ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 6

УДК 530.1

ОБ ИНЕРТНЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТИЦ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Б. П. Косяков

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИЭФ, Саров, Россия

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 6

УДК 530.1

ОБ ИНЕРТНЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТИЦ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Б. П. Косяков

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИЭФ, Саров, Россия

Статья посвящена критическому анализу инертных свойств классических релятивистских точечных объектов. Объекты подразделяются на галилеевские и негалилеевские. Рассмотрены три примера негалилеевских объектов: спиновые, «жесткие» и «одетые» частицы. В отсутствие внешних сил такие частицы способны двигаться не только прямолинейно и равномерно, но и совершать дрожание, самоускоряться, самозамедляться или двигаться равноускоренно. Свободный негалилеевский объект обладает 4-скоростью и 4-импульсом, которые в общем случае не коллинеарны, поэтому его инертные свойства характеризуются не одной, а двумя инвариантными величинами. Обосновывается необходимость жесткой механики для построения непротиворечивой классической электродинамики в пространстве-времени размерности $D+1>4$. В этой связи пересматривается аргументация Эренфеста, пришедшего к заключению, что четырехмерность нашего мира обусловлена формой фундаментальных физических законов. Выяснено, что понятие «самодействующая частица» не отражает существа дела в классической теории поля с точечными источниками, более уместным здесь оказывается понятие «одетая частица».

The paper is a critical review of inert properties of classical relativistic point objects. The objects are classified as Galilean and non-Galilean. Three types of non-Galilean objects are outlined: spinning, rigid, and «dressed» particles. In the absence of external forces, such particles are capable — apart from uniform motions along straight lines — of execution of Zitterbewegungs, runaways, self-decelerations, and uniformly accelerated motions. A free non-Galilean object possesses the four-velocity and four-momentum which in general are not collinear, thus its inert properties are specified by two, rather than one, invariant quantities. It is shown that a spinning particle need not be the non-Galilean object. The necessity of a rigid mechanics for construction of a consistent classical electrodynamics in spacetimes of dimensions $D+1>4$ is justified. In this regard, the question of how much the form of the fundamental laws of physics orders the four-dimensionality of our world is revised together with its solution suggested by Ehrenfest. The present analysis made it apparent that the notion of the «self-interacting particle» does not reflect the heart of the matter in classical field theories with point-like sources, and the notion of the «dressed particle» proves to be more appropriate.

ВВЕДЕНИЕ

В современных учебниках классической теории поля (см., например, [1–4]) вопросу об инертных свойствах точечных объектов не уделяется особого внимания. Иногда дело ограничивается тем, что параметр соответствующей размерности, вводимый в механической части лагранжиана, попросту отождествляется с массой частицы в знакомом из школьной физики ньютоновском смысле; иногда понятия релятивистской механики вводят менее формальным «индуктивным» путем. Но каковы бы ни были исходные посылки, ход рассуждений обычно направлен на формирование представления об универсальной значимости — как на классическом, так и квантовом уровне — лишь величины M, определяемой соотношением $p^2 = M^2$. Эту величину называют просто массой, без всяких прилагательных. Принято думать, что это *единственная* величина, характеризующая инертные свойства частицы.

Между тем, пытаясь рассуждать более строго, мы должны быть внимательны к контексту. Например, если речь идет о *классической* теории, то одной величиной M не обойтись. Специалистам этот факт известен. Но о нем как-то «стесняются» упоминать в журналах, рассчитанных на широкую физическую аудиторию, и тем более в учебной литературе.

В упрощенном виде суть дела такова. Состояние релятивистского точечного объекта можно характеризовать 4-координатой x^μ в пространстве Минковского и 4-импульсом p^μ. В классической картине определена также 4-скорость $v^\mu = dx^\mu/ds$, где s — собственное время. Из векторов p^μ и v^μ можно построить два инварианта:

$$M^2 = p^2 \quad \text{и} \tag{1}$$

$$m = p \cdot v. \tag{2}$$

Третий инвариант $v^2 = 1$ отражает лишь выбор параметризации, в динамическом отношении он тривиален. Величины M и m мы будем называть соответственно *массой* и *массой покоя*. Для объектов простейшего вида — *галилеевских частиц* — эти величины численно равны. Но в классической теории можно рассматривать и *негалилеевские* частицы. В отсутствие внешних сил они могут двигаться не только прямолинейно и равномерно, но и дрожать, самоускоряться, самозамедляться и совершать гиперболическое движение. Свободный негалилеевский объект обладает 4-скоростью и 4-импульсом, которые, вообще говоря, не параллельны, а значит, инертные свойства такого объекта характеризуются двумя *разными* величинами M и m. Очевидно, что любой положительный скаляр, который построен из импульсно-энергетических и кинематических переменных и сохраняется во времени, пригоден для описания инертных свойств частицы.

Мы рассмотрим три типа негалилеевских объектов — *спиновые*, *жесткие* и *одетые* частицы. О дрожании спиновой частицы впервые объявил Шредингер, предлагая наглядный образ полученных решений свободного уравнения Дирака [5], с тех пор это явление носит выразительное немецкое название «Zitterbewegung». Позднее была найдена чисто классическая реализация этого явления — спиральная мировая линия [6, 7]. Возможность свободной эволюции с экспоненциально растущим ускорением для одетой заряженной частицы (см., например, [1–4]) была указана, по-видимому, еще в работах

Лоренца конца XIX в. Хотя такое решение уравнений движения считается «нефизическим», сам факт его существования снимает запрет на возможность нарушения галилеевского режима для частиц, испытывающих «самодействие», фактически для любых реальных частиц, поскольку любая из них обладает каким-нибудь зарядом (электрическим, янг-миллсовским или гравитационным), а значит, является «самодействующей». Способность одетой цветной частицы двигаться самозамедленно в отсутствие внешних сил отмечалась в [8–10]. Не остался без внимания и тот факт, что жесткие частицы могут совершать дрожания и двигаться самоускоренно (см., например, [11,12] и содержащиеся там ссылки).

Наше рассмотрение будет ограничено рамками классической теории, другими словами, исключаются специфически квантовые проблемы массы, и, более того, мы не станем касаться соответствующих проблем в искривленном пространстве-времени общей теории относительности. Квантовая теория может эпизодически упоминаться лишь для того, чтобы оттенить классический характер обсуждаемого вопроса. Мы исходим из консервативного взгляда на множество допустимых мировых линий, в соответствии с которым оно содержит гладкие времениподобные или светоподобные мировые линии, направленные в будущее, но не содержит ни пространственноподобных кривых или фрагментов таких кривых (соответствующих движению со сверхсветовыми скоростями), ни времениподобных кривых, направленных в прошлое (интерпретируемых как мировые линии античастиц), ни кусочно-гладких времениподобных кривых с резкими изломами, где ориентация из прошлого в будущее меняется на противоположную. Мы оставляем в стороне любые модификации понятия массы, связанные с расширением пространственно-временной симметрии, например, обобщение Схоутена–Хаантьеса, согласно которому при конформных преобразованиях пространства Минковского масса ведет себя не как инвариантная величина, а как скалярная плотность веса $-1/2$ (см., например, [13]). Мы сосредоточимся на обсуждении элементарных объектов и почти не будем затрагивать проблему массы для составных систем. Рассматривая частицу как источник классического поля, мы будем всюду иметь в виду запаздывающее (но не опережающее или какое-либо иное) граничное условие.

Среди моделей спиновых частиц мы рассмотрим лишь модель Я. И. Френкеля [14], исторически первую модель классической частицы со спином, и модель с грассмановыми переменными для описания спиновых степеней свободы, предложенную Ф. А. Березиным и М. С. Мариновым [15] и Р. Касальбуони [16] и развитую К. А. П. Гальвао и К. Тейтельбоймом [17]. Мы ограничимся обсуждением жесткой частицы, лагранжиан которой зависит от скоростей и ускорений, хотя в литературе можно встретить модели, содержащие и более высокие производные (довольно полный комментированный список работ на эту тему приведен в [18]). Мы рассмотрим заряженную и цветную одетые частицы в четырехмерном пространстве Минковского $E_{1,3}$, однако не станем говорить о других одетых частицах в $E_{1,3}$, например, о частицах, взаимодействующих со скалярным или тензорным полем [19], одетых частицах со спином, взаимодействующих с электромагнитным [20, 21], скалярным и тензорным полями [22], одетых частицах в искривленных многообразиях [23, 24] и плоском пространстве иной размерности, например, в $E_{1,5}$ [25].

Цель этих ограничений двоякая. Во-первых, они позволяют понять, что даже в столь узких рамках мы имеем дело не с одной, а несколькими величинами, характеризующими инертные свойства объекта, и отделить проблемы неединственности, присущие данному рассмотрению, от проблем, возникающих в более общем случае. Во-вторых, для других секторов физической теории нужен тщательный анализ понятия массы, который еще предстоит проделать. Быть может, эта задача покажется привлекательной кому-нибудь из читателей статьи.

План статьи таков. В разд. 1 обсуждается проблема массы для галилеевской частицы и ряд примыкающих сюда вопросов, не нашедших отражения в учебной литературе. Выяснено, что второй закон Ньютона пригоден для релятивистской механики, если его гладко вложить в четырехмерную геометрию, и показано, как осуществляется такое вложение. Рассмотрены две формы действия для галилеевской частицы. Установлена их эквивалентность, если масса частицы конечна, и приемлемость лишь одной из них в безмассовом случае. Разд. 2 посвящен анализу инертных свойств спиновой частицы Френкеля. В современном описании эта модель проста (по крайней мере, в отсутствие взаимодействия) и поучительна, но соответствующий материал разбросан по журнальным статьям. Поэтому мы обсудим эту модель довольно подробно и в порядке, удобном для первоначального знакомства. Тот факт, что спиновая частица может вести себя как галилеевский объект, продемонстрирован в разд. 3 на примере модели с грассмановыми переменными. Проблеме инертных свойств жесткой частицы посвящен разд. 4. Мотивы изучения динамики с высшими производными рассмотрены в разд. 5. Показано, что построение непротиворечивой классической электродинамики в пространстве-времени размерности $D + 1 > 4$ неизбежно ведет к понятию жесткой частицы. В этой связи предпринята ревизия проблемы четырехмерности нашего мира и ее решения, предложенного П. Эренфестом. В разд. 6 показано, что в классической теории поля с точечными источниками адекватным является понятие «одетой частицы», а не широко распространенное понятие «самодействующей частицы». Рассмотрена проблема массы на двух сравнительно простых примерах одетых частиц. Итоги обсуждения и доводы в пользу его необходимости приведены в разд. 7.

Статья ориентирована не только на специалиста, но и на читателя со стандартным запасом сведений из теории поля. Поэтому основные вопросы разбираются по возможности полно и замкнуто* и, хотелось бы надеяться, не потребуют для понимания дополнительного обращения к оригинальным работам.

Мы придерживаемся в основном стандартных обозначений. Принята гауссовская система единиц, скорость света c и квант действия $\hbar$ положены равными 1. Выбрана метрика $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+,-,-,-)$. Повторяющиеся греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, латинские индексы «пробегают» значения от 1 до 3. Иногда для четырехмерных величин используется очевидная геометрическая символика без индексов, а трехмерные векторы обозначаются полужирным шрифтом. Мировая линия параметризуется одним из двух способов: либо с использованием произвольного аффинного параметра λ (при этом производная по λ обозначается штрихом), либо при помощи собственного времени s (при этом производная по s обозначается точкой). Для 4-скорости $\dot{x}^\mu$ и 4-ускорения $\ddot{x}^\mu$ приняты специальные символы, соответственно v^μ и a^μ.

1. ГАЛИЛЕЕВСКАЯ ЧАСТИЦА

Если попытаться передать содержание специальной теории относительности одной фразой, то кажется, что это намерение успешно реализуется следующей посылкой: *пространство-время физического мира описывается четырехмерной псевдоевклидовой геометрией сигнатуры* $(+,-,-,-)$. При этом подразумевается, что любой динамический закон можно представить как геометрическое утверждение.

У читателя, приверженного дедуктивному методу «Курса теоретической физики» Ландау и Лифшица, привыкшего считать принцип наименьшего действия альфой и омегой теоретических построений, такое «геометрическое кодирование» специальной теории относительности должно встретить понимание. Действительно, указав тип геометрии, можно определить геометрические инварианты, написать лагранжианы в виде инвариантных конструкций и далее, варьируя действие, вывести динамические уравнения. Поэтому формально все как будто сводится к фиксации геометрии.

Если, однако, взглянуть на содержательную сторону дела, то выяснится, что мы упустили одно важное обстоятельство. Проверить в опыте геометрию саму по себе невозможно. Как подчеркивал еще Пуанкаре [28], проверке подлежит лишь совокупность геометрии и физических законов, или, в символическом виде, $\Gamma + \Phi$. Изменяя Γ, можно так модифицировать Φ, что

*Оправданием такой детализации служит то обстоятельство, что анализируемая проблема до сих пор вообще не затрагивалась ни в специальной монографической литературе (включая известную книгу [26]), ни в обзорных статьях для широкой физической аудитории.

теоретические предсказания явлений останутся прежними. Поэтому недостаточно фиксировать геометрию пространства-времени, нужно сказать еще о том, как в структуру теории включены физические понятия, имеющие непосредственное операциональное определение, например, такие понятия, как сила, масса, энергия и импульс.

Разберемся прежде всего со статусом ньютоновской динамики. Распространенное заблуждение состоит в том, что второй закон Ньютона в его *первозданном* виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \tag{3}$$

не работает при скоростях, сравнимых со скоростью света. Его в этой области якобы следует отбросить, а взамен принять «истинный закон релятивистской механики»

$$\frac{d}{dt}\, m\gamma\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \tag{4}$$

выведенный Планком в 1906 г. [27]. На самом же деле уравнение (3) не требуется ни отвергать, ни видоизменять, его следует лишь *гладко вложить* в четырехмерную геометрию пространства Минковского, это автоматически даст уравнение (4).

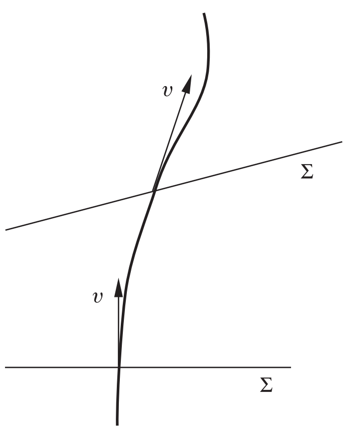

Рис. 1. Гиперплоскость Σ, перпендикулярная мировой линии

Идея вложения основана на том факте, что уравнение (3) становится при $\mathbf{v} \to 0$ *асимптотически точным* законом. Это означает, что уравнение (3) верно описывает динамику в *мгновенно сопутствующей* инерциальной системе отсчета, где скорость объекта $\mathbf{v} = 0$, или, выражаясь на геометрическом языке, векторное равенство (3) является точным в гиперплоскости Σ, перпендикулярной мировой линии. Между тем гиперплоскость Σ поворачивается вместе с вектором нормали v^μ при движении вдоль мировой линии (рис. 1). Поэтому алгоритм построения глобальной релятивистской картины сводится к тому, чтобы прочитать и исполнить «локальное динамическое предписание» (3) в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета, перескочить в следующую сопутствующую систему и т. д. Другими словами, для вложения нам нужен оператор $\overset{v}{\perp}$, который бы все время проектировал векторы пространства Минковского на гиперплоскости Σ, перпендикулярные мировой линии. Как нетрудно догадаться, этот оператор имеет вид

$$\overset{v}{\perp}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2}, \tag{5}$$

а проекция любого вектора X^μ на гиперплоскость Σ есть

$$(\overset{v}{\perp} X)^\mu = X^\mu - \frac{X \cdot v}{v^2}\, v^\mu. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) применимы при произвольной параметризации мировой линии, в них следует лишь заменить v на x'. Что касается параметризации с помощью собственного времени, то здесь мы фактически имеем дело даже с более простыми формулами, поскольку $v^2 = 1$.

Посмотрим, как проектор (5) производит вложение однопараметрического семейства трехмерных уравнений (3) в четыре измерения. Прежде всего заметим, что в мгновенно сопутствующей системе отсчета ось времени t направлена вдоль касательной к мировой линии в данный момент, поэтому dt совпадает с ds (формально это следует из соотношения $ds = \gamma^{-1}dt$, в котором $\gamma \to 1$ при $\mathbf{v} \to 0$), и дифференцирование по t можно заменить здесь на дифференцирование по s. Далее, по *ньютоновской 3-силе* $\mathbf{f}$ можно однозначно восстановить *4-силу Минковского* f^μ. Действительно, компоненты f^μ в произвольной системе отсчета получаются лоренцевским «бустом» из компонент этого вектора в системе покоя, которые, *по определению*, здесь равны

$$f^\mu = (0, \mathbf{f}). \tag{7}$$

Наконец, определим 4-импульс p^μ так, чтобы производная по s его пространственных компонент в сопутствующей системе отсчета совпадала с компонентами 3-вектора $d\mathbf{p}/dt$ в уравнении (3). Тогда искомое вложение осуществляется уравнением

$$\overset{v}{\perp} (\dot{p} - f) = 0. \tag{8}$$

Отметим, что проектор (5) определен лишь на времениподобных касательных векторах и не имеет смысла, если касательный вектор изотропен, поэтому решения уравнения (8) описывают только гладкие *времениподобные* мировые линии.

Механическим объектам разных типов соответствуют разные зависимости p^μ от кинематических переменных. Простейшую возможность доставляет *элементарный галилеевский объект*. Это точечный объект, состояние которого в нерелятивистском пределе задается 3-координатой его положения $\mathbf{x}$ и 3-импульсом

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{9}$$

Такой объект обычно называют *частицей*, без всяких прилагательных. Мы будем следовать этой традиции, имея в виду, однако, что речь идет не обо всем множестве точечных механических объектов, а о его галилеевском подмножестве.

Ньютоновская масса m — основная характеристика частицы*, она остается постоянной при любых воздействиях на частицу (т. е. при любой силе $\mathbf{f}$):

$$\frac{d}{dt}\,m = 0. \tag{10}$$

«Элементарность» объекта мы будем понимать как невозможность его разделения на части, что формально контролируется условием (10), которое**, на языке XVII в., означало бы «неизменность количества материи в данном объекте».

С учетом выражения (9) для $\mathbf{p}$ уравнение (3) сводится к

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}. \tag{11}$$

При $\mathbf{f} = 0$ уравнение (11) имеет единственное решение $\mathbf{v} = \mathrm{const}$. Таким образом, свободная частица эволюционирует в *галилеевском режиме*.

Из (9) ясно, что 4-импульс частицы p^μ есть

$$p^\mu = mv^\mu. \tag{12}$$

Отсюда с учетом соотношения $v \cdot a = 0$ следует, что проектор $\overset{v}{\perp}$ в уравнении (8) действует как единичный оператор, а само это уравнение сводится к

$$ma^\mu = f^\mu. \tag{13}$$

Так как 4-сила Минковского ортогональна 4-скорости, $f \cdot v = 0$, то в произвольной лоренцевской системе отсчета компоненты f^μ не являются независимыми, а связаны соотношением $f^0 = f^i v^i$. Удобно в f^μ выделить γ в виде отдельного фактора:

$$f^\mu = \gamma\,(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v},\, \mathbf{F}). \tag{14}$$

При этом $\mathbf{F}$ оказывается *3-силой в смысле* Планка, поскольку пространственная компонента уравнения (13) принимает вид (4). Что касается временно́й

---

*У частицы могут быть и другие величины, характеризующие ее индивидуальность, например, константы связи с различными полями. Но в отличие от массы, характеризующей объект, так сказать, «внутренним» образом, эти величины характеризуют ее по отношению к иным объектам.

**Условие (10) согласовано с предположением о том, что в системе покоя f^μ имеет вид (7). Если бы вместо (7) мы написали $f^\mu = (k, \mathbf{f})$, то наряду с уравнением (8) возникло бы уравнение $\dot m = k$.

компоненты,

$$\frac{d}{dt}\, m\gamma = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{15}$$

то ее, очевидно, можно интерпретировать как уравнение изменения энергии $\mathcal{E} = m\gamma$ в результате работы, совершаемой планковской 3-силой $\mathbf{F}$ в единицу времени.

Итак, замена уравнения (3) на уравнение (4) не означает, что динамика Ньютона как таковая подверглась пересмотру или модификации, она свидетельствует лишь о том, что второй закон Ньютона гладко вложен в четырехмерную псевдоевклидову геометрию. (Фиксируя такую геометрию, мы тем самым максимально «нагружаем» Γ, оставляя минимум «бремени» на Φ, — в этом состоит преимущество, или, как бы сказал Пуанкаре, удобство, псевдоевклидовой модели пространства-времени.)

Масса M и масса покоя m частицы определяются формулами (1) и (2). Подставляя в них выражение (12) для p^μ, находим, что M и m совпадают между собой и с ньютоновской массой (также обозначенной буквой m). Последняя остается неизменной не только, когда частица свободна, но и при действии любых сил. Это, как мы видели, требуется соглашением об элементарности частицы.

Равенство $M = m$ является основой для заключения об эквивалентности массы и энергии покоя. Подчеркнем в связи с этим, что понятие инерции не наполнилось каким-то специфически «релятивистским» содержанием. Вся концептуальная новизна релятивистской динамики галилеевских частиц по сравнению с динамикой Ньютона сводится к тому чисто геометрическому факту, что энергия и импульс играют роли временно́й и пространственной компонент времениподобного вектора p^μ длины M, и поэтому энергия частицы $\mathcal{E}$ отсчитывается не от 0, а от M.

Обратимся теперь к лагранжевой и гамильтоновой формулировкам. Выясним, как проекционная структура уравнения (8) связана с симметриями теории. Действие $\mathcal{A}$ зависит от конфигурации мировой линии, но не от параметризации, поэтому $\mathcal{A}$ не меняется при репараметризационных преобразованиях

$$\lambda = \lambda(\xi), \quad x^\mu(\lambda) = x^\mu\big(\lambda(\xi)\big), \tag{16}$$

где $\lambda(\xi)$ — произвольная непрерывная монотонная функция ξ. Пусть мировые линии времениподобны. Представим репараметризацию в инфинитезимальном виде:

$$\delta\lambda = \epsilon, \quad \delta x^\mu = \epsilon\, x'^\mu, \tag{17}$$

где $\epsilon = \epsilon(\xi)$ — произвольная инфинитезимальная непрерывная положительная функция ξ. Из инвариантности $\mathcal{A}$ относительно преобразований (17) следует тождество*

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta x^\mu}\, x'^\mu = 0, \tag{18}$$

которое и означает, что эйлериан $\delta\mathcal{A}/\delta x^\mu$ содержит проекционный оператор $\overset{v}{\perp}$. Итак, если действие репараметризационно инвариантно, то этим обеспечивается вложение ньютоновской динамики в пространственноподобные гиперплоскости Σ (которые олицетворяют обычное пространство в сопутствующих системах отсчета).

Репараметризации (16) — это разновидность локальных калибровочных преобразований; их аналогом в общей теории относительности являются общие координатные преобразования $x^\mu = x^\mu(y)$, так называемые диффеоморфизмы псевдориманова пространства. Расширив рамки динамической схемы, мы можем наряду с p^μ вида (12) рассмотреть любую мыслимую зависимость импульса от кинематических переменных, но при этом непреложным остается требование репараметризационной инвариантности, или, что эквивалентно, наличие проекционной структуры.

Возможно, не лишне отметить, что проектор $\overset{v}{\perp}$ действует как единичный оператор *только в том случае*, когда $p^\mu = mv^\mu$. Поэтому ошибочно считать, как это часто делается, что уравнение (13) есть уравнение релятивистской динамики в широком смысле. Такая роль закреплена за уравнением (8). Именно оно описывает эволюцию любых бесструктурных механических объектов конечной массы.

Действие для релятивистской галилеевской частицы, указанное Планком [27],

$$\mathcal{A} = -\mu \int dt\, \sqrt{1-\mathbf{v}^2} \tag{19}$$

легко переписывается в репараметризационно-инвариантном виде:

$$\mathcal{A} = -\mu \int d\lambda\, \sqrt{x'\cdot x'}. \tag{20}$$

Варьирование (19) по $\mathbf{v}$ дает канонический 3-импульс

$$\mathbf{p} = \mu\gamma\mathbf{v}, \tag{21}$$

а варьирование (20) по x'^α дает канонический 4-импульс

$$p^\alpha = -\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta x'_\alpha} = \frac{\mu\, x'^\alpha}{\sqrt{x'\cdot x'}}\,. \tag{22}$$

*Заметим, что тождество (18) есть простейшая иллюстрация второй теоремы Нетер [29] в случае бесконечномерной группы преобразований (16), оставляющих действие $\mathcal{A}$ инвариантным.

Выражение (22) совпадает с выражением (12), если $\mu = m$. Поэтому *формальный параметр* μ следует отождествить с величинами m и M, а также с ньютоновской массой. Мы обнаружим далее, что у негалилеевских объектов все эти величины различны.

Еще одно репараметризационно инвариантное действие для галилеевской частицы, предложенное Л. Бринком, П. Ди Векиа и П. Хоувом [31], имеет вид

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \int d\lambda \left(\frac{x'^2}{\eta} + \eta\, \mu^2 \right). \tag{23}$$

Здесь $\eta(\lambda)$ — вспомогательная переменная, которую читатель, знакомый с началами общей теорией относительности, может трактовать как корень квадратный из детерминанта однокомпонентного метрического тензора мировой линии $\sqrt{\det g_{\lambda\lambda}} = \sqrt{g_{\lambda\lambda}}$, поскольку при репараметризациях (16) она должна преобразовываться по закону

$$\eta(\lambda) = \frac{d\xi}{d\lambda}\, \eta\big(\lambda(\xi)\big).$$

В литературе величина η^{-1} называется «Einbein» или «монадой».

Теперь мы можем определить *безмассовую* галилеевскую частицу как объект, у которого $\mu = 0$. Действие (23) для такой частицы не обращается в нуль.

Варьирование действия (23) по η дает уравнение связи

$$-\eta^{-2}\, x'^2 + \mu^2 = 0, \tag{24}$$

откуда при $\mu \neq 0$ находим

$$\eta^{-1} = \mu (x' \cdot x')^{-1/2}. \tag{25}$$

Если в качестве λ выбрано «лабораторное» время t, то $\eta^{-1} = \mu/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$, т. е. монада совпадает с энергией $\mathcal{E}$ частицы*, если же $\lambda = s$, то $\eta^{-1} = \mu$.

Подстановка (25) в (23) возвращает нас к планковскому действию (20).

Отметим, что если $\mu \neq 0$, то действия (20) и (23) эквивалентны и на квантовом уровне. В этом нетрудно убедиться с помощью фейнмановского функционального интеграла. Действительно, при использовании действия (23)

*В субъядерной физике этот факт иногда вызывает соблазн трактовать величины μ и η^{-1}, соответственно, как *токовую* и *конституентную* массы кварка [32]. Мотивируется это тем, что легкие u- и d-кварки, запертые внутри адронов, ведут себя как ультрарелятивистские объекты, для которых $\mathcal{E} \gg \mu$, чем и должно объясняться большое отличие между значениями конституентной и токовой масс таких кварков.

функциональный интеграл содержит дополнительное интегрирование по $\eta(\lambda)$, которое можно выполнить с помощью известного результата для обычного одномерного интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \exp\left(-\frac{A}{\eta} - B\eta\right) = \sqrt{\frac{\pi}{B}} \exp\left(-2\sqrt{AB}\right), \quad A > 0,\, B > 0.$$

Из действия (23) получается выражение для канонического импульса

$$p^\alpha = \eta^{-1} x'^\alpha. \tag{26}$$

С его помощью связь (24) записывается в виде соотношения

$$-p^2 + \mu^2 = 0, \tag{27}$$

которое идентично (1) при $M = \mu$.

Гамильтониан, соответствующий действию (23), есть

$$H = p \cdot x' + L = \frac{1}{2}\eta(p^2 - \mu^2). \tag{28}$$

Заметим, что $H = 0$ на связи (27). *Нулевые гамильтонианы* вообще характерны для репараметризационно инвариантных моделей. (Гамильтониан, соответствующий действию (20), обращается в нуль тождественно.) Действие (23) можно представить теперь в абсолютно прозрачном с точки зрения канонического формализма виде:

$$\mathcal{A} = \int d\lambda \left(-p \cdot x' + H\right) = \int d\lambda \left[-p \cdot x' + \frac{1}{2}\eta(p^2 - \mu^2)\right], \tag{29}$$

где η можно интерпретировать как лагранжев множитель в задаче со связью (27).

Если $\mu = 0$, то действия (20) и (23) *не эквивалентны*. Для описания безмассовой частицы нужно, очевидно, исходить из действия (23). (Примечательно, что здесь имеется ряд «необжитых территорий», например, ждет своего решения задача о движении безмассовой частицы под действием силовых полей простейшего вида.)

2. ЧИСТЫЙ ГИРОСКОП

В качестве первого примера негалилеевского объекта рассмотрим спиновую частицу Френкеля [14], или, как ее иногда называют, чистый гироскоп, следуя в значительной степени работе [33]. Другие трактовки этой модели см., например, в [4, 7, 34, 35]. Нас интересует простейший случай, когда частица свободна, т. е. взаимодействие с любым полем, в частности гравитационным, пренебрежимо мало. Так как в этом случае пространство-время однородно и изотропно, то сохраняются 4-импульс частицы p^μ и тензор углового момента

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \sigma_{\mu\nu}, \tag{30}$$

где $\sigma_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор спинового углового момента, принимающий вещественные значения. Полезно выписать законы сохранения в явном виде:

$$\dot{p}^\mu = 0, \tag{31}$$

$$\dot{J}_{\mu\nu} = 0. \tag{32}$$

У нас нет оснований считать, что дополнительно к ним выполняется закон сохранения спина $\dot{\sigma}_{\mu\nu} = 0$, ибо не предполагается никаких иных пространственно-временных симметрий. Из (30)–(32) следует, что

$$\dot{\sigma}_{\mu\nu} = p_\mu v_\nu - p_\nu v_\mu, \tag{33}$$

поэтому в общем случае 4-скорость и 4-импульс спиновой частицы не коллинеарны.

Чистый гироскоп есть, по определению, такая частица, что $\sigma_{\mu\nu}$ подчиняется связи

$$\sigma_{\mu\nu} v^\nu = 0. \tag{34}$$

Чтобы понять геометрический смысл этой связи, напишем общую 2-форму σ в виде разложения по внешним произведениям 1-форм (или ковекторов) $\vec{v}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, которые образуют подвижный базис:

$$\sigma = \sum_i \mathcal{D}_i\, \vec{v} \wedge \vec{e}_i + \sum_{i<j} \mathcal{K}_{ij}\, \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j. \tag{35}$$

Пусть этот базис в любой момент остается ортонормированным:

$$\vec{v}^2 = 1, \quad \vec{v} \cdot \vec{e}_i = 0, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = -\delta_{ij}. \tag{36}$$

Подстановка (35) в (34) дает*

$$\mathcal{D}_i = 0. \tag{37}$$

*Если бы речь шла об электрически заряженной частице, то в лагранжиане следовало бы учесть так называемый член взаимодействия Паули, пропорциональный $\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. С учетом соотношений (35) и (36) этот член принимает вид $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, где электрический дипольный момент d_i пропорционален $\mathcal{D}_i$, а магнитный дипольный момент m_i пропорционален $1/2\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_{jk}$. Из (37) следует, что чистый гироскоп соответствует спиновой частице без электрического дипольного момента, но с магнитным дипольным моментом, прецессия которого вокруг силовых линий магнитного поля и дает повод называть объект «гироскопом».

Теперь в (35) остаются только три члена разложения:

$$\sigma = \mathcal{K}\,(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + \alpha\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + \beta\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3).$$

Используя свойства билинейности и антисимметричности внешнего произведения, выражение в круглых скобках можно тождественно преобразовать к виду

$$\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3) - \beta\,\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 - \beta\vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3).$$

Введя две новых базисных 1-формы $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \beta\vec{e}_3$ и $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3$, получим

$$\sigma = \mathcal{K}\,\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2. \qquad (38)$$

Выражение (38) не изменится, если вместо 1-формы $\vec{f}_1$ подставить 1-форму

$$\vec{g}_1 = \vec{f}_1 - \frac{\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2}{\vec{f}_2^{\,2}}\,\vec{f}_2,$$

ортогональную $\vec{f}_2$. Кроме того, $\vec{g}_1$ и $\vec{f}_2$ удобно нормировать, относя их модули к $\mathcal{K}$. Выделяя в $\mathcal{K}$ постоянную Планка $\hbar$ как отдельный фактор, получим

$$\mathcal{K}\sqrt{\vec{g}_1^{\,2}\vec{f}_2^{\,2}} = \mathcal{S}\hbar.$$

Выберем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, и возвратимся к исходным обозначениям базисных 1-форм, а именно вместо $\vec{v}$, $\vec{g}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{e}_3$ будем писать $\vec{v}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, что вполне законно, когда фиксирована лишь 1-форма $\vec{v}$ (касательная к мировой линии), а другие определяются условием ортонормированности базиса. Окончательно,

$$\sigma = \mathcal{S}\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \qquad (39)$$

где $\mathcal{S}$ — модуль спина в системе покоя, в которой $v^\mu = (1,\,0,\,0,\,0)$, $e_1^\mu = (0,\,1,\,0,\,0)$, $e_2^\mu = (0,\,0,\,1,\,0)$. Выражение (39) показывает, что $\mathcal{S}$ можно определить инвариантным образом:

$$\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 2\mathcal{S}^2. \qquad (40)$$

Другое полезное соотношение, легко выводимое из (39), имеет вид

$$\sigma_{\lambda\mu}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho} = -\mathcal{S}^2\sigma_{\lambda\rho}. \qquad (41)$$

Вернемся к уравнению эволюции спина (33). С учетом (34) имеем

$$\sigma_{\mu\nu}\frac{d}{ds}\,\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0.$$

Согласно (40) это означает, что $\mathcal{S}$ не зависит от s.

Масса M и масса покоя m гироскопа определяются, как обычно, формулами (1) и (2). Так как речь идет о свободном объекте, то естественно считать p^μ времениподобным вектором, направленным в будущее. Поэтому $M^2 > 0$, $p^0 > 0$ и $m > 0$. Уравнение (31) позволяет сделать вывод о неизменности M во времени. Чуть ниже мы убедимся, что и $m = \mathrm{const}$.

Определим величину

$$\zeta^\mu = \sigma^{\mu\nu} p_\nu. \tag{42}$$

Из (42) и (34) следует, что

$$\zeta \cdot p = 0, \quad \zeta \cdot v = 0. \tag{43}$$

Принимая во внимание (39), получаем

$$\zeta^\mu = \mathcal{S}\left[e_1^\mu\,(e_2 \cdot p) - e_1^\mu\,(e_2 \cdot p)\,\right].$$

Отсюда видно, что ζ^μ — пространственноподобный вектор,

$$\zeta^2 < 0. \tag{44}$$

Уравнение (33) можно переписать в виде

$$\dot{\zeta}^\mu = -M^2 v^\mu + m p^\mu. \tag{45}$$

Свертка с ζ_μ дает $\zeta^2 = \mathrm{const}$. Это означает, что в ходе эволюции меняется лишь направление ζ^μ, но не его модуль.

Дифференцирование (41) по s и свертка с v^ρ приводит с учетом (33) к уравнению

$$m v^\lambda = p^\lambda + \frac{1}{\mathcal{S}^2}\,\sigma^{\lambda\mu}\zeta_\mu, \tag{46}$$

а дальнейшая свертка с p_λ — к уравнению

$$m^2 = M^2 - \frac{\zeta^2}{\mathcal{S}^2}. \tag{47}$$

Отсюда видно, что m — интеграл движения, ибо таковыми являются величины, входящие в правую часть (47). Если учесть (44), то из (47) следует также, что

$$m^2 > M^2. \tag{48}$$

Почему $M \neq m$? Эти величины не равны потому, что v^μ и p^μ не коллинеарны; динамические уравнения таковы, что v^μ и p^μ в общем случае не могут стать коллинеарными. В самом деле, дифференцирование (46) с учетом (31), (33), (43), (45), (34) и (42) дает

$$\mathcal{S}^2\dot{v}^\mu = \zeta^\mu,$$

а повторное дифференцирование ведет к уравнению

$$\mathcal{S}^2\ddot{v}^\mu + M^2 v^\mu = m p^\mu. \tag{49}$$

Читатель без труда заметит сходство уравнения (49) с уравнением гармонического осциллятора, испытывающего действие постоянной внешней силы. Поэтому решение можно написать немедленно:

$$v^\mu(s) = \frac{m}{M^2}\,p^\mu - \alpha^\mu \sin\omega s + \beta^\mu \cos\omega s, \tag{50}$$

где $\alpha\cdot p = \beta\cdot p = \alpha\cdot\beta = 0,\ \alpha^2 = \beta^2$. Интегрируя, получаем мировую линию:

$$x^\mu(s) = \frac{m}{M^2}\,p^\mu s + \frac{\alpha^\mu}{\omega}\,\cos\omega s + \frac{\beta^\mu}{\omega}\,\sin\omega s. \tag{51}$$

Эта спиральная мировая линия — реализация Zitterbewegung. Вращение с частотой $\omega = M/\mathcal{S}$ происходит в плоскости векторов α^μ и β^μ, перпендикулярной вектору p^μ, амплитуда вращения $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2}$, равная проекции вектора p^μ на плоскость, образуемую векторами e_1^μ и e_2^μ, может быть любой, а период вращения $T = 2\pi\mathcal{S}/M$ равен по порядку величины комптоновской длине волны частицы $1/M$.

Если бы мы предположили, что $p^2 < 0$, то вместо (51) следовало бы написать

$$x^\mu(s) = -\frac{m}{\mathcal{M}^2}\,p^\mu s + \frac{\alpha^\mu}{\Omega}\,\mathrm{ch}\,\Omega s + \frac{\beta^\mu}{\Omega}\,\mathrm{sh}\,\Omega s, \tag{52}$$

где $\mathcal{M}^2 = -p^2$, $\Omega = \mathcal{M}/\mathcal{S}$, а α^μ и β^μ подчиняются соотношению $\alpha^2 = -\beta^2$. Это решение описывает движение в плоскости векторов p^μ и α^μ с монотонно нарастающей скоростью. Решению (51) соответствует финитное движение, заключенное в компактной области, а решению (52) — инфинитное движение, происходящее в некомпактной области. Таким образом, если пространство импульсов ограничено условием $p^2 \geqslant 0$, то конфигурационное пространство содержит Zitterbewegung (51), но не содержит решения (52), описывающего самоускоренный режим.

Усреднение (50) по s дает

$$\langle v^\mu\rangle = \frac{m}{M^2}p^\mu. \tag{53}$$

Проследим за движением точки с координатой

$$y^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{M^2}\,\zeta^{\mu}. \tag{54}$$

С учетом (45) и (53) имеем

$$\dot{y}^{\mu} = \frac{m}{M^2}\,p^{\mu} = \langle v^{\mu} \rangle. \tag{55}$$

Точка с координатой y^{μ} прочерчивает прямую мировую линию с направляющим вектором p^{μ}. Очевидно, эту точку можно интерпретировать как центр инерции. Тем самым удается связать сохраняющийся 4-импульс p^{μ} с воображаемым носителем, который расположен в центре инерции и движется по усредненной мировой линии.

Наличие двух масс ведет к наличию двух величин, имеющих смысл спина. Действительно, спин можно определить как внутренний угловой момент, относимый либо к *собственной кинематической* системе, где $\mathbf{v} = 0$, т. е. $v^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, либо к *собственной динамической* системе, где $\mathbf{p} = 0$, т. е. $p^{\mu} = M\,(1, 0, 0, 0)$. До сих пор мы обсуждали первую возможность. Чтобы перейти ко второй, необходимо, как это видно из (54) и (55), использовать понятие центра инерции. Выражая x_{μ} через y_{μ} и подставляя в (30), получаем

$$J_{\mu\nu} = y_{\mu}p_{\nu} - y_{\nu}p_{\mu} + \Xi_{\mu\nu}, \tag{56}$$

где тензор

$$\Xi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} - (\zeta_{\mu}p_{\nu} - \zeta_{\nu}p_{\mu})/M^2 \tag{57}$$

играет такую же роль, какую прежде играл тензор $\sigma_{\mu\nu}$. Действительно, связь

$$\Xi_{\mu\nu}p^{\nu} = 0 \tag{58}$$

является аналогом связи (34), поэтому для 2-формы Ξ выполняются соотношения, аналогичные (39)–(41), в частности,

$$\Xi_{\mu\nu}\Xi^{\mu\nu} = 2S^2, \tag{59}$$

причем $S = \mathrm{const}$, а вместо (33) имеем

$$\dot{\Xi}_{\mu\nu} = 0. \tag{60}$$

Возводя в квадрат левую и правую части (57), с учетом (47) находим

$$M^2S^2 = m^2\mathcal{S}^2. \tag{61}$$

Очевидно, что отличие S от $\mathcal{S}$ следует из отличия численных значений m и M.

Все эти результаты можно получить более регулярным способом, отправляясь не от «эвристических» уравнений (31)–(33), а от гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\,\eta\left(p^2 - \mu^2 - \frac{\zeta^2}{\mathcal{S}^2}\right) \tag{62}$$

и канонических скобок Пуассона

$$\begin{gathered}\{x_\mu, x_\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = \{x_\lambda, \sigma_{\mu\nu}\} = \{p_\lambda, \sigma_{\mu\nu}\} = 0, \quad \{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu},\\ \{\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}\} = \sigma_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \sigma_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} - \sigma_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \sigma_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}.\end{gathered} \tag{63}$$

Параметризацию мировой линии следует выбрать так, чтобы монада η^{-1} имела фиксированное значение $\eta^{-1} = \mu$, а параметр μ отождествить с m. Заметим, что выражение в круглых скобках (62) есть связь (47), на ней $H = 0$. Гамильтониан (62) отличается от гамильтониана галилеевской частицы (28) наличием последнего члена, генерирующего эволюцию спиновых степеней свободы.

Итак, инерция чистого гироскопа характеризуется двумя инвариантами: M и m. В отсутствие взаимодействий они не меняются во времени, причем всегда $m > M$. Это порождает дилемму: какую из двух величин измеряет экспериментатор? Если во всех случаях регистрируется лишь одна из них, скажем, m, то чем объясняется запрет на регистрацию другой? Если же результат измерения зависит от оборудования, то в чем состоит особенность прибора, измеряющего, например, только M?

Говоря *о безмассовом* гироскопе, мы встречаемся с новой трудностью. Что считать критерием безмассовости: $M = 0$ или $m = 0$? Если безмассовость — это $M = 0$, то непонятно, какова же роль положительной инвариантной сохраняющейся величины m. С другой стороны, если безмассовость — это $m = 0$, то $p^2 < 0$, т. е. объект в динамическом отношении ведет себя как *тахион* (хотя ни о каком переходе через световой барьер здесь речь, конечно, не идет!).

При квантовании может выжить только одна из этих двух величин, M или m. Какая? Должна ли классическая частица, получаемая в пределе $\hbar \to 0$, быть безмассовой (хоть в каком-нибудь смысле), если квантовая частица безмассова?

Наконец, еще одна дилемма состоит в выборе между M и m при наличии гравитации: обращаясь к принципу *эквивалентности инертной и тяжелой масс*, одну из величин M или m следует приравнять к *тяжелой* массе M_g, какую именно?

Здесь, следуя урокам Ортеги-и-Гассета [36], нужно проявить честность и признать, что мы имеем дело с «восстанием масс».

Другую модель классической спиновой частицы с c-числовыми спинорными переменными, описывающими спиновые степени свободы, предложили А. О. Барут и Н. Занги [37]. В отсутствие внешних сил такая частица ведет себя негалилеевским образом, во многом напоминая чистый гироскоп, следовательно, для нее остаются в силе все перечисленные проблемы, связанные с неравенством $M \neq m$. Мы не задерживаемся на этой модели, поскольку ее анализ ничего существенно нового для нашей темы не смог бы добавить.

3. МОДЕЛЬ С ГРАССМАНОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Сложнее обстоит дело с инертными свойствами частицы, у которой спиновые степени свободы описываются вещественными грассмановыми переменными θ^μ и θ_5. Уточненный вариант этой модели [17] характеризуется репараметризационно инвариантным действием

$$\mathcal{A} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left[-p \cdot x' + \frac{\eta}{2}\big(p^2 - \mu^2\big) - \frac{i}{2}(\theta' \cdot \theta + \theta'_5\theta_5) + i\chi(\theta \cdot p + \mu\theta_5) \right] - \\ - \frac{i}{2}[\theta(1) \cdot \theta(2) + \theta_5(1)\theta_5(2)] \quad (64)$$

и условиями вариаций на границе

$$\delta x^\mu(1) = \delta x^\mu(2) = 0, \quad \delta\theta^\mu(1) + \delta\theta^\mu(2) = 0, \quad \delta\theta_5(1) + \delta\theta_5(2) = 0. \quad (65)$$

Грассманова переменная $\chi(\lambda)$ играет роль лагранжева множителя при связи.

Из (64) и (65) получаются четыре динамических уравнения

$$\dot{p}^\mu = 0, \quad (66)$$
$$-\dot{x}^\mu + \eta p^\mu + i\chi\theta^\mu = 0, \quad (67)$$
$$-\dot{\theta}^\mu + \chi p^\mu = 0, \quad (68)$$
$$-\dot{\theta}_5 + \chi\,\mu = 0 \quad (69)$$

(в качестве параметра эволюции выбрано собственное время: $\lambda = s$) и две связи

$$p^2 - \mu^2 = 0, \quad (70)$$
$$\theta \cdot p + \mu\,\theta_5 = 0. \quad (71)$$

На первый взгляд зависимость импульса от скорости (67) есть прямой аналог зависимости (46), благодаря которой чистый гироскоп ведет себя негалилеевским образом. Однако если решение для мировой линии и 4-импульса ищется в поле вещественных чисел, то сходство оказывается обманчивым. Действительно, учитывая, что $\theta^0\theta^0 = \theta^1\theta^1 = \theta^2\theta^2 = \theta^3\theta^3 = 0$, из (67) получаем

$$(\dot{x}^0 - \eta p^0)^2 = (\dot{x}^1 - \eta p^1)^2 = (\dot{x}^2 - \eta p^2)^2 = (\dot{x}^3 - \eta p^3)^2 = 0. \qquad (72)$$

Отсюда следует, что p^μ параллелен $\dot{x}^\mu$. Но $\dot{x}^\mu$ — времениподобный вектор, направленный в будущее, поэтому с учетом (70) имеем $\eta^{-1} = \mu$. Уравнение (67) выполняется лишь при $\chi = 0$. Из (68) и (69) тогда следует, что грассмановы переменные не изменяются во времени, $\dot{\theta}^\mu = 0$, $\dot{\theta}_5 = 0$, а уравнения (66) и (67) дают $\dot{x}^\mu = \mathrm{const}$. Таким образом, спиновые и конфигурационные степени свободы эволюционируют независимо. Поведение свободного объекта оказывается строго галилеевским. Объект характеризуется единственной массой $\mu = m = M$.

Следует отметить, что четные грассмановы переменные (такие как $\chi\theta^\mu$) — это не обязательно c-числовые величины. В действительности, четные грассмановы переменные, принимающие c-числовые значения, образуют подмножество множества четных грассмановых переменных. Поэтому множество всех возможных решений уравнений (66)–(71) не сводится к единственному, описывающему галилеевский режим. Однако выход за рамки c-числового описания мировой линии означал бы нарушение фундаментального представления о том, что физическое пространство-время обладает геометрией пространства Минковского. Четные грассмановы переменные, не сводящиеся к c-числовым величинам, не определены операционально (т. е. не могут быть измерены в опыте), и на сегодняшний день они представляют собой довольно мистический элемент теории.

4. ЖЕСТКАЯ ЧАСТИЦА

Другой негалилеевский объект — точечная частица, поведением которой управляет лагранжиан, зависящий от высших производных. Такая частица называется *жесткой*. Скорость и импульс свободной жесткой частицы в общем случае не параллельны, она способна к Zitterbewegung и движению в режиме самоускорения. Поэтому масса M и масса покоя m у жесткой частицы — разные величины. Их отличие даже больше, чем у чистого гироскопа: M оказывается сохраняющейся величиной, а m меняется во времени. Впрочем, не будем забегать вперед, обсудим все по порядку.

Напомним, что мы условились считать допустимыми мировыми линиями лишь времениподобные гладкие кривые. Для наших целей будет достаточно рассмотреть репараметризационно инвариантное действие, зависящее от скоростей и ускорений,

$$\mathcal{A} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, L(x', x''). \tag{73}$$

Это, очевидно, означает, что лагранжиан можно написать в виде

$$L(x', x'') = \gamma^{-1}\Phi(k), \tag{74}$$

$$\gamma^{-1} = \sqrt{x' \cdot x'}\,, \tag{75}$$

где $\Phi(k)$ — произвольная функция кривизны k. Как известно, квадрат кривизны равен с обратным знаком квадрату 4-ускорения. Напомним также, что 4-ускорение a^μ в случае произвольно параметризованной кривой $x^\mu(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$a^\mu = \gamma\,\frac{d}{d\lambda}\left(\gamma\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right). \tag{76}$$

Гамильтонов формализм жесткой динамики впервые развит в фундаментальном мемуаре М. В. Остроградского еще в 1850 г. [38]. Нам понадобятся лишь отдельные сведения из этого формализма [39] (вывод которых оставлен читателю как полезное упражнение). Инфинитезимальную вариацию действия можно представить в виде

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\left[\frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial {x'}_\mu}\right) + \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial L}{\partial {x''}_\mu}\right)\right]\bar{\delta}x_\mu + \\ + (H\,\delta\lambda - p\cdot\delta x - \pi\cdot\delta x')\big|_{\lambda_1}^{\lambda_2}, \tag{77}$$

где символом $\bar{\delta}$ обозначена вариация формы мировой линии, $\bar{\delta}x_\mu = \delta x_\mu - {x'}_\mu\,\delta\lambda$,

$$p^\mu = -\frac{\partial L}{\partial {x'}_\mu} + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial {x''}_\mu}\right), \tag{78}$$

$$\pi^\mu = -\frac{\partial L}{\partial {x''}_\mu}, \tag{79}$$

$$H = p\cdot x' + \pi\cdot x'' + L. \tag{80}$$

Так как лагранжиан L инвариантен относительно сдвигов 4-координат

$$x_\mu \to x_\mu + c_\mu, \tag{81}$$

то (в полном согласии с первой теоремой Нетер) из (77) можно заключить, что p^μ есть интеграл движения. С другой стороны, мы не можем требовать инвариантности L относительно сдвигов 4-скоростей

$$x'_\mu \to x'_\mu + d_\mu, \tag{82}$$

ибо это ведет к конфликту с требованием репараметризационной инвариантности, которая обеспечивается наличием в (74) величины γ, не инвариантной относительно преобразования (82), а значит, канонический импульс π^μ не является интегралом движения. С помощью формул (75), (76) и (78)–(80) можно проверить также, что гамильтониан $H = 0$ для любых лагранжианов вида (74); это есть следствие репараметризационной инвариантности действия (73). Поэтому π^μ и H не могут быть использованы для определения инертных свойств жесткой частицы, в дальнейшем они нас интересовать не будут.

Выберем в качестве параметра эволюции λ собственное время s. Лагранжиан (74) дает уравнение движения

$$(\overset{v}{\perp}\dot p)^\mu = 0. \tag{83}$$

Уравнение прямо говорит о том, что канонический импульс p^μ в отсутствие внешних сил есть сохраняющаяся величина. Поэтому инварианты (1) и (2), построенные из p^μ, могут характеризовать инерцию жесткой частицы.

Задача об интегрировании уравнений движения (83) в общем случае произвольной гладкой функции $\Phi(k)$ исследована в [40], куда интересующийся читатель отсылается за подробностями. Мы же обсудим здесь частный пример

$$\Phi(k) = -\mu + \nu k^2, \tag{84}$$

где μ и ν — произвольные вещественные параметры. Будем считать, что $\mu > 0$, так как при $\nu = 0$ получается лагранжиан Планка $L = -\mu\sqrt{x'\cdot x'}$, в котором μ имеет смысл массы покоя m галилеевской частицы. Из лагранжиана (84) находим

$$p^\mu = \mu v^\mu + \nu\,(2\dot a^\mu + 3a^2 v^\mu). \tag{85}$$

Пусть частица движется вдоль оси z. Тогда v^μ можно представить как

$$v^\mu = (\operatorname{ch}\alpha,\, 0,\, 0,\, \operatorname{sh}\alpha). \tag{86}$$

Дифференцируя, находим высшие производные, в частности, $a^\mu = \dot\alpha\,(\operatorname{sh}\alpha,\, 0,\, 0,\, \operatorname{ch}\alpha)$, откуда $a^2 = -\dot\alpha^2$. Уравнение (83) сводится теперь к более простому уравнению

$$\mu\dot\alpha + \nu\,(2\ddot\alpha - \dot\alpha^3) = 0.$$

Обозначая $\dot{\alpha} = q$ и $\mu/\nu = q_*^2$, переписываем это уравнение в виде

$$\ddot{q} + \frac{1}{2}\, q_*^2\, q - \frac{1}{2}\, q^3 = 0. \tag{87}$$

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\frac{1}{2}\, \dot{q}^2 + U(q) = E, \tag{88}$$

$$U(q) = -\frac{1}{8}\, (q^2 - q_*^2)^2, \tag{89}$$

E — произвольная константа интегрирования.

На уравнения (87) и (88) можно смотреть как на уравнения движения некоторой фиктивной частицы единичной массы в поле потенциала $U(q)$. Если $\nu > 0$, то потенциал $U(q)$ имеет вид, схематически изображенный на рис. 2, *а*. При $-q_*^2/8 < E < 0$ движение фиктивной частицы может быть финитным, заключенным в пределах $-q_* < q < q_*$. Поэтому при не слишком большом начальном ускорении, $|a^2| < \mu/\nu$, жесткая частица совершает Zitterbewegung. При $E > 0$ или $E < -q_*^2/8$ фиктивная частица участвует в инфинитном движении. Другими словами, если начальное ускорение жесткой частицы превышает критическое значение $(\mu/\nu)^{1/2}$, то наверняка осуществляется режим самоускорения. При $E = 0$ фиктивная частица покоится на одной из вершин потенциального холма, т. е. если $|a^2| = \mu/\nu$, то движение жесткой частицы оказывается равномерно ускоренным. Но этот режим неустойчив, любое малое возмущение переводит его в режим с нарастающим ускорением. При $E = -q_*^2/8$ фиктивная частица лежит на дне потенциальной ямы, что соответствует галилеевскому режиму жесткой частицы, $a^2 = 0$. Очевидно также, что если $\mu = 0$ или $\nu < 0$, то для жесткой частицы возможен лишь режим самоускорения (см. рис. 2, *б*). Галилеевский режим для жесткой частицы с такими параметрами неустойчив и при любых малых возмущениях переходит в режим самоускорения. Поэтому случаи $\mu = 0$ и $\nu < 0$ физического интереса не представляют.

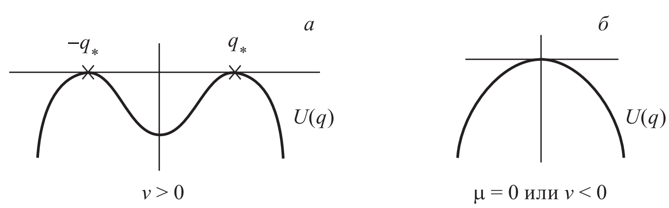

Рис. 2. Форма потенциала $U(q)$ фиктивной частицы

С помощью подстановки (86) выражение (85) можно привести к виду

$$p^\mu = (\mu - \nu\dot\alpha^2)(\operatorname{ch}\alpha,\, 0,\, 0,\, \operatorname{sh}\alpha) + 2\nu\ddot\alpha(\operatorname{sh}\alpha,\, 0,\, 0,\, \operatorname{ch}\alpha).$$

Отсюда

$$p^2 = (\mu - \nu\dot\alpha^2)^2 - 4\nu^2\ddot\alpha^2.$$

Сравнение с (88) и (89) показывает, что $p^2 = -8\nu^2 E$. Поэтому условие $p^2 < 0$ равносильно условию $E > 0$, которое, как мы знаем, достаточно для инфинитного движения фиктивной частицы, или, что то же, для движения жесткой частицы в режиме самоускорения.

Таким образом, если жесткая частица может перемещаться только вдоль прямой линии и пространство ее 4-импульсов p^μ ограничено условием $p^2 \geqslant 0$, то осуществляется единственный негалилеевский режим — Zitterbewegung.

Негалилеевские движения происходят не только на прямой, но и в плоскости, здесь возможны два режима — Zitterbewegung и Zitterbewegung с растущей во времени амплитудой. (Если лагранжиан зависит от скоростей и ускорений, но не более высоких производных, то, как можно показать [12], размерность подпространства d, где происходит Zitterbewegung, не превышает $d = 2$.)

Выражение (85) можно переписать в следующем геометрически наглядном виде:

$$p^\mu = (\mu + \nu a^2)\, v^\mu + 2\nu\, (\overset{v}{\perp} \dot a)^\mu, \tag{90}$$

где

$$(\overset{v}{\perp} \dot a)^\mu = \dot a^\mu + a^2 v^\mu.$$

Отсюда немедленно получаются выражения для массы M и массы покоя m:

$$M^2 = p^2 = (\mu + \nu a^2)^2 + 4\nu^2 (\overset{v}{\perp} \dot a)^2, \tag{91}$$

$$m = p \cdot v = \mu + \nu a^2. \tag{92}$$

Таким образом, и M, и m зависят от кинематических переменных нетривиальным образом. Тем не менее масса M не меняется во времени. Что касается массы покоя m, то эта величина не является постоянной ни в режиме Zitterbewegung, ни в режиме самоускорения. Лишь в режиме равноускоренного движения m не зависит от времени. Впрочем, при таком движении $p^\mu = 0$. Это следует из (90), поскольку условие релятивистского равноускоренного движения, как известно [3], записывается в виде

$$(\overset{v}{\perp} \dot a)^\mu = 0.$$

Итак, масса M жесткой частицы есть величина более фундаментальная, чем масса покоя m. Параметры μ и ν в лагранжиане (84) следует считать положительными, хотя им и не приписывается непосредственного физического смысла. Если жесткие частицы реализуются в природе, то их инертные свойства, скорее всего, характеризует масса M; можно ожидать, что в опыте будет измеряться именно M. Что касается квантовой картины, то здесь инерция жесткой частицы должна быть представлена единственной величиной M. Кроме того, именно M кажется естественным отождествить с гравитационным зарядом жесткой частицы M_g (если, конечно, считать, что M_g — сохраняющаяся величина; с появлением идеи об испарении черных дыр [41] постоянство M_g перестало казаться таким уж очевидным, впрочем, единого мнения здесь еще не сложилось [42]).

Как ни странно, по сравнению с чистым гироскопом проблема массы для жесткой частицы рассматриваемого типа оказывается более простой.

5. ЗАЧЕМ НУЖНЫ ЖЕСТКИЕ ЧАСТИЦЫ?

Спиновая и жесткая частицы — необычные объекты. Но если странности, связанные со спином, что называется, «от бога», то феноменологические оправдания причудам жесткой динамики пока не известны. Существует ли чисто *теоретическая* причина, заставляющая обратиться к идее высших производных? Ньютон такой причины не усматривал. Что изменилось за прошедшие триста лет? Какой видится сегодня роль жесткой динамики? В литературе можно встретить, например, такие утверждения: жесткая частица — игрушечная модель жесткой струны, которая, в свою очередь, служит инструментом эффективного описания фазовых переходов в квантовой хромодинамике [43, 44]; свойства жесткой частицы связаны со свойствами гипотетических анионов [45]; жесткость — концепция, полезная в физике полимерных цепей [46], и т. п. Возможно, кто-то сочтет эти доводы скорее техническими, чем принципиальными.

На мой взгляд, динамика с высшими производными приобретает свой *raison d'être* в связи с проблемой *непротиворечивости* локальной теории поля в пространстве произвольной размерности. Попытаемся, например, обобщить четырехмерную классическую электродинамику точечных заряженных частиц на случай более высокого числа измерений. Предположим, что действие имеет вид

$$\mathcal{A} = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i \int ds_i \sqrt{v_i \cdot v_i} - \sum_{i=1}^{N} e_i \int dx_i^{\mu} A_{\mu}(x_i) - \\ - \frac{1}{4\,\Omega_{D-1}} \int d^{D+1}x\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}, \quad (93)$$

где Ω_{D-1} — площадь $D-1$-мерной сферы единичного радиуса, а напряженность поля $F_{\mu\nu}$ выражается через потенциал A_μ обычным образом: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Можно ли на основе действия (93) построить такую классическую теорию, в которой все «ультрафиолетовые» расходимости устраняются с помощью регуляризационно-перенормировочной процедуры?

Вариация действия по полю A_μ дает $D+1$-мерные уравнения Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Omega_{D-1} j^\nu, \tag{94}$$

$$j^\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} e_i \int_{-\infty}^{\infty} ds_i\, v_i^\mu(s_i)\, \delta^{D+1}\Big(x - x_i(s_i)\Big). \tag{95}$$

Запаздывающие решения этих уравнений в случае заряженных частиц, движущихся вдоль произвольных времениподобных мировых линий $x_i^\mu(s_i)$, хорошо известны (см., например, [25]). Мы ограничимся здесь рассмотрением простейшей полевой конфигурации, порождаемой единственным зарядом, который движется по прямой мировой линии. При этом поле характеризуется потенциалом $\varphi(\mathbf{x})$, а уравнения Максвелла (94), (95) сводятся к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = -\Omega_{D-1}\, \rho(\mathbf{x}), \tag{96}$$

$$\rho(\mathbf{x}) = e\, \delta^D(\mathbf{x}), \tag{97}$$

решение которого

$$\varphi(\mathbf{x}) = e \begin{cases} |\,\mathbf{x}|^{2-D}, & D \neq 2, \\ \log|\,\mathbf{x}|, & D = 2. \end{cases} \tag{98}$$

Электростатическая энергия поля покоящейся частицы с δ-образным распределением заряда (97), или, как говорят, *собственная энергия*, представляется в виде

$$\delta m = \frac{1}{2} \int d^D\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2}\, e\, \varphi(\epsilon). \tag{99}$$

С учетом (98) отсюда следует, что при $D = 3$ собственная энергия δm расходится линейно, а при $D = 5$ расходимость оказывается кубической. Эти расходимости обусловлены сингулярным поведением полей на малых расстояниях от источника, или, что то же, недостаточно быстрым убыванием фурье-образов полей при больших частотах, откуда и происходит термин «ультрафиолетовая» расходимость.

Стандартный способ избавления от таких расходимостей состоит в бесконечной перенормировке параметров, входящих в лагранжиан. В частности, *затравочной массе* μ приписывается такая зависимость от параметра регуляризации ϵ, чтобы сумма

$$m = \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\mu(\epsilon) + \delta m(\epsilon) \Big) \tag{100}$$

была конечной и положительной. *Перенормированную массу* m трактуют при этом как массу покоя частицы. При малых ϵ собственная энергия δm становится большой положительной величиной, соответственно, затравочная масса μ оказывается большой по модулю отрицательной величиной. Но в этом нет особой драмы, поскольку μ и δm появляются только на промежуточном этапе и навсегда исчезают после осуществления предельной операции (100). Они лишены статуса наблюдаемых величин. Такой статус присваивается лишь перенормированной массе m.

Перенормируемость есть *необходимое условие непротиворечивости* локальной теории поля [47,48,50]. В классической картине процессы рождения и уничтожения частиц отсутствуют*, поэтому здесь нет поляризации вакуума, ответственной за перенормировку константы связи e. Проблема перенормируемости сводится, таким образом, к возможности поглотить все расходимости собственной энергии.

Убедимся, что μ и δm имеют одинаковые размерности. Напомним, что в системе единиц, где $\hbar = c = 1$, действие безразмерно. Для первого члена в (93) это означает, что $[\mu]\, l\, [v] = 1$, откуда с учетом $[v] = 1$ находим $[\mu] = l^{-1}$. Аналогично для третьего члена: $l^{\,D+1}[A^2]\, l^{-2} = 1$, поэтому $[A] = l^{\,(1-D)/2}$. Наконец, безразмерность второго члена, $[e]\, l\, [A] = 1$, означает, что $[e] = l^{\,(D-3)/2}$. С учетом (98) из (99) имеем $[\delta m] = [e^2] l^{2-D} = l^{-1}$. Итак, сингулярность $\delta m(\epsilon)$ может быть скомпенсирована сингулярностью $\mu(\epsilon)$ и выражение (100) окажется конечным.

Для $D = 3$ все проблемы с расходимостями на этом заканчиваются, поэтому из действия (93) получается непротиворечивая теория. Однако если $D = 5$, то ситуация сложнее. В случае *произвольно движущейся* заряженной частицы собственная энергия содержит два расходящихся члена. Главная расходимость — кубическая. Как мы убедились, она возникает уже в статическом случае и поглощается перенормировкой параметра μ. Но имеется еще и *линейная* расходимость [25]. Она не может быть устранена перенормировкой,

*В самом деле, из множества допустимых мировых линий исключены времениподобные кривые с резкими изломами, где направление кривой из прошлого в будущее меняется на противоположное; такие мировые линии соответствовали бы процессам рождения или уничтожения электрон-позитронных пар. Заметим, что в классической теории мировые линии такого вида (конфигурации типа «чайка») запрещены из-за невозможности применить к ним принцип наименьшего действия.

поскольку в действии (93) нет члена с параметром ν подходящей размерности ($[\nu] = [e^2]\, l^{-1} = l$). Соответствующий вклад в импульс электромагнитного поля P_μ пропорционален

$$e^2\, \epsilon^{-1}\, (2\dot{a}_\mu + 3a^2 v_\mu).$$

Сравнивая с (85), заключаем, что если лагранжиан зависит от ускорения, то он содержит параметр ν, позволяющий поглотить линейную расходимость. Таким образом, непротиворечивая классическая электродинамика в мире размерности $D + 1 > 4$ должна описываться действием, содержащим члены с высшими производными.

Но что нам за дело до $D + 1 > 4$, если мы пребываем в четырех измерениях и не можем выйти в мир большей размерности при всем желании? На это, вероятно, следовало бы ответить встречным вопросом: а почему мы уверены, что наш мир четырехмерный? Не может ли четырехмерие оказаться иллюзией? Однако даже если $D+1 = 4$ принимается как рабочая гипотеза, то незамедлительно встает вопрос: чем случай $D = 3$ физически выделен среди других размерностей? Впервые эту проблему поставил и попытался разрешить Эренфест [51]. Суть его решения заключается в следующем. В мирах с $D > 3$ не могут существовать никакие стабильные составные системы частиц, например, система типа атома водорода: в ней электрон непременно упал бы на ядро.

Максимально все упрощая, можно сказать, что речь идет о решении релятивистской кеплеровской задачи. Это двухчастичная задача, которая сводится к задаче о движении одной частицы в поле потенциала $U(r)$ и характеризуется гамильтонианом (см., например, [1], § 39)

$$H = \sqrt{m^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_r^2} + U(r), \tag{101}$$

где p_ϕ и p_r — импульсы, канонически сопряженные полярным координатам ϕ и r. Импульс p_ϕ есть интеграл движения — орбитальный момент J. Выключив радиальную динамику, т. е. положив $p_r = 0$ в (101), получаем эффективный потенциал $\mathcal{U}(r)$, с помощью которого удобно анализировать поведение частицы в окрестности начала координат:

$$\mathcal{U}(r) = \sqrt{m^2 + \frac{J^2}{r^2}} + U(r). \tag{102}$$

Имеются три альтернативы. Во-первых, потенциал притяжения $U(r)$ более сингулярен в начале координат, чем центробежный член J/r. Частица, в принципе, может находиться на круговой орбите с радиусом, соответствующим локальному максимуму $\mathcal{U}_0$ потенциала $\mathcal{U}(r)$. Но это движение неустойчиво, и падение на центр весьма вероятно. Если же $E > \mathcal{U}_0$, то падение на центр неизбежно.

Во-вторых, потенциал $U(r)$ менее сингулярен, чем J/r. В частности, для $U(r) = -Ze^2/r$ это означает, что $Ze^2 < J$. Частица совершает устойчивое финитное движение. Падение на центр невозможно за исключением случая $J = 0$.

В-третьих, сингулярности $U(r)$ и J/r одинаковы, т. е. $U(r) = -Ze^2/r$, $Ze^2 = J$. Частица движется по устойчивой орбите, которая проходит через центр, что, однако, не останавливает движения.

Квантово-механический анализ в основном подтверждает эти выводы. Из решений уравнения Шредингера [52] и релятивистских волновых уравнений для частиц со спинами 0 и 1/2 [53] следует, что в случае достаточно сингулярных потенциалов $U(r)$ связанные состояния образуют дискретный спектр, простирающийся от $E = m$ до $E = -\infty$. Система стремится перейти во все более выгодные состояния, которым соответствуют все более низкие уровни энергии. При этом дисперсия волновой функции стремится к нулю по мере того, как $E_n \to -\infty$. Процесс напоминает падение на центр в его традиционном понимании.

Если потенциал $U(r)$ менее сингулярен, чем квантово-механический центробежный член, то спектр ограничен снизу. Единственная отличительная особенность квантово-механической ситуации состоит в том, что существует стабильное основное состояние с $J = 0$. Это, однако, не влечет за собой падения на центр, ибо волновая функция ведет себя гладко в окрестности начала координат — притяжение уравновешено нулевыми колебаниями.

Так как $U(r) = e\,\varphi(r)$, где $\varphi(r)$ есть решение D-мерного уравнения Пуассона (98), то Эренфест заключил, что при $D = 3$ падение на центр предотвращается (если, конечно, $Ze^2 < J$), а при $D > 4$ падение неизбежно. Точка $D = 3$ является критической, отделяющей миры, в которых возможны стабильные связанные состояния, от миров, где такие состояния невозможны.

Причина предотвращения падения на центр состоит в том, что центробежные проявления кинетической энергии (член J/r или нулевые колебания) преобладают над силами притяжения. Однако существенной для такого вывода является форма гамильтониана (101). Он получается из действия (93). А чуть ранее мы выяснили, что это действие *не годится* для непротиворечивого описания электромагнитных взаимодействий, если $D > 3$. Чтобы исправить положение, действие (93) следует дополнить членами с высшими производными, например, при $D = 5$ нужны члены, зависящие от кривизн мировых линий, при $D = 7$ — члены, зависящие от кривизн и кручений, и т. д. В рамках жесткой динамики двухчастичная задача не является кеплеровской, т. е. не сводится к задаче об одной частице, движущейся по плоской орбите вокруг центра инерции. В точной постановке задача двух жестких частиц весьма сложна. О поведении такой системы можно высказать лишь некоторые правдоподобные предположения. Например, величина, ответственная за центробежный эффект, более сингулярна, чем J/r. Этот эффект для лагранжиана, зависящего от ускорения, оценивается как $\sim 1/r^3$ [54], а значит, в случае $D = 5$ падение на центр, по-видимому, тоже может быть предотвращено.

Представленные здесь рассуждения содержат много упрощений. Например, пренебрегая релятивистскими эффектами запаздывания и излучения и ограничиваясь потенциальной картиной, мы упустили возможность падения на центр в результате диссипации энергии частицы (напомним, что одним из главных стимулов для изобретения боровских правил квантования явилась проблема падения на ядро излучающего электрона в планетарной модели атома Резерфорда). Но более основательный анализ увел бы нас далеко от основной темы. Подробнее проблема предотвращения коллапса разбирается в [50].

Характерная черта жесткой динамики — Zitterbewegung. Если дрожание происходит в d измерениях, то эти измерения могут считаться замороженными для прямолинейных галилеевских перемещений. Последние осуществимы лишь в остальных $D - d$ измерениях. Можно показать [12], что дрожания жесткой частицы с лагранжианом, зависящим от ускорения, возможны в двух измерениях и не могут захватывать большего числа измерений. Если речь идет о мире $D + 1 = 6$ измерений, в котором все объекты совершают двумерные дрожания, то эти два измерения оказываются эффективно компактифицированными, и наблюдателю, привязанному к центру инерции жесткой частицы, мир кажется четырехмерным. Однако такой вариант эффективной компактификации «лишних» измерений не может реализоваться на классическом уровне. Дело в том, что ускоренное движение заряженной частицы в мире $D+1 = 6$ измерений сопровождается излучением [25]. Теряя энергию, частица уменьшает амплитуду дрожаний и асимптотически выходит на галилеевский режим движения.

Заметим, что все сказанное о построении непротиворечивой классической электродинамики в пространстве-времени размерности $D + 1 > 4$ с незначительными изменениями переносится на классическую теорию Янга–Миллса, в механическую часть действия которой также нужно добавить члены с высшими производными [25].

Вывод, который следовало бы извлечь из этого экскурса в миры высших измерений, состоит в том, что, обращаясь к проблеме четырехмерности нашего мира, мы неизбежно приходим к концепциям жесткой динамики.

6. ОДЕТЫЕ ЧАСТИЦЫ

Понятие «одетой частицы», вероятно, знакомо читателю, хотя скорее всего не из классической, а из квантовой электродинамики, где пертурбативный ряд фейнмановских диаграмм наводит на мысль об электроне, одетом в «шубу» виртуальных электрон-позитронных пар. Благодаря этой «шубе» перенормированные масса m и заряд e электрона отличаются от соответствующих затравочных величин m_0 и e_0, фигурирующих в исходном лагранжиане. Может сложиться впечатление, что понятие «одетой частицы» является сугубо квантовым, ибо процессы рождения и уничтожения частиц происходят лишь в квантовой картине. Но это неверно.

Перенормировка массы имеет место в системах с бесконечным числом степеней свободы самой различной природы. Например, уже с середины XIX в. известно, что сферическое тело массы m_0 при движении в идеальной жидкости со скоростью $\mathbf{v}$ ведет себя как объект с кинетической энергией $(1/2)\, m\mathbf{v}^2$, где $m = m_0 + \delta m$, т. е. его масса оказывается увеличенной за счет так называемой присоединенной массы δm, равной половине массы жидкости, вытесняемой телом. В динамическом отношении шлейф увлекаемой жидкости является неотъемлемой составной частью такого эффективного объекта. Мерой его инерции служит величина m, а «затравочная» масса m_0 вообще перестает себя как-либо проявлять.

Понятие «одетой частицы» оказывается чрезвычайно полезным и в классической теории поля с точечными источниками. Как известно, идея электромагнитной массы заряженной частицы исторически предшествует квантовой механике и берет начало в работах Дж. Дж. Томсона, который исходил из аналогии между гидродинамической средой и эфиром (подробнее см., например, в [55]). Ниже мы обсудим проблему массы на двух сравнительно простых примерах классических одетых частиц.

6.1. Одетая заряженная частица. Теория Максвелла–Лоренца N точечных заряженных частиц описывается действием (93) с $D = 4$. Каким образом здесь возникают «одетые частицы»? Рассмотрим случай, когда источник (95) содержит единственный член. Общее решение уравнений Максвелла (94) можно представить в виде $F = F_{\rm ret} + F_{\rm ex}$, где $F_{\rm ret}$ — запаздывающее электромагнитное поле, порожденное источником, а $F_{\rm ex}$ — внешнее поле, поведением которого управляют свободные уравнения Максвелла. Если «регуляризовать» поле F, т. е. «размазать» сингулярность функции $F_{\rm ret}$ некоторым релятивистски-инвариантным образом, и подставить в уравнение, полученное из вариации действия (93) по переменной $x^\mu(s)$,

$$\mu a^\lambda = e\, F^{\lambda\mu} v_\mu, \tag{103}$$

то после выполнения перенормировки массы в соответствии с предписанием (100) получится (см., например, [56,58]) уравнение Абрагама–Лоренца–Дирака:

$$m a^\lambda - \frac{2}{3}\, e^2 \big(\dot a^\lambda + v^\lambda a^2\big) = e\, F^{\lambda\mu}_{\rm ex} v_\mu. \tag{104}$$

Наивно можно полагать, что уравнение (104) по-прежнему описывает эволюцию механических степеней свободы частицы, фигурирующих в действии (93), хотя явным образом учитывает как влияние внешнего поля $F^{\mu\nu}_{\rm ex}$, так и действие частицы на себя. Иначе говоря, члену с высшими производными в (104) приписывается роль конечного «самодействия» (или силы «реакции излучения», или силы «радиационного трения») [1–4]. Такая интерпретация существует уже целое столетие. Тем не менее она несостоятельна и является причиной многих недоразумений и парадоксов.

Самодействие, по определению, происходит в *составной* системе с относительно автономными частями, влияющими друг на друга силовым образом. Такая система должна обладать достаточно большим числом степеней свободы, во всяком случае, $\geqslant 6$. Что касается обыкновенного дифференциального уравнения (104), то оно описывает эволюцию объекта с числом степеней свободы заведомо меньшим 6.

С чем мы имеем дело в действительности? Очевидно, речь идет о некотором синтетическом объекте, ибо он характеризуется величиной m, содержащей как механический μ, так и полевой δm вклады. Этот объект получается в результате перекомпоновки исходных степеней свободы в действии (93). Естественно назвать его *одетой* частицей. Одетая частица — протяженный объект, который наглядно можно представить чем-то вроде «волны-пилота» де Бройля, образуемой полевым шлейфом с сингулярным центром в точке нахождения заряда. Динамическое состояние одетой частицы можно задать 4-координатой сингулярного центра x^μ и отнесенным к этой точке 4-импульсом

$$p^\mu = m\,v^\mu - \frac{2}{3}\,e^2 a^\mu. \tag{105}$$

Движение сингулярного центра описывается уравнением

$$\overset{v}{\perp}\,(\dot p - f) = 0, \tag{106}$$

где f^μ — внешняя 4-сила, приложенная к точке x^μ. Действительно, подстановка (105) в (106) приводит к уравнению Абрагама–Лоренца–Дирака (104), в котором $f^\mu = e\,F^{\mu\nu}_{\rm ex} v_\nu$. С другой стороны, уравнение (106) есть не что иное как второй закон Ньютона в инвариантной геометрической записи. Уравнение (106) содержит лишь внешнюю силу f^μ, но явно не содержит какого-либо члена «самодействия». Одетая частица не действует сама на себя, она ведет себя как *элементарная* сущность.

Для выделения объекта с 4-импульсом p^μ вида (105) имеется еще один глубокий довод, принадлежащий К. Тейтельбойму [56]: уравнение Абрагама–Лоренца–Дирака (104) возникает из баланса энергии-импульса в каждой точке на мировой линии:

$$\dot p^\mu + \dot{\mathcal P}^\mu + \dot P^\mu_{\rm ex} = 0, \tag{107}$$

где 4-импульс одетой частицы p^μ определен согласно (105), 4-импульс излучения $\mathcal{P}^\mu$ получается из формулы Лармора:

$$\mathcal{P}^\mu = -\frac{2}{3}\, e^2 \int_{-\infty}^{s} d\tau\, v^\mu a^2, \tag{108}$$

а 4-импульс $P^\mu_{\rm ex}$ связан с интегралом 4-силы Лоренца для внешнего поля:

$$P^\mu_{\rm ex} = -\int_{-\infty}^{s} d\tau\, f^\mu. \tag{109}$$

Уравнение (107) гласит: извлекаемый из внешнего поля 4-импульс $-f^\mu ds$ идет на изменение 4-импульса одетой частицы dp^μ и 4-импульс $\dot{\mathcal{P}}^\mu ds$, уносимый излучением.

Одетая частица может вести себя негалилеевским образом. Уравнение (104) при $f^\mu = 0$ имеет решение

$$v^\mu(s) = \alpha^\mu {\rm ch}\,(w_0\tau_0\, {\rm e}^{s/\tau_0}) + \beta^\mu {\rm sh}\,(w_0\tau_0\, {\rm e}^{s/\tau_0}), \tag{110}$$

где α^μ и β^μ — постоянные 4-векторы, удовлетворяющие условиям

$$\alpha\cdot\beta = 0, \quad \alpha^2 = -\beta^2 = 1; \tag{111}$$

w_0 — амплитуда начального ускорения; $\tau_0 = 2e^2/3m$. Решение (110), (111) описывает самоускоренное движение, которое при $w_0 = 0$ вырождается в галилеевский режим.

Часто утверждают, что решение (110) является «нефизическим», поскольку оно якобы входит в противоречие с законом сохранения энергии: в отсутствие внешних сил частица разгоняется с экспоненциально растущим ускорением и излучает, т. е. без видимой причины увеличиваются энергия частицы и энергия электромагнитного поля. В этом рассуждении явно или неявно подразумевается механический объект, обладающий 4-импульсом $p^\mu = mv^\mu$, нулевая компонента которого $\mathcal{E} = m\gamma$ является положительно определенной величиной. Но настаивать на существовании объекта с таким 4-импульсом нет никаких оснований. Тщательный анализ с использованием различных регуляризационных процедур, не нарушающих симметрий, заложенных в действии (93), приводит [56] к выделению объекта, обладающего 4-импульсом вида (105), и уравнению баланса (107). Как показывает это уравнение, противоречия с законом сохранения энергии нет: изменение энергии одетой частицы dp^0 равно уносимой излучением энергии $-\dot{\mathcal{P}}^0 ds$. Тонкость состоит в том, что мы имеем дело с объектом, энергия которого

$$p^0 = m\gamma\left(1 - \tau_0\,\gamma^3\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{112}$$

не является положительно определенной величиной (это и не удивительно, если вспомнить о синтетической природе одетой частицы). Индефинитность величины (112) означает, что рост скорости может иногда сопровождаться уменьшением энергии. Поэтому бессмысленно спрашивать, откуда частица черпает энергию на саморазгон: энергия самоускоряющейся одетой частицы на самом деле *уменьшается*.

Почему эта проблема не возникала для свободных гироскопа и жесткой частицы? Как показано в разд. 2 и 4, для таких объектов $p^\mu = \mathrm{const}$, причем постоянство p^μ связано с весьма общей причиной — трансляционной инвариантностью. А так как p^μ зависит от кинематических переменных сложным образом (см. (49) и (85)), то изменение скорости может компенсироваться изменением более высоких производных так, чтобы соблюдалось условие $p^\mu = \mathrm{const}$. Что касается одетой частицы, то в отсутствие внешних сил ее 4-импульс, вообще говоря, не должен сохраняться. Интегралом движения, связанным с трансляционной инвариантностью, согласно (107) является в этом случае $p^\mu + \mathcal{P}^\mu$. Например, при движении в режиме (110) величина $\mathcal{P}^0$ увеличивается, а величина p^0 в таком же темпе уменьшается.

Если результатом перенормировки массы (100) является $m = 0$, то первый член в уравнении (104) исчезает, и при $f^\mu = 0$ оно сводится к уравнению

$$(\overset{v}{\perp}\,\dot{a})^\mu = 0,$$

которое есть уравнение релятивистского равноускоренного движения [3]. Мировая линия одетой частицы с $m = 0$ в отсутствие внешних сил оказывается гиперболой

$$v^\mu(s) = \alpha^\mu \operatorname{ch} w_0 s + \beta^\mu \operatorname{sh} w_0 s, \quad \alpha\cdot\beta = 0, \quad \alpha^2 = -\beta^2 = 1. \tag{113}$$

Кривизна $k = w_0 = \mathrm{const}$ такой мировой линии может быть произвольной. Излучение происходит с постоянной мощностью, определяемой квадратом ускорения $a^2 = -w_0^2$. Энергия же одетой частицы p^0 согласно (112) оказывается положительной на участке замедления $s < 0$ и отрицательной на участке ускорения $s > 0$.

Читатель может проверить непосредственным вычислением, что при движении вдоль мировых линий (110) и (113) увеличение энергии излучения $\Delta\mathcal{P}^0$ за конечный период времени Δs в точности равно уменьшению энергии одетой частицы Δp^0.

Из (105) следует, что инвариант $v\cdot p$ является сохраняющейся величиной как в отсутствие, так и при наличии взаимодействий, ибо перенормированная масса m считается константой. Напротив, $M = \sqrt{p^2}$ зависит от формы мировой линии, т. е. не является сохраняющейся величиной,

$$M^2 = m^2\left(1 + \tau_0^2\, a^2\right). \tag{114}$$

(Примечательно, что для одетой *жесткой* частицы ни $v \cdot p$, ни p^2, ни какой-либо иной инвариант, конструируемый из p^μ и кинематических переменных v^μ, a^μ и т. д., не является интегралом движения [25,59], в отличие от частицы Абрагама–Лоренца–Дирака, для которой, к счастью, все-таки имеется сохраняющаяся инвариантная величина $m = v \cdot p$. Проблема инертных свойств одетой частицы в общем случае, как видим, далеко не тривиальна.)

Выражение (114) показывает, что при $\tau_0^2\, a^2 < -1$ одетая частица переходит в тахионное состояние с $M^2 < 0$. Заметим, однако, что в области применимости классического описания член $\tau_0^2\, a^2$ очень мал. Рассмотрим, например, кулоновское взаимодействие двух электронов на расстоянии порядка комптоновской длины волны электрона $1/m$ — минимальном расстоянии, допустимом в рамках классической теории. Тогда имеем оценку

$$\tau_0^2\, |\, a^2| \sim e^8 \sim 10^{-8}.$$

Отсюда видно, что критического ускорения $|a| = 1/\tau_0$ здесь достичь невозможно. Если потребовать заранее, чтобы класс допустимых мировых линий состоял из гладких времениподобных кривых, у которых кривизна k не превышает τ_0^{-1}, то решение (110) окажется за пределами этого класса, а пространство импульсов одетой частицы не будет содержать тахионных состояний, т. е. состояний с $p^2 < 0$.

6.2. Одетая цветная частица. Действие в $SU(\mathcal{N})$ теории Янга–Миллса–Вонга N цветных частиц имеет вид [10,60]

$$\mathcal{A} = -\sum_{i=1}^{N} \int ds_i \left(\mu_i \sqrt{v_i \cdot v_i} + \mathrm{tr}\,(Z_i \xi_i^{-1} D_s \xi_i)\right) - \\ - \frac{1}{16\pi} \int d^4x\, \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (115)$$

где $\xi_i = \xi_i(s_i)$ — зависящие от времени элементы калибровочной группы; $Z_i = e_i^a t_a$, e_i^a — константы, посредством которых задается цветной заряд частиц $Q_i = \xi_i Z_i \xi_i^{-1}$, а t_a — генераторы калибровочной группы. Напряженность поля Янга–Миллса $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t_a$ есть $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\,[A_\mu, A_\nu]$, где g — константа янг-миллсовской связи. Ковариантная производная D_s определяется формулой $D_s = d/ds_i + v_i^\mu A_\mu^a t_a$. Так как при локальных калибровочных преобразованиях ξ_i преобразуется по закону $\xi_i \to \xi_i' = \Omega^{-1} \xi_i$, то калибровочная инвариантность действия (115) вполне очевидна.

Несмотря на сходство действий (93) и (115), они порождают весьма различные теории (линейные уравнения электромагнитного поля и нелинейные уравнения Янга–Миллса). Наиболее ярко это различие проступает при «расшифровке» теорий с помощью точных решений. Электродинамика содержит всего две фундаментальные полевые конфигурации — плоскую волну и кулоновское поле, причем первая характерна для ситуации без источников, а вторая для ситуации с точечными источниками. Множество экстремалей действия (115) значительно богаче. Если не касаться ситуации «без источников», описываемой уравнениями $D^\lambda F_{\lambda\mu} = 0$ (ей посвящены многочисленные исследования (см., например, [61] и содержащиеся там ссылки), то ситуация с источником вида

$$j_\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} \int ds_i\, Q_i(s_i)\, v^i_\mu(s_i)\, \delta^4\Big(x - x_i(s_i)\Big)$$

отличается от соответствующей ситуации в электродинамике тем, что имеется два класса решений [10], в которых запечатлен янг-миллсовский фон двух вакуумных фаз — горячей и холодной. Решения, отвечающие горячей фазе, представляют собой поля кулоновского типа, конструируемые на картановской подгруппе калибровочной группы. Для таких решений все коммутаторы исчезают, и мы возвращаемся к картине, напоминающей электродинамическую. Все результаты, полученные в п. 6.1, воспроизводятся здесь с несущественной заменой $e^2 \to \operatorname{tr} Q^2$.

Решения другого класса, отвечающие холодной фазе, являются неабелевыми. Из этих решений определяются не только полевые конфигурации, но и цветные заряды источников, способные породить такие конфигурации*. Ниже, говоря об отдельной цветной частице, мы будем условно называть ее *кварком* и при этом опускать ее маркировочный индекс i. Обратимся к ситуации в холодной фазе. Здесь модуль цветного заряда у кварка имеет вполне определенное значение

$$|\operatorname{tr} Q^2| = \frac{4}{g^2}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{N}}\right). \tag{116}$$

Уравнение движения одетого кварка во внешнем поле Янга–Миллса $F^{\mu\nu}$ есть [8, 10]

$$m\left[a^\mu + \ell\left(\dot a^\mu + v^\mu a^2\right)\right] = \operatorname{tr}\left(QF^{\mu\nu}\right) v_\nu, \tag{117}$$

где m — перенормированная масса,

$$\ell = \frac{2}{3m}\,|\operatorname{tr} Q^2|. \tag{118}$$

---

*Заметим, что параметры e_i в (93) и e^a_i в (115) априори никак не фиксированы. Нет ограничений и на числовые поля их значений. Решение, описывающее холодную фазу, фиксирует *мнимые* значения цветных зарядов $e^a_i = 2i/g$. В горячей фазе величинам e^a_i естественно приписать произвольные *вещественные* значения из соображений стабильности (подробности см. в [10]).

Уравнение (117) можно записать в виде второго закона Ньютона (8), в котором фигурирует 4-импульс p^μ одетого кварка

$$p^\mu = m\,(v^\mu + \ell\, a^\mu). \tag{119}$$

Уравнение (117) можно представить в виде локального баланса энергии-импульса

$$\dot p^\mu + \dot\wp^\mu + \dot P^\mu_{\rm ex} = 0, \tag{120}$$

где 4-импульс одетого кварка p^μ определен согласно (119),

$$\wp^\mu = m\,\ell \int_{-\infty}^{s} d\tau\, v^\mu a^2, \tag{121}$$

$$P^\mu_{\rm ex} = -\int_{-\infty}^{s} d\tau\, {\rm tr}\,(QF^{\mu\nu})\, v_\nu. \tag{122}$$

Уравнения баланса (107) и (120) отличаются лишь вторыми членами. Если $\mathcal{P}^\mu$ можно интерпретировать как 4-импульс, уносимый от источника расходящейся волной, то $\wp^\mu$ следовало бы понимать как 4-импульс, приносимый к источнику сходящейся волной. Другими словами, в электродинамике часть степеней свободы электромагнитного поля существует в виде нормального излучения, а в теории Янга–Миллса соответствующие степени свободы в холодной фазе играют роль «излучения волн отрицательной энергии». Уравнение баланса (120) гласит: извлекаемый из внешнего поля 4-импульс $-dP^\mu_{\rm ex}$ идет на изменение 4-импульса одетого кварка dp^μ и на 4-импульс $\dot\wp^\mu ds$, уносимый «излучением волн отрицательной энергии».

Уравнение (117) при нулевой правой части имеет решение

$$v^\mu(s) = \alpha^\mu {\rm ch}\,(w_0 \ell\, {\rm e}^{-s/\ell}) + \beta^\mu {\rm sh}\,(w_0 \ell\, {\rm e}^{-s/\ell}), \tag{123}$$

α^μ и β^μ удовлетворяют условиям (111). Решение (123) описывает самозамедляющееся движение. Хотя при движении в таком режиме энергия одетого кварка p^0 растет, этот рост экспоненциально ослабевает во времени. Как видно из (120), рост p^0 связан с поглощением энергии поля Янга–Миллса, которое обеспечивается членом $\dot\wp^0$.

На первый взгляд самозамедление выглядит как совершенно невинное явление, поскольку движение очень скоро становится почти не отличимым от галилеевского. Между тем наличие самозамедляющихся движений серьезно влияет на вопрос о непротиворечивости теории. Действительно, при удалении в прошлое ускорение растет, вместе с ним растет мощность «излучения волн отрицательной энергии». Поэтому в *конечные* моменты времени энергия поля

Янга–Миллса оказывается бесконечной. Это видно, например, из подстановки решения (123) в интеграл (121)*.

Такого рода «инфракрасная» расходимость не может быть устранена из теории с помощью перенормировок физических величин. От нее можно избавиться лишь за счет сужения класса допустимых мировых линий, в результате которого решение (123) описывает мировую линию, заранее исключенную из данной модели на основании некоторого общего принципа.

С другой стороны, из (119) находим

$$p^2 = m^2\left(1 + \ell^2 a^2\right). \tag{124}$$

Таким образом, одетый кварк может перейти в тахионное состояние при $|a| > \ell^{-1}$. По аналогии с электродинамикой мы могли бы потребовать, чтобы класс допустимых мировых линий состоял из кривых, кривизна которых не превышает ℓ^{-1}. При этом из пространства импульсов автоматически исключались бы состояния с $p^2 < 0$.

Однако мы уже не имеем феноменологического повода для такого ограничения на кривизны. Формулы (114) и (124) отличаются лишь заменой $\tau_0 \to \ell$. Но эта замена радикально меняет дело. Из (116) и (118) видно, что ℓ зависит от константы связи как g^{-2}. Если связь сильна, т. е. $g \sim 1$, то ℓ порядка комптоновской длины волны кварка $\Lambda_q = 1/m$, а если $g \ll 1$, то ℓ оказывается даже больше Λ_q в g^{-2} раз. Пусть, например, два кварка, взаимодействующие посредством кулоноподобной цветной силы, отделены друг от друга расстоянием r. Тогда, как нетрудно видеть, критическое значение ускорения, при котором кварки переходят в тахионное состояние, реализуется на расстоянии $r \approx |\mathrm{tr}\, Q^2|/m$, что больше комптоновской длины волны кварка в g^{-2} раз. Эффекты, связанные с большим ускорением кварка, включая критическое значение $|a| = \ell^{-1}$, попадают в область применимости классической теории.

Таким образом, переход в тахионное состояние может иметь реальное значение в области субъядерных явлений. Одно из предположений состоит в том, что точка $p^2 = 0$, перейдя которую кварк должен был бы оказаться в тахионном состоянии, в действительности соответствует границе между холодной и горячей фазами [62].

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В начале статьи утверждалось: инертные свойства произвольного точечного объекта не могут быть полностью охарактеризованы единственной

---

*Любопытно, что самоускорение не играет подобной роли в электродинамике с запаздывающим граничным условием. Оно не влечет за собой «инфракрасных» расходимостей. Действительно, при подстановке решения (110) в интеграл (108) получается конечный результат.

величиной M. Ключевую роль в последующем обсуждении играли две инвариантные величины — масса M и масса покоя m. Для галилеевской частицы $M = m$, причем обе величины совпадают с хорошо операционально-определенной величиной — ньютоновской массой. С другой стороны, для спиновой частицы Френкеля $m > M$, поэтому вопрос о связи интегралов движения m и M с измеряемыми в опыте величинами остается открытым. Несколько проще положение дел для жесткой частицы, ибо в отсутствие внешних сил сохраняющейся величиной для нее оказывается только M. В рамках лагранжева формализма нам встретились размерные параметры μ и ν, а также зависящие от параметризации мировой линии монада η^{-1} и лагранжев множитель χ. Эти и подобные им величины формально связаны с m и M, но сколь-нибудь глубокого физического смысла, как правило, не имеют. Это становится особенно очевидным на примере затравочной массы, которая в подходящий момент перестает быть просто числом μ и объявляется функцией параметра регуляризации $\mu(\epsilon)$, причем зависимость от ϵ выбирается такой, чтобы при сложении с собственной энергией $\delta m(\epsilon)$ их сингулярности взаимно сокращались и перенормированная масса m оказывалась конечной. (Эта несколько неуклюжая на вид регуляризационно-перенормировочная процедура есть непременный атрибут локальной теории поля как на классическом, так и на квантовом уровне; впрочем, с чисто математической точки зрения, речь идет о вполне приемлемой процедуре извлечения конечных величин, основанной на решении фундаментальной проблемы Римана–Гильберта [63].) Помимо этого, мы дважды мельком касались связи величин m и M с гравитационной массой M_g. Трудно себе представить, как можно было бы заметно сократить этот набор величин, характеризующих инертные свойства негалилеевских объектов.

— Но позвольте, — может перебить недоумевающий читатель, — зачем так подробно обсуждать свойства негалилеевских объектов, если *никто не наблюдал* ни Zitterbewegung, ни самоускорения, ни иных необычных режимов свободной эволюции?

А разве кто-нибудь *пытался* их наблюдать?

— Это верно, — продолжит критически настроенный читатель, — о таких экспериментах не было слышно. Но неужели здесь нужны особые ухищрения? Почему негалилеевские режимы *не проявляют себя непосредственно*?

А разве галилеевское движение видно невооруженным глазом? Повседневные наблюдения убеждают нас в том, что в отсутствие внешних сил тела *покоятся*. К такому выводу пришел Аристотель, и далее на протяжении 2000 лет ни у кого на сей счет не было сомнений. Заслуга Галилея в том, что он отважился на далекие *экстраполяции* из непосредственных наблюдений и проверил идею прямолинейного и равномерного движения свободных тел в *специально поставленных* опытах.

Хотя Zitterbewegung не удается увидеть прямо, косвенные данные подтверждают возможность такого режима. К сожалению, обычно Zitterbewegung характеризуется частотой порядка комптоновской длины волны объекта. Это бросает тень на классическое истолкование этого явления. Однако теоретические возможности достаточно широки, чтобы предположить существование негалилеевского объекта, у которого Zitterbewegung характеризуется заведомо «классическими» значениями параметров.

Что касается процессов с растущим ускорением, то они присущи нестабильным системам, в частности, системам с двумя фазами, между которыми при определенных условиях совершается фазовый переход (например, инфляция ранней Вселенной [64, 65] или деконфайнмент [66]). Вполне возможно, что такие явления окажется удобно интерпретировать в терминах самоускоряющихся одетых частиц. Но на роль самоускоряющихся частиц могут претендовать и космологические объекты. Действительно, недавнее открытие *ускоренного* режима расширения Вселенной пытаются объяснить с помощью космологических моделей с Λ-членом [67]. Альтернативное объяснение, вероятно, следовало бы связать с самоускоренными движениями одетой гравитирующей частицы, аналогичными движениям одетой заряженной частицы (110) и (113). Заметим, что речь идет об объектах с внутренним угловым моментом (сверхновые, галактики, квазары), поэтому их негалилеевские движения могут причудливо сочетать Zitterbewegung и движение с нарастающей скоростью.

— И все же, — не унимается скептичный читатель, — существенным во всех представленных рассуждениях является условие *классичности*. Но, как известно, фундаментальные законы природы — квантовые законы. В квантовой теории хорошо определен лишь 4-импульс p^μ, порождающий единственную инвариантную величину M (4-скорость v^μ хорошей квантовой переменной не является). Поэтому проблема $M \neq m$ кажется надуманной. Понятие негалилеевской частицы существует (правда, под другими именами) уже более 75 лет, но до сих пор не воплотилось в физически «осязаемых» вещах. Какая польза от такого понятия? И вообще, нужно ли возиться с архаикой вроде уравнения Абрагама–Лоренца–Дирака или модели спиновой частицы Френкеля? Не пора ли избавиться от этого теоретического «хлама»?

Здесь, по-видимому, стоит напомнить, что имеется три принципиально разных точки зрения на природу нашего мира. Согласно одной из них в основе физической реальности лежат классические, детерминистические законы. Это фундаментальный уровень познания. Для него следует создать теорию «скрытых переменных». Квантовая теория имеет феноменологический статус, она получается в результате усреднения по скрытым параметрам. В 50-е годы эту точку зрения энергично отстаивали и развивали Л. де Бройль, Ж. Вижье [68] и особенно Д. Бом [69]. В наши дни ее возродил Г. 'т Хоофт [70], который считает, что в субпланковской области (т. е. в области масштабов длин, меньших $l_{\mathrm{P}} = 1,6 \cdot 10^{-33}$ см) квантовые состояния не могут быть первичными, таковыми являются детерминистические состояния.

Противоположное воззрение состоит в том, что наш мир квантовый. Макроскопические объекты оказываются классическими лишь эффективно. Такие классические проявления объясняются так называемой декогеренцией [71–73]. Эта точка зрения в настоящее время очень популярна. В ее пользу говорят результаты экспериментальной проверки неравенств Белла [74, 75] (которые, заметим, не уменьшают энтузиазма сторонников детерминистической точки зрения, см., например, контраргументы 'т Хоофта [70]. Но ее трудно принять, если речь заходит о человеке или о Вселенной. При всей готовности к жертвам во имя науки автор не решился бы завершить статью подписью: «Суперпозиция живого и мертвого Косякова». А вас, читатель, неужели вдохновляет роль «декогерированного» *homo sapiens*?

Наконец, третья парадигма исходит из *сосуществования* классической и квантовой онтологий. Другими словами, мы имеем дело с двумя мирами. В классическом мире все происходит с полной определенностью, во всяком случае, данный объект определенно существует в данном месте в данный момент времени, а его индивидуальность сохраняется. В квантовом мире каждый процесс (включая бытие любого объекта) характеризуется некоторой амплитудой вероятности. Индивидуальность квантового объекта, например электрона, не гарантируется, ибо он тождествен любому другому электрону — реальному или виртуальному (т. е. не существующему в данный момент с определенностью, но с некоторой вероятностью готовому возникнуть в результате рождения электрон-позитронной пары, распада мюона и т. п.). Эта парадигма принадлежит творцам «копенгагенской интерпретации», которые постоянно говорили о макроскопическом приборе и классических величинах как о чем-то равноправном с реалиями квантового мира. Связь классического и квантового миров открывается с помощью так называемого голографического принципа. Согласно этому принципу (впервые провозглашенному 'т Хоофтом [76] и Л. Саскиндом [77] в контексте квантовой гравитации) информация о происходящем внутри произвольного объема может быть спроецирована на поверхность, ограничивающую объем, причем речь фактически идет о проецировании *классической* картины в толще объема на *квантовую* картину на поверхности [78]. Одна и та же физическая реальность предстает перед нами либо в классическом, либо в квантовом обличии, будучи при этом погруженной в пространство-время, соответственно, $D+1$ и D измерений. Итак, объявить главенство квантовых понятий над классическими означало бы дискриминацию «копенгагенского» и «детерминистского» меньшинств, состоящих отнюдь не из одних научных маргиналов.

Теперь о возне со старыми понятиями, не нашедшими воплощения в доступных наблюдению объектах. Заметим, что в физическом сообществе не так уж мало любителей этих теоретических «реликтов». Магнитный монополь Дирака был придуман 70 лет назад, да и монополю 'т Хоофта–Полякова уже за 25, и хотя эксперимент не дал ни единого намека на существование этих объектов, разве мало людей, рассуждающих о монополе, изучающих его свойства, предлагающих решение множества проблем, от субъядерных до космологических, как если бы речь шла о реальной частице? Но повернется ли язык назвать монополь (как и ряд других бывших в употреблении «изделий» из реквизита физики высоких энергий, например, аксион, хиггсовский бозон, суперсимметричные партнеры известных частиц и т. п.) теоретическим «хламом»?

Всесильная мода иногда делает новинкой «хорошо забытое старое». Кто 15 лет назад помнил об электродинамике Борна–Инфельда? Ее могли спутать с электродинамикой Ми или, в лучшем случае, извлечь из глубин памяти ассоциации с чем-то «то ли нелокальным, то ли нелинейным, то ли калибровочно-неинвариантным». Но сегодня это, казалось бы, навсегда забытое название вновь пестрит на страницах ведущих физических журналов. Дело в том, что лагранжиан этой модели возникает в низкоэнергетическом пределе теории суперструн.

Категоричность оценок, вынесение «смертных приговоров», особенно если они исходят от авторитетного ученого, могут нанести вред и его собственной репутации, и работе его коллег. Примеров великое множество. Вот два из них.

Однажды молодой теоретик А. Салам явился к великому и грозному В. Паули, чтобы сообщить ему о своей идее двухкомпонентного нейтрино. Паули посоветовал визитеру «придумать что-нибудь получше». Обескураженный Салам замешкался с публикацией, и честь открытия нарушения четности выпала на долю Ли и Янга [79]. Напомним, что уравнение для двухкомпонентного безмассового спинорного поля сам же Паули за 25 лет до этих событий и вывел, но немедленно его отверг, считая абсурдом нарушение зеркальной симметрии. «Поставив крест» на этом уравнении, Паули не желал возвращаться к вопросу о возможности его физического применения.

В 1917 г., пытаясь построить модель статической Вселенной, Эйнштейн ввел в уравнения гравитационного поля так называемую космологическую постоянную, или Λ-член. В те времена не ощущалось необходимости или даже естественности этого шага. Вероятно, поэтому А. Фридман сосредоточил внимание на нестационарной, расширяющейся Вселенной, описываемой решением гравитационных уравнений с нулевым Λ-членом. Эйнштейну фридмановское решение показалось «подозрительным», о чем он написал в комментарии к его статье. Позднее Эйнштейн признал правильность как самой идеи нестационарной Вселенной, так и решения Фридмана, но при этом впал в другую крайность, объявив Λ-член самой крупной ошибкой в своей жизни. Вслед за Эйнштейном большинство теоретиков поспешило занести Λ-член в разряд неудачных *ad hoc* конструкций. Это положение не менялось около 40 лет, пока Я. Б. Зельдович не обнаружил [80], что учет нулевых колебаний делает наличие Λ-члена в квантовой гравитации неизбежным. С тех пор проблема Λ-члена стала одной из центральных (и наиболее трудных) в квантовой гравитации и космологии [81–84].

Благодарности. Я искренне благодарен В. Г. Багрову, А. О. Баруту, И. Л. Бухбиндеру, Р. Вударду, Т. Голдману, Г. В. Ефимову, В. В. Нестеренко, М. Павшичу, М. Ривасу, Ф. Рорлиху, И. Б. Хрипловичу и Х. Д. Це за полезные замечания, сделанные в разное время и в разной форме. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научно-технического центра, проект № 840.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Курс теоретической физики. М.: Наука, 1973. Т. 2.
2. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. N. Y.: Wiley, 1962, 1975, and 1998 (Пер.: *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965).
3. *Rohrlich F.* Classical Charged Particles. Reading: Addison-Wesley, 1965, and 1990.
4. *Barut A. O.* Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles. N. Y.: Colier-Macmillan, 1964; Dover, 1980.
5. *Schrödinger E.* Über die kräftfreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik // Sitzungber. Preuss. Acad. Wiss. 1930. V. 24. P. 418 (Пер.: *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М., 1976. С. 218–228).
6. *Huang K.* On the Zitterbewegung of the Dirac electron // Am. J. Phys. 1952. V. 20. P. 479.
7. *Corben H. C.* Classical and Quantum Theories of Spinning Particles. San Francisco: Holden-Day, 1968. Ch. 2.
8. *Косяков Б. П.* Поле произвольно движущегося цветного заряда // ТМФ. 1991. Т. 87. С. 422.
9. *Косяков Б. П.* Излучение в электродинамике и теории Янга–Миллса // УФН. 1992. Т. 162, вып. 2. С. 161.
10. *Kosyakov B. P.* Exact solutions in the Yang–Mills–Wong theory // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 5032; hep-th/9902039.
11. *Pavšič M.* Classical motion of membranes, strings and point particles with extrinsic curvature // Phys. Lett. B. 1988. V. 205. P. 231.
12. *Kosyakov B. P., Nesterenko V. V.* Stability of Zitterbewegung of a rigid particle // Phys. Lett. B. 1996. V. 384. P. 70.
13. *Schouten J. A.* On meson fields and conformal transformations // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 421.
14. *Frenkel J.* Die Elektrodynamik des Rotierenden Electrons // Z. Phys. 1926. V. 37. P. 243.
15. *Березин Ф. А., Маринов М. С.* Классический спин и переменные Грассмана // Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 678.
16. *Casalbuoni R.* Pseudoclassical description of spinning particle // Nuovo Cim. A. 1976. V. 33. P. 115.
17. *Galvao C. A. P., Teitelboim C.* Classical supersymmetric particles // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 1863.

18. *Pavšič M., Tapia V.* Resource letter on geometrical results for embeddings and branes. gr-qc/0010045.

19. *Barut A. O., Villarroel D.* Radiation reaction and mass renormalization in scalar and tensor fields and linearized gravitation // J. Phys. A. 1975. V. 8. P. 156.

20. *Rowe E. G. P., Rowe G. T.* The classical equation of motion for a spinning point particle with charge and magnetic moment // Phys. Rep. 1987. V. 149. P. 287.

21. *Barut A. O., Unal N.* Generalization of the Lorentz–Dirac equation to include spin // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 5404.

22. *Barut A. O., Cruz M. D.* Radiation reaction for the classical relativistic spinning particle in scalar, tensor and linearized gravitational fields // Phys. Lett. B. 1993. V. 308. P. 247.

23. *DeWitt B., Brehme R.* Radiation damping in a gravitational field // Ann. Phys. (N. Y.). 1960. V. 9. P. 220.

24. *Barut A. O., Villarroel D.* Radiation damping of the electron in a gravitational field // J. Phys. A. 1975. V. 8. P. 1537.

25. *Косяков Б. П.* Точные решения в классической электродинамике и теории Янга–Миллса–Вонга в пространстве-времени четного числа измерений // ТМФ. 1999. Т. 119. С. 119; hep-th/0207217.

26. *Jammer M.* Concept of Mass in Classical and Modern Physics. Cambridge, MA: Harvard U. P., 1961 (Пер.: *Джеммер М.* Понятие массы в классической и современной физике. М.: Прогресс, 1967).

27. *Planck M.* Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik // Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. 1906. V. 8. P. 136 (Пер.: *Планк М.* Избранные труды. М., 1975. С. 445–448).

28. *Poincaré H.* Science et hypothèse. Paris: Flammarion, 1902. Ch. 4 (Пер.: *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 3–152).

29. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen, Mat. Phys. Kl. 1918. V. 2. P. 235 (Пер.: [30, с. 611–630]).

30. Вариационные принципы механики / Ред. Л. С. Поллак. М.: Физматгиз, 1959.

31. *Brink L., Vecchia P. Di, Howe P.* A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string // Phys. Lett. B. 1976. V. 65B. P. 471.

32. *Simonov Yu. A.* QCD and theory of hadrons. hep-ph/9911237.

33. *Rafanelli K.* Theory of the relativistic spinning particle: Hamiltonian formulation and world-line invariance // Phys. Rev. D. 1984. V. 30. P. 1707.

34. *Hanson A. J., Regge T.* The relativistic spherical top // Ann. Phys. (N. Y.). 1974. V. 87. P. 498.

35. *Rivas M.* Kinematical Theory of Spinning Particles. Dordrecht: Kluwer, 2001.

36. *Ortega J. y Gasset.* La rebelión de las masas. Madrid, 1930 (Пер.: *Ортега-и-Гассет Х.* Восстание масс // Вопр. философии. 1989. № 3. С. 119–154; № 4. С. 114–155.

37. *Barut A. O., Zanghi N.* Classical model of the Dirac electron // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2009.

38. *Ostrogradskii M. V.* Mémoire sur les équations différentielles relatives aux problè-mes des isopérimètres // Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. 1850. VI$^{\mathrm{me}}$ série. P. 385 (Пер.: [30, с. 315–387]).

39. *Nesterenko V. V.* Singular Lagrangians with higher derivatives // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V. 22. P. 1673.

40. *Nesterenko V. V., Feoli A., Scarpetta G.* Dynamics of relativistic particles with Lagrangians dependent on acceleration // J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 5552.

41. *Hawking S.* Black hole explosions? // Nature. 1974. V. 248. P. 30;
Hawking S. Quantum particle creation by black hole // Commun. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199.

42. *Vesser M.* Essential and inessential features of Hawking radiation. hep-th/0106111.

43. *Polyakov A. M.* Fine structure of strings // Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 406.

44. *Kleinert H.* The membrane properties of condensing strings // Phys. Lett. B. 1986. V. 174. P. 335.

45. *Kholodenko A. L.* Fermi–Bose transmutation: from semiflexible polymers to superstrings // Ann. Phys. (N. Y.). 1990. V. 202. P. 186.

46. *Kholodenko A. L., Viglis T. A.* Some geometrical and topological problems in polymer physics // Phys. Rep. 1998. V. 298. P. 251.

47. *Cao T. Y.* New philosophy of renormalization: From the renormalization group equations to effective field theories // Renormalization: From Lorentz to Landau (and beyond) / Ed. L. M. Brown. Berlin, 1993. P. 87–133.

48. *Schweber S. S.* Changing conceptualization of renormalization theory // Ibid. P. 135–166.

49. Renormalization: From Lorentz to Landau (and beyond) / Ed. L. M. Brown. Berlin: Springer, 1993.

50. *Косяков Б. П.* О физическом смысле перенормируемости // ЭЧАЯ. 2001. Т. 32. С. 909; hep-th/0011235.

51. *Ehrenfest P.* In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? // Proc. Amsterdam Acad. 1917. V. 20. P. 200;
Ehrenfest P. Welche Rolle spielt die Dreidimensionalitat des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? // Ann. Phys. (Leipzig). 1920. V. 61. P. 440.

52. *Gurevich L., Mostepanenko V.* On the existence of atoms in n-dimensional space // Phys. Lett. A. 1971. V. 35. P. 201.

53. *Case K. M.* Singular potentials // Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 797.

54. *Kosyakov B. P.* Illusion of four-dimensionality // Proc. of the Second Intern. A. D. Sakharov Conf. on Physics / Eds. I. M. Dremin, A. M. Semikhatov. Singapore, 1997. P. 462–465.

55. *Dresden M.* Renormalization in historical perspective — the first stage // Renormalization: From Lorentz to Landau (and beyond) / Ed. L. M. Brown. Berlin, 1993. P. 29–55.

56. *Teitelboim C.* Splitting of Maxwell tensor: Radiation reaction without advanced fields // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 1572.

57. *Teitelboim C.* Radiation reaction as a retarded self-interaction // Phys. Rev. D. 1971. V. 4. P. 345.

58. *Barut A. O.* Electrodynamics in terms of retarded fields // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 3335.

59. *Nesterenko V. V.* Relativistic particle with curvature in an external electromagnetic field // Intern. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 3989.

60. *Balachandran A., Borchardt S., Stern A.* Lagrangian and Hamiltonian description of Yang–Mills particles // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 3247.

61. *Rajaraman R.* Solitons and Instantons. Amsterdam: Noth-Holland, 1982 (Пер.: *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985).

62. *Kosyakov B. P.* Holography and two phases of the QCD vacuum // Talk given the Intern. Conf. on Non-Perturbative Quantum Chromodynamics, Amer. University of Paris, France, July 6–9, 2001; hep-th/0109056.

63. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem // J. High Energy. 1999. V. 9. P. 24; hep-th/9909126, 9912092.

64. *Guth A. H.* Inflation and eternal inflation // Phys. Rep. 2000. V. 333–334. P. 555.

65. *Linde A.* Inflationary cosmology // Ibid. P. 575.

66. *Meyer-Ortmanns H.* Phase transitions in quantum chromodynamics // Rev. Mod. Phys. 1996. V. 68. P. 473.

67. *Riess A. G. et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // Astron. J. 1998. V. 116. P. 1009; astro-ph/9805201;
Perlmutter S. et al. Measurement of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565; astro-ph/9812133.

68. La physique quantique restera-t-elle indéterministe? / Ed. L. de Broglie. Paris: Hermann, 1953.

69. *Bohm D.* A suggested interpretation of the quantum theory in terms of «hidden variables» // Phys. Rev. I, II. 1952. V. 85. P. 166, 180 (Пер. см.: Вопросы причинности в квантовой механике / Ред. Я. П. Терлецкий, А. А. Гусев. М., 1955. С. 34–94).

70. *'t Hooft G.* Quantum gravity as a dissipative deterministic system // Class. Quant. Grav. 1999. V. 16. P. 3263; gr-qc/9903084.

71. *Zurek W. H.* Decoherence and the transition from quantum to classical // Phys. Today. 1991. V. 44 (10). P. 36.

72. *Guilini D. et al.* Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory. Berlin: Springer, 1996.

73. *Менский М. Б.* Явление декогеренции и теория непрерывных квантовых измерений // УФН. 1998. Т. 168. Р. 1017.

74. *Bell J. S.* On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox // Physics. 1964. V. 1. P. 195;
Bell J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 447.

75. *Clauser J. F., Shimony A.* Bell's theorem: experimental tests and implications // Rep. Prog. Phys. 1978. V. 41. P. 1881.

76. *'t Hooft G.* Dimensional reduction in quantum gravity // Salamfestschrift. Singapore, 1993. P. 284–296; gr-qc/9310006.

77. *Susskind L.* The world as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 6377; hep-th/9409089.

78. *Kosyakov B. P.* Holography and the origin of anomalies // Phys. Lett. B. 2000. V. 492. P. 349; hep-th/0009071.

79. *Duff M. J.* A layman's guide to M-theory. hep-th/9805177.

80. *Зельдович Я. Б.* Космологическая постоянная и элементарные частицы // Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 883.

81. *Weinberg S.* The cosmological constant problem // Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. P. 1.

82. *Witten E.* The cosmological constant from the viewpoint of string theory. hep-ph/0002297.

83. *Carrol S. M.* The cosmological constant. astro-ph/0004075.

84. *Чернин А. Д.* Космический вакуум // УФН. 2001. Т. 171. С. 1153; available at: http://ufn.ru/ufn01/ufn01_11/ufn0111b.pdf