П.** Принцип относительности и геометрия Лобачевского (1923). In memoriam Lobatchevskii. Т. 2. Казань: Главнаука, 1927. С. 37—66.
4. **Пуанкаре А.** Теория фуксовых групп (1882). Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей: Пер. с фр. М.: Гостехтеориздат, 1956. С. 304—306.
5. **Черников Н. А.** О необходимости создания толкового словаря для гравитационистов. Препринт ОИЯИ Р2-85-157. Дубна, 1985; **Проблемы** теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 17. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 24—33.
6. **Черников Н. А.** О трудностях в релятивистской теории гравитации//Тр. VII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ Д-2-84-366. Дубна, 1984. С. 382—410.
7. **Черников Н. А.** Опыт составления словаря для гравитационистов//Тр. рабочего совещания по созданию излучателя и детектора гравитационных волн. ОИЯИ Р-85-667. Дубна, 1985. С. 119—128.
8. **Лихнерович А.** Теория связностей в целом и группы голономий: Пер. с фр. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
9. **Бёрке У.** Пространство — время, геометрия, космология; Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
10. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехтеориздат, 1955.
11. **Черников Н. А.** Общий принцип относительности в квантовой теории поля//Материалы III совещания по нелокальной теории поля. ОИЯИ Д2-7161. Дубна, 1973. С. 218—244.
12. **Саакян Г. С.** Пространство — время и гравитация. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1985.
13. **Боголюбов П. Н., Писарев А. Ф., Шавохина Н. С.** Излучение и детектирование гравитационных волн в лабораторных условиях. Сообщения ОИЯИ Р13-81-95. Дубна, 1981.
14. **Боголюбов П. Н., Писарев А. Ф., Шавохина Н. С.** Когерентное излучение гравитационных волн электромагнитными полями в направляющих системах. Сообщения ОИЯИ Р2-81-494. Дубна, 1981.
15. **Клейн Ф.** Эрлангенская программа (1872): Пер. с нем. см. [4, с. 399—434].
16. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств: Пер. с нем. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
17. **Курош А. Г.** Теория групп. М.: Наука, 1967.
18. **Дьёдонне Ж., Керол Дж., Мамфорд Д.** Геометрическая теория инвариантов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
19. **Клейн Ф.** Неевклидова геометрия: Пер. с нем. М.—Л.: ОНТИ, 1936.
20. **Веблен О., Уайтхед Дж.** Основания дифференциальной геометрии: Пер. с англ. М.: Из-во иностр. лит., 1949.
21. **Черников Н. А.** Введение геометрии Лобачевского в пространство инерциальных систем. Сб. научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 39—45.
22. **Черников Н. А.** Геометрия Лобачевского и релятивистская механика. ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. Вып. 3. С. 773—810.
23. **Фонвизин Д. И.** Собр. соч. Т. 1. М.—Л.: ГИХЛ, 1959. С. 223—259.
24. **Черников Н. А.** Введение геометрии Лобачевского в механику и закон всемирного тяготения. Сообщения ОИЯИ Р2-80-776. Дубна, 1980.

25. **Лобачевский Н. И.** О началах геометрии. См. [4, с. 27—49].
26. **Лобачевский Н. И.** Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. См. [4, с. 61—70].
27. **Черников Н. А.** Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле//ДАН СССР. 1962. Т. 144. № 1. С. 89—92.
28. **Аппель П.** Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. С. 335—351.
29. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. М.:Изд-во МГУ, 1974.
30. **Норден А. П.** Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
31. **Синг Дж.** Общая теория относительности: Пер с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
32. **Chernikov N. A., Tagirov E. A.** Quantum theory of scalar field in de Sitter space — time//Ann. Inst. Henri Poincare. 1968. Vol. IX. № 2, P. 109—141. Section A: Physique theorique.
33. **Гильберт Д.** Основания физики (1915): Пер с нем. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 589—598.
34. **Логунов А. А., Власов А. А.** Пространство Минковского как основа физической теории гравитации//ТМФ. 1984. Т. 60, № 1. С.3—8.
35. **Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Релятивистская теория гравитации/ТМФ. 1984. Т. 61, № 3, С. 327—345.
36. **Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
37. **Логунов А. А.** Релятивистская теория гравитации и новые представления о пространстве-времени. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
38. **Эйнштейн А.** О гравитационных волнах (1918). Собр. науч. трудов. Т.1. М.: Наука, 1965. С. 631—646.
39. **De Donder Th.** La Cravifique einsteinienne. Paris. 1921.
40. **Lanczos K.** Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen//Phys. Zs. Leipzig, 1922. № 24. S. 537—539.
41. **Фок В. А.** О движении конечных масс в общей теории относительности// ЖЭТФ. 1939. Т. 9, вып. 4. С. 375—410.
42. **Rosen N.** General Relativity and Flat Space//Phys. Rev. 1940. Vol. 57. P. 147—153.
43. **Papapetrou A.** Einstein's theory of gravitation and flat space//Proc. Roy. Irish Acad. 1948. Vol. A52, № 11. P. 12—23.
44. **Gupta S.**//Proc. Phys. Soc. 1952. Vol. A65. P. 608—619. Русск. пер. **Гупта С.** Квантование гравитационного поля. Общая теория//Новейшие проблемы гравитации. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 341—360.
45. **Асанов Р. А.** Замечание к точному решению задачи о гравитационном поле точечной массы. Сообщения ОИЯИ Р2-86-525. Дубна, 1986.
46. **Норден А. П.** Теория поверхностей. Учеб. для ун-тов и пед. ин-тов. М.: Гостехиздат, 1956.
47. **Schwarzschild K.** Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinischen Theorie. Sitz. preuss. Acad. Wiss. 1916. S. 189.//Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Русск. пер. М.: Мир, 1979. С. 199—207.
48. **Синклер Льис.** У нас это невозможно. Собр. соч. в 9 томах, Т. 6: Пер с англ. М.: Правда, 1965.