«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1989, ТОМ 20, ВЫП. 3

УДК 530.145

АМПЛИТУДА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Б. В. Медведев

Институт экспериментальной и теоретической физики, Москва

В. П. Павлов, М. К. Поливанов

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва

А. Д. Суханов

Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва

Обсуждаются общие свойства амплитуды перехода в аксиоматической квантовой теории поля. В качестве варианта теории выбран аксиоматический метод Боголюбова. Дан анализ аксиом этого метода. В частности, речь идет о смысле расширения за поверхность энергии и о различных формах условия причинности. Дано полное доказательство существования единой аналитической функции, граничными значениями которой являются амплитуды всех каналов процесса с данным числом частиц.

The transition amplitudegeneral properties are discussed in the framework of the axiomatic quantum field theory. Bogoliubov's axiomatic method is chosen as a variant of the theory. An analysis of Bogoliubov's axioms is given. E.g. the concept of off-shell extrapolation and various forms of the causality condition are discussed. We fully proved the existence of unique analytic function the branching values of which are the amplitudes of all the channels for a process with a given particle number.

ВВЕДЕНИЕ

Скалярное произведение векторов состояния, имеющее ясную физическую интерпретацию [1, 2], связано с фундаментальными объектами квантовой теории — амплитудами перехода, функциями Грина, корреляционными функциями. Эффективная теория содержит рецепт вычисления скалярного произведения на основе динамического принципа. Так, в элементарных моделях квантовой механики динамика задается уравнением Шредингера для векторов состояния.

Однако в реальных ситуациях динамический принцип может быть слишком сложным или даже не определенным корректно. Тогда предметом и важным инструментом исследования становятся сами фундаментальные объекты. Например, в статической физике сложность динамики проявляется в том, что выражающая ее цепочка уравнений для корреляционных функций в принципе бесконечна и их можно вычислить лишь приближенно, обрывая цепочку на старших членах. Аналогичная ситуация возникла и в квантовой теории поля, где цепочка уравнений Швингера для функции Грина послужила основой для различных приближенных методов.

Амплитуда перехода является центральным объектом при описании процессов взаимодействия элементарных частиц в квантовой теории поля. При этом если достаточно корректно сформулирован динамический принцип, то, как в квантовой электродинамике, вычисления амплитуды могут быть проведены с необходимой точностью по теории возмущений.

В настоящее время считается, что в теории элементарных частиц сформулирован динамический принцип, описывающий фундаментальное взаимодействие между фермионами, переносимое неабелевым калибровочным полем. На его основе построена объединенная теория электрослабых взаимодействий и достигнуты принципиальные успехи в квантовой хромодинамике (КХД), ставшей базой теории сильных взаимодействий. Однако с квантовополевой точки зрения полного решения задачи пока нет. Прежде всего, остается открытой проблема удержания кварков или, шире, проблема вычисления наблюдаемого спектра стационарных состояний (адронов) по спектру кварков и глюонов, закладываемому в динамический принцип. С ней, по-видимому, связана и вторая проблема — найти эффективный лагранжиан взаимодействия адронов (до сих пор это сделано лишь для низких энергий в рамках $1/N$-приближения)*. Пока современная теория сильных взаимодействий представляет собой комбинацию квантовополевых методов, феноменологических гипотез, а иногда и просто постулируемых ожидаемых свойств.

В такой ситуации полезно отдавать себе отчет, к каким заключениям о свойствах теории можно прийти, не опираясь на динамику, исходя только из наблюдаемого спектра адронов и общих принципов квантовой теории поля. Такая постановка проблемы не заменяет динамику, а лишь дополняет ее, подводя строгую базу под понятия и методы, которыми (явно или неявно) пользуются как при формулировке динамической теории, так и в ее приложениях.

Методически эта постановка принадлежит аксиоматической квантовой теории поля [3, 4]. Ее породило развитие теории, связанное с доказательством дисперсионных соотношений для амплитуды двухчастичного рассеяния [5]. В результате совершенно естественно возник вопрос, что вообще можно сказать об амплитуде рассеяния, исходя только из общих аксиом теории и не привлекая никакого динамического принципа. Оказалось, что сказать можно довольно много, и на этой основе было развито целое направление в квантовой

---

* Факт различия двух спектров в достаточной мере осознан современной теорией. Ретроспективно становится понятным, что неудачи старого динамического описания сильных взаимодействий связаны не столько с «неприменимостью разложения по константе связи», сколько с чересчур прямолинейным и примитивным введением эффективного взаимодействия мезон-барионных систем.

теории поля — дисперсионный подход. Прежде всего, приобрело строгий смысл понятие об амплитуде рассеяния как о граничном значении аналитической функции инвариантных переменных [6]. Далее, было доказано свойство перекрестной симметрии амплитуд в различных каналах двухчастичного процесса и найдены области аналитичности по инвариантной энергии [7] и передаче импульса [8]. Учет спектра промежуточных состояний и его приближенное насыщение резонансами позволили получить дисперсионные правила сумм, устанавливающие связь между низко- и высокоэнергетическими характеристиками амплитуды [9, 25, 26]. Доказанные аналитические свойства привели к весьма реалистическим ограничениям на поведение амплитуд и сечений при высоких энергиях [10]. Наконец, дисперсионный анализ амплитуды дал наиболее естественные рамки для описания глубоконеупругих [11] и инклюзивных [12] процессов. Сейчас дисперсионный подход— составной элемент фактически любого динамического описания, особенно в вычислительных методах КХД, а понятием об амплитуде как о граничном значении аналитической функции пользуются, не задумываясь об обосновании, и считают любую амплитуду аналитичной «там, где надо».

Целью настоящего обзора является описание и доказательство свойств амплитуд перехода, следующих из общих аксиом квантовой теории поля. В первой его части речь пойдет о результатах, справедливых для произвольных амплитуд — как двухчастичных, так и многочастичных. Мы покажем, что техника, развитая в теории дисперсионных соотношений для амплитуды двухчастичного рассеяния, с успехом работает и в общем случае. Наиболее удобной для наших целей оказывается система аксиом Боголюбова, сформулированная в [5].

Раздел 1 носит подготовительный характер и вводит понятия расширения за поверхность энергии и вариации по асимптотическому полю. Мы стремились сделать это на более строгом уровне, чем обычный в физической литературе. Соответственно этому в разд. 2 изложены аксиомы Боголюбова; здесь принято несколько иное их подразделение, чем в оригинальной работе [5]. Раздел 3 содержит подробное обсуждение различных форм условия причинности Боголюбова; излагаемый материал восходит к работам [13—15]. Он демонстрирует естественность одновременного введения двух вариаций — по in- и out-полям. Здесь же выведены алгебраические свойства двух вариаций и интегральное условие причинности [16]. В разд. 4 вводится понятие канала многочастичного процесса и амплитуды в данном канале вне поверхности энергии. Раздел 5 иллюстрирует техническую идею дальнейшей работы на простейшем примере [5] одночастичной функции Грина. Здесь выделены логические этапы, на которые разделено доказательство существования единой аналитической функции, граничными значениями которой являются амплитуды всех каналов процесса с данным числом частиц. Центральным моментом является определение двух операторов — опережающего и запаздывающего, свойства (α) — (δ) которых обеспечивают применимость теоремы об острие клина. Реализация этой программы для произвольных многочастичных амплитуд дана в разд. 6. Определение центральных объектов, обобщающих опережающий и запаздывающий операторы, — обобщенных запаздывающих операторов — взято нами из [17]. Доказываемые для них свойства (a) — (d) составляют прямую аналогию свойствам (α) — (δ) простейшего случая. Раздел 7 содержит доказательство основной теоремы о единой аналитической функции инвариантных переменных для общего случая произвольного числа частиц. В разд. 8 описано поведение этой функции в окрестности одночастичных особенностей.

Завершим наше введение несколькими замечаниями исторического характера. Задача о нахождении аналитических свойств амплитуд в ее современной форме была поставлена в 1960—1961 гг. Штейнманом [18], Араки [19] и Рюэлем [20]. В их работах были введены обобщенные запаздывающие операторы R и функции r и угаданы практически все их свойства, необходимые для установления аналитической структуры многочастичных амплитуд. Однако строгое доказательство этих свойств потребовало значительных усилий. Существенными этапами были работы Броса [21], описавшего носители в терминах графов, Броса, Эпштейна и Глазера [17], предложивших новое, комбинаторное определение R, и Эпштейна, Глазера и Стора [22], установивших связь комбинаторных свойств R со свойствами их носителей. Но и на этом последнем этапе, несмотря на невероятную громоздкость доказательства, в нем оставались некоторые лакуны, связанные, по нашему мнению, с тем, что исходная для упомянутых авторов система аксиом Уайтмана не слишком удобна для поставленной цели. В частности, на этом пути приходится доказывать существование T-произведений уайтмановских полей (это можно сделать с помощью асимптотической процедуры Хаага—Рюэля—Хеппа), а также возможность представить R в виде суммы операторов с меньшими носителями.

Используемая нами техника, предложенная в [23], основана на системе аксиом Боголюбова. Выбор исходной системы определил выбор подходящих терминов, в которых вся громоздкая процедура доказательства стала элементарной. Настоящее изложение следует работе [24] и отличается от нее упрощенным доказательством комбинаторной леммы 3, приведенным в приложении.

1. ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА И ИХ СИМВОЛЫ

Исходным объектом аксиоматического метода Боголюбова является S-матрица, связывающая асимптотические состояния свободных частиц в бесконечно удаленных прошлом и будущем. Для описания таких состояний мы используем стандартную схему вторичного квантования, для простоты ограничиваясь случаем нейтральных скалярных частиц с массой m без внутренних степеней свободы.

Введем стандартные операторы * $\hat{a}^+(\mathbf{p})$ рождения и $\hat{a}^-(\mathbf{p})$ уничтожения частицы с 3-импульсом $\mathbf{p}$, $(\hat{a}^-(\mathbf{p}))^+ = \hat{a}^+(\mathbf{p})$, подчиняющиеся каноническим перестановочным соотношениям (КПС)

$$[\hat{a}^-(\mathbf{p}),\ \hat{a}^+(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{1}$$

В качестве пространства представления КПС выберем *пространство Фока*. В нем существует вакуумный вектор $|0\rangle$, удовлетворяющий соотношению $\hat{a}^-(\mathbf{p})\,|0\rangle = 0$, а (обобщенные) векторы состояния n свободных частиц

$$|N\rangle = (\hat{a}^+(\mathbf{p}))_N\,|0\rangle \equiv \hat{a}^+(\mathbf{p}_1)\ \ldots\ \hat{a}^+(\mathbf{p}_n)\,|0\rangle \tag{2}$$

с $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют в нем базис. Любой вектор пространства Фока имеет вид

$$|f\rangle = f_0\,|0\rangle + \sum_{n\geqslant 1}(n!)^{-1}\int (d\mathbf{p})_N\, f_n((\mathbf{p})_N)\,(\hat{a}^+(\mathbf{p}))_N\,|0\rangle, \tag{3}$$

а любой «разумный» оператор в нем может быть представлен в *нормальной форме*

$$\hat{A} = \sum_{n,\,m}(m!\,n!)^{-1}\int (d\mathbf{p})_N\,(d\mathbf{q})_M\,A_{nm}((\mathbf{p})_N,\ (\mathbf{q})_M)\,(\hat{a}^+(\mathbf{p}))_N\,(\hat{a}^-(\mathbf{q}))_M. \tag{4}$$

[В предыдущих двух формулах $f_0 \in \mathbb{C}$, а функции $f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{3n})$ и A_{nm} симметричны относительно перестановок своих аргументов в наборах $(\mathbf{p})_N = \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ и $(\mathbf{q})_M = \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$.] Фоковское представление КПС неприводимо, а любые два таких представления $\{\hat{a}_1^{\#}(\mathbf{p}),\ |0_1\rangle\}$ и $\{\hat{a}_2^{\#}(\mathbf{p}),\ |0_2\rangle\}$, $\# = +$ или $-$, унитарно эквивалентны (при некоторых дополнительных условиях см. [28]); существует такой унитарный оператор $\hat{U}$, $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^+ = 1$, что $\hat{a}_2^{\#}(\mathbf{p}) = \hat{U}\hat{a}_1^{\#}(\mathbf{p})U^{-1}$, $\hat{U}\,|0_1\rangle = |0_2\rangle$.

Операторнозначная обобщенная функция

$$\hat{\phi}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}\,(2p^0)^{-1/2}\{e^{ipx}\hat{a}^+(\mathbf{p}) + e^{-ipx}\hat{a}^-(\mathbf{p})\}\,|_{p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \tag{5}$$

называется *свободным полем* (полем на поверхности энергии), отвечающим данной частице.

По построению $\hat{\phi}(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (КГ): $(\partial_X^2 + m^2)\hat{\phi}(x) = 0$. Комбинация (5) операторов $\hat{a}^{\pm}$ выбрана таким образом, чтобы свободное поле было локально коммутативным, $[\hat{\phi}(x),\ \hat{\phi}(y)] = 0$, $(x-y)^2 < 0$. Поэтому его значения на пространственно подобной поверхности могут быть взяты в качестве динамически независимых переменных в релятивистской теории.

* Операторнозначные обобщенные функции 3-импульсов.

В теории, исходящей из понятия частиц, естественно потребовать, чтобы свободные поля преобразовывались по неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Наше однокомпонентное поле $\hat{\phi}(x)$ должно быть скаляром. Тогда физическая интерпретация $\hat{a}(\mathbf{p}) \mid 0\rangle$ как состояния с определенным 3-импульсом $\mathbf{p}$, а также унитарная эквивалентность фоковских представлений КПС позволяют установить правила действия операторов $\hat{U}(\xi, \Lambda)$, представляющих группу Пуанкаре, в пространстве Фока:

$$\hat{U}(\xi, \Lambda)\,|N\rangle = \hat{U}(\xi, \Lambda)\,|(\mathbf{p})_N\rangle = e^{i\xi\Lambda\Sigma p_j}\,|(\Lambda\mathbf{p})_N\rangle. \tag{6}$$

Поскольку по определению (5) $p_j^0 = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m^2}$, то условие $m^2 > 0$ автоматически гарантирует, что спектр генератора трансляций

$$\hat{P}_\mu = -i\,(\partial\hat{U}(\xi, \Lambda)/\partial\xi_\mu)\,\hat{U}^{-1}(\xi, \Lambda)|_{\xi=0} \tag{7}$$

принадлежит замкнутому конусу будущего $\overline{V}_+$, т. е. обеспечивает «правильные» спектральные свойства теории.

В релятивистской теории нормальную форму оператора удобно переписать в виде

$$\hat{A} = \sum_{n\geqslant 0} (n!)^{-1} \int (dx)_N\, \mathcal{A}_n((x)_N) : (\hat{\phi}(x))_N :, \tag{8}$$

где : : обычный знак нормального упорядочения, а коэффициентные функции $\mathcal{A}_n$ симметричны при перестановках своих аргументов.

В отличие от коэффициентных функций A_{nm} нормальной формы (4) коэффициентные функции $\mathcal{A}_n$ не определяются однозначно оператором $\hat{A}$: поскольку поле $\hat{\phi}$ удовлетворяет уравнению КГ, добавление к $\mathcal{A}_n$, например, членов, пропорциональных $(\partial_\alpha^2 + m^2)^k\delta \times \times (x_i - x_j)$, не изменит значения операторнозначного функционала (8). Произвол в $\mathcal{A}_n$ связан с тем, что интегрирование в (8) ведется по всему $\mathbb{R}^{4n}$, в то время как поле $\hat{\phi}(x)$, удовлетворяющее уравнению КГ, полностью определяется значениями $\hat{\phi}$ и $\dot{\hat{\phi}}$, например, на поверхности $x_0 = \text{const}$.

Оператору $\hat{A}$ в нормальной форме (8) сопоставим его *нормальный символ* — классический функционал

$$A[\mathring{\phi}] = \sum_{n\geqslant 0} (n!)^{-1} \int (dx)_N\, \mathcal{A}_n((x)_N)\,(\mathring{\phi}(x))_N, \tag{9}$$

однозначно определенный лишь на поверхности энергии, т. е. для функциональных аргументов $\mathring{\phi}(x)$, удовлетворяющих уравнению КГ. Для него можно провести обычную процедуру расширения функционала на более широкий класс аргументов, не удовлетворяющих уравнению КГ. Возникающий при расширении произвол и описывается отмеченным выше произволом в коэффициентных функциях $\mathscr{A}_n$.

Если мы как-то фиксируем этот произвол (пока — лишь бы продолжал сходиться ряд для $A[\overset{\circ}{\phi}]$, а расширенные коэффициентные функции $\mathscr{A}_n$ оставались симметричными; более конкретно см. ниже), то получим *расширенный* за поверхность энергии *нормальный символ*, определенный и для произвольных функциональных аргументов — не обязательно удовлетворяющих уравнению КГ.

Таким образом, мы сопоставляем каждому оператору $\hat{A}$ вида (8) расширение его символа $A[\overset{\circ}{\phi}]$ вида (9). Аналогично каждый расширенный нормальный символ $A[\overset{\circ}{\phi}]$ можно (уже безо всякого произвола) сузить и сопоставить оператору $\hat{A}$ на поверхности энергии:

$$\hat{A} \leftrightarrow A[\overset{\circ}{\phi}].$$

В частности, самому свободному полю $\hat{\phi}(x)$ отвечает расширение

$$\hat{\phi}(x) \leftrightarrow \phi[\overset{\circ}{\phi};\ x] = \int dy \delta_1(x-y)\overset{\circ}{\phi}(y).$$

Определение *вариационной производной* $\delta/\delta\hat{\phi}(x)$ расширенного функционала $A[\overset{\circ}{\phi}]$ может быть дано стандартным образом (до расширения при варьировании следовало учитывать уравнение КГ). Сужение $\delta A/\delta\overset{\circ}{\phi}$ на поверхность энергии является нормальным символом некоторого нового оператора; введем для этого оператора обозначение

$$\widehat{\delta A/\delta\phi(x)} = \sum_{n\geqslant 0}(n!)^{-1}\int (dx)_N \mathscr{A}_{n+1}(x,\ (x)_N) : (\hat{\phi}(x))_N : . \qquad (10)$$

Связь между нормальными формами (8) и (10) операторов $\hat{A}$ и $\widehat{\delta A/\delta\phi}$ очень проста и отвечает формальному вычислению «вариационной производной оператора $\hat{A}$ по операторному аргументу $\hat{\phi}$». Придать смысл этому термину и позволяет наша обходная процедура: оператор в нормальной форме → его символ → расширение символа → → его обычная вариация → сужение вариации символа → новый оператор в нормальной форме. Ниже мы будем постоянно пользоваться ею для получения новых операторов.

Итак, в нашем распоряжении имеются объекты двух сортов: *операторы в нормальной форме*, (4) или (7), и их *расширенные* за поверхность энергии *нормальные символы*. При этом операторы всегда «находятся» на поверхности энергии, а расширение за нее осуществляется только для символов (здесь вспомогательную роль играют нерасширенные символы). Для расширенных символов непосредственно определена вариационная производная, а для операторов естественно (как следствие КПС) заданы их произведение и способ вычисления матричных элементов $\langle N \mid \hat{A} \mid M \rangle = A_{nm}$.

Соответствие между $\hat{A}$ и $A[\mathring{\phi}]$, устанавливаемое формулами (8) и (9), позволяет придать смысл обеим этим операциям в применении к любому объекту. Действительно, формула (10) делает это для вариации. С другой стороны, определяющая композицию $A \circ B$ символов формула Хори

$$A \circ B[\mathring{\phi}] = \exp\left\{\mathrm{i}^{-1}\int dx_1\, dx_2\, D^-(x_1 - x_2)\,\frac{\delta}{\delta\mathring{\phi}_1(x_1)}\,\frac{\delta}{\delta\mathring{\phi}_2(x_2)}\right\} \times$$
$$\times A[\mathring{\phi}_1]\, B[\mathring{\phi}_2]|_{\mathring{\phi}_1=\mathring{\phi}_2=\mathring{\phi}} \tag{11}$$

и теорема Вика для произведения операторов $\hat{A}\hat{B}$ показывает, что сужение композиции $A \circ B$ является (нерасширенным) нормальным символом произведения операторов $\hat{A}\hat{B}$: из соответствий $\hat{A} \leftrightarrow A[\mathring{\phi}]$, $\hat{B} \leftrightarrow B[\mathring{\phi}]$ следует $\hat{A}\hat{B} \leftrightarrow A \circ B[\mathring{\phi}]$. Наконец, вытекающие из КПС *редукционные формулы* фоковского представления

$$[\hat{A},\ \hat{a}^{\pm}(\mathbf{p})] = \pm\Gamma_{\mathbf{p}}^{\mp}\delta A/\delta\phi \equiv \pm(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}\int dx\, \times$$
$$\times\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}px}\,\delta A/\delta\phi\,(x)|_{p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \tag{12}$$

позволяют привести матричный элемент $\langle N \mid \hat{A} \mid M \rangle = A_{NM}$ к проинтегрированному n раз с помощью Γ^- и m раз с помощью Γ^+ вакуумному среднему

$$\langle\widehat{\delta^{m+n}A/(\delta\phi)_{MN}}\rangle_0 = \delta^{m+n}A[\mathring{\phi}]/(\delta\mathring{\phi})_{MN}|_{\mathring{\phi}=0}, \tag{13}$$

очевидным образом равному $(m+n)$-й вариационной производной символа $A[\mathring{\phi}]$, взятой при нулевом значении аргумента $\mathring{\phi}$. Поэтому соответствия

$$\delta A/\delta\phi \leftrightarrow \delta A[\mathring{\phi}]/\delta\mathring{\phi} \quad \text{и}$$
$$\hat{A}\hat{B} \leftrightarrow A \circ B[\mathring{\phi}]$$

обеспечивают единообразную запись большинства формул и в терминах операторов, и в терминах символов. Такие формулы мы, как правило, не будем различать и в написании, употребляя, например, просто A вместо $\hat{A}$ и $\hat{A}[\mathring{\phi}]$ или AB вместо $\hat{A}\hat{B}$ или $A \circ B[\mathring{\phi}]$.

2. АКСИОМЫ МЕТОДА БОГОЛЮБОВА

Эвристическим основанием аксиом метода Боголюбова служит обычная для трактовки рассеяния постановка задачи, когда считается, что асимптотически — в бесконечно удаленных прошлом (на

$-\infty$) и будущем (на $+\infty$) — частицы не взаимодействуют друг с другом, и поэтому их можно описывать в рамках свободной фоковской схемы.

В связи с этим мы потребуем на той и другой асимптотике следующее:

1а. Состояниям свободных частиц отвечает фоковское представление КПС $\{\hat{a}^{\#}(\mathbf{p}),\ |\,0\rangle\}$ со свойствами, описанными в разд. 1.

1б. В пространстве Фока действует представление группы Пуанкаре: при трансляциях ξ и преобразованиях Лоренца Λ

$$\hat{U}(\xi,\ \Lambda)\,|0\rangle = |0\rangle,$$

$$\hat{U}(\xi,\ \Lambda)\,\hat{a}^{\pm}(\mathbf{p})\,\hat{U}^{-1}(\xi,\ \Lambda) = e^{-i\xi\Lambda p}\hat{a}^{\pm}(\Lambda\mathbf{p}).$$

1в. Спектр генератора трансляций $\hat{P}_{\mu}$ принадлежит замкнутому конусу будущего $\overline{V}_{+}$. Вакуумное состояние единственно и отвечает изолированной точке спектра $p_{\mu} = 0$.

Следующее предположение состоит в том, что в результате взаимодействия природа физической системы не меняется, т. е. что

2а. In- и out- системы (т. е. системы на $-\infty$ и на $+\infty$) физически эквивалентны.

Такая эквивалентность почти обеспечивается выбором фоковских представлений для описания асимптотических состояний: относящиеся к одинаковым частицам два фоковских представления унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарный оператор $\hat{S}$, $\hat{S}^{+}\hat{S} = \hat{S}\hat{S}^{+} = 1$, такой, что

$$\tilde{\hat{a}}^{\pm}(\mathbf{p}) = \hat{S}\hat{a}^{\pm}(\mathbf{p})\,\hat{S}^{+}, \quad \text{где}$$

$$\hat{a}^{\pm} = \hat{a}^{\pm}_{\text{out}}, \quad \tilde{\hat{a}}^{\pm} = \hat{a}^{\pm}_{\text{in}}. \tag{14}$$

Этот оператор называется матрицей рассеяния. Амплитуда перехода из состояний на $-\infty$ в состояния на $+\infty$ выражается через скалярное произведение

$$\langle f\,|\,\tilde{g}\rangle = \langle f\,|\,\hat{S}\,|\,g\rangle = \langle\tilde{f}\,|\,\tilde{\hat{S}}\,|\,\tilde{g}\rangle. \tag{15}$$

Здесь $\tilde{\hat{S}}$ обозначена S-матрица, выраженная через in-поля; благодаря унитарности $\hat{S}$ имеем: $\hat{S} = \tilde{\hat{S}}$.

Сформулируем дальнейшие требования.

2б. S-матрица релятивистски-инвариантна: $\hat{U}(\xi,\Lambda)\hat{S}\hat{U}^{-1}(\xi,\Lambda) = \hat{S}$.

2в. Вакуумное и одночастичное состояния стабильны под действием S:

$$\hat{S}\,|0\rangle = |0\rangle, \quad \hat{S}\,|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}\rangle.$$

Описанные выше требования фиксируют структуру пространства Фока в аксиоматическом методе Боголюбова. Остальные требования связаны с центральным для всего метода условием причинности. Чтобы задать его, необходим выход за поверхность энергии: причинность, выражающая пространственно-временные отношения между событиями, нуждается для своей формулировки во введении локальных объектов, связанных с точкой (или областью) пространства-времени. В методе Боголюбова локальные объекты естественно выражаются через вариации S-матрицы, конструируемые на языке ее расширенного за поверхность энергии символа. Как отмечалось в разд. 1, такому расширению присущ значительный произвол, и налагаемые аксиомы призваны (частично) фиксировать его.

Конкретно, пусть $S\,[\mathring{\phi}]$ — расширенный нормальный символ S-матрицы, отвечающий ее нормальной форме в терминах out-полей. Введем (расширенные) символы

$$S_N = S^{(n)}\,((x)_N) = ((\delta/\delta\mathring{\phi})_N\, S) \circ S^{+}. \tag{16}$$

Сузив их на поверхность энергии, мы уже можем сопоставить им *радиационные операторы*

$$\hat{S}_N = \widehat{(\delta/\delta\phi)_N\, S}\, \hat{S}^{+}. \tag{17}$$

Первый из них,

$$\hat{S}_j = \delta S/\delta\phi_j \hat{S}^{+}, \tag{18}$$

домноженный на i, является оператором *тока.*

Продолжим формулировку аксиом. Мы требуем вне поверхности энергии следующее:

3а. $S\,[\mathring{\phi}]$ по-прежнему преобразует (расширенный) символ out-поля ϕ в (расширенный) символ in-поля ϕ:

$$\int \delta\,(x-y)\,\tilde{\mathring{\phi}}\,(y)\,dy = \tilde{\phi}\,[\tilde{\mathring{\phi}};\ x] = \tilde{\phi}\,[\mathring{\phi};\ x] = S\,[\mathring{\phi}] \circ \phi\,[\mathring{\phi};\ x] \circ S^{+}\,[\mathring{\phi}].$$

3б. $S\,[\mathring{\phi}]$ по-прежнему унитарна: $S\,[\mathring{\phi}] \circ S^{+}\,[\mathring{\phi}] = S^{+}\,[\mathring{\phi}] \circ S[\mathring{\phi}] = 1.$

3в. $S\,[\mathring{\phi}]$ релятивистки-инвариантна:

$$S\,[\mathring{\phi}_{\xi,\,\Lambda}] = S\,[\mathring{\phi}],$$

где $\mathring{\phi}_{\xi,\Lambda}(x) = \mathring{\phi}(\Lambda x + \xi)$.

(Начиная с этого момента, мы не выписываем очевидных функциональных аргументов у символов.)

Перечисленные в пп. 3а—3в требования еще не слишком стесняют произвол в расширении за поверхность энергии. Наиболее существенные ограничения связаны с физическим требованием причинности. Чтобы оно выполнялось, наложим два условия.

3г. Символы $S^{(n)}((x)_N)$ всех радиационных операторов и их композиции $S^{(m)}((x)_M) \circ S^{(n)}((x)_N) \circ \ldots \circ S^{(r)} \times ((x)_R)$ с независимыми аргументами являются обобщенными функциями умеренного роста.

3д. Выполнено условие причинности в форме Боголюбова:

$$\delta S_1/\delta\mathring{\phi}_2 = 0 \text{ при } x_1 \gtrsim x_2.$$

В дальнейшем нам удобно записывать это условие в виде

$$\operatorname{Supp} \delta S_l/\delta\mathring{\phi}_k \subset V_{kl} = \{x_k,\ x_l,\ \in \mathbb{R}^4 : x_k - x_l \in \bar{V}_+\}. \qquad (19)$$

Потребовав для своей формулировки расширения символа S-матрицы с сопутствующим ему произволом, условие причинности само же и призвано сузить этот произвол. Известно, что в теории возмущений расширенные коэффициентные функции $\mathcal{S}_n$ нормального

Свободные частицы	На поверхности энергии	Вне поверхности энергии
1а. Интерпретация в терминах частиц	<u>2а.</u> S-матрица	3а. S-матрица
1б. Релятивистская ковариантность	<u>2б.</u> Релятивистская инвариантность	3б. Унитарность
1в. Спектральность	2в. Стабильность	3в. Релятивистская инвариантность 3г. Интегрируемость 3д. Причинность

Рис. 1. **Взаимосвязь аксиом.** Аксиомы разбиты на три группы: 1а — 1в фиксируют свободную теорию; 2а — 2в говорят о взаимодействии **на** поверхности энергии; 3а — 3д фиксируют способ расширения **за** поверхность энергии. (Аксиомы с подчеркнутыми номерами не являются независимыми; нам показалось полезным допустить некоторые повторения, чтобы подчеркнуть логику построения всей системы аксиом.)

символа (9) для S определяются через лагранжиан с точностью до квазилокальных контрчленов. В настоящем обзоре мы покажем, что в общем случае фурье-образы $\mathcal{S}_n$ обязаны быть аналитическими функциями, граничными значениями которых являются коэффициентные функции S_{nm} нормальной формы (4) оператора $\hat{S}$. Взаимосвязь аксиом проиллюстрирована на рис. 1.

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ФОРМЫ УСЛОВИЯ ПРИЧИННОСТИ

Определив радиационные операторы [см. (16), (17)] и сформулировав условие причинности (19) в терминах out-полей, мы ввели в схему расширения асимметрию между in- и out-образами. Продемонстрируем, что эта асимметрия кажущаяся: все out-конструкции можно переписать в совершенно эквивалентных in-терминах. Помимо восстановления симметрии мы приобретем и чисто технические преимущества, получив возможность оперировать с вариациями одного и того же объекта и по in-, и по out-полям.

В формулировке условия причинности выбрано определенное направление конуса V_{kl}, т. е. определенный знак времени у разности $x_k - x_l$: $x_k^0 - x_l^0 > 0$. Покажем, что этот выбор скоррелирован с тремя обстоятельствами:

1) выбором $S_k = (\delta S/\delta\mathring{\phi}_k)S^+$ в качестве объекта, носитель вариации которого ограничен условием причинности;

2) выбором символа out-поля $\phi = \phi_{\text{out}}$ в качестве функционального аргумента $\mathring{\phi}$;

3) наконец, формой связи $\tilde{\phi} = \phi_{\text{in}} = S\phi_{\text{out}}S^+$ между in- и out-полями, осуществляемой S-матрицей.

Другие очевидные возможности состояли бы в том, чтобы:

1) выбрать в качестве основного радиационного оператора вторую независимую, «билинейную» по S и S^+ комбинацию, $\Sigma_k = S^+\delta S/\delta\mathring{\phi}_k$ с S^+ слева (этими двумя вариантами исчерпываются независимые радиационные операторы первого порядка: вследствие унитарности $(\delta S^+/\delta\mathring{\phi})\, S = -S^+\delta S/\delta\mathring{\phi}$ и $S\delta S^+/\delta\mathring{\phi} = -(\delta S/\delta\mathring{\phi})S^+$);

2) выбрать $\tilde{\phi} = \phi_{\text{in}}$ в качестве $\mathring{\phi}$;

3) «поменять» местами S и S^+ в связи между ϕ_{in} и ϕ_{out} — это тривиальное переобозначение мы далее обсуждать не будем.

Прежде всего, покажем, что наше условие причинности для тока iS_k,

$$\delta S_k/\delta\mathring{\phi}_l \neq 0, \quad x_l - x_k \in \bar{V}_+, \tag{20}$$

полностью эквивалентно «противоположному» (в смысле направления конуса V_{kl}) условию для альтернативного тока $i\Sigma_k$:

$$\delta\Sigma_k/\delta\mathring{\phi}_l \neq 0, \quad x_l - x_k \in \bar{V}_-. \tag{21}$$

Действительно, условие унитарности $1 = S^+S$, его следствие $\delta_l S^+ = -S^+(\delta_l S)S^+$ и вытекающее из определения S_k условие разрешимости

$$\delta_k S_l - \delta_l S_k = [S_k, S_l] \tag{22}$$

(приняты обозначения $\delta_l = \delta/\delta\mathring{\phi}_l$) дают:

$$\begin{aligned}\delta_l\Sigma_k &= \delta_l\,(S^+\,((\delta_k S)\,S^+)\,S) = \\ &= -S^+\,(\delta_l S)S^+\,(\delta_k S)S^+S + \\ &\quad + S^+\,(\delta_l\,((\delta_k S)\,S^+))S + \\ &\quad + S^+\,(\delta_k S)S^+\,(\delta_l S)\,S^+S = \\ &= S^+\,(\delta_l S_k + [S_k,\ S_l])\,S = S^+\,(\delta_k S_l)\,S,\end{aligned}$$

т. е.

$$\delta_k S_l \neq 0, \quad x_k - x_l \in \bar{V}_+ \leftrightarrow \delta_k\Sigma_l \neq 0, \quad x_k - x_l \in \bar{V}_-.$$

Эвристические соображения, позволяющие связать направление конуса в условии причинности с физическим смыслом ϕ_{in} и ϕ_{out}, опираются на понятие интерполирующего (гейзенбергова) поля. В нашем формализме его можно ввести двумя альтернативными формулами:

$$B = T\,(\phi S)\,S^{+} \text{ или } \mathscr{B} = S^{+}T\,(\phi S) \tag{23}$$

(остальные две возможности сводятся к замене $S \leftrightarrow S^{+}$ и не рассматриваются), фигурирующее в которых виково хронологическое произведение $T\,(AB)$ определено формулой Хори (11) с ядром $D^{c}(x_1 - x_2)$ вместо $D^{-}(x_1 - x_2)$. Свободное поле $\phi\,(x) = \int \delta(x-y)\times \times \mathring{\phi}\,(y)\,dy$ не имеет здесь пока никакой «асимптотической» интерпретации. Стандартная выкладка приводит к двум соотношениям Янга — Фельдмана

$$B\,(x) = \phi\,(x) - \mathrm{i}\int D^{a}\,(x-y)\,S_y\,dy \text{ и}$$
$$\mathscr{B}\,(x) = \phi\,(x) - \mathrm{i}\int D^{r}\,(x-y)\,\Sigma_y dy, \tag{24}$$

устанавливающим смысл токов $\mathrm{i}\,S_y = \mathrm{i}\,(\delta S/\delta\mathring{\phi}\,(y))\,S^{+}$ и $\mathrm{i}\Sigma_y = S^{+}\delta S/\delta\mathring{\phi}\,(y)$ как источников гейзенберговых полей B и $\mathscr{B}$. Свойства D^{a} и D^{r} позволяют теперь заключить, что носители вариаций $\delta B/\delta\mathring{\phi}$ и $\delta\mathscr{B}/\delta\mathring{\phi}$ будут ограничены, т. е. гейзенбергово поле будет обладать естественными свойствами причинности, только в случае, когда условие причинности будет иметь (взаимно согласованный! — см. предыдущий абзац) вид

$$\delta S_y/\delta\mathring{\phi}\,(x) \neq 0, \quad x-y \in \overline{V}_{+} \text{ и } \delta\Sigma_y/\delta\mathring{\phi}\,(x) \neq 0, \quad x-y \in \overline{V}_{-}.$$

С другой стороны, формальные пределы $|\,x^0\,| \to \infty$ в соотношениях Янга — Фельдмана дают:

$$\text{при } x^0 \to +\infty \begin{cases} B\,(x) \to B_{\text{out}}\,(x) = \phi\,(x), \\ \mathscr{B}\,(x) \to \mathscr{B}_{\text{out}}\,(x) = \phi\,(x) + \\ \quad + \mathrm{i}\int D\,(x-y)\,\Sigma_y\,dy = S^{+}\phi\,(x)\,S; \end{cases}$$

$$\text{при } x^0 \to -\infty \begin{cases} B\,(x) \to B_{\text{in}}\,(x) = \phi\,(x) - \\ \quad -\mathrm{i}\int D\,(x-y)\,S_y\,dy = S\phi\,(x)\,S^{+}, \\ \mathscr{B}\,(x) \to \mathscr{B}_{\text{in}}\,(x) = \phi\,(x). \end{cases}$$

Таким образом, и для поля B, и для поля $\mathscr{B}$ их формальные in- и out-пределы стандартно связаны S-матрицей:

$$B_{\text{in}} = SB_{\text{out}}S^{+}, \quad \mathscr{B}_{\text{in}} = S\mathscr{B}_{\text{out}}S^{+},$$

а свободное поле ϕ оказывается одновременно out-полем для B и in-полем для $\mathscr{B}$.

Казалось бы, здесь возникают новые возможности. Out-предел поля $\mathscr{B}$ и in-предел поля B также являются свободными полями — назовем их, скажем,

$$\tilde{\phi} = B_{\mathrm{in}} \text{ и } \underset{\sim}{\phi} = \mathscr{B}_{\mathrm{out}}$$

— ничем не хуже ϕ подходят на роль функционального аргумента, лежащего в основе всей нашей конструкции.

Действительно, поскольку $B = S\mathscr{B}S^+$, мы имеем

$$B = S\left(\phi(x) - \mathrm{i}\int D^r(x-y)\,\Sigma_y dy\right)S^+ =$$

$$= \tilde{\phi}(x) - \mathrm{i}\int D^r(x-y) S\Sigma_y[\phi]S^+\,dy.$$

Теперь действие S слева и S^+ справа на функциональное разложение $\Sigma_y[\phi]$ превращает аргументы ϕ в $\tilde{\phi} = S\phi S^+$, не меняя коэффициентных функций. Поэтому

$$S\Sigma_y[\phi]\,S^+ = \Sigma_y[\tilde{\phi}] = S^+[\tilde{\phi}]\,\delta S[\tilde{\phi}]/\delta\tilde{\phi}(y),$$

и в итоге

$$B(x) = \underset{\sim}{\tilde{\phi}}(x) - \mathrm{i}\int D^r(x-y)\,\Sigma_y[\underset{\sim}{\tilde{\phi}}]\,dy.$$

Аналогично

$$\mathscr{B}(x) = \underset{\sim}{\phi}(x) + \mathrm{i}\int D^a(x-y)\,S_y[\underset{\sim}{\phi}]\,dy.$$

Эти две формулы явно выражают B и $\mathscr{B}$ как функционалы от новых аргументов. Возникшую ситуацию иллюстрирует рис. 2.

Эта процедура, допускающая произвольное число итераций в обе стороны, не дает, однако, ничего принципиально нового. Например, функциональная зависимость $B[\tilde{\phi}]$ совпадает с зависимостью $\mathscr{B}[\phi]$ (и вообще со всякой in-зависимостью); одинаковы и все out-зависимости: $B[\phi]$, $\mathscr{B}[\underset{\sim}{\phi}]$ и т. д. Поэтому итерации приводят к повторению одних и тех же соотношений, и все существенное исчерпывается двумя соотношениями между тремя объектами:

либо между одним асимптотическим и двумя гейзенберговыми полями (для одного из которых это асимптотическое является in-, а для другого out-полем);

либо между одним гейзенберговым и двумя асимптотическими, in- и out-полями.

Последний набор и отвечает потребностям физической постановки нашей задачи, восходящей к задаче о рассеянии.

Итак, возьмем в качестве исходных два соотношения

$$\tilde{\phi}-\mathrm{i}\int D^r\Sigma_y[\tilde{\phi}]\,dy=S^+T(\tilde{\phi}S)=B=T(\phi S)S^+=\phi-\mathrm{i}\int D^aS_y[\phi]\,dy \tag{25}$$

с двумя эквивалентными условиями причинности

$$\delta\Sigma_y[\tilde{\phi}]/\delta\tilde{\phi}(x)\neq 0,\ x-y\in\overline{V}_-\ \text{и}\ \delta S_y/\delta\phi(x)\neq 0,\ x-y\in\overline{V}_+. \tag{26}$$

Начиная с этого момента мы можем «забыть» об интерполирующем поле, сыгравшем свою роль в физической интерпретации функ-

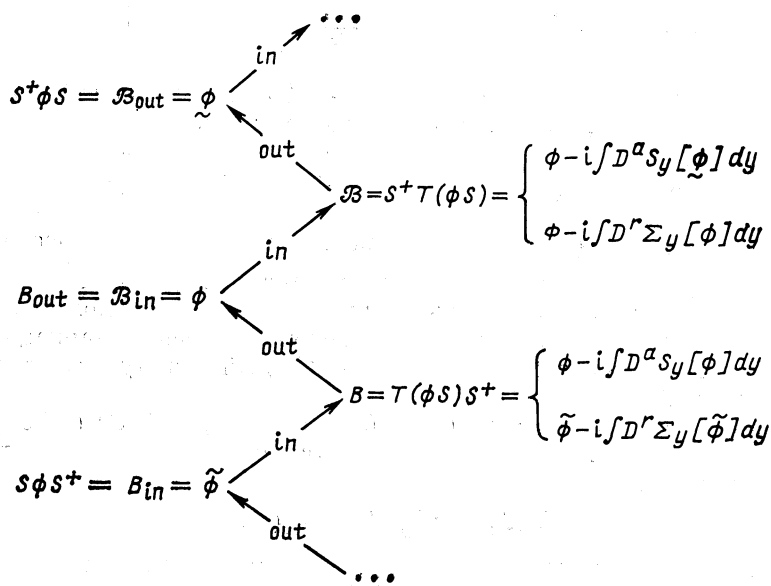

Рис. 2.

циональных аргументов, и снова полностью перейти на язык аксиоматической теории S-матрицы.

Из обсуждавшихся «гейзенберговых» объектов мы сохраняем лишь два тока, $\mathrm{i}S_y$ и $\mathrm{i}\Sigma_y$, удовлетворяющих своим условиям причинности (26). Символ первого из них построен у нас как функционал от out-полей $\phi=\phi_{\text{out}}$, а второго — как функционал от in-полей $\tilde{\phi}=\phi_{\text{in}}$.

Однако в силу унитарной связи $\tilde{\phi}=S\phi S^+$ мы вправе рассматривать символ каждого оператора A на равных основаниях как функционал и out-, и in-полей:

$$\Psi[\phi]=A=\Phi[\tilde{\phi}],$$

где Ψ и Φ задают (конечно, различную) форму функциональной зависимости, и ввести его вариационные производные по аргументам обоих типов.

Тогда унитарная связь $\tilde{\phi} = S\phi S^+$ дает:

$$\frac{\delta A}{\delta\tilde{\phi}} = \frac{\delta\Phi[\tilde{\phi}]}{\delta\tilde{\phi}} = S\frac{\delta\Phi[\phi]}{\delta\phi}S^+ = S\left(\frac{\delta}{\delta\phi}(S^+\Phi[\tilde{\phi}]S)\right)S^+ =$$

$$= S\left(\frac{\delta}{\delta\phi}(S^+\Psi[\phi]S)\right)S^+,$$

или

$$\frac{\delta A}{\delta\tilde{\phi}} = S\left(\frac{\delta}{\delta\phi}(S^+AS)\right)S^+ = \frac{\delta A}{\delta\phi} + \left[A, \frac{\delta S}{\delta\phi}S^+\right]. \tag{27}$$

Заменяя в последней формуле $A \to SAS^+$ и умножая ее на S^+ слева и на S справа, получаем обратную формулу:

$$\frac{\delta A}{\delta\phi} = S^+\left(\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}}(SAS^+)\right)S = \frac{\delta A}{\delta\tilde{\phi}} + \left[S^+\frac{\delta S}{\delta\tilde{\phi}}, A\right]. \tag{28}$$

Формулы (27) и (28) дают нам простые правила преобразования вариаций при замене функционального аргумента $\phi \leftrightarrow \tilde{\phi}$. Теперь мы можем не конкретизировать, функционалом каких полей задан тот или иной символ оператора, и пользоваться обеими вариациями на совершенно равных правах, выбирая каждый раз ту, какая окажется удобней.

В частности, из формул (27), (28) следует, что $S^+(\delta S/\delta\tilde{\phi}) = (\delta S/\delta\phi)S^+$, т. е. фигурирующие в условиях причинности токи просто совпадают:

$$iS_y[\phi] = i\Sigma_y[\tilde{\phi}] = J(y), \tag{29}$$

а все различие двух форм условия причинности — замена запаздывания опережением — связано с заменой функционального аргумента:

$$\delta J(y)/\delta\phi(x) \neq 0, \; x - y \in \overline{V}_+ \text{ (опережение)};$$

$$\delta J(y)/\delta\tilde{\phi}(x) \neq 0, \; x - y \in \overline{V}_- \text{ (запаздывание)}.$$

Для дальнейшего удобно ввести сокращенные обозначения

$$\delta_k^+ = \delta/\delta\phi(x_k), \quad \delta_k^- = \delta/\delta\tilde{\phi}(x_k).$$

Установим ряд алгебраических соотношений, полезных при работе с вариациями $\delta^\pm$. Все они следуют из связи (27) между ними, которая в наших новых обозначениях имеет вид

$$\delta_k^- A = \delta_k^+ A + [A, S_k], \tag{30}$$

и вытекающего из определения S_k условия разрешимости (22), благодаря которому

$$[\delta_k^+, \delta_l^+] = 0 = [\delta_k^-, \delta_l^-], \tag{31}$$

а также

$$\delta_k^+ S_l = \delta_l^- S_k. \tag{32}$$

Соотношения (31) означают коммутативность вариаций одного знака. Правило коммутации вариаций разного знака легко получаются из связи (30):

$$[\delta_k^+, \delta_l^-] A = \delta_k^+ \delta_l^- A - \delta_l^- \delta_k^+ A = \delta_k^- \delta_l^- A - [\delta_l^- A, S_k] - \delta_l^- \delta_k^- A + \\ + \delta_l^- [A, S_k] = [A, \delta_l^- S_k] = [A, \delta_k^+ S_l]. \tag{33}$$

Обобщением этого тождества является следующее тождество для левонормированного простого мультикоммутатора вариаций. Обозначим $[ab...cd] = [a, [b, [. . ., [c, d]. . .]]]$. Справедлива

Лемма 1. Для любого оператора A

$$[\delta_n^{\#} \ldots \delta_2^{\#} \delta_1^{\#}] A = -\#_1 [A, \delta_n^{\#} \ldots \delta_2^{\#} S_1]. \tag{34}$$

[Здесь, конечно, знаки $\#_1$ и $\#_2$ противоположны, ср. (32),— иначе мультикоммутатор обратился бы в нуль вследствие (31).]

Лемма доказывается по индукции, началом которой служит (33):

$$[\delta_{n+1}^{\#} \delta_n^{\#} \ldots \delta_1^{\#}] A = \delta_{n+1}^{\#} [\delta_n^{\#} \ldots \delta_1^{\#}] A - [\delta_n^{\#} \ldots \delta_1^{\#}] \delta_{n+1}^{\#} A = \\ = -\#_1 \delta_{n+1}^{\#} [A, \delta_n^{\#} \ldots \delta_2^{\#} S_1] - \#_1 [\delta_{n+1}^{\#} A, \delta_n^{\#} \ldots \delta_2^{\#} S_1] = \\ = -\#_1 [A, \delta_{n+1}^{\#} \ldots \delta_2^{\#} S_1].$$

В качестве иллюстрации технического удобства работы с вариациями $\delta^{\#}$ выведем так называемое интегральное условие причинности [16].

Лемма 2. Пусть I — любой собственный (непустой и не совпадающий с N) поднабор набора индексов $N = \{1, \ldots, n\}$, а $\bar{I} = N \setminus I$ — его дополнение.

В области

$$x_i \gtrsim x_j, \quad \text{все} \quad i \in I, \quad \text{все} \quad j \in \bar{I} \tag{35}$$

имеет место факторизация

$$S_N = S_I S_{\bar{I}}. \tag{36}$$

Для $n = 2$ и этот факт сразу следует из условия причинности (20): в области $x_1 \gtrsim x_2$ $0 = \delta_2^+ S_1 = S_{12} - S_1 S_2$. Для произвольных n доказательство идет по индукции. Пусть при всех $n \leqslant n_0$ справедлива формула (36), а новый аргумент x_k попадает в группу I: $x_k \gtrsim x_j$, $j \in \bar{I}$. По определению S_N имеем: $S_{N \cup k} = \delta_k^+ S_N + S_N S_k$. Используя предположение индукции, получаем

$$S_{N \cup k} = (\delta_k^+ S_I) S_{\bar{I}} + S_I \delta_k^+ S_{\bar{I}} + S_I S_{\bar{I}} S_k = S_{I \cup k} S_{\bar{I}} + S_I (\delta_k^+ S_{\bar{I}} + [S_{\bar{I}}, S_k]) = \\ = S_{I \cup k} S_{\bar{I}} + S_I \delta_k^- S_I,$$

благодаря (30). Но в области $x_k \gtrsim x_j$

$$\delta_k^- S_{\bar{I}} = \delta_k^- (S^+ (\delta^-)_{\bar{I}} S) = -S_k S_{\bar{I}} + S_{\bar{I} \cup k} = 0$$

по предположению индукции. Случай, когда x_k попадает в группу $\bar{I}$, рассматриваем аналогично.

4. АМПЛИТУДА ПЕРЕХОДА $M \to N \setminus M$

Рассмотрим общий случай процесса с n частицами, когда первые m из них образуют начальное, а остальные $(n - m)$ — конечное состояния. В соответствии с этим пронумеруем частицы индексами 1, 2, . . ., m; $m + 1$, . . ., n. Полный набор индексов обозначим символом N, а наборы начальных и конечных индексов — символами M и $N \setminus M = \bar{M}$.

Преобразуем исходный матричный элемент $\langle \bar{M} \mid S \mid M \rangle$ (взятый, например, в out-базисе), прокоммутировав последовательно все m операторов рождения и $n - m$ операторов уничтожения с оператором, стоящим между «обкладками», и пользуясь при этом редукционными формулами (12) фоковского представления. Стабильность вакуума позволяет затем «внести» S^+ справа, и мы получим связь матричного элемента с вакуумным средним радиационного оператора (17):

$$\langle \bar{M} | S | M \rangle = \Gamma_1^- \ \ldots \ \Gamma_m^- \Gamma_{m+1}^+ \ \ldots \ \Gamma_n^+ \langle S_N (\hat{x}) \rangle_0 = (\Gamma^-)_M (\Gamma^+)_{\bar{M}} \langle S_N \rangle_0 \quad (37)$$

плюс тривиальные несвязные вклады, пропорциональные $\delta (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$, где i — индекс одной из начальных, а j — одной из конечных частиц.

Введенные в (12) интегральные операции

$$\Gamma_j^{\pm} B (x_j) = (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \int dx_j B (x_j) \exp (\pm i p_j x_j) |_{p_j^0 = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2}} =$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int dp_j^0 \delta (p_j^2 - m_j^2) \, \theta (p_j^0) \, (2p_j^0)^{1/2} \int dx_j B (x_j) \exp (\pm i p_j x_j)$$

выполняют двоякую функцию: осуществляют четырехмерное преобразование Фурье и «сажают» 4-импульсы на поверхность энергии. Как обычно, разделим эти функции, записывая

$$(\Gamma^-)_M (\Gamma^+)_{\bar{M}} \langle S_N \rangle_0 = (2\pi)^{-3n/2} \int (dp^0 \delta (p^2 - m^2) \, \theta (p^0) \sqrt{2p^0})_N \times$$
$$\times \mathcal{F} (\langle S_N \rangle_0) (-p_1, \ \ldots, \ -p_m; \ p_{m+1}, \ \ldots, \ p_n), \quad (38)$$

где преобразование Фурье определено симметричной по аргументам x формулой

$$\mathcal{F} (\langle S_N \rangle_0) (\hat{p}) = \int (dx)_N \langle S_N (\hat{x}) \rangle_0 \exp i \sum px, \quad (39)$$

поэтому импульсные аргументы начальных частиц в (38) имеют знак минус (рис. 3). Трансляционная инвариантность $\langle S_N \rangle_0$ позволяет выделить здесь δ-функцию закона сохранения полного 4-импульса:

$$\mathscr{F}(\langle S_N \rangle_0)(\hat{p}) = -\mathrm{i}\,(2\pi)^4\,\delta\left(\sum p\right) F(\hat{p}). \tag{40}$$

Введем понятие канала $M \to N \setminus M$ n-частичного процесса вне поверхности энергии, определив область

$$\mu_{M,\,\overline{M}} = \{\hat{p} \in \mathbb{R}^{4n}\colon\ \sum p = 0;\ p_i \in V^-,\ i \in M;\ p_j \in V^+,\ j \in \overline{M}\}; \tag{41}$$

в ней подчиняющиеся закону сохранения импульсы начальных частиц лежат в нижнем, а импульсы конечных — в верхнем конусе. Учитывая замечание о знаках после (39), мы видим, что определенная формулой (40) функция $F(\hat{p})$ в области $\mu_{M,\overline{M}}$ является амплитудой перехода $M \to N \setminus M$, или, другими словами, амплитудой $F_{M,\overline{M}}$ в канале $M \to \overline{M}$ n-частичного процесса. Формулы типа (38)—(41) определяют $F(\hat{p})$ для любого канала вне поверхности энергии, т. е. для вещественных 4-импульсов $\hat{p}$, связанных лишь полным законом сохранения. Заметим, что в принятой нами нормировке $F_{M,\overline{M}}$ — скаляр относительно преобразований Лоренца.

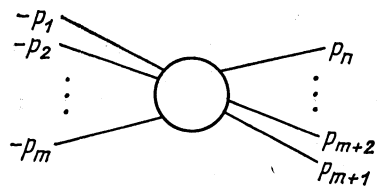

Рис. 3.

Мы будем интересоваться амплитудой как функцией комплексных импульсных переменных. Наша первая («локальная») цель состоит в доказательстве того, что амплитуда любого канала является граничным значением (своей, вообще говоря) аналитической функции

$$F_{M,\,\overline{M}}(\hat{p}) = \lim_{\hat{q} \to 0} F(\hat{p} + \mathrm{i}\hat{q}), \quad \hat{p} \in \mu_{M,\,\overline{M}}$$

при некотором способе стремления $\hat{q}$ к нулю. Вторая («глобальная») цель — показать, что для данного порядка n существует единая аналитическая функция, различными граничными значениями которой и являются амплитуды различных каналов. Наконец, третья цель — убедиться, что все эти свойства остаются и для амплитуд на поверхности энергии, т. е. что поверхность энергии принадлежит области аналитичности единой функции.

Таким образом, выполнение этой программы позволит установить, какое именно расширение за поверхность энергии совместно с принятыми аксиомами: амплитуды на поверхности энергии непосредственно связаны с нерасширенными коэффициентными функциями (37), а весь произвол в расширении сводится к виду единой аналитической функции, граничными значениями которой являются нерасширенные амплитуды.

5. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ: $n = 2$

Техническую идею дальнейшей работы мы проиллюстрируем на хорошо известном простейшем случае $n = 2$, $m = 1$, проводя рассуждения в терминах, допускающих непосредственное обобщение на произвольные n, m.

Исходный матричный элемент имеет вид

$$\langle 2 \mid S \mid 1 \rangle = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \Gamma_1^- \Gamma_2^+ \langle S_{12} \rangle_0, \tag{42}$$

а формула

$$\mathscr{F}(\langle S_{12} \rangle_0)(p_1, p_2) = -i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) F(p_1, p_2) \tag{43}$$

в области $p_1 \in V^-$, $p_2 \in V^+$ определяет «амплитуду» перехода $1 \to 2$ (мы специально оставили оба импульса p_1 и p_2 в аргументе F, чтобы сохранить симметрию, существенную для произвольного n). Носитель оператора $S_{12}(x_1, x_2)$ неограничен, и мы не можем сделать никаких непосредственных заключений об аналитических свойствах амплитуды.

Это обстоятельство не случайно: способ расширения, регулируемый условием причинности, пока не задан. Чтобы задать его и сделать выводы об аналитических свойствах, необходимо ввести объекты, для которых причинность формулируется непосредственно,— запаздывающий R_- и опережающий R_+ операторы:

$$R_- = S_{12} - S_2 S_1 = \delta_2^- S_1; \tag{44а}$$

$$R_+ = S_{12} - S_1 S_2 = \delta_2^- S_1. \tag{44б}$$

Сейчас мы установим свойство редукции, утверждающее, что для вакуумных средних сделанные к S_{12} добавки остаются на поверхности энергии. Поэтому способ выхода за поверхность энергии, фиксируемый условием причинности для $R_\pm$, автоматически перенесется на расширение S_{12}.

Рассмотрим разности между $\mathscr{F}(\langle S_{12} \rangle_0)$ и

$$\mathscr{F}(\langle R_\pm \rangle_0)(p_1, p_2) = -i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) r_\pm(p_1, p_2). \tag{45}$$

В первом случаем мы имеем

$$\mathscr{F}(\langle S_1 S_2 \rangle_0) = (2\pi)^8 \sum_L \delta(p_1 - p_L) \langle 0 \mid S_1(0) \mid L \rangle \langle L \mid S_2(0) \mid 0 \rangle \times \\ \times \delta(p_2 + p_L). \tag{46}$$

Поскольку полные импульсы промежуточных состояний $p_L \in \overline{V}_+$, вся сумма обращается в нуль в области $p_1 \in C\overline{V}_+$. Аналогично $\mathscr{F}(\langle S_2 S_1 \rangle_0) = 0$, $p_2 \in C\overline{V}_-$.

Иными словами, мы имеем **свойство редукции**

$$F(\hat{p}) = r_\pm(\hat{p}), \quad \hat{p} = (p_1, p_2) \in \mathscr{M}_\pm = \{\hat{p}\colon\ p_1 + p_2 = 0,\ p_{1,2} \in C\overline{V}_+\}, \tag{α}$$

причем области $\mathscr{M}_+$ и $\mathscr{M}_-$ образуют покрытие всего пространства импульсов (рис. 4).

Далее, благодаря условию причинности (20)

$$S_{12} = \begin{cases} S_1 S_2, & x_1 \gtrsim x_2; \\ S_2 S_1, & x_2 \gtrsim x_1, \end{cases} \tag{47}$$

носители операторов $R_\pm$ **ограничены:**

$$\operatorname{Supp} R_\pm = \Xi_\pm = \{\hat{x} : \pm (x_2 - x_1) \in \overline{V}_+\}, \tag{β}$$

а стоящую в экспоненте левой части (23) форму преобразованием Абеля можно привести к виду

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = -p_1 (x_2 - x_1) + (p_1 + p_2) x_2; \tag{48а}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = -p_2 (x_1 - x_2) + (p_1 + p_2) x_1. \tag{48б}$$

Сопоставляя (β) и (48), мы видим, что

$$\Sigma px > 0, \text{ для } \hat{x} \in \Xi_\pm, \text{ если } \hat{p} \in \mu_\pm, \tag{49}$$

где области (см. рис. 4)

$$\mu_\pm = \{\hat{p} : \Sigma p = 0;\ p_{1,2} \in V_-\}. \tag{50}$$

Поэтому преобразования Фурье (45) продолжаются до преобразований Фурье — Лапласа и определяют пару функций $F_\pm(\hat{k})$, $\hat{k} = \hat{p} + i\hat{q}$, $k_1 + k_2 = 0$, **аналитичных в примитивных** трубчатых **областях:**

$$\tau_\pm = \{\hat{k} : k_1 + k_2 = 0;\ \hat{q} \in \mu_\pm\}. \tag{γ}$$

В итоге запаздывающая r_- и опережающая r_+ функции оказываются **граничными значениями** аналитических функций:

$$r_\pm(\hat{p}) = \lim_{\mu_\pm \ni \hat{q} \to 0} F_\pm(\hat{k}). \tag{γ'}$$

Наконец, по определению вариаций $\delta^\pm$ операторы $R_\pm$ удовлетворяют условию разрешимости (22):

$$R_+ - R_- = [S_2, S_1], \tag{δ}$$

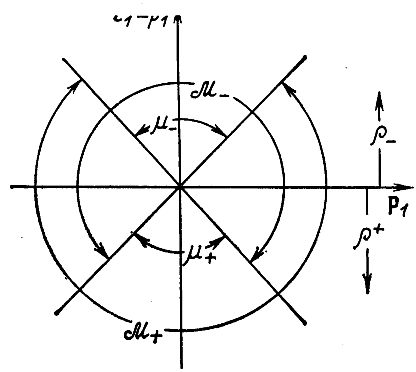

Рис. 4.

а благодаря этому функции r_+ и r_- совпадают в пересечении областей (α):

$$r_+ - r_- = 0, \quad p_1^2 < 0. \tag{δ'}$$

Стабильность одночастичного состояния и редукционные формулы дают

$$0 = \langle 0 | [a_1^-, S] | 2 \rangle = \Gamma_1^+ \Gamma_2^- \delta_2^+ S_1 =$$

$$= (2\pi)^2 \int (dp^0 \theta(p^0) \sqrt{2p^0} \delta(p^2 - m^2))_{12} \, \delta(p_1 - p_2) \, r_+(p_2),$$

откуда вытекает условие нормировки

$$\partial r_{\pm}(p^2)/\partial p^2 = 0, \quad p^2 = m^2. \tag{51}$$

Поэтому область совпадения (δ') расширяется до $p_1^2 < M^2$, где M^2 — начало непрерывного спектра.

Свойства (γ) — (δ) позволяют применить теорему «об острие клина» и заключить, что $r_{\pm}$ являются граничными значениями единой аналитической функции $F(\hat{k})$ [совпадающей в соответствующих примитивных трубах с $F_{\pm}(\hat{k})$].

Таким образом, введение операторов $R_{\pm}$ позволило добиться глобальной цели [переход на поверхность энергии $p_1^2 = m^2$ здесь тривиален благодаря условию нормировки (51)].

Здесь уместно подчеркнуть взаимное соответствие между областями $\mathcal{M}_\lambda$ точной редукции и базами μ_λ примитивных труб τ_λ (в нашем простейшем случае λ принимает два значения: $+$, $-$). Прежде всего, области $\mathcal{M}_\lambda$ и μ_λ определены релятивистски-инвариантным образом, причем μ_λ строго вложена в $\mathcal{M}_\lambda$. Далее, области $\mathcal{M}_\lambda$ образуют покрытие p-пространства, в то время как μ_λ не заполняют его. Полезно ввести еще один тип областей $\rho_{\pm} = \{\varepsilon_j = p_j^0\colon\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0;\ \varepsilon_{1,2} < 0\}$ (своих в каждой системе отсчета), образующих разбиение p-пространства (см. рис. 4). Приэтом справедливы строгие вложения $\mu_\lambda \subset \rho_\lambda \subset \mathcal{M}_\lambda$. Эта картина переносится на общий случай; в ней работать с разбиением гораздо удобнее: это упрощает громоздкую комбинаторику.

Итак, мы хотим показать, как описанная выше конструкция, основанная на надлежащем определении операторов $R_{\pm}$ и приводящая к свойствам (α) — (δ), обобщается на случай произвольных n, m.

6. ОБОБЩЕННЫЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Начнем с обобщения операторов $R_{\pm}$. С ростом числа частиц n катастрофически растет число различных вариантов взаимного расположения аргументов и соответственно число операторов, различающихся носителями и областями аналитичности. Для описания этой картины приходится вводить формальные комбинаторные термины; всюду, где это облегчит понимание, мы постараемся дать геометрическую интерпретацию.

Проведем в пространстве $\mathcal{E}^{n-1}$ нулевых компонент $\varepsilon_j = p_j^0$ (связанных полным законом сохранения энергии $\Sigma\varepsilon_j = 0$) всевозможные плоскости $\varepsilon_I = \sum\limits_{i \in I} \varepsilon_i = 0$, где I — собственный (непустой и не совпадающий с N) поднабор * полного набора индексов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Плоскости $\varepsilon_I = 0$ разбивают $\mathcal{E}^{n-1}$ на выпуклые

---

* Мы уже ввели этот комбинаторный термин для описания различных вариантов расположения аргументов x_j; ср. интегральное условие причинности (36) и (61).

конусы с общей вершиной в точке $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0$. Очевидно, каждый конус полностью определяется своим сечением единичной сферой S^{n-2} с центром в этой точке. Следы конусов на сфере — выпуклые многогранники — образуют $(n-2)$-мерные ячейки * ρ_λ. В каждой из них фиксированы знаки всех комбинаций ε_I; поэтому совокупность собственных поднаборов I с точки зрения данной ячейки распадается на два класса:

$$E_\lambda^+ = \{I : \varepsilon_I > 0 \text{ в } \rho_\lambda\}, \quad E_\lambda^- = \{I : \varepsilon_I < 0 \text{ в } \rho_\lambda\} \tag{52}$$

(обратно, классы $E_\lambda^\pm$ однозначно задают ячейку ρ_λ:

$$\rho_\lambda = \left\{\sum \varepsilon_j = 0;\ \varepsilon_I < 0,\ \forall I \in E_\lambda^-\right\}). \tag{53}$$

Введем упорядоченные разбиения N на l собственных непересекающихся поднаборов I_k:

$$\zeta = \{I_1 \mid I_2 \mid \ldots I_l\}, \tag{54}$$

причем для $l = 1$ «единичным разбиением» будем считать сам набор N. Для каждой ячейки ρ_λ из всего множества разбиений ζ выделим особый класс: назовем подчиненным ячейке ρ_λ разбиение (54), для которого первый поднабор, объединение первых двух, объединение первых трех, ..., объединение всех, кроме последнего — все из класса E_λ^-:

$$I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k \in E_\lambda^-, \quad k < l, \quad l \geqslant 2, \tag{55}$$

и обозначим C_λ^l совокупность подчиненных ρ_λ разбиений на l поднаборов (единичное разбиение считаем подчиненным любой ячейке).

Определение: Для каждой ячейки ρ_λ определим обобщенный запаздывающий оператор (ОЗО) R_λ формулой:

$$R_\lambda = S_N + \sum_{l=2}^{n} (-)^{l-1} \sum_{\zeta \in C_\lambda^l} S_{I_1} S_{I_2} \ldots S_{I_l}. \tag{56}$$

[Отсюда при $n = 2$, очевидно, получаются формулы (44).] Из этого определения и последуют нужные нам свойства ОЗО.

Свойство редукции. Свойство редукции в p-пространстве непосредственно следует из определения подчиненного разбиения. Действительно, правая часть (56) состоит из «главного» члена S_N и дополнительных, каждый из которых представим в виде произведения $O_I O_{\bar{I}}$, где I и $\bar{I} = N \setminus I$ — наборы индексов аргументов у сомножителей. При этом всегда $I \in E_\lambda^-$ по определению R_λ. Трансляционная инвариантность позволяет выделить δ-функции:

$$\mathcal{F}(\langle O_I O_{\bar{I}} \rangle_0) = (2\pi)^8 \sum_L \delta(p_I - p_L) \langle 0 | \tilde{O}_I | L \rangle \langle L | \tilde{O}_{\bar{I}} | 0 \rangle \delta(p_{\bar{I}} + p_L) \tag{57}$$

* Одновременно плоскости $\varepsilon_I = 0$ разбивают и все импульсное пространство $\mathbb{R}^{4(n-1)}$, в точной аналогии с разбиением $\mathbb{R}^4$ на области $\rho_\pm$ в случае $n = 2$. Получающиеся области определяются теми же условиями, что и ячейки ρ_λ, и мы используем для них то же обозначение; см. (58).

[здесь, как обычно, подразумевается интегрирование по 3-импульсам промежуточных состояний $| L \rangle$, а тильда обозначает преобразование Фурье по всем аргументам $O(\hat{x})$, кроме одного, приравниваемого нулю]. Поскольку полные импульсы промежуточных состояний $p_L \in \overline{V}_+$, член с данным I обратится в нуль в дополнительной области, т. е. когда $p_I \in C\overline{V}_+$. Так как в сумме (56) обязательно найдется член $S_I S_{\bar{I}}$ с любым $I \in E_\lambda^-$, вся сумма обращается в нуль в области, где все суммы p_I с I из класса E_λ^- принадлежат $C\overline{V}_+$:

$$\mathscr{M}_\lambda = \{\hat{p} : \sum p = 0, \ p_I \in C\overline{V}_+, \ \forall I \in E_\lambda^-\}, \qquad (a)$$

и в ней

$$\mathscr{F}(\langle R_\lambda \rangle_0) = \mathscr{F}(\langle S_N \rangle_0). \qquad (a')$$

Совокупность областей $\mathscr{M}_\lambda$ образует покрытие всего p-пространства, так как, очевидно,

$$\mathscr{M}_\lambda \supset \rho_\lambda = \{\hat{p} : \sum p = 0; \ \varepsilon_I = 0, \ \forall I \in E_\lambda^-\}, \qquad (58)$$

а области ρ_λ образуют разбиение p-пространства. Поэтому каждая точка $\hat{p}$ попадает хотя бы в одну из областей $\mathscr{M}_\lambda$, и в ней амплитуда $F(\hat{p})$ (см. (40)) совпадает с соответствующей обобщенной запаздывающей функцией (ОЗФ) [см. (70)].

Ограниченность носителя. Чтобы установить ограниченность носителя, воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим любую ячейку ρ_λ и отвечающий ей по (56) оператор R_λ. Возьмем любой $I \in E_\lambda^-$ и определим область в x-пространстве

$$\Psi_I = \{\hat{x} : x_i \gtrsim x_j, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in \bar{I}\}. \qquad (59)$$

Мы хотим показать, что вследствие условия причинности оператор R_λ заведомо обращается в нуль в области Ψ_I для любого $I \in E_\lambda^-$ и, следовательно, в объединении $\bigcup\limits_{I \in E_\lambda^-} \Psi_I$ всех таких областей. Для этого мы установим, что для любого $I \in E_\lambda^-$ правую часть (56) можно сгруппировать в пары, каждая из которых имеет вид

$$(-)^{l-1} S_{I_1} \ldots S_{I_{k-1}} (S_{I_k} - S_{I_k \cap I} S_{I_k \cap \bar{I}}) S_{I_{k+1}} \ldots S_{I_l} \qquad (60)$$

с некоторым k, $1 \leqslant k \leqslant l$ (например, для $l = 1$ S_N объединяется в пару с $S_I S_{\bar{I}}$). Но благодаря «интегральному» условию причинности [ср. (35), (36)] в области Ψ_I

$$S_{I_k} = S_{I_k \cap I} S_{I_k \cap \bar{I}}. \qquad (61)$$

Поэтому в области Ψ_I все члены в правой части (40) попарно сокращаются, и

$$R_\lambda = 0, \ x \in \Psi_I \text{ для любого } I \in E_\lambda^-. \qquad (62)$$

Возможность же представить R_λ в виде суммы пар (43) вытекает из следующего комбинаторного рассуждения.

Для любого $I \in E_\lambda^-$ и любого разбиения $\zeta = \{I_1 \mid \ldots \mid I_k \mid \ldots I_l\} \in C_\lambda^l$ назовем:

а) поднабор I_k I-разделимым, если новое разбиение

$$\zeta' = \{I_1 \mid \ldots \mid I_k \cap I \mid I_k \cap \bar{I} \mid \ldots \mid I_l\} \in C_\lambda^{l+1};$$

б) поднаборы $I_{k'}$, $I_{k'+1}$ I-парой, если $I_{k'} \in I$, $I_{k'+1} \in \bar{I}$.

Само разбиение $\zeta \in C_\lambda^l$ назовем I-разделимым, если при перечислении I_k первой встречается ситуация а), и I-парным, если первой встречается ситуация б). Имеет место

Лемма 3. Для любого $I \in E_\lambda^-$ и любого $\zeta \in C_\lambda^l$ разбиение ζ либо I-разделимо, либо I-парно.

Доказательство леммы 3 отнесено в приложение.

Тогда ясно, что в таком случае любому I-разделимому $\zeta = \{I_1 \mid \ldots \mid I_k \mid \ldots \mid I_l\} \in C_\lambda^l$ отвечает I-парное $\zeta' = \{I_1 \mid \ldots \mid I_k \cap I \mid I_k \cap \bar{I} \mid \ldots \mid I_l\} \in C_\lambda^{l+1}$, а любому I-парному $\eta = \{J_1 \mid \ldots \mid J_k \mid J_{k+1} \mid \ldots \mid J_l\} \in C_\lambda^{l+1}$ отвечает I-разделимое $\eta' = \{J_1 \mid \ldots \mid J_k \cup J_{k+1} \mid \ldots \mid J_l\} \in C_\lambda^l$. Чтобы окончательно убедиться в возможности перегруппировки суммы (56) в пары (57), достаточно заметить, что единичное разбиение $\zeta = N$ I-разделимо, а все разбиения $\zeta \in C_\lambda^n$ I-парны.

Пример. Полезно проиллюстрировать используемую комбинаторику на конкретном примере. Возьмем два оператора, $R_1 = \delta_1^- \delta_2^+ \delta_3^+ S_4$ и $R_2 = \delta_2^+ \delta_1^- \delta_3^+ S_4$. Пользуясь определением (17) радиационных операторов и связью (30) между вариациями $\delta^\pm$, легко получить формулы $\delta_k^+ S_I = S_{I \cup k} - S_I S_k$ и $\delta_k^- S_I = S_{I \cup k} - S_k S_I$, а с их помощью — представить R_i в виде (56). Выпишем эти представления в терминах разбиений ζ, сразу сгруппировав их в пары относительно $I = \{34\}$ для R_1 и относительно $\bar{I} = \{12\}$ для R_2:

$$R_1$$

$$\begin{array}{llll}
C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 & C_1^4 \\
\{1234\} & -\underline{\{34 \mid 12\}} & & \\
 & -\{1 \mid 342\} & +\{1 \mid 34 \mid 2\} & \\
 & -\{4 \mid 312\} & +\{4 \mid 3 \mid 12\} & \\
 & -\{42 \mid 13\} & +\{4 \mid 2 \mid 13\} & \\
 & -\{41 \mid 23\} & +\{4 \mid 1 \mid 23\} & \\
 & -\{412 \mid 3\} & +\{4 \mid 12 \mid 3\} & \\
 & -\{341 \mid 2\} & +\underline{\{34 \mid 1 \mid 2\}} & \\
 & & +\{41 \mid 2 \mid 3\} & -\{4 \mid 1 \mid 2 \mid 3\} \\
 & & +\{41 \mid 3 \mid 2\} & -\{4 \mid 1 \mid 3 \mid 2\} \\
 & & +\{42 \mid 1 \mid 3\} & -\{4 \mid 2 \mid 1 \mid 3\} \\
 & & +\{1 \mid 42 \mid 3\} & -\{1 \mid 4 \mid 2 \mid 3\} \\
 & & +\{4 \mid 31 \mid 2\} & -\underline{\{4 \mid 3 \mid 1 \mid 2\}} \\
 & & +\{1 \mid 4 \mid 32\} & -\{1 \mid 4 \mid 3 \mid 2\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
 & & R_2 & \\
C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 & C_2^4 \\
\{1234\} & -\underline{\{12|34\}} & & \\
 & -\{1|234\} & +\{1|2|34\} & \\
 & -\{4|123\} & +\{4|12|3\} & \\
 & -\{42|13\} & +\{4|2|13\} & \\
 & -\{41|23\} & +\{4|1|23\} & \\
 & -\{124|3\} & +\underline{\{12|4|3\}} & \\
 & -\{134|2\} & +\{1|34|2\} & \\
 & & +\{41|2|3\} & -\{4|1|2|3\} \\
 & & +\{14|3|2\} & -\{1|4|3|2\} \\
 & & +\{42|1|3\} & -\{4|2|1|3\} \\
 & & +\{1|24|3\} & -\underline{\{1|2|4|3\}} \\
 & & +\{4|13|2\} & -\{4|1|3|2\} \\
 & & +\{1|4|23\} & -\{1|4|2|3\}
\end{array}
$$

Элементы I_1 разбиений $\zeta = \{I_1 \mid I_2\}$ классов C_i^2 перечисляют все $I \in E_i^-$ для ячейки ρ_i. По ним легко находятся области Ψ_I. Заметим, что даже для совпадающих в двух случаях разбиений ζ группировка в пары различна у R_1 и R_2. Подчеркнуты различающиеся у R_1 и R_2 разбиения. Соответствующие им члены группируются в комбинацию $R'R'' = (S_{34} - S_4S_3)(S_{12} - S_1S_2)$ у R_1, а члены из R_2 — в комбинацию $R''R' = (S_{12} - S_1S_2)(S_{34} - S_4S_3)$ [ср. (74а), (74б)]. Области $\Psi_{\pi+}$ [см. (63)—(65)] также легко восстанавливаются: все задающие их для данной ячейки перестановки получаются из «полных» разбиений $\zeta \in C_i^4$: достаточно в полном разбиении взять индексы частиц в противоположном порядке.

Следует отметить, что простое представление R_1 и R_2 — в виде монома по вариациям $\delta\pm$ — возможно далеко не для всех ОЗО. Уже начиная с порядка $n = 5$ среди ОЗО появляются полиномы по вариациям, а для $n \geqslant 7$ таких полиномов большинство в полной совокупности ОЗО данного порядка. К тому же явный вид этих полиномов неоднозначен: благодаря алгебраическим тождествам (34) одну комбинацию мономов можно перестроить в другую. Ту же природу имеют тождества Штейнмана [18] и их обобщения [27].

Примитивные области аналитичности. Займемся теперь вычислением носителя оператора R_λ. Выше мы установили, что $R_\lambda(\hat{x}) = 0$, когда $\hat{x} \in \Psi_I$, где $I \in E_\lambda^-$. Поэтому носитель R_λ содержится в дополнении к объединению всех таких областей Ψ_I. Эта оценка, однако, слишком груба; мы можем улучшить ее, перейдя к более «мелким», чем Ψ_I, областям.

В области Ψ_I координаты x_k упорядочены группами: для всех $i \in I$ и $j \in \bar{I}$ $x_i \geqslant x_j$. Введем области, в которых все координаты последовательно упорядочены отношением $\geqslant$.

Пусть π — любая перестановка $j = \pi j$, $j \in N$. Для каждой π определим область

$$\Psi_\pi = \bigcap_{j<k} \{x_{\pi j} \geqslant x_{\pi k}\} = \bigcap_{j<k} CV_{\pi j,\, \pi k}, \tag{63}$$

где

$$V_{j,\,k} = \{x_j,\ x_k\colon\ x_j - x_k \in \bar{V}_+\} \otimes \mathbb{R}^{4(n-2)}. \tag{64}$$

С точки зрения ячейки ρ_λ все перестановки π разбиваются на два класса, $\{\pi^+\}$ и $\{\pi^-\}$: $\pi = \pi^+$, если наборы $I = \{\pi 1, \pi 2, \ldots, \pi k\} \in E_\lambda^+$ для всех $k < n$ (см. пример выше); $\pi = \pi^-$, если набор $J = \{\pi 1, \ldots \ldots, \pi k\} \in E_\lambda^-$ хотя бы для одного $k < n$. Очевидно, что во втором случае область $\Psi_{\pi^-} \subset \Psi_J$ [см. (59) и (63), откуда $R_\lambda(\hat{x}) = 0$, когда $\hat{x} \in \Psi_{\pi^-}$]. Очевидно далее, что области $\Psi_{\pi+}$ и $\Psi_{\pi-}$ в совокупности покрывают все x-пространство. Поэтому

$$\operatorname{Supp} R_\lambda \subset \bigcup_{\{\pi^+\}} \Psi_{\pi^+}. \tag{65}$$

Однако, некоторые «куски» областей $\Psi_{\pi+}$ на самом деле не принадлежат $\operatorname{Supp} R_\lambda$. Действительно, возьмем любую область $\Psi_{\pi+}$ и рассмотрим те точки ее, для которых $x_{\pi j} \sim x_{\pi(j+1)}$ для некоторого j. Эти точки содержатся не только в этой $\Psi_{\pi+}$, но и в «соседней» области $\Psi_{\pi'}$, перестановка π' которой отличается от $\pi = \pi^+$ только заменой $j \leftrightarrow j+1$. Эта соседняя область есть либо $\Psi_{\pi'-}$, либо $\Psi_{\pi'+}$. В первом случае она не принадлежит носителю, и тем самым точки из $\Psi_{\pi+}$ с $x_{\pi j} \sim x_{\pi(j+1)}$ не принадлежат ему. Во втором случае такие точки могут принадлежать носителю; но тогда они могут быть представлены в виде положительной линейной комбинации $\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\hat{x}'$, где $\hat{x} \in \bar{\Psi}_{\pi+}$, $\hat{x}' \in \bar{\Psi}_{\pi'+}$, $0 < \alpha < 1$, а в надчеркнутых областях $\bar{\Psi}_{\pi+}$ и $\bar{\Psi}'_{\pi+}$ знак «неравенства» $x_{\pi j} > x_{\pi(j+1)}$ (соответственно $x_{\pi j} < x_{\pi(j+1)}$) строгий: $\bar{\Psi}_{\pi+} \subset V_{\pi j,\ \pi(j+1)}$, $\bar{\Psi}_{\pi'+} \subset V_{\pi(j+1),\pi j}$. Поэтому для любой пары $(\pi j,\ \pi(j+1))$ мы можем не заботиться о пространственноподобных точках $x_{\pi j} \sim x_{\pi(j+1)}$: они либо не принадлежат носителю, либо лежат в выпуклой оболочке $\operatorname{Conv}(\bar{\Psi}_{\pi+} \cup \bar{\Psi}_{\pi'+})$.

Таким образом, для носителя R_λ справедлива оценка

$$\operatorname{Supp} R_\lambda \subset \operatorname{Conv}\Big(\bigcup_{\{\pi^+\}} \tilde{\Psi}_{\pi^+}\Big), \tag{b}$$

где у областей $\tilde{\Psi}_{\pi+}$ корреляция между всеми соседними аргументами «строгая»:

$$\tilde{\Psi}_{\pi^+} = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} \{x_{\pi j} > x_{\pi(j+1)}\} = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} V_{\pi j,\, \pi(j+1)}. \tag{66}$$

Рассмотрим теперь любую область $\widetilde{\Psi}_{\pi^+}$. Преобразование Абеля

$$\sum px = \sum_{j=1}^{n-1} (x_{\pi j} - x_{\pi(j+1)}) \sum_{k=1}^{j} p_{\pi k} + x_{\pi n} \sum p \tag{67}$$

демонстрирует, что $\Sigma px > 0$ для $\hat{x} \in \Psi_{\pi+}$ и

$$\hat{p} \in \mu_{\pi^+} = \left\{ \hat{p} : \sum p = 0;\ \sum_{k=1}^{j} p_{\pi k} \in V_+,\ \ j < n \right\}. \tag{68}$$

Поэтому $\Sigma px > 0$, если $\hat{x} \in \bigcup_{\{\pi^+\}} \widetilde{\Psi}_{\pi+}$, а $\hat{p} \in \bigcap_{\{\pi^+\}} \mu_{\pi+}$. Но тогда вследствие линейности формы по $\hat{x}$ заключение о знакоопределенности формы останется в силе, если $\hat{x} \in \operatorname{Supp} R_\lambda$. Для нахождения дуальной (в смысле знакоопределенности формы) к $\operatorname{Supp} R_\lambda$ области остается заметить только, что по определению класса $\{\pi^+\}$ пересечение областей μ_{π^+} равно [ср. (50)]

$$\mu_\lambda = \bigcap_{\bar{I} \in E_\lambda^+} \{p_{\bar{I}} \in V_+\} = \{\hat{p} : \sum p = 0;\ p_I \in V_-,\ \forall I \in E_\lambda^-\}. \tag{69}$$

Определим теперь обобщенную запаздывающую функцию $r_\lambda(\hat{p})$:

$$\mathscr{F}(\langle R_\lambda \rangle_0)(\hat{p}) = -\mathrm{i}\,(2\pi)^4\, \delta\left(\sum p\right) r_\lambda(\hat{p}). \tag{70}$$

Ясно, что вследствие знакоопределенности билинейной формы Σpx преобразование Фурье (70) продолжается до преобразования Фурье—Лапласа, определяющего функцию $F_\lambda(\hat{k})$ комплексных $\hat{k} = \hat{p} + \mathrm{i}\hat{q}$, аналитичную в примитивной трубчатой области [ср. (γ)]

$$\tau_\lambda = \{\hat{k} = \hat{p} + \mathrm{i}\hat{q} : \sum k = 0;\ \hat{q} \in \mu_\lambda\}. \tag{c}$$

При этом ОЗФ r_λ оказывается граничным значением аналитической функции

$$r_\lambda(\hat{p}) = \lim_{\mu_\lambda \ni \hat{q} \to 0} F_\lambda(\hat{p} + \mathrm{i}\hat{q}), \tag{c'}$$

и наша «локальная» цель достигнута.

Совпадение в p-пространстве. Рассмотрим две соседние на S^{n-2} ячейки ρ_1 и ρ_2, разделенные гранью * $\varepsilon_{I_0} = 0$, так что в ρ_1 и ρ_2 одина-

---

* Геометрически ячейки ρ_λ суть выпуклые полиэдры на сфере S^{n-2} (дуги на S^1, треугольники на S^2, тетраэдры — а иногда и их объединения — на S^3, и т.д.), полученные рассечением S^{n-2} плоскостями $\varepsilon_I = 0$. Ясно, что ячейку ρ_λ однозначно задают уже условия $\varepsilon_{I_i} < 0$, отвечающие только граням полиэдра; соответствующие им «базисные» наборы I_i — лишь часть полной совокупности E_λ^-. По базисным I_i можно (например, формально манипулируя с неравенствами) восстановить всю совокупность E_λ^-. При переходе из данной ячейки в соседнюю меняют знак только две комбинации ε_I, а именно $\varepsilon_{I_0} = -\varepsilon_{\bar{I}_0}$, отвечающие их общей грани $\varepsilon_{\bar{I}_0} = 0$ $(= -\varepsilon_{\bar{I}_0})$.

ковы знаки всех комбинаций ε_I, кроме двух, $\varepsilon_{I_0} = -\varepsilon_{\bar{I}_0}$: $\varepsilon_{I_0} < 0$ в ρ_1 и $\varepsilon_{I_0} > 0$ в ρ_2.

Тогда совокупности E_i^- для ρ_1 и ρ_2 отличаются лишь одним элементом:

$$E_1^- = E^- \cup \{I_0\};\quad E_2^- = E^- \cup \bar{I}_0;\quad E^- = E_1^- \cap E_2^-. \tag{71}$$

Как следствие этого, совпадает большинство разбиений $\zeta = \{I_1 | \ldots \ldots | I_k | \ldots | I_l\}$, подчиненных ячейкам ρ_1 и ρ_2: только ρ_1 будут подчинены лишь такие $\zeta^{(1)}$, что $\bigcup\limits_{a \leqslant k} I_a = I_0$ для некоторого k, а только ρ_2 — лишь такие $\zeta^{(2)}$, что $\bigcup\limits_{a \leqslant m} I_a = \bar{I}_0$ для некоторого m. Нетрудно усмотреть, что в совокупность $\{\zeta^{(1)}\}$ входят все разбиения $\zeta^{(1)} = \{I_1 | \ldots | I_k | I_{k+1} | \ldots | I_l\}$, для которых

$$\varepsilon_{I_1} + \varepsilon_{I_2} + \ldots + \varepsilon_{I_a} < 0 \quad \text{и} \quad I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_a \subset I_0 \ \text{для любого}\ a < k \tag{71a}$$

и одновременно

$$\varepsilon_{I_b} + \varepsilon_{I_{b+1}} + \ldots + \varepsilon_{I_l} > 0 \ \text{и}$$

$$I_b \cup I_{b+1} \cup \ldots \cup I_l \subset \bar{I}_0 \ \text{для любого}\ b > k+1, \tag{71б}$$

а каждому $\zeta^{(1)}$ со свойствами (71а), (71б) из $\{\zeta^{(1)}\}$ отвечает $\zeta^{(2)}) = \{I_{k+1}\} | \ldots | I_l | I_1 | \ldots | I_k\}$ из совокупности $\{\zeta^{(2)}\}$ со свойствами

$$\varepsilon_{I_{k+1}} + \varepsilon_{I_{k+2}} + \ldots + \varepsilon_{I_{k+c}} < 0 \ \text{и}$$

$$I_{k+1} \cup I_{k+2} \cup \ldots \cup I_{k+c} \subset \bar{I}_0 \ \text{для любого}\ c < l-k \tag{72a}$$

и одновременно

$$\varepsilon_{I_d} + \varepsilon_{I_{d+1}} + \ldots + \varepsilon_{I_k} > 0 \ \text{и}$$

$$I_d \cup I_{d+1} \cup \ldots \cup I_k \subset I_0 \ \text{для любого}\ d > 1. \tag{72б}$$

Условия (71а), (71б) задают ячейку ρ' на сфере $S^{|I_0|-2}$[ср. (53)], а условия (72а), (72б) — ячейку ρ'' на сфере $S^{|\bar{I}_0|-2}$ ($|K|$ — число элементов в наборе K). Им отвечают совокупности $E_{'}^-$ и $E_{''}^-$, построенные из собственных поднаборов наборов I_0 и $\bar{I}_0$ соответственно, подчиненные им разбиения ζ' и ζ'' и, наконец, два оператора R' и R''. В итоге представления (56) для R_i можно переписать в виде

$$R_1 = Q + R'R'', \quad R_2 = Q + R''R', \tag{73}$$

где Q — сумма членов, одинаковых для R_1 и R_2, а операторы R' порядка $|I_0|$ и R'' порядка $|\bar{I}_0|$ имеют вид (56):

$$R' = S_{I_0} - \sum_{k=2}^{|I_0|} (-)^k \sum_{\zeta'} S_{I_1} \ldots S_{I_k}; \tag{74a}$$

$$R'' = S_{\bar{I}_0} - \sum_{\substack{m=2 \\ l-k=m}}^{|\bar{I}_0|} (-)^m \sum_{\zeta''} S_{I_{k+1}} \ldots S_{I_l}. \tag{74б}$$

где разбиения ζ' и ζ'' подчинены ячейкам ρ' и ρ'' соответственно. Отсюда непосредственно получается тождество Рюэля, обобщающее условие разрешимости (δ):

$$R_1 - R_2 = [R';\ R'']. \tag{d}$$

Из него следует свойство совпадения «соседних» ОЗФ r_1 и r_2.

Действительно, трансляционная инвариантность позволяет выделить δ-функции, отвечающие сохранению 4-импульса в матричных элементах R_λ между вакуумом и l-частичным состоянием $|L\rangle$:

$$\mathscr{F}(\langle 0|R_\lambda|L\rangle)(\hat{p},\ p_L) = (2\pi)^4\,\delta\left(\sum p - p_L\right)\langle 0|\widetilde{R}_\lambda(\hat{p})|L\rangle. \tag{75}$$

Поэтому, взяв преобразование Фурье тождества Рюэля и подставив в правую часть полную систему промежуточных состояний, имеем

$$\delta\left(\sum p\right)(r_1(\hat{p}) - r_2(\hat{p})) = \mathrm{i}\,(2\pi)^4 \sum_L \{\delta(p_{I_0} - p_L)\langle 0|\widetilde{R}'|L\rangle \times$$
$$\times \langle L|\widetilde{R}''|0\rangle\,\delta(p_{\bar{I}_0} + p_L) - \delta(p_{\bar{I}_0} - p_L)\langle 0|R''|L\rangle\langle L|R'|0\rangle\,\delta(p_{I_0} - p_L)\}. \tag{76}$$

Легко видеть, что вклад вакуумного состояния $|L\rangle = |0\rangle$ в правую часть обращается в нуль: в фигурных скобках возникает разность двух одинаковых выражений $\delta(p_{I_0})\,\delta(p_{\bar{I}_0})\,\langle\widetilde{R}'\rangle_0\,\langle\widetilde{R}''\rangle_0$.

Вклад одночастичного состояния $|p\rangle$ выражается через две новые ОЗФ:

$$\langle 0|\widetilde{R}'|\mathbf{p}\rangle = -\mathrm{i}\,(2\pi)^{-3/2}\int dp^0\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p^0)\sqrt{2p^0}\,r'(\hat{p}_{I_0},\ -p); \tag{77а}$$

$$\langle \mathbf{p}|\widetilde{R}''|0\rangle = -\mathrm{i}\,(2\pi)^{-3/2}\int dp^0\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p^0)\sqrt{2p^0}\,r''(\hat{p}_{\bar{I}_0},\ p), \tag{77б}$$

и может быть преобразован к виду

$$\delta\left(\sum p\right) r'(\hat{p}_{I_0},\ -p)\,D_{m^2}(p)\,r''(\hat{p}_{\bar{I}_0},\ p). \tag{78}$$

Он, очевидно, сосредоточен на гиперболоиде $p^2 = m^2$.

Наконец, вклад непрерывного спектра сосредоточен в области $p^2_{I_0} \geqslant M^2_{I_0}$, где $M^2_{I_0}$ — порог непрерывного спектра в канале $I_0 \to \bar{I}_0$.

Итак, две соседние по грани $\varepsilon_{I_0} = 0$ ОЗФ обладают свойством совпадения

$$r_1(\hat{p}) - r_2(\hat{p}) = 0,\ m^2 \neq p^2_{I_0} < M^2_{I_0}. \tag{d'}$$

Заметим, что если один из наборов I_0, $\bar{I}'_0$ состоит из одного индекса, т. е. если канал $I_0 \to \bar{I}_0$ «одночастичный»— распадный или канал «слипания», то одна из фигурирующих в (78) ОЗФ, r' или r'',— двухточечная функция. Но двухточечная функция по условию нормировки (51) имеет нуль второго порядка по p^2 в точке $p^2 = m^2$. Поэтому в таких случаях разность $r_1 - r_2$ обращается в нуль и в точке $p_{I_0}^2 = m^2$, так что свойство (d') усиливается:

$$r_1(\hat{p}) - r_2(\hat{p}) = 0, \quad p_{I_0}^2 < M_{I_0}^2, \text{ если } |I_0| = 1 \text{ или } |\overline{I}_0| = 1. \qquad (d'')$$

7. ЕДИНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Все области совпадения $m^2 \neq p_I^2 < M_I^2$ имеют, очевидно, непустое полномерное в $\mathbb{R}^{4n-4}$ пересечение в окрестности нуля: $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$. Это позволяет применить к совокупности всех ОЗФ в данном порядке n обобщенную теорему «об острие клина» и заключить, что существует единая функция $\mathscr{F}(\hat{k})$, аналитичная в связном объединении всех примитивных труб τ_λ с шаровой окрестностью нуля в $\mathbb{C}^{4n-4}$. При этом каждая ОЗФ является граничным значением этой функции, взятым из «своей» примитивной трубы:

$$r_\lambda(\hat{p}) = \lim_{\mu_\lambda \ni \hat{q} \to 0} \mathscr{F}(\hat{p} + i\hat{q}). \tag{79}$$

Мы достигли, таким образом, глобальной цели в общем случае.

Согласно теореме Холла — Уайтмана, инвариантная функция зависит в своей области аналитичности лишь от инвариантных комбинаций $\hat{k}_I^2$, $I \subset N$ своих аргументов k:

$$\mathscr{F}(\hat{k}) = \mathbb{F}(\hat{k}_I^2), \quad \hat{k}_{I_1}^2 = k_{I_1}^2, \quad k_{I_2}^2 \ldots \tag{80}$$

Среди этих $2^{n-1} - 1$ комбинаций лишь $4n - 10$ независимых, и мы всегда можем выбирать независимые так, чтобы в их число попала k_J^2 с любым заданным $J \subset N$.

Подведем итоги. В соответствии со свойством редукции амплитуда $F_{M,\overline{M}}(\hat{p})$ в канале $M \to \overline{M}$ совпадает согласно (44), (a'), (70) — с некоторой ОЗФ, $r_\lambda(\hat{p})$ — с той, в чью область $\mathscr{M}_\lambda$ попадает точка $\hat{p}$:

$$F_{M,\overline{M}}(\hat{p}) = r_\lambda(\hat{p}), \quad \hat{p} \in \mathscr{M}_\lambda. \tag{81}$$

Со своей стороны, каждая $r_\lambda(\hat{p})$ является по (79) граничным значением единой аналитической функции. Согласно (80) она зависит от инвариантных комбинаций $\hat{k}_I^2$. Вообще говоря, отсюда вовсе не следует, что сама амплитуда зависит только от инвариантных комбинаций $\hat{p}_I^2$, поскольку способ стремления $\hat{q} \to 0$, свой в каждой области $\mathscr{M}_\lambda$, задан хотя и инвариантно, но в терминах 4-векторов; в пределе может остаться, например, зависимость от знаков p_I^0. Основной результат выражает

Теорема. Амплитуда $F_{M,\overline{M}}$ в своей физической области является граничным значением единой функции $\mathbb{F}(\hat{k}_I^2)$ инвариантных переменных при единообразном стремлении к нулю мнимых частей ее аргументов:

$$F_{M,\,\overline{M}}(\hat{p}) = \mathbb{F}(\hat{p}_I^2 + \mathrm{i}\hat{0}). \tag{82}$$

Пусть $p \in \mathscr{M}_\lambda$, т. е. $F_{M,\overline{M}}$ по (81) является граничным значением функции, аналитической, во всяком случае, в примитивной трубе τ_λ. Напомним сначала, что каждая область $\mathscr{M}_\lambda$ содержит подобласть μ_λ, в которой все комбинации p_I времениподобны, и рассмотрим ситуацию, когда $\hat{p} \in \mu_\lambda$. Тогда в примитивной трубе τ_λ оба 4-вектора любой пары p_I, q_I одновременно принадлежат либо V^+, либо V^-. Поэтому для любого I имеем $\mathrm{Im} k_I^2 > 0$, и утверждение (82) справедливо.

Заметим теперь, что вследствие транзитивности принадлежности конусу область μ_λ фактически определяют не все $2^{n-1} - 1$ условий $p_I \in V_-$, $I \in E_\lambda^-$, а только «базисные» $p_{I_k} \in V_-$, где I_k — наборы, отвечающие граням соответствующей ячейки ρ_λ: из базисных условий следуют все остальные. Поэтому, если мы хотим сдвинуть точку $\hat{p} \in \mathscr{M}_\lambda$ так, чтобы она вышла из подобласти μ_λ, то хотя бы одна из базисных комбинаций, p_J, станет пространственноподобной. При этом одна или несколько выбранных независимых переменных окажутся отрицательными, а знаки $\mathrm{Im} k_{J_k}^2$ в τ_λ — неопределенными. Продемонстрируем, что их можно, не выходя из области аналитичности, выбрать любыми, и в частности положительными, чтобы сохранить для амплитуды представление (82).

Рассмотрим точку $\hat{p}$, сдвинутую так, что одна базисная комбинация p_J пространственноподобна. Тогда эта точка принадлежит не только области $\mathscr{M}_\lambda$, но и области $\mathscr{M}_{\lambda'}$, отвечающей соседней по грани $\varepsilon_J = 0$ ячейке $\rho_{\lambda'}$. Применим теорему «об острие клина» к паре соответствующих ОЗФ r_λ и $r_{\lambda'}$. В их примитивных трубах все комбинации q_I, кроме «граничной» q_J (и $q_{\overline{J}}$), лежат в одинаковых конусах, а q_J — в противоположных; при рассматриваемых значениях $p_J^2 < 0$ ОЗФ r_λ и $r_{\lambda'}$ совпадают по (d'). В итоге область аналитичности расширяется: для любых $p_J^2 < 0$ к ней добавляется прямое произведение шаровой окрестности точки p_J в пространстве $\mathbb{C}^4$ и (совпадающих) проекций примитивных труб τ_λ и $\tau_{\lambda'}$ на пространство оставшихся переменных $\hat{k}$. В этой шаровой окрестности и найдется направление, по которому нужно стремить q_J к нулю, чтобы для любых $p_J^2 < 0$ было $p_{J_k} q_{J_k} > 0$. Аналогично рассматриваются ситуации, когда пространственноподобными становятся $l > 1$ базисных комбинаций p_J: при этом теореме об острие клина применяется к $l + 1$ совпадающим ОЗФ.

8. ОДНОЧАСТИЧНАЯ СТРУКТУРА

Выражаемое формулой (82) представление амплитуды $F_{M,\overline{M}}$ все еще не слишком эффективно с физической точки зрения: амплитуда выступает как граничное значение функции слишком большого количества комплексных аргументов. В идеале хотелось бы оперировать с аналитической функцией одной комплексной переменной (например, инвариантной энергии или передачи импульса), остальные аргументы которой можно было бы считать вещественными параметрами, лежащими в физической области.

Прийти к такому результату в общем случае — задача чрезвычайно сложная: для произвольных n не доказано даже, что поверхность энергии $k_J^2 = m^2$, $j \in N$ принадлежит области аналитичности единой функции $\mathbb{F}(\hat{k}_I^2)$. Без особых усилий, однако, можно изучить поведение $\mathbb{F}(\hat{k}_I^2)$ в окрестности вещественных значений $k_J^2 = p_J^2 < M_J^2$ (J фиксирован) и, в частности, в окрестности «одночастичных» особенностей $k_J^2 = m^2$. Инструментом для этого нам будет служить та же теорема «об острие клина».

Выберем независимые переменные так, чтобы интересующая нас k_J^2 попала в их число. Рассмотрим две соседние по грани $\varepsilon_J = 0$ ячейки ρ_1 и ρ_2, такие, что амплитуда $F_{M,\overline{M}}(\hat{p})$ совпадает с $r_1(\hat{p})$ в области $\mathscr{M}_1$ и с $r_2(\hat{p})$ в области $\mathscr{M}_2$. При этом

$$r_j(\hat{p}) = \lim_{\mu_j \ni \hat{q} \to 0} \mathscr{F}(\hat{p} + i\hat{q}); \quad j = 1,\ 2, \tag{83}$$

где в обеих базах μ_j примитивных труб все комбинации q_I, кроме выделенной q_J (и $q_{\overline{J}}$), лежат в одинаковых полях конуса, а q_J — в противоположных. Свойство совпадения (d') дает

$$r_1(\hat{p}) - r_2(\hat{p}) = r'(\hat{p}_J,\ -p_0)\, D_{m^2}(p_0)\, r''(\hat{p}_{\overline{J}},\ p_0),\ \ p_J^2 < M_J^2 \tag{84}$$

[символом $\hat{p}_J$ обозначена совокупность 4-импульсов p_j с $j \in J$. Напомним, что по определению ОЗФ (70) сумма 4-импульсов в ее аргументе равна нулю: $p_0 = p_J = -p_{\overline{J}}$)].

Применим теорему «об острие клина» в вещественной окрестности любых точек $\hat{p}$, для которых правая часть (84) обращается в нуль: это точки с $m^2 \neq p_J^2 < M_J^2$, причем для «одночастичного» канала $J \to \overline{J}$ сюда включены и точки с $p_J^2 = m_J^2$. В итоге к области аналитичности единой функции добавляется прямое произведение общей части примитивных труб τ_1 и τ_2 на шаровые окрестности точек p_J и $\mathbb{C}^4$; в терминах инвариантных переменных это окрестности вещественных точек p_J^2 в $\mathbb{C}^1$ с $m^2 = p_J^2 < M_J^2$.

Заметим далее, что фигурирующие в правой части (84) ОЗФ r' и r'' сами являются граничными значениями аналитических функций $\mathcal{F}'(\hat{k}_J, -k_0)$ и $\mathcal{F}''(\hat{k}_{\bar{J}}, k_0)$. Формулы (71), (72), задающие их ячейки ρ' и ρ'', показывают, что в базах μ' и μ'' соответствующих примитивных труб все комбинации q_I с $I \subset J$ или $I \subset \bar{J}$ $(J \neq I \neq \bar{J})$ лежат в тех же конусах, что и в базах μ_1 и μ_2. Поскольку же каналы $J \to \{0\}$ для r' и $\{0\} \to \bar{J}$ для r'' «одночастичные» комплексные окрестности точек p_J и $p_{\bar{J}}$ в $\mathbb{C}^4$ с $p_J^2 = m^2 = p_{\bar{J}}^2$ принадлежат областям аналитичности соответственно функций $\mathcal{F}'(\hat{k}_J, -k_0)$ и $\mathcal{F}''(\hat{k}_{\bar{J}}, k_0)$.

Поэтому произведение $\mathcal{F}'\mathcal{F}''$ аналитично в пересечении этих окрестностей, точнее говоря, в прямом произведении такого пересечения и проекции объединения примитивных труб $\tau_1 \cup \tau_2$ на пространство остальных переменных $\hat{k}$. Наконец, используя аналитическое представление для обобщенной функции $D_{m^2}(p_0)$, мы заключаем, что в окрестности вещественного значения $p_J^2 = p_0^2 = p_{\bar{J}}^2 = m^2$ единая функция $\mathcal{F}(\hat{k}) = \mathbb{F}(\hat{k}_I^2)$ имеет представление

$$\mathbb{F}(\hat{k}_I^2) = \frac{\mathbb{F}'(\hat{k}_J^2)\,\mathbb{F}''(\hat{k}_{\bar{J}}^2)}{k_J^2 - m^2} + \tilde{\mathbb{F}}(\hat{k}_I^2), \tag{85}$$

где функции $\mathbb{F}'$, $\mathbb{F}''$ и $\tilde{\mathbb{F}}$ регулярны в точке $k_J^2 = m^2$ при положительных мнимых частях остальных их аргументов.

Формула (85) описывает «одночастичную структуру» единой функции $\mathbb{F}(\hat{k}_I)$ в любом канале $J \to \bar{J}$ произвольного многочастичного процесса. Она является прямым обобщением известной структуры полюсных членов в s-, t- и u-каналах процесса двухчастичного рассеяния.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3

Рассмотрим любое разбиение $\zeta = \{I_1 \mid \ldots \mid I_k \mid \ldots \mid I_l\} \in C_\lambda^l$, подчиненное ячейке ρ_λ, и любой поднабор $I \in E_\lambda^-$. Каждую сумму $\varepsilon_{I_k} = \sum_{i \in I_k} \varepsilon_i$ представим в виде $a_k + b_k$, где $a_k = \varepsilon_{I \cap I_k}$, $b_k = \varepsilon_{\bar{I} \cap I_k}$. При этом для любого k хотя бы одна комбинация, a_k или b_k, отлична от нуля, поскольку $I \cup \bar{I} = N$, а все I_k не пусты. Далее, по определению $I \in E_\lambda^-$ имеем $\varepsilon_I = \sum_{k=1}^{l} a_k < 0$, а по определению подчиненного разбиения $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) < 0$ для всех $k < l$. Запишем эти условия в виде таблицы:

$$\begin{array}{l|l}
a_1 & \\
a_2 & a_1+b_1<0 \\
\vdots & \vdots \\
a_k & a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_{k-1}+b_{k-1}<0 \\
a_{k+1} & a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_k+b_k<0 \\
\vdots & \vdots \\
a_l & a_1+b_1+\ldots+a_{l-1}+b_{l-1}<0 \\
\hline
<0 &
\end{array}$$

Знак <0 в левом нижнем углу таблицы напоминает, что сумма элементов левого столбца отрицательна. Сложив все строки и столбец, получим

$$[a_1]+[a_1+b_1+a_2]+\ldots+[a_1+b_1+\ldots+a_{k-1}+b_{k-1}+a_k]+ \\ +\left[\sum_{i=1}^{l-1}(a_i+b_i)+a_l\right]<0 \tag{П1}$$

[в k-й квадратной скобке стоит сумма a_k и элементов $(k-1)$-й строки]. Ясно, что хотя бы одна из квадратных скобок отрицательна; пусть первая такая скобка имеет номер k. Возможны четыре альтернативные ситуации:

1) $a_k\neq 0$, $b_k\neq 0$. Тогда поднабор I_k I — разделим: $\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_{I_i}+\varepsilon_{I\cap I_k}<0$, и разбиение $\zeta'=\{I_1|\ldots|I_k\cap I\mid I_k\cap\overline{I}\mid\ldots I_l\}\in C_\lambda^{l+1}$;

2) $a_k=0$, $b_k\neq 0$. Тогда $\sum_{i\neq k}a_i<0$, и отрицательной будет сумма (П1) с выпущенной $(k-1)$-й строкой:

$$[\ \ ]_1+[\ \ ]_2+\ldots+[\ \ ]_{k-1}+[\ \ ]_{k+1}+\ldots+[\ \ ]_l<0. \tag{П2}$$

Из (П2) следует, что отрицательной должна быть хотя бы одна из $[\ \ ]_j$ с $j>k$ ($[\ \ ]_k$ была ранее первой отрицательной), и мы возвращается к началу альтернатив;

3) $a_k\neq 0$, $a_{k+1}\neq 0$, $b_k=0$. При суммировании пропускаем k-ю строку, и отрицательной будет сумма

$$[\ \ ]_1+[\ \ ]_2+\ldots+[\ \ ]_k+a_{k+1}+[\ \ ]_{k+2}+\ldots+[\ \ ]_l<0. \tag{П3}$$

Заметим, что вследствие $b_k=0$ будет $[\ \ ]_k+a_{k+1}=[\ \ ]_{k+1}$, и мы получим снова (П2), возвращаясь затем к началу альтернатив;

4) $a_k\neq 0$, $a_{k+1}=0$, $b_k=0$. Из второго равенства следует $I_{k+1}\in\overline{I}$, а из третьего $I_k\subset I$, т.е. поднаборы I_k, I_{k+1} образуют I-пару. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дирак П. А. М.** Принципы квантовой механики: Пер. с англ. М.: Наука, 1960.

2. **фон Нейман И.** Математические основы квантовой механики: Пер. с нем. М.: Наука, 1964.

3. **Йост Р.** Общая теория квантованных полей: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.

4. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.

5. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
6. **Владимиров В. С., Жаринов В. В.**//Труды МИАН. 1986. Т. 175. С. 113—133.
7. **Bros J., Epstein H., Glaser V.**//Nuovo cimento. 1964. Vol. 31. P. 1265; Comm. Math. Phys. 1965. Vol. 1. P. 240—264.
8. **Lehmann H.**//Nuovo cimento. 1958. Vol. 10.P.579.
9. **Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Тавхелидзе А. Н.**//Phys. Lett. 1967. Vol. 24B. P. 181—185.
10. **Померанчук И. Я.**//ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 725—731; **Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т.**//УФН. 1966. Т. 88. С. 57—90; **Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Хрусталев О. А.**//ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. С. 3—41, 515.
11. **Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н.**//ТМФ. 1972. Т. 12. С. 305—330.
12. **Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Нгуен Ван Хьеу**//Phys. Lett. 1967. Vol. 25B. P. 611; **Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Петров В. А.** Общие принципы квантовой теории поля и их следствия. М.: Наука, 1977. С. 183—262.
13. **Логунов А. А.**//ДАН СССР. 1958. Т. 120. С. 501—503.
14. **Streater R.**//Ann. Phys. 1965. Vol. 33. P. 311—325.
15. **Медведев Б. В., Павлов В. П., Суханов А. Д.**//Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий. Гомель. Дубна, 1974. С. 173—185.
16. **Медведев Б. В.**//ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 791—799.
17. **Bros J., Epstein H., Glaser V.**//Helv. Phys. Acta. 1972. Vol. 45. P. 149.
18. **Steinmann O.**//Helv. Phys. Acta. 1960. Vol. 33. P. 257—347.
19. **Araki H.**//J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 163—178.
20. **Ruelle D.**//Nuovo cimento. 1961. Vol. 19. P. 356—374.
21. **Bros J.**//Analytic Methods in Mathematical Physics. N.Y.: Gordon and Breach, 1970. P. 85—133.
22. **Epstein H., Glaser V., Stora R.** General properties of the n-point functions in local quantum field theory, CERN lecture, 1976.
23. **Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Медведев Б. В. и др.**//ТМФ. 1977. Т. 39. С. 149—174.
24. **Медведев Б. В., Павлов В. П., Поливанов М. К., Суханов А. Д.**//ТМФ. 1982. Т. 52. С. 163—177.
25. **Вайнштейн А. И., Волошин М. Б., Захаров В. И. и др.**//УФН. 1977. Т. 123. С. 217—255.
26. **Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.**//ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 542—561.
27. **Павлов В. П.**//ТМФ. 1978. Т. 37. С. 154—171.
28. **Завьялов О. И., Сушко В. Н.**//Статистическая физика и квантовая теория поля. М.: Наука, 1973. С. 411—439.