«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1988, ТОМ 19, ВЫП. 6

УДК 538.941

К ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, А. А. Яценко
Харьковский физико-технический институт АН УССР, Харьков

А. А. Рожков
Харьковский государственный университет им. А. М. Горького, Харьков

В работе используется ферми-жидкостный подход, основанный на идее обобщения метода самосогласованного поля к сверхтекучим системам. Теория ферми-жидкости как для нормального, так и для сверхтекучего состояний строится на основе общего выражения для энергии как функционала нормальной и аномальной функций распределений фермионов. Изучены свойства симметрии функционала энергии, существенные для описания сверхтекучести. Из принципа экстремальности энтропии как функционала нормальной и аномальной функций распределения получено уравнение самосогласования для равновесной функций распределения в матричном виде. В приближении слабого ферми-жидкостного взаимодействия из этого уравнения следуют результаты теории БКШ — Боголюбова. Построена идеальная гидродинамика сверхтекучей ферми-жидкости без предположения о галилеевой инвариантности системы.

In the present paper the Fermi-liquid approach based on the idea of the generalization of the selfconsistent field method is developed for the superfluid systems. The Fermi-liquid theory of the normal and the superfluid states is constructed using the general expression for the energy as a functional of the normal and the abnormal distribution fermion functions. The energy functional symmetry properties essential in the description of the superfluid systems are studied. The selfconsistent equation for the equilibrium distribution function in the matrix form is obtained from the extreme entropy principle. The BCS-Bogolyubov theory results can be derived from this equation in the approximation of the weak Fermi-liquid interaction. The superfluid Fermi-liquid ideal hydrodynamics is constructed without assuming the galilean invariance of the system.

ВВЕДЕНИЕ

Построение термодинамики и гидродинамики сверхтекучей жидкости на основе микроскопической теории связано с использованием квазисредних [1] и метода сокращенного описания [2] (см., например обзор [3]). Эти методы позволяют изучать слабонеоднородные состояния систем со спонтанно нарушенной симметрией без использования особых модельных представлений. Однако для получения более конкретных результатов (включая температурные зависимости различных физических величин) желательно распространить на сверхтекучие системы некоторые модели и методы, оправдавшие себя для нормальных состояний. В настоящей работе в качестве такого метода используем ферми-жидкостный подход, основанный на идее обобщения метода самосогласованного поля.

Как известно, теория ферми-жидкости для жидкого ^{3}He в нормальном состоянии была развита Ландау [4], а для электронов нормальных металлов — Силиным [5]. Влияние ферми-жидкостных амплитуд нормального состояния на сверхтекучие свойства рассматривалось в работе Леггетта [6].

Однако естественно предполагать, что в теорию сверхтекучей ферми-жидкости на равных правах должны входить как ферми-жидкостные амплитуды нормального состояния, так и ферми-жидкостные амплитуды сверхтекучего состояния. В качестве обобщения этой идеи представляет интерес построить теорию ферми-жидкости, вообще, без явного использования ферми-жидкостных амплитуд на основе только общего выражения для функционала энергии.

В этой работе будет развита полуфеноменологическая теория сверхтекучей ферми-жидкости. Она с единой точки зрения описывает как сверхтекучее, так и нормальное состояния ферми-жидкости. Это достигается благодаря введению наряду с нормальной функцией распределения также и аномальных функций распределения фермионов. Нормальная и аномальная функции распределения, являющиеся матрицами в импульсном и спиновом пространствах, объединяются в суперматрицу $\hat{f}$. Это объединение использовалось многими авторами (см. работу Намбу [7], а также [8, 9]).

Введение в теорию аномальных функций распределения эквивалентно использованию метода квазисредних в последовательной микроскопической теории.

Ферми-жидкостный подход к теории сверхтекучести существенно связан с заданием энергии системы $E(\hat{f})$ как функционала нормальной и аномальной функций распределений, вариационная производная которого определяет гамильтониан элементарных возбуждений сверхтекучих систем. В работе изучены свойства симметрии функционала энергии $E(\hat{f})$, важные для всего ферми-жидкостного подхода к теории сверхтекучести. Найдено выражение для энтропии, представляющее собой функционал нормальной и аномальной функций распределения фермионов, которое обобщает комбинаторное выражение энтропии идеального ферми-газа. Из принципа экстремальности энтропии получено уравнение самосогласования для равновесной функции распределения в матричном виде, имеющее более прозрачный физический смысл, нежели обычно используемые формы уравнения самосогласования, и представляющее собой обобщение обычно используемых уравнений самосогласованного поля. В приближении слабого ферми-жидкостного взаимодействия полученные результаты переходят в результаты теории БКШ — Боголюбова. Из вариационного принципа, определяющего равновесные функции распределения, найдены равновесные потоки аддитивных интегралов движения в терминах равновесного термодинамического потенциала. С учетом принципа локальности состояния статистического равновесия построена идеальная гидродинамика сверхтекучей ферми-жидкости без предположения о галилеевой инвариантности системы.

1. ЭНТРОПИЯ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

В основе обычной теории ферми-жидкости [1] лежат понятие энергии $E = E(f)$ как функционала от «функции распределения» $f \equiv \{f_{12}\}$ квазичастиц (фермионов) и комбинаторное выражение для энтропии

$$S = -\mathbf{tr}\,(f \ln f + (1 - f) \ln (1 - f)) \tag{1}$$

(tr — след по одночастичным состояниям; $1 \equiv p_1, \sigma_1$; $2 \equiv p_2, \sigma_2$ — квантовые числа фермионов). Из принципа максимума энтропии при фиксированных значениях энергии E и числа частиц N легко получить уравнение самосогласования:

$$f = \{\exp (Y_0 \varepsilon (f) + Y_4) + 1\}^{-1}, \quad \varepsilon (f) = \delta E\,(t)/\delta f, \tag{2}$$

описывающее равновесное состояние ферми-жидкости. Здесь Y_0, Y_4 — множители Лагранжа, определяющие термодинамическое состояние; $\varepsilon(f)$ — энергия квазичастицы.

Заметим, что выражение для комбинаторной энтропии (1) можно записать в больцмановском виде $S = -\mathrm{Sp}\,\hat f \ln \hat f$, если считать, что фермионная «функция распределения» $\hat f$ определяется матрицей в некотором расширенном пространстве состояний $\hat f = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1-\tilde f \end{pmatrix}$ (тильда означает операцию транспонирования).

Для описания сверхтекучей ферми-жидкости кроме обычной фермионной «функции распределения» $f_{12} \equiv \mathrm{Sp}\,\rho a_2^+ a_1$ необходимо ввести аномальные «функции распределения» $g_{12} \equiv \mathrm{Sp}\,\rho a_2 a_1$, $g_{12}^+ \equiv \mathrm{Sp}\,\rho a_2^+ a_1^+$ (ρ — неравновесный статистический оператор; a_1, a_1^+ — операторы уничтожения и рождения фермионов в состоянии $1 \equiv p, \sigma$).

Состояние идеального неравновесного газа квазичастиц при наличии аномальных средних определяется неравновесным статистическим оператором [10]

$$\rho_0 (f, g, g^+) = \exp (\Omega - F),$$
$$F = \sum_{12} \left(a_1^+ A_{12} a_2 + \frac{1}{2} a_1^+ B_{12} a_2^+ + \frac{1}{2} a_1 B_{12}^+ a_2 \right), \tag{3}$$

где величины f, g, g^+ и A, B, B^+ связаны между собой соотношениями

$$\operatorname{Sp}\rho_0(f, g, g^+)\, a_1^+ a_2 = f_{21};\ \operatorname{Sp}\rho_0(f, g, g^+)\, a_1 a_2 = g_{21};$$
$$\operatorname{Sp}\rho_0(f, g, g^+)\, a_1^+ a_2^+ = g_{21}^+. \tag{4}$$

Неравновесный статистический оператор (3) характеризуется тем, что для средних $\operatorname{Sp}\rho_0 a_1^+ a_2^+ \ldots a_n$ справедливы правила Вика, в которых в качестве связей фигурируют нормальные и аномальные средние (4). Например,

$$\operatorname{Sp}\rho_0 a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 = f_{32} f_{41} - f_{31} f_{42} + g_{21}^+ g_{43}. \tag{5}$$

Отсутствие корреляций в средних и характеризует состояние, описываемое статистическим оператором (3) как состояние идеального неравновесного газа квазичастиц.

Можно показать (см. приложение), что энтропия такого состояния, $S = -\operatorname{Sp}\rho_0 \ln \rho_0$, определяется формулой

$$S = -\operatorname{Sp}\hat{f}\ln\hat{f},\ \hat{f} = \begin{pmatrix} f & g \\ g^+ & 1-\tilde{f} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где шпур берется в расширенном пространстве, в котором действуют матрицы $\hat{f}$. Матрицу (6) будем называть статистическим оператором неравновесной ферми-жидкости. Величины f, g, входящие в $\hat{f}$, удовлетворяют соотношениям

$$f^+ = f;\ \tilde{g} = -g.$$

Найдем общий класс унитарных преобразований, оставляющих инвариантной отмеченную структуру оператора $\hat{f}$:

$$\hat{f} \to \hat{f}' = U^+\hat{f}U,\ \hat{f}' = \begin{pmatrix} f' & g' \\ g'^+ & 1-\tilde{f}' \end{pmatrix},\ f'^+ = f',\ \tilde{g}' = -g'. \tag{7}$$

Ясно, что операторы U образуют группу. Поэтому достаточно изучить только инфинитезимальные операторы $T = T^+$ этой группы, $U = 1 + \mathrm{i}T$. Легко видеть, что оператор T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} R & \underline{R} \\ \underline{R}^+ & -\tilde{R} \end{pmatrix},\ R^+ = R,\ \tilde{\underline{R}} = -\underline{R},$$

и, следовательно, унитарный оператор U, сохраняющий структуру $\hat{f}$ [см. (6)], всегда можно представить в форме

$$U = \exp \mathrm{i}\begin{pmatrix} R & \underline{R} \\ \underline{R}^+ & -\tilde{R} \end{pmatrix},\ R^+ = R,\ \tilde{\underline{R}} = -\underline{R} \tag{8}$$

[мы опустили в этой формуле произвольный фазовый множитель $\exp(\mathrm{i}\gamma)$].

Так как физические величины являются генераторами унитарных преобразований, то оператор физической величины A в теории сверхтекучей ферми-жидкости должен иметь структуру

$$A=\begin{pmatrix} a & \underline{a} \\ \underline{a}^{+} & -\tilde{a} \end{pmatrix}, \quad a=a^{+}, \quad \underline{a}=-\tilde{\underline{a}} . \tag{9}$$

Легко видеть, что коммутатор операторов двух физических величин

$$A=\begin{pmatrix} a & \underline{a} \\ \underline{a}^{+} & -\tilde{a} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b & \underline{b} \\ \underline{b}^{+} & -\tilde{b} \end{pmatrix}$$

имеем вид

$$\mathrm{i}\,[A,\ B]=C, \quad C=\begin{pmatrix} c & \underline{c} \\ \underline{c}^{+} & -\tilde{c} \end{pmatrix},$$

где

$$c=\mathrm{i}\,[a,\ b]+\mathrm{i}\,(\underline{a}\underline{b}^{+}-\underline{b}\underline{a}^{+}); \quad \underline{c}=\mathrm{i}\,(a\underline{b}-\underline{a}\tilde{b})-\mathrm{i}\,(b\underline{a}-\underline{b}\tilde{a}).$$

Из этих формул следует, что $c = c^{+}$, $\tilde{\underline{c}} = -\underline{c}$. Поэтому операторы физических величин (9) образуют алгебру. (Это также непосредственно следует из свойств генераторов T рассматриваемой унитарной группы.)

Нетрудно показать, что матрицу U можно представить в виде

$$U=\begin{pmatrix} u & v \\ v^{*} & u^{*} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где в силу унитарности U

$$uu^{+}+vv^{+}=1; \quad u\tilde{v}+v\tilde{u}=0 \tag{11}$$

[формулы (11) также следуют из структуры матриц (8) в случае бесконечно малых R, $\underline{R}$ и из того, что матрицы U образуют группу]. Эти формулы показывают, что рассматриваемые унитарные преобразования тождественны u — v-преобразованиям Боголюбова (см. приложение).

Легко видеть, что при унитарном преобразовании U произвольная физическая величина A преобразуется согласно формулам

$$A\to A'=UAU^{+}; \quad A'=\begin{pmatrix} a' & \underline{a}' \\ \underline{a}'^{+} & -\tilde{a}' \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$a'=uau^{+}+v\underline{a}^{+}u^{+}+u\underline{a}v^{+}-\tilde{v}av^{+}\equiv a'^{+}; \quad \underline{a}'=ua\tilde{v}+v\underline{a}^{+}\tilde{v}+$$
$$+u\underline{a}\tilde{u}-v\tilde{a}\,\tilde{u}\equiv -\tilde{\underline{a}}'.$$

В частности, при обычном унитарном преобразовании $U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

$$a' = uau^+; \quad \underline{a}' = u\underline{a}\tilde{u}.$$

С помощью унитарного преобразования U всегда можно обратить в нуль величину g' в формуле (7) или величину $\underline{a}'$ в формуле (12).

Докажем теперь лемму, которая нам будет необходима при построении термодинамики ферми-жидкости.

Лемма: Статистический оператор $\hat{f}$ всегда можно представить в виде

$$\hat{f} = (e^{\hat{Q}} + 1)^{-1}, \tag{13}$$

где матрица $\hat{Q}$ связана с энтропией S [см. (6)] соотношением

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & -\tilde{A} \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \frac{\partial S}{\partial f_{21}}; \quad B_{12}^+ = 2\frac{\partial S}{\partial g_{21}}. \tag{14}$$

Действительно, согласно только что сделанному замечанию, можно подобрать унитарный оператор U таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$U^+\hat{f}U = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1-\tilde{n} \end{pmatrix} \equiv \hat{f}_0. \tag{15}$$

Представляя оператор n в виде $n = (e^{A_0} + 1)^{-1}$, получаем

$$\hat{f}_0 = (e^{\hat{Q}_0} + 1)^{-1}, \quad \hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому согласно (15) статистический оператор $\hat{f}$ можно представить в виде

$$\hat{f} = (e^{\hat{Q}} + 1)^{-1}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ B^+ & -\tilde{A} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{Q} = U\hat{Q}_0U^+.$$

Из (15) следует, что энтропия S имеет вид

$$S = -\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 = -\mathrm{tr}\,(n \ln n + (1-n)\ln(1-n)),$$

и, следовательно,

$$\delta S = -\mathrm{tr}\,\delta n \ln \frac{n}{1-n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\delta\hat{f}_0\hat{Q}_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,U\delta\hat{f}_0U^+\hat{Q}.$$

Но согласно (15)

$$\delta\hat{f} = U\delta\hat{f}_0U^+ + \delta UU^+\hat{f} + \hat{f}U\delta U^+ = U\delta\hat{f}_0U^+ + [\delta UU^+,\ \hat{f}]$$

(мы учли, что $U\delta U^+ = -\delta U U^+$). Так как $[\hat{f}, \hat{Q}] = 0$, то

$$\delta S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \delta \hat{f} \hat{Q}. \tag{16}$$

Замечая, что $\delta\hat{f} = \begin{pmatrix} \delta f & \delta g \\ \delta g^+ & -\delta\tilde{f} \end{pmatrix}$ мы и приходим к формулам (13), (14).

2. ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ И ЕГО СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

В основе ферми-жидкостного подхода лежит задание энергии системы как функционала нормальной и аномальных функций распределения $E = E(f, g, g^+) \equiv E(\hat{f})$. Наряду с полной энергией введем также функционал плотности энергии $\mathscr{E}(x; f, g, g^+) \equiv \equiv \mathscr{E}(x; \hat{f})$;

$$\mathscr{E}(x; f, g, g^+) \equiv \mathscr{E}(x; \hat{f});$$

$$E(\hat{f}) = \int_V d^3x\, \mathscr{E}(x; \hat{f})$$

(V — объем системы). Сформулируем свойства симметрии функционала $\mathscr{E}(x; \hat{f})$ [а следовательно, и $E(\hat{f})$] относительно фазовых и спиновых преобразований, а также относительно преобразований пространственных трансляций.

Среднее значение некоторой физической величины a, относящейся к фермиону, можно представить в виде

$$\langle a \rangle = \operatorname{tr} fa = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f} \hat{a}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\tilde{a} \end{pmatrix} \tag{17}$$

(мы при этом пренебрегли слагаемым $\operatorname{tr} a$, которое не зависит от $\hat{f}$ и, следовательно, не дает вклада в изменение величины $\langle a \rangle$). Так как операторами числа частиц, спина и импульса электрона являются операторы $1, s_i, p_i$, то соответствующие операторы в ферми-жидкостном подходе имеют вид

$$\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & -\tilde{s}_i \end{pmatrix}; \quad \hat{p}_i = \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & -\tilde{p}_i \end{pmatrix}$$

$\left(s_i = \frac{1}{2}\sigma_i;\ \sigma_i \text{ — матрицы Паули}\right)$.

Оператор $\hat{\tau}_3$ представляет собой генератор фазового унитарного преобразования

$$U_\varphi = \exp i\ \varphi\hat{\tau}_3.$$

Оператор $\hat{s}_i$ представляет собой генератор спиновых вращений

$$U_\omega = \exp i\ \omega_k \hat{s}_k.$$

Наконец, оператор $\hat{p}_i$ представляет собой генератор пространственных трансляций

$$U_y = \exp \mathrm{i} y_k \hat{p}_k.$$

В соответствии с (8) при этих преобразованиях величины f, g преобразуются по формулам

$$\left.\begin{aligned} & f \to f_\varphi = f, \;\; g \to g_\varphi = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} g; \\ & f \to f_\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k s_k} f \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k s_k}, \;\; g \to g_\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k s_k} g \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k \tilde{s}_k}; \\ & f \to f_y = \mathrm{e}^{\mathrm{i} y_k p_k} f \mathrm{e}^{-\mathrm{i} y_k p_k}, \;\; g \to g_y = \mathrm{e}^{\mathrm{i} y_k p_k} g \mathrm{e}^{\mathrm{i} y_k \tilde{p}_k}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Будем предполагать, что функционал $\mathcal{E}(x; \tilde{f})$ всегда инвариантен относительно фазовых преобразований

$$\mathcal{E}(x; U_\varphi^+ \hat{f} U_\varphi) = \mathcal{E}(x; \hat{f}). \tag{19}$$

В пренебрежении релятивистским взаимодействием функционал $\mathcal{E}(x; \tilde{f})$ инвариантен относительно спиновых вращений:

$$\mathcal{E}(x; U_\omega^+ \hat{f} U_\omega) = \mathcal{E}(x; \hat{f}). \tag{20}$$

Наконец, в отсутствие внешних неоднородных полей функционал $\mathcal{E}(x; \hat{f})$ инвариантен относительно пространственных трансляций:

$$\mathcal{E}(x + y; U_y^+ \hat{f} U_y) = \mathcal{E}(x; \hat{f}). \tag{21}$$

Легко получить инфинитезимальную форму соотношений (19), (20), (21). Для этого заметим, что вариацию функционала $\mathcal{E}(x; \hat{f})$ по статистическому оператору $\hat{f}$ можно представить в виде

$$\delta\mathcal{E}(x; \hat{f}) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \delta \hat{f} \hat{\varepsilon}(x; \hat{f}), \tag{22}$$

где

$$\hat{\varepsilon}(x; \hat{f}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x; \hat{f}) & \Delta(x; \hat{f}) \\ \Delta^+(x; \hat{f}) & -\tilde{\varepsilon}(x; \hat{f}) \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_{12}(x; \hat{f}) = \frac{\partial \mathcal{E}(x; \hat{f})}{\partial f_{21}}; \;\; \Delta_{12}(x; \hat{f}) = 2 \frac{\partial \mathcal{E}(x; \hat{f})}{\partial g_{21}^+} \tag{23}$$

[оператор $\hat{\varepsilon}(x; \hat{f})$ представляет собой оператор плотности энергии квазичастицы; см. следующий раздел]. Варьируя соотношения (19), (20), (21) по φ, ω, y и используя (22), получаем в случае фазовых преобразований

$$\mathrm{i} \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(x; \hat{f}), \hat{\tau}_3] = 0, \tag{24}$$

в случае спиновых вращений

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\,[\hat{\varepsilon}\,(x;\ \hat{f}),\ \hat{s}_i] = 0 \tag{25}$$

и в случае пространственных трансляций

$$\frac{\partial \mathscr{E}\,(x;\ \hat{f})}{\partial x_k} = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\,[\hat{\varepsilon}\,(x;\ \hat{f}),\ \hat{p}_k]. \tag{26}$$

Эти формулы будут в дальнейшем использованы для построения плотностей потоков соответствующих физических величин, которые необходимы для изучения гидродинамического этапа эволюции сверхтекучей жидкости.

Варьируя соотношения (19) — (21) по статистическому оператору $\hat{f}$ и используя формулу (22), получаем соотношения

$$U_\varphi \hat{\varepsilon}\,(x;\ U_\varphi^+ \hat{f} U_\varphi)\,U_\varphi^+ = \hat{\varepsilon}\,(x;\ \hat{f}); \tag{27}$$

$$U_\omega \hat{\varepsilon}\,(x;\ U_\omega^+ \hat{f} U_\omega)\,U_\omega^+ = \hat{\varepsilon}\,(x;\ \hat{f}); \tag{28}$$

$$U_y \hat{\varepsilon}\,(x;\ U_y^+ \hat{f} U_y)\,U_y^+ = \hat{\varepsilon}\,(x - y;\ \hat{f}), \tag{29}$$

выражающие свойства симметрии плотности энергии $\varepsilon\,(x;\ \hat{f})$ квазичастиц.

3. ТЕРМОДИНАМИКА И КИНЕТИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

В этом разделе рассмотрим термодинамику и кинетику сверхтекучей ферми-жидкости. Начнем с изучения состояния статистического равновесия.

Состояние $\hat{f}$ является трансляционно инвариантным, если при преобразованиях трансляции оно не изменяется, т. е. $[\hat{f},\ \hat{p}] = 0$. Таким свойством обладают состояния статистического равновесия нормальных систем. В случае систем с нарушенной фазовой инвариантностью ($[\hat{f},\ \hat{\tau}_3] \neq 0$) условие пространственной однородности следует формулировать в виде

$$[\hat{f},\ \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0, \tag{30}$$

где q_i — импульс конденсатных частиц (см. [3]). Отметим, что в этом случае среднее значение плотности $\tilde{a}\,(x)$ некоторой физической величины a

$$\langle \hat{a}\,(x) \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{a}\,(x),$$

вообще говоря, зависит от x. Однако если оператор $\hat{a}\,(x)$ фазовоинвариантен, $[\hat{a}\,(x),\ \hat{\tau}_3] = 0$, то среднее $\langle \hat{a}\,(x) \rangle$ согласно (30) не зависит от x [мы учли, что $e^{i\hat{p}y}\hat{a}\,(x)\,e^{-i\hat{p}y} = \hat{a}\,(x + y)$]. Именно в силу этой причины мы и назвали соотношение (30) условием пространственной однородности (но не условием трансляционной инвариантности, которое соответствует случаю $[\hat{f}, \hat{p}_i] = 0$). Состояние статистического равновесия сверхтекучей жидкости характеризуется условием (30), причем вектор q_i играет роль термодинамического параметра и называется сверхтекучим импульсом (величина $q_i/m = v_i$, где m — масса фермиона, для галилеево-инвариантных систем представляет собой скорость сверхтекучей компоненты).

Равновесный статистический оператор должен находиться из требования максимума энтропии на классе операторов $\hat{f}$, удовлетворяющих соотношению (30) при условии, что фиксированы значения функционалов энергии $E(\hat{f})$, числа частиц $\operatorname{tr} f = N$ и импульса $\operatorname{tr} fp_i = \mathscr{P}_i$. Вводя множители Лагранжа Y, соответствующие величинам E, N, $\mathscr{P}$, приходим к задаче отыскания безусловного минимума функционала

$$\Omega_q = -S(\hat{f}) + Y_0 E(\hat{f}) + Y_i \operatorname{tr} f\hat{p}_i + Y_4 \operatorname{tr} f$$

на классе операторов f, удовлетворяющих соотношению (30) (индекс q при Ω_q и подчеркивает этот факт). Согласно формулам (16), (22)

$$\delta\Omega_q = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \delta\hat{f} \{-\hat{Q} + Y_0 \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_i \hat{p}_i + Y_4 \hat{\tau}_3\},$$

где матрица $\hat{Q}$ определяется формулой (14), и

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}) = \int\limits_V d^3x \hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f}) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta^+ & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon = \int\limits_V d^3x \varepsilon(x;\ \hat{f}); \quad \Delta = \int\limits_V d^3x (\Delta x;\ \hat{f})$$

[см. (23)]. Заметим теперь, что если

$$\delta\hat{f} = \begin{pmatrix} \delta f & \delta g \\ \delta g^+ & -\delta\tilde{f} \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^+ & -\tilde{a} \end{pmatrix},$$

то из соотношения $\operatorname{Sp} \delta\hat{f}\hat{A} = 0$, справедливого при произвольных δf, δg, δg^+, следует, что $\hat{A} = 0$. Поэтому требование минимума потенциала Ω_q, $\delta\Omega_q = 0$, приводит к соотношению

$$\hat{Q} = Y_0 \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_i \hat{p}_i + Y_4 \hat{\tau}_3. \tag{31}$$

Таким образом, согласно лемме (13), приходим к нелинейному уравнению самосогласования

$$\hat{f} = \{\exp(Y_0 \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_i \hat{p}_i + Y_4 \hat{\tau}_3) + 1\}^{-1}, \tag{32}$$

которое должно решаться совместно с уравнением (30). Совместность этих уравнений следует из формул (29), (27), (23), которые показывают, что если $[\hat{f},\ \hat{p}_i - q_i\hat{\tau}_3] = 0$, то и $[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\ \hat{p}_i - q_i\hat{\tau}_3] = 0$.

Условие пространственной однородности (30) позволяет ввести плотность потенциала $\Omega_q = V\omega_q$:

$$\omega_q(\hat{f}) = -\frac{1}{V} S(\hat{f}) + Y_0 \mathscr{E}(0;\ \hat{f}) + Y_i \operatorname{tr} \hat{f}\pi_i(0) + Y_4 \operatorname{tr} \hat{f}\rho(0), \tag{33}$$

которая после подстановки решения $\hat{f} = \hat{f}_{\text{eq}}$ уравнений (32), (30) превращается в равновесный термодинамический потенциал

$$\omega_q(\hat{f}_{\text{eq}}) \equiv \omega(Y,\ q) \tag{34}$$

($-Y_0^{-1}\omega$ — потенциал Гиббса), являющийся функцией Y, q_i. В этой формуле $\rho(x) = \delta(x - \underline{x})$, $\pi_i(x) \equiv \frac{1}{2}\{p_i,\ \delta(x - \underline{x})\}$ — операторы плотностей числа частиц и импульса ($\underline{x}$ — оператор координаты); из (21), (19) ясно, что величины $\mathscr{E}(x;\ \hat{f})$, $\operatorname{tr} \hat{f}\pi_i(x)$, $\operatorname{tr} \hat{f}\rho(x)$ не зависят от x.

В терминах ω_q вариационный принцип, приводящий к равновесному распределению $\hat{f}_{\text{eq}}$, можно сформулировать в виде

$$\delta\omega_q|_{\hat{f}=\hat{f}_{\text{eq}}} = 0; \quad [\delta\hat{f};\ \hat{p}_i - q_i\hat{\tau}_3] = 0. \tag{35}$$

Ввиду фермиевской структуры оператора $\hat{f}$ величину $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ следует интерпретировать как оператор энергии квазичастицы. Мы видим, что величина $Y_0^{-1} = T$ представляет собой температуру системы, а величины $-Y_4Y_0^{-1}$ и $-Y_iY_0^{-1}$ — химический потенциал и скорость нормальной компоненты сверхтекучей жидкости.

В силу свойства фазовой инвариантности (19) нелинейное уравнение самосогласования (32) допускает решения, для которых $g = \Delta = 0$ (это значит, что $[\hat{f},\ \hat{\tau}_3] = 0$). Для таких решений все формулы настоящей работы переходят в формулы теории нормальной ферми-жидкости. Однако в системе может происходить фазовый переход, в результате которого появляются решения с $g \neq 0$, $\Delta \neq 0$ ($[\hat{f},\ \hat{\tau}_3] \neq 0$), соответствующие состояниям со спонтанно нарушенной симметрией (симметрия состояния статистического равновесия ниже симметрии функционала $\mathscr{E}(x;\ \hat{f})$). Именно этими состояниями и будем интересоваться в настоящей работе.

Перейдем к рассмотрению кинетического уравнения для $\hat{f}$. Так как мы развиваем феноменологический подход к теории сверхтекучей ферми-жидкости, то, замечая, что $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ можно интерпретировать как энергию квазичастицы, будем считать, что кинетическое уравнение для $\hat{f}$ в пренебрежении столкновениями между квазичастицами имеет вид (см. приложение)

$$i\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}=[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\ \hat{f}]. \tag{36}$$

В покомпонентной форме это уравнение эквивалентно следующей системе уравнений для нормальной и аномальной функций распределения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=i[f,\ \varepsilon]+i(g\Delta^{+}-\Delta g^{+});\\ \frac{\partial g}{\partial t}&=-i(g\tilde{\varepsilon}+\varepsilon g)+i(f\Delta+\Delta\tilde{f})-i\Delta.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Исходя из кинетического уравнения (36) и используя свойства симметрии функционала энергии $\mathscr{E}$, можно сформулировать законы сохранения и определить плотности потоков сохраняющихся физических величин. Для изучения этих вопросов сформулируем следующую лемму.

Лемма: Временную производную среднего значения плотности физической величины a, $\langle a(x)\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}\hat{a}(x)$ можно представить в виде

$$\frac{\partial\langle a(x)\rangle}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\langle a_k(x)\rangle+\frac{i}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}[\hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f}),\ \hat{A}], \tag{38}$$

где

$$a_k(x)=i\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\xi[\hat{\varepsilon}(x-(1-\xi)x';\ \hat{f}),\ \hat{a}(x+\xi x')];$$

$$\hat{A}=\int d^3x\hat{a}(x). \tag{39}$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из кинетического уравнения (36), согласно которому

$$\frac{\partial\langle a(x)\rangle}{\partial t}=\frac{i}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\ \hat{a}(x)],$$

и очевидного соотношения

$$i[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\ \hat{a}(x)]=i[\hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f}),\ \hat{A}]-\frac{\partial\hat{a}_k(x)}{\partial x_k}. \tag{40}$$

Полагая в формуле (38) $\hat{a}(x)=\hat{\rho}(x)$ и используя формулу (24), являющуюся следствием фазовой инвариантности $\mathscr{E}(x;\ \hat{f})$, находим закон сохранения плотности числа частиц

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\rho}(x)\rangle=-\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\hat{j}_k(x)\rangle,\ \hat{\rho}(x)=\begin{pmatrix}\rho(x) & 0\\ 0 & -\tilde{\rho}(x)\end{pmatrix}, \tag{41}$$

где оператор плотности потока числа частиц определяется формулой

$$\hat{j}_k(x) = \mathrm{i}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(x-(1-\xi)x';\ \hat{f}),\ \hat{\rho}(x+\xi x')]. \qquad (42)$$

Полагая в формуле (38) $\hat{a}(x) = \hat{s}_i(x)$ и используя (25), находим закон сохранения плотности спина

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{s}_i(x)\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \hat{j}_{ik}(x)\rangle,\quad \hat{s}_i(x) = \begin{pmatrix} s_i(x) & 0 \\ 0 & -\tilde{s}_i(x) \end{pmatrix}, \qquad (43)$$

где оператор плотности потока спина определяется формулой

$$\hat{j}_{ik}(x) = \mathrm{i}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(x-(1-\xi)x';\ \hat{f}),\ \hat{s}_i(x+\xi x')]. \qquad (44)$$

Наконец, полагая в формуле (38) $\hat{a}(x) = \hat{\pi}_i(x)$ и используя (26), находим закон сохранения плотности импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{\pi}_i(x)\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \hat{t}_{ik}(x)\rangle,\quad \hat{\pi}_i(x) = \begin{pmatrix} \pi_i(x) & 0 \\ 0 & -\tilde{\pi}_i(x) \end{pmatrix}, \qquad (45)$$

где среднее значение тензора натяжений определяется формулой

$$\langle \hat{t}_{ik}(x)\rangle = -\mathscr{E}(x;\ \hat{f})\,\delta_{ik} +$$

$$+\mathrm{i}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\, \mathrm{Sp}\,\hat{f}\,[\hat{\varepsilon}(x-(1-\xi)x';\ \hat{f}),\ \hat{\pi}_i(x+\xi x')]. \qquad (46)$$

Сформулируем теперь закон сохранения энергии. Согласно (22), (36) имеем

$$\frac{\partial\mathscr{E}(x;\ \hat{f})}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Sp}\,\hat{f}\,[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\ \hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f})].$$

Поэтому, полагая в формуле (40) $\hat{a}(x) = \hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f})$, находим

$$\frac{\partial\mathscr{E}(x;\ \hat{f})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \widehat{W}_k(x)\rangle, \qquad (47)$$

где оператор плотности потока энергии определяется формулой

$$\widehat{W}_k(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(x-(1-\xi)x';\ \hat{f}),\ \hat{\varepsilon}(x+\xi x';\ \hat{f})]. \qquad (48)$$

Вернемся снова к термодинамике. Потенциал $\omega(Y,\ q)$ зависит от термодинамических параметров Y как явно, так и через $\hat{f}_{\mathrm{eq}}$. Поэтому, учитывая формулы (33), (34), (35), имеем

$$\frac{\partial\omega(Y,\ q)}{\partial Y_0}=\mathscr{E};\ \frac{\partial\omega(Y,\ q)}{\partial Y_i}=\langle\pi_i\rangle;\ \frac{\partial\omega(Y,\ q)}{\partial Y_4}=\langle\rho\rangle, \tag{49}$$

где $\mathscr{E}$, $\langle\pi_i\rangle = \operatorname{tr} f_{\text{eq}}\pi_i$, $\langle\rho\rangle = \operatorname{tr} f_{\text{eq}}\rho$ — плотность энергии и средние значения плотностей импульса и числа частиц в состоянии статистического равновесия. Найдем теперь производную $\partial\omega(Y,\ q)/\partial q_i$. Введем с этой целью унитарный оператор

$$U_g=\exp(-\mathrm{i}g_i\hat{x}_i),\ \hat{x}_i=\begin{pmatrix}\underline{x_i} & 0\\ 0 & -\underline{\tilde{x}_i}\end{pmatrix} \tag{50}$$

и, учитывая (6), перепишем формулу (33) в виде

$$\omega(Y,\ q+g)=\frac{1}{V}\operatorname{Sp}\hat{f}_g\ln\hat{f}_g+Y_0\mathscr{E}(U_g^+\hat{f}_gU_g)+$$
$$+Y_i\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}_gU_g\hat{\pi}_iU_g^++\frac{1}{2}Y_4\operatorname{Sp}\hat{f}_gU_g\hat{\rho}U_g^+, \tag{51}$$

где

$$\hat{f}_g=U_g\hat{f}(Y,\ q+g)U_g^+,\ \hat{f}(Y,\ q)\equiv\hat{f}_{\text{eq}}.$$

Так как $[\hat{x}_i,\ \hat{p}_j]=\mathrm{i}\hat{\tau}_3\delta_{ij}$, то $U_g\hat{p}_iU_g^+=\hat{p}_i+g_i\hat{\tau}_3$. Отсюда согласно (30) следует, что

$$[\hat{f}_g,\ \hat{p}_i-q_i\hat{\tau}_3]=0,$$

т. е. оператор $\hat{f}_g$ принадлежит классу операторов (30). Поэтому, используя формулы (22), (33), согласно вариационному принципу (35), имеем из (51) при $g_i\to 0$

$$\frac{\partial\omega}{\partial q_i}=Y_0\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}[\hat{\varepsilon}(0;\ \hat{f}),\ \hat{x}_i]+Y_k\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}[\hat{\pi}_k,\ \hat{x}_i].$$

Замечая далее, что

$$[\hat{\pi}_k(x),\ \hat{\rho}(x')]=-\mathrm{i}\hat{\rho}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(x-x')$$

и что согласно (42)

$$\langle j_i\rangle\equiv\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}_{\text{eq}}\hat{j}_i(x)=\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}[\hat{\varepsilon}(0,\ \hat{f}),\ \hat{x}_i], \tag{52}$$

получаем окончательно

$$\frac{\partial\omega}{\partial q_i}=Y_0\left(\langle j_i\rangle+\frac{Y_i}{Y_0}\langle\rho\rangle\right). \tag{53}$$

Таким образом, второй закон термодинамики для обратимых процессов в сверхтекучей ферми-жидкости можно сформулировать в виде

$$d\omega=\mathscr{E}dY_0+\langle\pi_i\rangle dY_i+\langle\rho\rangle dY_4+Y_0\left(\langle j_i\rangle+\frac{Y_i}{Y_0}\langle\rho\rangle\right)dq_i, \tag{54}$$

или в терминах плотности энтропии $s = -\omega + \mathscr{E} Y_0 + \langle \pi i\rangle Y_i + \langle\rho\rangle Y_4$,

$$ds = Y_0 d\mathscr{E} + Y_i d\langle\pi_i\rangle + Y_4 d\langle\rho\rangle - Y_0\left(\langle j_i\rangle + \frac{Y_i}{Y_0}\langle\rho\rangle\right) dq_i. \tag{55}$$

Плотность энергии системы может быть инвариантна относительно преобразования Галилея. В этом случае справедливо соотношение

$$\mathscr{E}(x;\ e^{-imv_k\hat{x}_k}\hat{f}e^{imv_k\hat{x}_k}) = \mathscr{E}(x;\ \hat{f}) - v_k\langle\pi_k(x)\rangle + \frac{mv^2}{2}\langle\rho(x)\rangle, \tag{56}$$

где m — масса частиц; v_k — произвольный параметр, играющий роль скорости. Варьируя соотношение (56) по v_k и используя формулу (22), получаем

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\,[\hat{\varepsilon}(x;\ \hat{f}),\ \hat{x}_i] = \frac{1}{m}\mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{\pi}_i(x).$$

Отсюда и из (52) следует, что $\langle j_i\rangle = \frac{\langle\pi_i\rangle}{m}$, т. е. плотность импульса, по сути дела, совпадает с плотностью тока.

4. ФУНКЦИОНАЛ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ

Перейдем теперь к исследованию уравнения самосогласования (32). Для этого необходимы конкретные предположения относительно структуры функционала E. Если мы находимся вблизи точки фазового перехода второго рода, то величины g и g^+ являются малыми и функционал $E(f,\ g,\ g^+)$ можно разложить в ряд по степеням g, g^+. В этом разложении в силу фазовой симметрии будут отсутствовать линейные по g, g^+ члены, а также квадратичные члены типов gg, g^+g^+. Поэтому функционал $E(f,\ g,\ g^+)$ в случае малых g имеет следующую структуру:

$$E(f,\ g,\ g^+) = E(f) + \frac{1}{V}(g^+,\ Lg),$$

где $E(f)$ — ферми-жидкостный функционал энергии нормальной жидкости и $L \equiv \{L_{12;\ 34}\}$ — оператор, переводящий величины типа g_{34} в величины такого же типа (этот оператор, в принципе, может быть функционалом f). Учтем теперь спиновую инвариантность. Заметим, что при унитарном преобразовании u_ω матрицы спина s_i преобразуются согласно формуле

$$u_\omega^+ s_i u_\omega = a_{ik}(\omega)\, s_k, \tag{57}$$

где $a_{ik}(\omega)$ — ортогональная матрица. Оператор g согласно (18) при унитарном преобразовании u_ω преобразуется по формуле $g \to g_\omega = \tilde{u}_\omega g u_\omega$. Из (57) легко видеть, что $\tilde{u}_\omega\sigma_2 u_\omega = \sigma_2$, $\tilde{u}_\omega\sigma_2\sigma_i u_\omega = a_{ik}(\omega)\,\sigma_2\sigma_k$. Поэтому инвариантная относительно поворотов спина энергия $\frac{1}{V}(g^+,\ Lg)$ имеет вид

$$(g^+,\ Lg) = (g_0^+,\ L_1 g_0) + (g_i^+,\ L_2 g_i), \tag{58}$$

где

$$g_0 = \mathrm{Sp}_\sigma\, \sigma_2 g; \quad g_i = \mathrm{Sp}_\sigma\, \sigma_2\sigma_i g,$$

и характеризуется двумя аномальными ферми-жидкостными амплитудами L_1, L_2, которые являются операторами, действующими только на трансляционные степени свободы:

$$(g_0^+,\ L_1 g_0) = \sum_{p_1p_2p_3p_4} (g_0^+)_{p_1p_2} (L_1)_{p_1p_2;\, p_3p_4} (g_0)_{p_3p_4}.$$

Если функционал энергии $E(f)$ характеризуется двумя ферми-жидкостными амплитудами Ландау F_1, F_2

$$E(f) = \sum_1 \varepsilon_1 f_1 + \frac{1}{2}(f_0,\ F_1 f_0) + \frac{1}{2}(f_i,\ F_2 f_i),$$

где

$$f_0 = \mathrm{Sp}_\sigma f; \quad f_i = \mathrm{Sp}_\sigma\, \sigma_i f,$$

то видим, что сверхтекучая ферми-жидкость характеризуется четырьмя амплитудами взаимодействия F_i, L_i ($i = 1,\ 2$). В последней формуле в первом слагаемом ε_1 представляет собой энергию квазичастицы в пренебрежении ферми-жидкостными взаимодействиями.

К нахождению ферми-жидкостной энергии E можно подойти с точки зрения теории возмущения. Если микроскопический гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_i \varepsilon_1 a_1^+ a_1 + \sum_{1234} \Phi(12;\ 34)\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, \tag{59}$$

то в главном приближении по взаимодействию $E = \mathrm{Sp}\, \rho_0 \mathcal{H}$, где ρ_0 — неравновесный статистический оператор, определяемый формулой (3). Поэтому учитывая (59), имеем

$$E(\hat{f}) = \sum_1 \varepsilon_1 f_1 + \sum_{1234} \Phi(12;\ 34)\,(f_{32} f_{41} - f_{31} f_{42} + g_{21}^+ g_{43}). \tag{60}$$

В этой формуле Φ (12; 34) — спиново-инвариантная амплитуда взаимодействия, отличная от нуля только при $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. (Мы учли, что среднее значение оператора $a_1^+ a_1$ точно определяется уже нулевым приближением, т. е. статистическим оператором (3), см [10].) В этом случае величины Φ (12; 34) определяют как обычные ферми-жидкостные амплитуды F_i, так и ферми-жидкостные амплитуды L_i, характерные для сверхтекучей ферми-жидкости.

5. СИНГЛЕТНОЕ СПАРИВАНИЕ

Перейдем к преобразованию уравнений (32), (30). Как следует из формул (18), (30), статистический оператор

$$\hat{f}_q = U_q^+ \hat{f} U_q, \quad U_q = \exp \mathrm{i}\, q_i \hat{x}_i,$$

является трансляционно-инвариантным, т е. коммутирует с оператором импульса

$$[\hat{f}_q, \hat{p}_i]=0 \tag{61}$$

и удовлетворяет уравнению самосогласования

$$\hat{f}_q=\{\exp[Y_0\hat{\varepsilon}_q(\hat{f}_q)+Y_i\hat{p}_i+(Y_4+Y_ig_i)\hat{\tau}_3]+1\}^{-1}, \tag{62}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_q(\hat{f}_q)\equiv U_q^+\hat{\varepsilon}(U_q\hat{f}_qU_q^+)U_q.$$

В дальнейшем будем полагать $q_i=0$. Для того чтобы найти оператор $\hat{f}_q$, а тем самым, и оператор $\hat{f}$ при $q_i\neq 0$, необходимо в полученных ниже формулах сделать подстановку

$$\hat{f}\to\hat{f}_q;\ \hat{\varepsilon}(\hat{f})\to\hat{\varepsilon}_q(\hat{f}_q);\ Y_4\to Y_4+Y_iq_i.$$

Из (61) следует, что матричные элементы операторов f и g кратны $\delta_{p,p'}$ и $\delta_{p,-p'}$, $f_{pp'}\sim\delta_{p,p'}$, $g_{p,p'}\sim\delta_{p,-p'}$ ($\delta_{p,p'}=0$ при $p\neq p'$ и $\delta_{p,p}=1$).

Будем далее предполагать, что равновесное состояние системы инвариантно относительно поворотов спина (синглетное спаривание). В этом случае мы должны искать решения уравнений (61), (62), удовлетворяющие дополнительному условию:

$$[\hat{f}, \hat{s}_i]=0. \tag{63}$$

Это значит, что в спиновом пространстве матрица f кратна единичной, а матрица g кратна σ_2. Таким образом,

$$f_{12}=f_{p_1}\delta_{p_1,p_2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2};\ g_{12}=g_{p_1}\delta_{p_1,-p_2}(\sigma_2)_{\sigma_1,\sigma_2}. \tag{64}$$

Отсюда и из (62) следует, что

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{p_1}\delta_{p_1,p_2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2};\ \Delta_{12}=\Delta_{p_1}\delta_{p_1,-p_2}(\sigma_2)_{\sigma_1,\sigma_2}.$$

Ясно, что $g_p=g_{-p}$, $\Delta_p=+\Delta_{-p}$. Оператор $\hat{f}$ можно привести к диагональному виду с помощью рассмотренного в разд. 1 u — v-преобразования

$$U\hat{f}U^+=\begin{pmatrix} n & 0\\ 0 & 1-\tilde{n}\end{pmatrix}. \tag{65}$$

В случае (63) это преобразование имеет вид

$$u_{12}=u_{p_1}\delta_{p_1,p_2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2};\quad v_{12}=v_{p_1}\delta_{p_1,-p_2}(\sigma_2)_{\sigma_1,\sigma_2}.$$

Не останавливаясь на довольно элементарных выкладках, приведем результат. Функции v_p, u_p, приводящие $\hat{f}$ к диагональному виду (65), имеют структуру

$$v_p = u_p x_p; \quad u_p u_p^* = (1 + x_p x_p^*)^{-1}.$$

Величина x_p определяется формулами

$$x_p = \frac{2E_p - \xi_p - \xi_{-p}}{2\Delta_p^*}; \quad E_p = \sqrt{\frac{1}{4}(\xi_p + \xi_{-p})^2 + \Delta_p \Delta_p^*},$$

где $\xi_p = \varepsilon_p + Y_0^{-1} Y_i p_i + Y_0^{-1} Y_4$. Матричные элементы оператора n имеют вид $n_{12} = n_{p_1} \delta_{p_1, p_2} \delta_{\sigma_1, \sigma_2}$, $n_p = (\exp Y_0 \underline{E}_p + 1)^{-1}$, $\underline{E}_p = \frac{1}{2}(\xi_p - \xi_{-p}) + E_p$.

Из (65) находим окончательно

$$\left.\begin{aligned} f_p = \frac{1}{2E_p} \Big\{ \Big(E_p + \frac{1}{2}(\xi_p + \xi_{-p}) \Big) n_p + \\ + \Big(E_p - \frac{1}{2}(\xi_p + \xi_{-p}) \Big) (1 - n_p) \Big\}; \\ g_p = \frac{\Delta_p}{2E_p} (n_p + n_{-p} - 1). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Эти уравнения вместе с уравнениями

$$\varepsilon_p = \frac{\partial E(\hat{f})}{\partial f_p}; \quad \Delta_p = 2 \frac{\partial E(\hat{f})}{\partial g_p^*}$$

и представляют собой замкнутую систему уравнений для определения ε_p, Δ_p, а тем самым и функций распределения f_p, g_p, если известен функционал энергии $E(f, g, g^+)$.

Выберем в качестве функционала энергии функционал (58). Тогда для распределений (66) этот функционал имеет вид $E(f, g, g^+) = E(f) + \frac{1}{V} \sum_{pp'} g_{p'}^* L_1(p', p) g_p$, и, следовательно,

$$\Delta_p = \frac{2}{V} \sum_{p'} L_1(p, p') g_{p'}.$$

Поэтому согласно (66) уравнение самосогласования для Δ_p имеет вид

$$\Delta_p = \frac{2}{V} \sum_{p'} L_1(p, p') \frac{\Delta_{p'}}{E_{p'}} (n_{p'} + n_{-p'} - 1). \tag{67}$$

Если в качестве ферми-жидкостной амплитуды $L_1(p, p')$ взять выражение, получающееся из формулы (60), то придем к основному уравнению теории сверхтекучих ферми-систем БКШ — Боголюбова.

Рассмотрим теперь следующую модель для функционала энергии:

$$E = V\mathscr{E}(z), \quad z = \frac{1}{V^2} \sum_{pp'} g_{p'}^* L_1(p', p) g_p,$$

где $\mathscr{E}$ — некоторая функция z [для простоты рассматриваем трансляционно-инвариантные ($q = 0$) системы с синглетным спариванием]. Легко видеть, что в этом случае

$$\Delta_p = 4f(z)\frac{1}{V}\sum_{p'} L_1(p, p')\, g_{p'},$$

где $f(z) = \frac{d}{dz}\mathscr{E}(z)$. Из уравнений (67) следует, что функция Δ_p удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\Delta_p = \frac{2\chi}{V}\sum_{p'} L_1(p, p')\frac{\Delta_{p'}}{E_{p'}}(2n_{p'}-1), \tag{68}$$

где величина χ находится из функционального уравнения

$$\chi = f\left(\frac{1}{2\chi V}\sum_{p}\frac{\Delta_p\Delta_p^*}{E_p}(2n_p-1)\right) \tag{69}$$

(мы предположили, что $Y_i = 0$).

Если, как и в модели БКШ, предположить, что $L_1(p_1, p_2) = 0$ при $|\xi_{p_1}| > \theta$ или $|\xi_{p_2}| > \theta$ и $L_1(p_1, p_2) = L$ внутри слоя $|\xi_{p_1}| < \theta$, $|\xi_{p_2}| < \theta$ (L, θ — константы), то уравнения (68), (69) принимают вид

$$\frac{2J}{V}\sum_{|\xi_p|<\theta}\frac{2n_p-1}{E_p} = 1; \quad J = Lf\left(\frac{L\Delta\Delta^*}{4J^2}\right) \tag{70}$$

($\Delta_p = \Delta$ при $|\xi_p| < \theta$ и $\Delta_p = 0$ при $|\xi_p| > \theta$). Пусть в области малых z

$$\mathscr{E}(z) = z + \frac{a}{\alpha+1}z^{\alpha+1}; \quad f(z) = 1 + az^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Тогда вблизи точки перехода Δ мало и величина az^{α} служит малой поправкой. Однако в непосредственной окрестности точки перехода эта поправка может быть существенной. Именно, исходя из (70), легко показать, что

$$\Delta(T)\xrightarrow[T\to T_c]{}\begin{cases}\sqrt{T_c-T}, & \alpha > 1;\\ (T_c-T)^{\frac{1}{2\alpha}}, & \alpha < 1,\end{cases}$$

где T_c — критическая температура, которая находится из уравнения

$$\frac{2L}{V}\sum_{|\xi_p|<\theta}\frac{1}{|\xi_p|}\operatorname{th}\frac{\xi_p}{2T_c} = 1.$$

Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ поведение Δ как функции температуры отличается от стандартного поведения $\Delta \sim \sqrt{T_c - T}$, несмотря на то, что величина $\frac{a}{\alpha+1}z^{\alpha+1}$ в формуле $\mathscr{E}(z)$ является малой поправкой к z.

Заметим, что ферми-жидкостная амплитуда L_2 не проявляется в случае синглетного спаривания. Она существенна при изучении триплетного спаривания (A-фаза ^{3}He).

6. ИДЕАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ С СИНГЛЕТНЫМ СПАРИВАНИЕМ

Для построения идеальной гидродинамики в силу принципа локальности состояния термодинамического равновесия необходимо найти плотности потоков числа частиц, импульса и энергии в состоянии статистического равновесия. Плотность потока числа частиц была найдена в разд. 3 [см. (42)]. Найдем теперь выражения для тензора натяжений и плотности потока энергии в терминах термодинамического потенциала ω. Начнем с тензора натяжений.

Пусть a_{ik} — коэффициенты произвольных аффинных преобразований $x_i \to x'_i = a_{ik}x_k$. Тогда легко видеть, что операторы $a^{-1}_{ik}\hat{x}_k$ и $\tilde{a}_{jk}\hat{p}_k$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $\hat{x}_i$, $\hat{p}_j$. Отсюда, как известно, следует, что

$$U_a\hat{x}_iU_a^+ = a^{-1}_{ik}\hat{x}_k; \quad U_a\hat{p}_iU_a^+ = \tilde{a}_{ik}\hat{p}_k, \tag{71}$$

где U_a — некоторый унитарный оператор. В случае бесконечно малых преобразований $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$, $U_a = 1 - \mathrm{i}\xi_{ik}\hat{\Gamma}_{ki}$, причем генератор $\hat{\Gamma}_{ki}$ унитарных преобразований (71) определяется формулой

$$\hat{\Gamma}_{ik} = \int d^3x x_i \hat{\pi}_k(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \{\underline{x}_i, p_k\} & 0 \\ 0 & -\widetilde{\{\underline{x}_i, p_k\}} \end{pmatrix}.$$

Из формул (71) следует, что

$$U_a\hat{\rho}(x)U_a^+ = \det a\hat{\rho}(ax), \quad U_a\hat{\pi}_i(x)U_a^+ = \det a\tilde{a}_{ik}\hat{\pi}_k(ax). \tag{72}$$

Равновесный статистический оператор $\hat{f}$ определяется не только термодинамическими параметрами Y, q, но и объемом области квантования V [собственные значения импульса равны $p_i = 2\pi n_i/V^{1/3}$, $\hat{f} = \hat{f}(V;\, Y,\, q)$]. Из соотношений (30) ясно, что

$$[U_a\hat{f}(V;\, Y,\, \tilde{a}q)U_a^+,\ \hat{p}_i - q_i\hat{\tau}_3] = 0. \tag{73}$$

Формулы (71) показывают, что оператор $U_a\hat{f}(V;\, Y,\, \tilde{a}\boldsymbol{q})U_a^+$ соответствует объему области квантования, равному $V \det a$. Действительно, векторы состояний $|\, p\rangle$ зависят от объема системы V, как от параметра $|\, p\rangle \to |\, p,\ V\rangle$:

$$\langle x \,|\, p, V\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{\mathrm{i}px}; \quad \langle p, V \,|\, p, V\rangle = 1$$

($| x \rangle$ — собственный вектор оператора координаты). Имеет место очевидное соотношение

$$\frac{1}{V} = \langle p, V \mid \delta(\underline{x}) \mid p, V \rangle.$$

Учитывая (71), имеем

$$\frac{1}{V} = \langle p, V \mid U_a \delta(a\underline{x}) U_a^+ \mid p, V \rangle = \frac{1}{\det a} \langle p, V \mid U_a \delta(\underline{x}) U_a^+ \mid p, V \rangle;$$

$$\hat{p} U_a^+ \mid p, V \rangle = \tilde{a} p U_a^+ \mid p, V \rangle.$$

Поэтому

$$U_a^+ \mid p, V \rangle = \left| \tilde{a} p, \frac{V}{\det a} \right\rangle,$$

и, следовательно, функция распределения

$$\hat{f}_a(V) \equiv U_a \hat{f} \left(\frac{V}{\det a} \right) U_a^+$$

соответствует системе, относящейся к объему V, если функция $\hat{f}\left(\frac{V}{\det a}\right)$ относится к объему $V/\det a$. Таким образом, семейство операторов $\hat{f}_a \equiv U_a \hat{f}\left(\frac{V}{\det a}; Y, \tilde{a}q\right) U_a^+$ при любом a удовлетворяет соотношению (73) и относится к фиксированному объему V, который фигурирует в вариационном принципе (35), (33). Таким образом, согласно (33) имеем

$$\omega(Y, \tilde{a}q) = \frac{\det a}{V} \operatorname{Sp} \hat{f}_a \ln \hat{f}_a + Y_0 \mathscr{E}(U_a^+ \hat{f}_a U_a) +$$
$$+ Y_i \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f}_a U_a \hat{\pi}_i U_a^+ + Y_4 \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f}_a U_a \hat{p}_a U_a^+, \tag{74}$$

или согласно (72)

$$\frac{\omega(Y, \tilde{a}q)}{\det a} = \frac{1}{V} \operatorname{Sp} \hat{f}_a \ln \hat{f}_a + \frac{Y_0}{\det a} \mathscr{E}(U_a^+ \hat{f}_a U_a) +$$
$$+ Y_i \tilde{a}_{ik} \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f}_a \hat{\pi}_k(0) + Y_4 \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{f}_a \hat{\rho}(0). \tag{75}$$

Правая сторона этого равенства зависит от a как явно, так и через $\hat{f}_a$. Варьирование правой части (75) по $\hat{f}_a$ (с последующим переходом $a_{ik} \to \delta_{ik}$) согласно вариационному принципу (35) приводит к нулевому результату. Поэтому, полагая в (72) $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$ и раскладывая по ξ_{ik}, получаем

$$\omega \delta_{ik} - q_k \frac{\partial \omega}{\partial q_i} + Y_i \langle \pi_k \rangle - Y_0 \mathscr{E} \delta_{ik} + Y_0 \frac{i}{2} \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}), \hat{\Gamma}_{ik}] = 0.$$

Заметим, что согласно (46) для состояний $\hat{f}$, удовлетворяющих условию пространственной однородности, среднее значение тензора натяжений $\langle t_{ik} \rangle$ равно:

$$\langle t_{ik} \rangle = -\mathscr{E}\delta_{ik} + \frac{i}{2} \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}), \hat{\Gamma}_{ki}].$$

Поэтому, учитывая (49), имеем

$$\langle t_{ki} \rangle = \frac{q_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial Y_k} \frac{\omega Y_i}{Y_0}. \tag{76}$$

Для нахождения плотности потока энергии W_k заметим, что для пространственно однородных состояний [см. (30)] справедлива следующая лемма: Если $[\hat{f}, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0$, то

$$\overline{W}_k \equiv \frac{i}{2} \int d^3x x_k \operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{Q}(x), \hat{Q}(0)] = 0, \tag{77}$$

где

$$\hat{f} = (e^{\hat{Q}} + 1)^{-1}; \quad \hat{Q} = \int d^3x \hat{Q}(x).$$

Для доказательства введем общие собственные функции коммутирующих операторов $\hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3$ и $\hat{f}$:

$$(\hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3) \chi_{p'} = p'_i \chi_{p'}; \quad \hat{f} \chi_{p'} = \hat{f}_{p'} \chi_{p'}.$$

Шпур, входящий в формулу (77), выпишем в системе собственных функций оператора $\hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3$:

$$\operatorname{Sp} \hat{f} [\hat{Q}(x), \hat{Q}(0)] =$$
$$= \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3p_1 d^3p_2 \operatorname{Sp}' \hat{f}_{p_1} (\hat{Q}_{p_1p_2}(x) \hat{Q}_{p_2p_1}(0) - \hat{Q}_{p_1p_2}(0) \hat{Q}_{p_2p_1}(x)),$$
$$\hat{Q}_{pp_1}(x) = e^{-i(p-p_1)x} \hat{Q}_{pp_1}(0).$$

Здесь $\hat{Q}_{pp_1}(x) = \langle \ldots p \mid \hat{Q}(x) \mid p_1 \ldots \rangle$ — оператор в спиновом пространстве и в пространстве, в котором действует матрица $\hat{\tau}_3$ (в этом пространстве и берется шпур Sp′). Поэтому

$$\overline{W}_k \equiv \frac{i}{2} \frac{V^2}{(2\pi^3)} \int d^3p d^3p_1 \operatorname{Sp}' \hat{f}_p \hat{Q}_{pp_1}(0) \hat{Q}_{p_1p}(0) \times$$
$$\times \left(i \frac{\partial}{\partial p_k} \delta(p - p_1) - i \frac{\partial}{\partial p_{sk}} \delta(p - p_1) \right) =$$
$$= -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p \operatorname{Sp}' \hat{f}_p \left(\frac{\partial \hat{Q}_{pp_1}(0)}{\partial p_k} \bigg|_{p_1=p} \hat{Q}_p + \hat{Q}_p \frac{\partial \hat{Q}_{p_1p}(0)}{\partial p_k} \bigg|_{p_1=p} \right),$$

где $\hat{Q}_p = V\hat{Q}_{pp}(0)$. Легко видеть, что $\int d^3x \hat{Q}_{pp_1}(x) = \delta_{pp_1} \hat{Q}_p$, и, следовательно, $\hat{f}_p = (e^{\hat{Q}_p} + 1)^{-1}$ [ср. с формулой (13)]. Тогда, учитывая, что $[\hat{f}_p, \hat{Q}_p] = 0$, имеем

$$\overline{W}_k = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \mathrm{Sp}' \, \hat{f}_p \hat{Q}_p \left(\frac{\partial \hat{Q}_{pp_1}(0)}{\partial p_k} \bigg|_{p_1=p} + \frac{\partial \hat{Q}_{p_1 p}(0)}{\partial p_k} \bigg|_{p_1=p} \right) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, \mathrm{Sp}' \, \hat{f}_p \frac{\partial}{\partial p_k} \hat{Q}_p^2 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\partial}{\partial p_k} \int\limits_{-\infty}^{\hat{Q}_p^2} dz \, (e^{\sqrt{z}} + 1)^{-1}$$

или

$$-(2\pi)^3 \overline{W}_k = \int ds_k \, \mathrm{Sp}' \int\limits_{-\infty}^{\hat{Q}_p^2} dz \, (e^{\sqrt{z}} + 1)^{-1} \big|_{p \to \infty} = 0$$

(ds_k — элемент поверхности интегрирования). Таким образом, $\overline{W}_k = 0$, что и требовалось доказать.

Используя определения операторов $\hat{\pi}_i(x)$, $\hat{\rho}(x)$, легко получить следующие соотношения коммутации:

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{\rho}(x), \hat{\rho}(x')] = 0, \quad [\hat{\pi}_i(x), \hat{\rho}(x')] = -i\hat{\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x - x'); \\ &[\hat{\pi}_i(x), \hat{\pi}_k(x')] = -i\hat{\pi}_k(x) \frac{\partial \delta(x - x')}{\partial x_i} - i\hat{\pi}_i(x') \frac{\partial \delta(x - x')}{\partial x_k}. \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Применим теперь лемму (77) для состояния статистического равновесия, когда

$$\hat{Q}(x) = Y_0 \hat{\varepsilon}(x; \hat{f}) + Y_i \hat{\pi}_i(x) + Y_4 \hat{\rho}(x).$$

Используя выражения (42), (46), (48), (78) для операторов $\hat{j}_i$, $\hat{t}_{ik}$, $\hat{W}_k$ и учитывая формулы (49), находим

$$\langle \hat{W}_k \rangle = -\frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0}. \qquad (79)$$

Обозначая $\zeta_{\alpha k}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$) средние значения операторов плотностей потоков ($\zeta_{0k} = \langle W_k \rangle$, $\zeta_{lk} = \langle t_{lk} \rangle$, $\zeta_{4k} = \langle j_k \rangle$), формулы (53), (76), (78) можно записать в компактной форме (ср. с [7])

$$\zeta_{\alpha k} = \frac{\partial \omega}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} - \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0}, \alpha = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Из принципа локальности состояния статистического равновесия следуют уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей ферми-жидкости

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial x_k}, \qquad (80)$$

где $\zeta_\alpha = \partial\omega/\partial Y_\alpha$ [см. (49); $\zeta_0 = \mathscr{E}$, $\zeta_k = \langle \pi_k \rangle$, $\zeta_4 = \langle \rho \rangle$]. В этих уравнениях ζ_α, $\zeta_{\alpha k}$ зависят от x, t через посредство медленно меняющихся в пространстве и во времени функций $Y_\alpha = Y_\alpha(x, t)$, $q_i =$

$= q_i (x, t)$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений гидродинамики, необходимо еще найти уравнение для сверхтекучего импульса $q_i (x, t)$. Для нахождения этого уравнения заметим, что равновесная функция распределения не коммутирует с гамильтонианом квазичастиц $\hat{\varepsilon} (\hat{f})$. Действительно, согласно (32), (30) имеем

$$[\hat{\varepsilon}, \hat{f}] = -\left[\frac{Y_i}{Y_0}\hat{p}_i + \frac{Y_4}{Y_0}\hat{\tau}_3, \hat{f}\right] = -\frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}[\hat{\tau}_3, \hat{f}]. \qquad (81)$$

Поэтому оператор $\hat{f}$, описывающий состояние статистического равновесия, должен зависеть от времени. Легко видеть, что эта зависимость должна сводиться к некоторому фазовому преобразованию

$$\hat{f}_t = e^{i\varphi(t)\hat{\tau}_3}\hat{f}e^{-i\varphi(t)\hat{\tau}_3}. \qquad (82)$$

Действительно, используя формулу (81), видим, что оператор $\hat{f}_t$ удовлетворяет уравнению (36)

$$i\frac{\partial \hat{f}_t}{\partial t} = [\hat{\varepsilon}(\hat{f}_t), \hat{f}_t], \qquad (83)$$

если фаза $\varphi (t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi}(t) = (Y_4 + Y_i q_i)/Y_0. \qquad (84)$$

Таким образом, общая структура равновесного статистического оператора определяется уравнениями (32), (82), (84).

Дадим теперь общее определение фазы, зависящей от x, t. Рассмотрим оператор g в x-представлении: $g (x, x')$. Тогда фазу $\varphi (x)$ в случае синглетного спаривания определим формулой $\mathrm{tr}_\sigma\, s_2 g (x, x) = g e^{2i\varphi(x)}$, где шпур берется в пространстве спинов (g — вещественная функция). Легко видеть, что это определение эквивалентно следующему:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\ln \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{\psi}(x);$$
$$\hat{\psi}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_2(x) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (85)$$

С помощью формулы (84) легко показать, что для состояния статистического равновесия (82)

$$\varphi_t(x) \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\ln \mathrm{Sp}\,\hat{f}_t\hat{\psi}(x) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}t + q_i x_i + \varphi_0(0), \qquad (86)$$

откуда

$$\dot{\varphi}_t(x) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}; \quad \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x_i} = q_i. \qquad (87)$$

В пренебрежении градиентами параметров сокращенного описания Y_α, q_i эти формулы справедливы и для слабонеоднородных состояний.

Поэтому из (87) имеем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}.$$

Это уравнение совместно с уравнениями (80) и представляет собой замкнутую систему уравнений идеальной сверхтекучей ферми-жидкости (ср. с [3]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим выражение (6) для энтропии идеального газа квазичастиц. Оператор F, определяющий статистический оператор (3), можно представить в виде

$$F = \frac{1}{2} \psi^+ \hat{Q} \psi + \frac{1}{2} \operatorname{tr} A, \tag{88}$$

где

$$\psi_1 \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1^+ \end{pmatrix}; \quad \psi_1^+ = (a_1^+ a_1); \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & -\tilde{A} \end{pmatrix}.$$

Введем унитарное преобразование Боголюбова для операторов рождения и уничтожения

$$\underline{U}^+ a_1 \underline{U} = u_{12} a_2 + v_{12} a_2^+; \quad \underline{U}^+ a_1^+ \underline{U} = u_{12}^* a_2^+ + v_{12}^* a_2. \tag{89}$$

Это преобразование можно записать в виде

$$\underline{U}^+ \psi \underline{U} = U\psi; \quad \underline{U}^+ \psi^+ \underline{U} = \psi^+ U^+, \tag{90}$$

где матрица U определяется формулой (10) и операторы u, v удовлетворяют соотношениям (11) (требование унитарности). Как известно, унитарное преобразование (10) можно выбрать таким образом, чтобы квадратичная форма по операторам a^+, a

$$\underline{U}^+ F \underline{U} \equiv \frac{1}{2} \psi^+ U^+ \hat{Q} U \psi + \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$$

приводилась к диагональному виду. Это требование эквивалентно требованию диагональности матрицы $U^+ \hat{Q} U$

$$U^+ \hat{Q} U = \hat{Q}_0, \quad \hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -\tilde{A}_0 \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Учитывая (89), (91), статистический оператор ρ_0 можно представить в виде

$$\rho_0 = \underline{U} \rho_0^{(0)} \underline{U}^+,$$

где

$$\rho_0^{(0)} = \exp\left\{\Omega - \frac{1}{2} \operatorname{tr} A - \frac{1}{2} \underline{Q}\right\}, \quad \underline{Q} = \hat{\psi}^+ Q \psi.$$

Заметим теперь, что согласно (90)

$$\operatorname{Sp} \rho_0 \psi^+ \times \psi = \operatorname{Sp} \rho_0^0 \underline{U}^+ \psi^+ \underline{U} \times \underline{U}^+ \psi \underline{U} = \operatorname{Sp} \rho_0^{(0)} (\psi^+ U^+) \times (U\psi).$$

Поэтому, учитывая формулы (4), имеем

$$\hat{f} = U\hat{f}_0U^+, \tag{92}$$

где

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f & g \\ g^+ & 1-\tilde{f} \end{pmatrix}; \quad \hat{f}_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & 1-\tilde{f}_0 \end{pmatrix}; \quad f_0 = (\mathrm{e}^{A_0}+1)^{-1},$$

и, следовательно,

$$\hat{f} = U\,(\mathrm{e}^{\hat{Q}_0}+1)^{-1}U^+.$$

Так как энтропию $S = -\mathrm{Sp}\,\rho_0 \ln \rho_0$ можно представить в виде $S = -\mathrm{Sp}\,\rho_0^{(0)} \ln \rho_0^{(0)}$ (см. [10]), то

$$S = -\mathrm{tr}\,(f_0 \ln f_0 + (1-f_0)\ln(1-f_0)) = -\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0 \ln \hat{f}_0.$$

Поэтому согласно (92) мы и получаем формулу (6) $S = -\mathrm{Sp}\,\hat{f} \ln \hat{f}$.

Получим теперь в теории возмущений кинетическое уравнение (36). Как известно [10], кинетический этап эволюции описывается статистическим оператором $\rho\,(f, g, g^+)$, который является функционалом функций распределения f, g, g^+. Эти функции распределения удовлетворяют кинетическим уравнениям

$$\dot{f}_{12} = \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}, a_2^+a_1]; \quad \dot{g}_{12} = \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}, a_2, a_1], \tag{93}$$

где $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V$ ($\mathscr{H}_0$ — свободный гамильтониан и V — гамильтониан взаимодействия, структура которого может быть совершенно произвольной). Учтем теперь, что согласно определению

$$\mathrm{Sp}\,\rho\,(f, g, g^+)\,a_1^+a_2 = f_{21}; \quad \mathrm{Sp}\,\rho\,(f, g, g^+)\,a_1a_2 = g_{21}.$$

Поскольку свободный гамильтониан квадратичен по операторам a^+, a, то согласно (3)

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}_0, a_2^+a_1] = \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho_0\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}_0, a_2^+a_1];$$
$$\mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}_0, a_2a_1] = \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho_0\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}_0, a_2a_1].$$

Так как в пренебрежении взаимодействием квазичастиц статистический оператор $\rho\,(f, g, g^+)$ совпадает с $\rho_0\,(f, g, g^+)$, то кинетические уравнения (93) с учетом членов, линейных по взаимодействию, можно представить в виде

$$\dot{f}_{21} = \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho_0\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}, a_1^+a_2]; \quad \dot{g}_{21} = \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho_0\,(f, g, g^+)\,[\mathscr{H}, a_1a_2].$$

Заметим, что при вычислении средних в состоянии $\rho_0\,(f, g, g^+)$ справедливы правила Вика, в которых в качестве связей фигурируют нормальные и аномальные средние

$$a_1^+a_2 = \mathrm{Sp}\,\rho_0 a_1^+a_2 = f_{21}; \quad a_1a_2 = \mathrm{Sp}\,\rho_0 a_1a_2 = g_{21}.$$

Легко видеть, что справедливы формулы типа

$$\left.\begin{aligned}
&[a_1^+a_2,\ Aa_3^+Ba_4C] = (-1)^B\,(f_{41}\delta_{23} - f_{23}\delta_{41})\,ABC;\\
&[a_1^+a_2,\ Aa_3Ba_4C] = (-1)^B g_{24}\delta_{13}ABC;\\
&[a_1a_2,\ Aa_3^+Ba_4^+C] = = (-1)^B\,(-\delta_{24}\delta_{13} + \delta_{24}f_{13} + \delta_{13}f_{24})\,ABC,
\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

где $Aa_3^+Ba_4C$ — некоторые нормально упорядоченные операторы; $(-1)^B = 1$, если оператор B содержит четное число операторов a, a^+, и $(-1)^B = -1$, если оператор B содержит нечетное число этих операторов. Вводя функционал энергии

$$E(f, g, g^+) = \mathrm{Sp}\, \rho_0(f, g, g^+)\, \mathcal{H}$$

и величины

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial E}{\partial f_{21}}; \quad \Delta_{12} = 2\frac{\partial E}{\partial g_{21}^+}; \quad \Delta_{12}^+ = 2\frac{\partial E}{\partial g_{21}}$$

и используя соотношения типа (94), получаем

$$\mathrm{Sp}\, \rho_0(f, g, g^+)[a_1^+a_2, \mathcal{H}] = ([\varepsilon, f] - g\Delta^+ + \Delta g)_{21};$$

$$\mathrm{Sp}\, \rho_0(f, g, g^+)[a_1a_2, \mathcal{H}] = (\varepsilon g + g\tilde{\varepsilon} + \Delta - \Delta\tilde{f} - f\Delta)_{21}.$$

Таким образом,

$$i\dot{f} = [\varepsilon, f] - g\Delta^+ + \Delta g^+; \quad i\dot{g} = \varepsilon g + g\tilde{\varepsilon} - \Delta\tilde{f} - f\Delta + \Delta.$$

Эти уравнения полностью совпадают с уравнениями (37). Мы, однако, считаем, что в феноменологическом подходе уравнения (37) являются более общими (нежели борновское приближение) и функционал $\mathcal{E}(x; \hat{f})$ определяется некоторыми перенормированными амплитудами взаимодействия, которые в развитой схеме вводятся феноменологически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.).** Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
2. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946 (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд. «Наукова думка», Киев, 1970).
3. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В. и др.**// ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. Вып. 4. С. 875—926.
4. **Ландау Л. Д.**//ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 1058—1064.
5. **Силин В. П.**//ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 495—500.
6. **Leggett A. Y.**//Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47, № 2. P. 331.
7. **Nambu Y., Iona-Lasinio G.**//Phys. Rev. 1961. Vol. 122. P. 345; 1961. Vol. 124. P. 246.
8. **Галайко В. П.**//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 382—397.
9. **Stephen M. J.**//Phys. Rev. 1965. Vol. 139. P. A197.
10. **Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.** Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.