

## ВАРИАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

*А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов\**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1057
ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ: ОСНОВНЫЕ ИДЕИ	1062
Построение вариационных разложений	1062
Непертурбативное разложение по малому параметру	1065
ВАРИАЦИОННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ	1071
Построение вариационного ряда	1072
Малый параметр разложения в квантовой хромодинамике	1076
Перенормировка	1078
Связь с потенциальной кварковой моделью	1079
Поправки и стабильность	1081
$e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИЯ В АДРОНЫ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ	1084
ИНКЛЮЗИВНЫЙ РАСПАД $\tau$ -ЛЕПТОНА	1089
Инвариантный заряд во времениподобной области	1089
$\tau$ -распад	1092
Ренормалонный вклад	1095
ПРАВИЛА СУММ КХД И $\alpha$ -РАЗЛОЖЕНИЕ	1099
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1103
ПРИЛОЖЕНИЯ	1107
А. Решение уравнений методом вариационных итераций	1107
В. Корреляторы токов массивных кварков	1110
С. Кулоновские сингулярности	1112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1114

---

\*Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия

## ВАРИАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

*А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов\**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*Светлой памяти  
Иосифа Норайровича Сисакяна —  
замечательного ученого-физика  
и верного друга*

Представлен обзор полученных в последние годы результатов по применению непертурбативных вариационных разложений в квантовой хромодинамике. Изложение начинается с примеров, которые позволяют понять метод построения вариационных рядов в квантовой теории поля и способы управления свойствами их сходимости с помощью специальных параметров. Затем формулируется вариационная теория возмущений для квантовой хромодинамики, строится непертурбативное разложение по новому малому параметру и рассматриваются различные феноменологические приложения этого подхода.

A review of results obtained in the last years on using variational expansions in quantum chromodynamics is presented. We begin our explanation from elementary examples, which will allow to fall into the course of deal, understand, what is a variational series, and as possible to control of characteristics of their convergence. Then variational perturbation theory is formulated in quantum chromodynamics, a nonperturbative expansion is constructed by using a new small parameter and various phenomenological applications are discussed.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическим фундаментом квантовой теории поля, позволяющим производить расчеты, используя лишь параметры лагранжиана, является теория возмущений. Вместе с процедурой перенормировки ее применение позволило достичь значительных результатов в квантовой электродинамике, в теории электрослабых взаимодействий и при описании пертурбативной области квантовой хромодинамики. Однако специфика квантовой теории поля такова, что рассчитывать на достаточно полное изучение структуры квантово-полевой модели, ограничиваясь лишь рамками теории возмущений, не следует даже в

---

\*Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия

теориях с малым значением константы связи. В особенности это относится к современной теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике (КХД). В этом случае непертурбативные эффекты играют решающую роль как в плане ответа на принципиальные вопросы, например, объяснение конфайнмента кварков и глюонов, так и для описания феноменологии адронов и соотнесения теоретических результатов с опытными данными.

Разработке непертурбативных методов в квантовой теории поля уделяется большое внимание. Спектр таких попыток весьма широк, и в литературе можно встретить самые разнообразные подходы к проблеме выхода за рамки теории возмущений. Цель данной работы состоит в обзоре полученных в последние годы результатов, связанных с применением так называемых вариационных или “плавающих” разложений в квантовой хромодинамике. Основная идея, приводящая к возникновению вариационных рядов, достаточно проста. Для того чтобы ее пояснить, напомним вначале, каким образом строится пертурбативное разложение.

В обычном варианте теории возмущений используется разбиение полного действия, соответствующее некоторой физической системе, на свободную часть и часть, которая описывает взаимодействие. Последняя рассматривается как возмущение, а входящая в нее константа связи — как малый параметр разложения. Такое рассмотрение, как правило, приводит к асимптотическим рядам, которые, хотя и не относятся к числу “хороших” рядов, тем не менее широко используются в физике и позволяют извлекать полезную информацию об изучаемой системе в области слабой связи. С ростом константы взаимодействия разложение в ряд теории возмущений становится все менее и менее применимым. Причина этого понятна и состоит в том, что теперь рассмотрение действия взаимодействия в качестве возмущения свободной системы не является более адекватным, так как рассматриваемая физическая система далека по своим свойствам от свободной. В этом случае следует провести иное разбиение полного действия так, чтобы новое “действие взаимодействия” допускало трактовку как возмущения не только при малых значениях константы связи, но и для более широкого ее диапазона. При этом, конечно, следует также позаботиться о том, чтобы такая процедура, подобно обычной теории возмущений, обеспечивала возможность вычисления поправок.

Каким же образом можно отыскать такой функционал, который с большим основанием, чем обычное действие взаимодействия, можно было бы использовать как возмущение? Одна из возможностей, которая реализуется в методе вариационной теории возмущений (ВТВ), состоит в “зондировании системы” с помощью функционала вариационного типа, при изучении ее отклика на изменение параметров “зонда”. При этом оказывается, что удобно использовать формализм функционального интегрирования, который в теории поля широко применяется как при рассмотрении общих вопро-

сов [1, 2], так и для нахождения различных аппроксимаций [3–6]. Несмотря на фигурирующее в названии подхода слово “возмущение”, метод ВТВ является непертурбативным, так как, по существу, не опирается на использование константы связи в качестве малого параметра разложения. В методе ВТВ для аппроксимации рассматриваемой величины удается построить отличные от обычной теории возмущений разложения, позволяющие изучать квантовые системы не только в области слабой связи, но и далеко за ее пределами (см. посвященные этому вопросу обзоры [7, 8], в которых в основном рассматривались квантово-механические системы и скалярные модели теории поля). Возможность построения отличных от пертурбативных разложений с иными свойствами сходимостей была отмечена в работе [9]. Случай квантово-механического ангармонического осциллятора рассматривался в работах [10, 11]. Использовать метод функционального интегрирования для описания квантовых систем на основе разложений подобного типа было предложено в [12–14]. Метод вариационного зондирования системы, который основывается на формализме функционального интеграла и допускает естественное обобщение на случай квантовой теории поля, был предложен в [15]. Разработка этого подхода, выполненная в работах [16, 17], а также в последующем в [18–21] и в [22–26], продемонстрировала эффективность метода ВТВ для изучения квантово-полевых моделей.

В настоящее время существуют различные варианты вариационных методов (см., например, ранние работы [27, 28], а также [29–32]), позволяющие выполнять непертурбативные вычисления. К их числу можно отнести и метод гауссовского эффективного потенциала [33–36], который позволяет оценить эффективный потенциал – важную энергетическую характеристику теоретико-полевой модели [37] — вне рамок обычно используемого петлевого разложения. Применение метода ВТВ позволяет получить гауссовский эффективный потенциал уже в первом нетривиальном порядке вариационного разложения для различных способов выбора пробного функционала [21]. Возможность выполнения непертурбативного расчета эффективного потенциала позволяет изучать такие вопросы, как, например, наличие фазовых переходов в теории [38–40], проблема перенормировки вне рамок теории возмущений и тривиальность  $\varphi^4$ -модели в четырехмерии [41–44].

Одна из серьезных проблем многих вариационных методов связана с трудностью оценки точности и устойчивости результатов, получаемых с помощью вариационной процедуры. Причина состоит в том, что далеко не всегда формулировка метода содержит в себе алгоритм вычисления необходимых для этого поправок. В результате затруднен ответ на вопрос, в какой мере так называемый “основной вклад”, найденный вариационным путем, адекватен изучаемому объекту, в особенности, если такой объект не связан непосредственно с некой энергетической характеристикой, и какова область применимости полученных выражений. В этом отношении в методе ВТВ с самого

начала определен алгоритм вычисления поправок, что позволяет исследовать влияние поправок к основному вкладу. Более того, ряд ВТВ не является жесткой, раз и навсегда заданной конструкцией. Специальные параметры, характеризующие вариационный “зонд”, позволяют управлять свойствами сходимости ВТВ-разложения. Для рядов такого типа, на свойства сходимости которых можно влиять с помощью варьирования специальных параметров, используется термин “вариационный или плавающий ряд”. В отличие от характерных для теории возмущений асимптотических разложений ВТВ-подход позволяет в ряде случаев построить аппроксимирующие ряды, имеющие конечную область сходимости [16, 17, 19, 22]. Существует также такая интересная возможность, как построение рядов Лейбница, которые позволяют производить двусторонние оценки рассматриваемой величины, используя уже первые члены ряда. При этом управляющие параметры позволяют такие оценки оптимизировать [7].

Модернизации ординарного пертурбативного разложения, когда в качестве возмущения принимается исходный потенциал взаимодействия, уделялось большое внимание. Так, например, при рассмотрении систем с сингулярными потенциалами обычная теория возмущений оказывается плохо приспособленной для адекватного ее описания [45]. Это связано с тем, что асимптотика свободных волновых функций существенным образом отличается от асимптотики точных решений. Ситуация может быть улучшена, если точно учесть сингулярную часть потенциала и строить пертурбативное разложение по его регулярной части [45]. В числе подходов, позволяющих выходить за пертурбативные рамки, отметим также метод линейного  $\delta$ -разложения [35, 46, 47], метод самоподобных аппроксимаций [48] и непертурбативный подход, рассматриваемый в работах [49]. Важной чертой обсуждаемого здесь метода ВТВ является тот факт, что он естественным образом сочетает процедуру оптимизации и регулярный способ вычисления поправок.

В данном обзоре рассматривается метод вариационных разложений и его применение к задачам КХД. В этом случае, основываясь на идее метода ВТВ, удастся сконструировать такой параметр разложения, который оказывается меньше единицы при любых значениях исходной константы связи [50]. Вначале поясним способ построения такого малого параметра разложения, используя простую модель, которая позволит нам наиболее доступно изложить идею метода. Покажем, что новое разложение не только позволяет существенно “продлить жизнь” теории возмущений и продвинуться при сохранении хорошего уровня аппроксимации в сторону больших значений константы связи, но и дает возможность анализировать предел сильной связи. В случае КХД этот метод позволяет с единых позиций рассматривать как традиционно пертурбативную область, так и выходить далеко за ее пределы [51, 52].

При ренормгрупповом ресуммировании пертурбативного разложения возникает инвариантный заряд, который обладает нефизическими особенно-

стями типа призрачного полюса в однопетлевом приближении. Последующие поправки этой трудности не снимают, а приводят лишь к дополнительным нефизическим разрезам в комплексной  $Q^2$ -плоскости. Возможное решение этой проблемы в рамках пертурбативного подхода, состоящее в дополнительном наложении вытекающего из представления Челлена — Лемана требования аналитичности, было предложено в [53], а в контексте метода ренормализационной группы — в работе [54]. Для КХД аналитический подход развивался в работах [55, 56], в которых были найдены новые интересные особенности такого рассмотрения.

Важной чертой подхода ВТВ является тот факт, что в его рамках удастся обеспечить правильные аналитические свойства бегущего параметра разложения, которые отражают общие принципы локальной квантовой теории поля [1, 57, 58]. Сохранение таких аналитических свойств позволяет, в частности, определить самосогласованным образом бегущий параметр во времениподобной области [59] и дать непротиворечивое описание инклюзивного распада  $\tau$ -лептона [60] (см. также [61–64]). Наличие инфракрасной фиксированной точки, соответствующей ВТВ-параметру разложения, хорошо согласуется с низкоэнергетическими, так называемыми “смиринг” экспериментальными данными для процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны [65], которые могут быть получены при применении специальной процедуры “сглаживания” резонансов. Обобщение на массивный случай с использованием схемы перенормировки с вычитанием в некоторой евклидовой точке рассмотрено в работах [66–68]. Помимо отмеченных вопросов будет дан также обзор других приложений метода. Мы рассмотрим, в частности, возможность вычисления ренормалонного вклада и его роль при описании полуплептонного инклюзивного  $\tau$ -распада [69] (см. также [70, 71]) и применение вариационного подхода для описания спектра масс тяжелых кваркониев на основе метода правил сумм квантовой хромодинамики [72].

План изложения таков. В разд. 2 рассматриваются основные идеи, лежащие в основе метода вариационной теории возмущений. На простом примере показано, каким образом строится новый малый параметр разложения и как это разложение работает в непertурбативной области больших значений константы связи. Затем метод  $a$ -разложения формулируется для КХД, рассматривается вопрос его соответствия с представлениями, возникающими в потенциальной модели кваркового конфайнмента, и исследуется проблема стабильности получаемых результатов. Ряд феноменологических приложений метода, таких, как процесс  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны при низких энергиях, инклюзивный распад  $\tau$ -лептона и вопрос описания спектра масс тяжелых кваркониев, рассматривается в разделах 3–6. Полученные результаты обсуждаются в заключении, а в приложения вынесен поясняющий материал.

## 2. ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ: ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Для построения вариационных разложений в квантовой теории поля удобно использовать формализм континуального (функционального) интегрирования. Этот аппарат возник в результате обобщения предложенной в 1948 г. Р. Фейнманом в работе [73] формулировки квантовой механики на языке интегралов по траекториям\*. Развитие функциональной формулировки квантовой теории поля началось с работ Н.Н. Боголюбова [76], П.Т. Мэтьюса и А. Салама [77], И.М. Гельфанда и Р.А. Минлоса [78], И.М. Халатникова [79] и Е.С. Фрадкина [80]. Сегодня аппарат функционального интегрирования является одним из активно используемых методов квантовой теории поля. Он оказался эффективным не только при решении таких проблем, как квантование калибровочных теорий [81], но также и при разработке различных приближенных методов, позволяющих выполнять в том числе непertурбативный анализ моделей теории поля. Так, на его основе могут быть исследованы различные асимптотические режимы в квантово-полевых моделях, например, поведение функций Грина в инфракрасной области [3], развит метод эйконольного приближения [5, 6, 82] и гауссовского эффективного потенциала [33, 34, 36].

В формализме континуального интеграла проведение вычислений в квантовой теории поля основывается на гауссовских функциональных квадратурах вида

$$\begin{aligned} \int D\varphi \exp \left\{ - \left[ \frac{1}{2} \langle \varphi \hat{K} \varphi \rangle + \langle \varphi J \rangle \right] \right\} &= \\ &= \left[ \det \frac{\hat{K}}{-\partial^2 + m^2} \right]^{-1/2} \exp \left[ \frac{1}{2} \langle J \hat{K}^{-1} J \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Такие гауссовские интегралы используются при построении рядов теории возмущений, в квазиклассическом анализе и при оценках функциональных интегралов с помощью метода перевала. Гауссовская квадратура (2.1) может быть положена в основу формализма функционального интегрирования в квантовой теории поля. Метод вариационной теории возмущений также базируется на гауссовских функциональных квадратурах типа (2.1).

**Построение вариационных разложений.** Рассмотрим для конкретности  $\varphi^4$ -модель в евклидовом пространстве. Построим ряд ВТВ для  $2\nu$ -точечной функции Грина

$$G_{2\nu} = \int D\varphi \{ \varphi^{2\nu} \} \exp (-S[\varphi]), \quad (2.2)$$

---

\*Подробное изложение метода интегрирования по путям можно найти в [74, 75].

где

$$\{\varphi^{2\nu}\} = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{2\nu}),$$

а функционал действия имеет вид

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= S_0[\varphi] + \frac{m^2}{2} S_2[\varphi] + \lambda S_4[\varphi], \\ S_0[\varphi] &= \frac{1}{2} \int dx (\partial\varphi)^2, \quad S_p[\varphi] = \int dx \varphi^p. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Мера интегрирования в (2.2) нормирована так, что выполняется

$$\int D\varphi \exp\left(-S_0[\varphi] - \frac{m^2}{2} S_2[\varphi]\right) = 1. \quad (2.4)$$

Запишем ВТВ-разложение функции Грина (2.2), вводя вариационный функционал  $\tilde{S}[\varphi]$ , в виде

$$G_{2\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{2\nu,n}, \quad (2.5)$$

где элементы ВТВ-ряда (2.5) представимы в виде функционального интеграла

$$\begin{aligned} G_{2\nu,n} &= \frac{(-1)^n}{n!} \int D\varphi \{\varphi^{2\nu}\} \left(\lambda S_4[\varphi] - \tilde{S}[\varphi]\right)^n \times \\ &\times \exp\left(-S_0[\varphi] - \frac{m^2}{2} S_2[\varphi] - \tilde{S}[\varphi]\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Исходная функция Грина (2.2) и, следовательно, полная сумма ряда (2.5) не зависят от вида вариационного “зонда”  $\tilde{S}[\varphi]$ . Этот функционал может быть в достаточной мере произвольным, и его вид ограничен лишь требованием положительной определенности эффективного действия в показателе экспоненты в (2.6). Однако “принцип вычисляемости” существенно суживает произвол в выборе вариационной добавки  $\tilde{S}[\varphi]$ . Фактически мы должны потребовать, чтобы функциональный интеграл (2.6) был гауссовским или же сводился к нему с помощью некоторого преобразования так, чтобы в конечном итоге было возможно применение определения (2.1). Таким образом, возможны не только вариационные добавки с квадратичными по полям функционалами, но и, например, функционалы, допускающие применение гауссовской квадратуры после фурье-преобразования



$$F(A[\varphi]) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} F(p) \exp[\pm i(A[\varphi] - p)x], \quad (2.7)$$

где  $A[\varphi]$  — квадратичный по полям функционал.

Выберем ВТВ-функционал  $\tilde{S}[\varphi]$  в виде суммы гармонического, квадратичного по полям слагаемого и функционала ангармонического типа, допускающего понижение степени с помощью преобразования (2.7):

$$\tilde{S}[\varphi] = \frac{M^2}{2} S_2[\varphi] + \theta^2 S_2^2[\varphi]. \quad (2.8)$$

Вариационные параметры  $M$  и  $\theta$  в (2.8) фиксируются в последующем на основании той или иной оптимизационной процедуры. Переход к гауссовской квадратуре осуществляется путем преобразования

$$\exp(-\theta^2 S_2^2[\varphi]) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4} \pm i u \theta S_2[\varphi]\right\}. \quad (2.9)$$

В результате ВТВ-ряд для рассматриваемой функции Грина (2.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} G_{2\nu, n} &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{l! k! (n-k-l)!} \times \\ &\times \int D\varphi \{\varphi^{2\nu}\} (-\lambda S_4[\varphi])^k \theta^{2l} (M^2 - m^2)^{n-k-l} \left(\frac{S_2[\varphi]}{2}\right)^{n+l-k} \times \\ &\times \exp\left\{-\left(S_0[\varphi] + \frac{m^2}{2} S_2[\varphi] + \theta^2 S_2^2[\varphi]\right)\right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Удобно представить выражение  $(S_2[\varphi]/2)^{n+l-k}$  в виде операции дифференцирования по параметру  $M^2$ , заменив

$$\left(\frac{S_2[\varphi]}{2}\right)^{n+l-k} \longrightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial M^2}\right)^{n+l-k}. \quad (2.11)$$

Тогда в предэкспоненте в (2.10) помимо  $\{\varphi^{2\nu}\}$  останется обычный фактор  $(-\lambda S_4[\varphi])^k$ , возникающий в теории возмущений и генерирующий в диаграммах обычные вершины. Пропагатор, ввиду изменения квадратичной формы в экспоненте, сводящийся к изменению массового параметра на  $\chi^2 = M^2 + iu\theta$ , модифицируется, и выражение (2.10) принимает вид

$$G_{2\nu,n} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{l!(n-k-l)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \times \\ \times \theta^{2l} (M^2 - m^2)^{n-k-l} \left(-\frac{\partial}{\partial M^2}\right)^{n+l-k} \tilde{g}_{2\nu}^{(k)}(\chi^2), \quad (2.12)$$

где

$$\tilde{g}_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2) = \frac{1}{k!} \int D\varphi \{ \varphi^{2\nu} \} (-\lambda S_4[\varphi])^k \times \\ \times \exp\left\{ - \left[ S_0[\varphi] + \frac{\chi^2}{2} S_2[\varphi] \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Используя (2.1), выражение (2.13) перепишем в виде

$$\tilde{g}_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2) = \det \left[ \frac{-\partial^2 + \chi^2}{-\partial^2 + m^2} \right]^{-1/2} g_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2), \quad (2.14)$$

где  $g_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2)$  представляется как набор диаграмм  $k$ -го порядка с модифицированным пропагатором

$$\Delta(p, \chi^2) = \frac{1}{p^2 + \chi^2}. \quad (2.15)$$

Таким образом, для построения  $N$ -го порядка ВТВ-разложения могут быть использованы диаграммы теории возмущений до  $N$ -го порядка включительно с модифицированными пропагаторами, а в более общем случае — и с вершинами. При этом структура ряда ВТВ существенно иная, чем в случае теории возмущений. Возможность применения стандартной диаграммной техники, обусловленная способом построения ВТВ-разложений, важна с технической точки зрения, так как позволяет использовать результаты, полученные в теории возмущений.

**Непертурбативное разложение по малому параметру.** Для того чтобы продемонстрировать ключевые моменты введения малого непертурбативного параметра разложения, рассмотрим простой пример. Определим “вакуумный функционал” \* нульмерной  $\varphi^4$ -теории

$$W(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-S[x]) \quad (2.16)$$

---

\*Рассматривая этот простой пример, мы постоянно имеем в виду полевою модель и поэтому считаем удобным использовать соответствующую терминологию.

с “функционалом действия”  $S[x]$ , записанным в виде суммы свободного действия  $S_0[x]$  и действия взаимодействия  $S_I[x]$ :

$$S[x] = S_0[x] + S_I[x] = x^2 + g x^4. \quad (2.17)$$

Так же, как и ранее, будем ориентироваться на гауссовские квадратуры вида

$$\int dx P(x) \exp(-a x^2), \quad (2.18)$$

где  $P(x)$  — некоторый полином.

Стандартный способ состоит в разложении  $\exp(-S[x])$  по степеням константы связи  $g$ . При этом, естественно, используются гауссовские интегралы (2.18) и возникает обычный ряд теории возмущений

$$W(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \quad (2.19)$$

с коэффициентами

$$\omega_k = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-g x^4)^k \exp(-S_0[x]). \quad (2.20)$$

Асимптотический характер разложения (2.19) приводит к тому, что функция  $W(g)$  не может быть однозначно восстановлена по ряду (2.19), если иметь дело только лишь с рядом (2.19) и не принимать в расчет какую-либо дополнительную информацию о функции  $W(g)$ . Так, например, тот же ряд (2.19) будет иметь и функция  $W(g) + \exp(-1/g)$ , обладающая совершенно иным поведением в непертурбативной области. Конечно, в рассматриваемом простейшем примере нетрудно, используя интегральное представление (2.16), отыскать дополнительные условия, позволяющие корректно сформулировать задачу суммирования пертурбативного разложения. Напомним, однако, что в случае теории поля на таком пути встречаются серьезные трудности, когда дополнительная информация, необходимая для однозначного суммирования ряда теории возмущений, может быть найдена лишь для некоторых простых одномерных и двумерных моделей. В определенном смысле задача получения такой информации во многих отношениях эквивалентна решению проблемы сильной связи. Вместе с тем использование гауссовских интегралов (2.18) предоставляет существенно больше возможностей, чем просто получение ряда теории возмущений. Покажем, каким образом можно построить непертурбативный малый параметр разложения, опираясь при этом, как и в случае теории возмущений, на гауссовские квадратуры.

Перепишем исходное действие (2.17) в виде

$$S[x] = S'_0[x] + S'_I[x], \quad (2.21)$$

где

$$S'_0[x] = \zeta^{-1} x^2 \quad (2.22)$$

и

$$S'_I[x] = g x^4 - (\zeta^{-1} - 1) x^2. \quad (2.23)$$

Полное действие и исходная величина  $W(g)$  не зависят от введенного параметра  $\zeta$ , но при аппроксимации  $W(g)$  конечным числом слагаемых ВТВ-ряда зависимость появляется. Можно, однако, воспользоваться свободой в выборе  $\zeta$  для построения нового параметра разложения. Мы также исследуем вопрос, в какой мере новое разложение позволяет продвинуться в непертурбативную область.

С самого начала ясно, что если оптимальный параметр  $\zeta$  меньше единицы, то при представлении действия в виде (2.21) с составляющими (2.22) и (2.23), по крайней мере, имеется возможность улучшить пертурбативное разложение, так как новое действие взаимодействия (2.23) может быть рассмотрено как возмущение для более широкого набора конфигураций полей. Вместе с тем понятно, что при фиксированном вариационном параметре ВТВ-ряд по-прежнему останется асимптотическим, хотя по сравнению с теорией возмущений и позволит аппроксимировать  $W(g)$  при больших значениях константы связи. Мы уже упоминали, что здесь важную роль играет принцип индуцированной сходимости, позволяющий существенным образом расширить интервал возможных значений константы связи.

Разложение по действию взаимодействия (2.23) приводит к ряду ВТВ для исходной величины (2.16):

$$W(g) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n, \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{n!} \int dx (-S'_I[x])^N \exp(-S'_0[x]) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} \int dx (-g x^4)^k [(\zeta^{-1} - 1)x^2]^{n-k} \exp(-S'_0[x]). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Как и ранее, удобно ввести вспомогательный параметр  $\kappa$ , записав свободное действие как

$$S'_0[x] = \zeta^{-1} x^2 \Rightarrow [1 + \kappa (\zeta^{-1} - 1)] x^2 \quad (2.26)$$

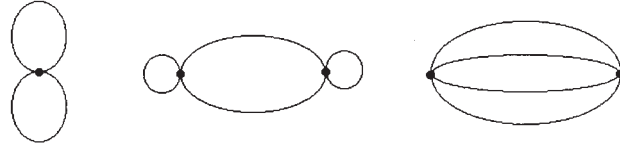


Рис. 1. Диаграммы низших порядков, иллюстрирующие соотношение (2.31) между числом внутренних линий и вершин

и положив  $\kappa = 1$  в конце всех вычислений. В этом случае любая степень выражения  $[(\zeta^{-1} - 1)x^2]$  в (2.25) может быть получена при помощи соответствующего числа дифференцирований по параметру  $\kappa$ . После чего оставшееся в предэкспоненте (2.25) выражение  $(-g x^4)^k$  приводит к стандартным диаграммам, но с модифицированным пропагатором

$$\Delta = \frac{1}{1 + \kappa(\zeta^{-1} - 1)}. \quad (2.27)$$

При  $\kappa = 1$  пропагатор  $\Delta = \zeta$ .

В результате члены ВТВ-ряда могут быть записаны в виде

$$W_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \left( -\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^{n-k} \omega_k, \quad (2.28)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{k!} \int dx (-g x^4)^k \exp(-x \Delta^{-1} x) \quad (2.29)$$

вычисляются с помощью обычной диаграммной техники с пропагатором (2.27).

Рассмотрим структуру выражения (2.28). Прежде всего отметим, что дифференцирование по параметру  $\kappa$  приводит к появлению дополнительного фактора  $(1 - \zeta)$ . В самом деле, из (2.27) следует, что

$$\frac{1}{m!} \left( -\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^m \Delta(\kappa = 1) = (1 - \zeta)^m \Delta(\kappa = 1). \quad (2.30)$$

Также заметим, что в рассматриваемом случае для любой диаграммы с числом внутренних линий  $I$  и числом вершин  $V$  выполняется соотношение \*

$$I = 2V. \quad (2.31)$$

В низших порядках соотношение (2.31) иллюстрируется рис. 1.

---

\*Мы рассматриваем вакуумный функционал, и, следовательно, все интересующие нас диаграммы являются вакуумными.

Внутренняя линия диаграммы соответствует пропагатору и, следовательно, приводит к фактору  $\zeta$ , вершина дает фактор  $g$ , а одно дифференцирование по  $\kappa$  — множитель  $(1 - \zeta)$ . Таким образом, схематически можем записать

$$W_n \sim (g \zeta^2)^n + (1 - \zeta)(g \zeta^2)^{n-1} + \dots + (1 - \zeta)^{n-1}(g \zeta^2) + (1 - \zeta)^n. \quad (2.32)$$

Из выражения (2.32) видно, что если выбрать  $(1 - \zeta)$  пропорциональным  $(g \zeta^2)$ , то выражение  $W_n$  будет содержать общий фактор  $a^n \equiv (1 - \zeta)^n$ , и  $a \equiv (1 - \zeta)$  будет служить параметром разложения в ряд вариационной теории возмущений. Итак, требование существования единого параметра разложения диктует следующее уравнение для  $\zeta$ :

$$1 - \zeta = C g \zeta^2 \quad (2.33)$$

с некоторой положительной константой  $C$ . Откуда для параметра ВТВ-разложения  $a$  получаем уравнение, связывающее его с исходной константой связи:

$$g = \frac{1}{C} \frac{a}{(1 - a)^2}. \quad (2.34)$$

Нетрудно видеть из уравнения (2.34), что для любых положительных значений исходной константы связи  $g$  новый параметр разложения  $a$  удовлетворяет условию

$$0 \leq a < 1. \quad (2.35)$$

Оставшийся произвол сосредоточен в параметре  $C$ , который может быть определен на основе той или иной процедуры оптимизации, которые описаны в [7].

Рассмотрим здесь еще один способ оптимизации, в котором предполагается, что может быть использована некоторая информация “экспериментального” характера. Именно такой способ удобен в квантовой хромодинамике, в которой можно применить “нормировку”, используя экспериментальную информацию. Предположим, что мы знаем “экспериментальное” значение функции  $W(g)$  в некоторой точке нормировки  $g_0$ :

$$W(g_0) = W_{\text{exp}}. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36), или в более общем случае минимизация модуля соответствующей разности, позволяет определить вариационный параметр и вычислить величину  $W(g)$  для всех других значений константы связи  $g$ . Оказывается, что погрешность такой аппроксимации не хуже нескольких процентов для всего интервала изменения константы связи  $g$  уже для низших порядков  $a$ -разложения. На рис.2 приведены графики относительной погрешности получаемого приближения

$$D(g) = \left| \frac{W^{(N)}(g) - W_{\text{exact}}(g)}{W_{\text{exact}}(g)} \right|$$

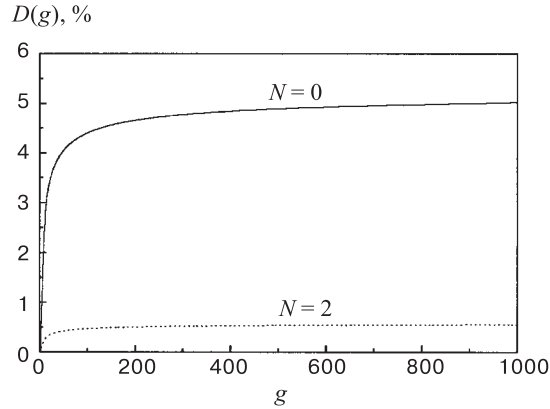


Рис. 2. Относительная погрешность аппроксимации величины (2.16) в низших порядках вариационной теории возмущений

для малых значений порядка аппроксимации  $N = 0$  и  $N = 2$ . В качестве “экспериментального” выбрано значение  $W(g)$  в точке  $g_0 = 1$ .

Подчеркнем, что предложенный метод не только позволил расширить окрестность малых значений константы связи, в которой аппроксимации дают разумные результаты, и тем самым улучшить теорию возмущений, но и продвинуться в существенно непertурбативную область режима сильной связи, когда  $g \rightarrow \infty$ . Причина этого важного обстоятельства связана с индуцированной сходимостью ряда. В этом случае вариационные параметры подстраиваются от порядка к порядку в соответствии с некоторым вариационным принципом, что, несмотря на применяемую гармоническую вариационную процедуру, обеспечивает сходимость ряда. В табл. 1 продемонстрирован факт индуцированной сходимости ряда вариационной теории возмущений для рассмотренного выше случая. Впервые такая эмпирическая сходимость была отмечена в работах [83, 84]. Последовательное рассмотрение этого вопроса и дополнительные ссылки можно найти в [85]. Для случая ангармонического осциллятора также удастся провести строгое доказательство индуцированной сходимости вариационного разложения [86, 87].

В табл. 1 приведены результаты расчетов относительной погрешности аппроксимации

$$D(g) = \left| \frac{W_{\text{theor}}(g)}{W_{\text{exp}}(g)} - 1 \right|$$

для значений константы связи  $g = 10$  и  $1000$ , полученные при использовании “экспериментальной” информации при  $g_0 = 1$ . Параметр  $C(N)$  для нечетных  $N$  находился из условия минимума  $\min |W^{(N)}(g_0) - W_{\text{exp}}|$ . Для четных  $N$  существует корень уравнения  $W^{(N)}(g_0) = W_{\text{exp}}$ .

**Таблица 1.** Иллюстрация индуцированной сходимости ряда ВТВ. Приведена относительная погрешность ВТВ-аппроксимации  $D(g)$  для различных порядков  $N$  при значениях константы связи  $g = 10$  и  $1000$

$N$	$C$	$D, \%$	
		$g = 10$	$g = 1000$
0	1,14	2,76	5,01
1	2,64	4,83	6,52
2	3,56	0,26	0,56
3	5,46	0,73	1,13
4	6,12	0,038	0,089
6	8,71	0,006	0,017
8	11,33	0,0012	0,0033

Перед тем как непосредственно перейти к хромодинاميке, отметим, что идеи вариационной теории возмущений могут применяться не только в описанном выше контексте — аппроксимации величин, представленных в виде функциональных интегралов, но и для других целей, например, для оптимизации аппроксимаций, получаемых при итерационном решении уравнений (см. приложение А).

### 3. ВАРИАЦИОННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Множество задач КХД нуждается в применении непertурбативных методов. Данный раздел посвящен применению метода ВТВ для построения вариационных разложений в квантовой хромодинاميке и проведению на их основе непertурбативных вычислений. ВТВ-разложение в КХД, приводящее к новому малому параметру, было предложено в [50]. Этот параметр оказывается всегда меньше единицы при любых значениях константы связи. При таком подходе удается не только расширить область применимости вариационного разложения по сравнению с теорией возмущений, стабилизируя ее свойства при масштабах порядка нескольких ГэВ, но и рассмотреть существенно непertурбативные эффекты. Здесь мы обсудим возможность взаимосвязи получаемых в рамках ВТВ-подхода результатов с потенциальной моделью кваркового конфайнмента [51, 52]. Далее, следуя работе [65], рассмотрим проблему описания процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции при низких энергиях. В данном обзоре мы будем использовать безмассовые, принадлежащие классу минимальных схемы перенормировки. Применению так называемой MOM-схемы перенормировки, в которой вычитание производится в некоторой евклидовой точке, посвящены работы [66–68].



**Построение вариационного ряда.** Рассмотрим построение ряда ВТВ для КХД на основе вариационной процедуры гармонического типа. Функционал действия квантовой хромодинамики запишем в виде

$$S(A, q, \varphi) = S_2(A) + S_2(q) + S_2(\varphi) + g S_3(A, q, \varphi) + g^2 S_4(A), \quad (3.1)$$

где  $S_2(A)$ ,  $S_2(q)$  и  $S_2(\varphi)$  — свободные функционалы действий глюонного, кваркового и духового полей соответственно.  $S_2(A)$  включает в себя также слагаемое, фиксирующее калибровку, в качестве которого мы будем использовать выражение, определяющее ковариантную  $\alpha_G$ -калибровку. Функционал  $S_3(A, q, \varphi)$  в (3.1) задает юкавское взаимодействие глюонов, глюонов с кварками и глюонов с духами

$$S_3(A, q, \varphi) = S_3(A) + S_3(A, q) + S_3(A, \varphi). \quad (3.2)$$

Функционалы  $S_3(A)$ ,  $S_3(A, q)$  и  $S_3(A, \varphi)$  генерируют, соответственно, трехглюонные вершины типа  $(AAA)$ ,  $(\bar{q}Aq)$  и  $(\varphi A\varphi)$ . Слагаемое  $S_4(A)$  генерирует четырехглюонные вершины  $(AAAA)$ . Преобразуем это слагаемое, вводя вспомогательные поля  $\chi_{\mu\nu}^a$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp [ig^2 S_4(A)] &= \int D\chi \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dx dy \times \right. \\ &\times \chi_{\mu\nu}^a(x) [\Delta^{-1}(x, y)]_{\mu\nu; \mu_1\nu_1}^{ab} \chi_{\mu_1\nu_1}^b(y) + \\ &\left. + i \frac{g}{\sqrt{2}} \int dx \chi_{\mu\nu}^a(x) f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \right\}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где  $\Delta(x, y)$  — глюонный пропагатор в  $\chi$ -поле

$$[\Delta(x, y)]_{\mu\nu; \mu_1\nu_1}^{ab} = \delta(x - y) \delta^{ab} \delta_{\mu\mu_1} \delta_{\nu\nu_1}. \quad (3.4)$$

После  $\chi$ -преобразования диаграммное представление функций Грина будет содержать только диаграммы юкавского типа. Помимо обычных трехточечных вершин появятся вершины вида  $A\chi A$ . Таким образом, некоторую функцию Грина КХД в форме функционального интеграла можно записать в виде

$$\begin{aligned} G(\dots) &= \int D\chi D_{QCD}(\dots) \times \\ &\times \exp \{i [S(A, \chi) + S_2(q) + S_2(\varphi) + S_2(\chi) + gS_3(A, q, \varphi)]\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где

$$S(A, \chi) = \frac{1}{2} \int dx dy A_\mu^a(x) [D^{-1}(x, y|\chi)]_{\mu\nu}^{ab} A_\nu^b(y) \quad (3.6)$$

с глюонным пропагатором  $D(x, y|\chi)$  в  $\chi$ -поле

$$[D^{-1}(x, y|\chi)]_{\mu\nu}^{ab} = [(-g_{\mu\nu}\partial^2 + \partial_\mu\partial_\nu)\delta^{ab} \times \\ + g\sqrt{2}f^{abc}\chi_{\mu\nu}^c + \text{gauge terms}] \delta(x - y), \quad (3.7)$$

где "gauge terms" означает слагаемые, связанные с фиксацией калибровки. Мера интегрирования  $D_{QCD}$  в (3.5) задает стандартные интегрирования по глюонным кварковым и духовым полям.

Под знаком  $\chi$ -усреднения все взаимодействия являются взаимодействиями юкавского типа. Четырехглюонные вершины появляются при раскрытии функционального интеграла по полю  $\chi$ . Проиллюстрируем эту ситуацию на примере полного пропагатора векторного поля в случае глюодинамики. Для произвольной функции Грина можем записать

$$G(\dots) = \langle G_{\text{Yuk}}(\dots|\chi) \rangle, \quad (3.8)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает  $\chi$ -функциональное усреднение

$$\langle \dots \rangle = \int D\chi[\dots] \exp[iS_0(\chi)], \quad (3.9)$$

а функция Грина в  $\chi$ -поле

$$G_{\text{Yuk}}(\dots|\chi) = \int DA[\dots] \exp\{i[S(A, \chi) + S_{\text{YM}}^{\text{Yuk}}(A)]\} \quad (3.10)$$

определяется только лишь диаграммами юкавского типа с глюонным пропагатором  $D(x, y|\chi)$ .

На рис. 3,а показан полный глюонный пропагатор  $\langle D_{\text{full}}(x, y|\chi) \rangle$ . Диаграммы с четырехглюонными вершинами возникают при разложении  $D(x, y|\chi)$  в ряд теории возмущений (рис. 3,б). Они добавляются к юкавским диаграммам и возникает стандартное диаграммное представление ряда теории возмущений (рис. 3,в).

Перейдем теперь к построению ВТВ-разложения и введем вспомогательные параметры  $\zeta$  и  $\xi$ , переписав функционал действия в выражении (3.5) в виде

$$S(A, q, \varphi, \chi) = S'_0(A, q, \varphi, \chi) + S'_I(A, q, \varphi, \chi), \quad (3.11)$$

где

$$S'_0(A, q, \varphi, \chi) = \zeta^{-1}[S(A, \chi) + S_2(q) + S_2(\varphi)] + \xi^{-1}S_2(\chi) \quad (3.12)$$

и

$$S'_I(A, q, \varphi, \chi) = gS_3(A, q, \varphi) - (\zeta^{-1} - 1)[S(A, \chi) + \\ + S_2(q) + S_2(\varphi)] - (\xi^{-1} - 1)S_2(\chi). \quad (3.13)$$

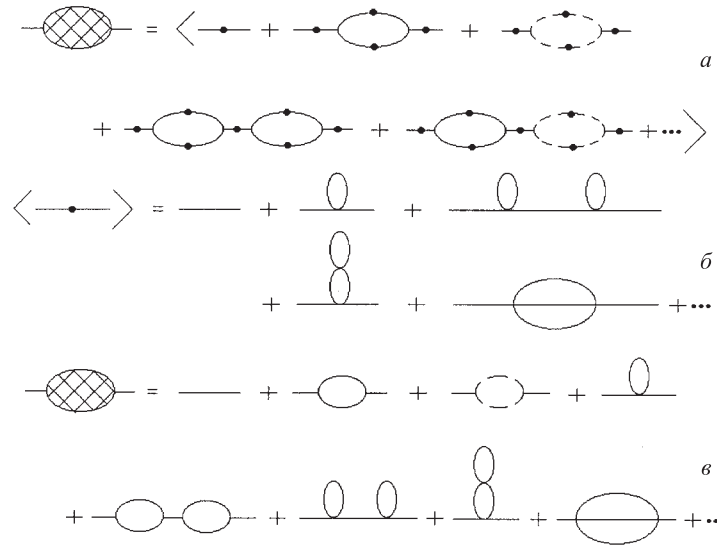


Рис. 3. Диаграммное представление полного глюонного пропагатора в теории возмущений с использованием  $\chi$ -преобразования. Сплошная линия соответствует глюонному пропагатору, пунктирная — пропагатору духового поля, а функции  $D(\chi)$  соответствует линия с точкой

Точное значение рассматриваемой величины, для которой применяется ВТВ-разложение, например некоторой функции Грина, не зависит, конечно, от вспомогательных параметров  $\zeta$  и  $\xi$ . Однако аппроксимация той же величины конечным числом слагаемых ряда ВТВ, получающегося при разложении по степеням действия  $S'_1(A, q, \varphi, \chi)$ , от этих параметров будет зависеть. Мы можем использовать свободу в выборе параметров  $\zeta$  и  $\xi$  для нашей цели — построения нового малого параметра разложения.

В техническом плане удобно переписать  $S'_0(A, q, \varphi, \chi)$ , заменив в (3.12)  $\zeta^{-1}$  на  $[1 + \kappa(\zeta^{-1} - 1)]$  и  $\xi^{-1}$  на  $[1 + \kappa(\xi^{-1} - 1)]$  и положив в конце всех вычислений  $\kappa = 1$ . В этом случае любую степень выражения  $(\zeta^{-1} - 1)[S(A, \chi) + S_2(q) + S_2(\varphi)] + (\xi^{-1} - 1)S_2(\chi)$ , появляющуюся в предэкспоненте после разложения по степеням (3.13), можно получить, продифференцировав соответствующее число раз по параметру  $\kappa$ . После этого в предэкспоненте под знаком функционального интеграла остаются лишь степени действия  $g S_3(A, q, \varphi)$ , которые генерируют юкавские диаграммы КХД с модифицированными пропагаторами, определяемые соответствующими квадратичными формами в новом “свободном” действии  $S'_0$ . Ряд ВТВ для функций Грина

запишется в виде

$$\begin{aligned}
 G(\dots) &= \sum_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \left( -\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^{n-k} \frac{i^k}{k!} \times \\
 &\times \int D\chi D_{\text{QCD}}(\dots) [g S_3(A, q, \varphi)]^k \exp [i S'_0(A, q, \varphi, \chi)] ,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

где в  $S'_0(A, q, \varphi, \chi)$  выполнена описанная выше замена. Далее удобно произвести рескейлинг полей

$$\begin{aligned}
 (A, q, \varphi) &\Rightarrow \frac{(A, q, \varphi)}{\sqrt{1 + \kappa(\zeta^{-1} - 1)}} , \\
 \chi &\Rightarrow \frac{\chi}{\sqrt{1 + \kappa(\xi^{-1} - 1)}} ,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

в результате чего пропагаторы приобретают стандартный вид, а модифицируются только вершины диаграмм. Интегрируя затем по полю  $\chi$ , для функции Грина  $\nu$  полей находим

$$\begin{aligned}
 G(\dots) &= \sum_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \left( -\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^{n-k} \frac{1}{[1 + \kappa(\zeta^{-1} - 1)]^{\nu/2}} \times \\
 &\times \frac{i^k}{k!} \int D_{\text{QCD}}(\dots) [g_3 S_3(A, q, \varphi)]^k \\
 &\times \exp \{ i [S_0(A, q, \varphi) + g_4^2 S_4(A)] \} .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь  $S_0(A, q, \varphi)$  не содержит уже члена, отвечающего полю  $\chi$ , и представляет собой обычный функционал свободного действия КХД, а  $g_3$  и  $g_4$ , фигурирующие в юкавских и четырехглюонных вершинах, определены следующим образом:

$$g_3 = \frac{g}{[1 + \kappa(\zeta^{-1} - 1)]^{3/2}} , \quad g_4 = \frac{g}{[1 + \kappa(\xi^{-1} - 1)]^{1/2}} . \tag{3.17}$$

Анализ структуры возникающего ВТВ-разложения выполнен в работах [50, 51], в которых было показано, что при специальном соотношении между вариационными параметрами и константой связи можно построить новый непertурбативный параметр разложения. Такой параметр оказывается всегда меньше единицы при любых значениях исходной константы связи. Здесь мы покажем, как возникает непertурбативный малый параметр на примере глюодинамики.

**Малый параметр разложения в квантовой хромодинамике.** Так же, как и в рассмотренном выше примере, операция дифференцирования по параметру  $\kappa$  приводит к некоторым дополнительным факторам. Рассмотрим, какие возникают множители, если использовать первоначальную формулировку до применения процедуры рескейлинга полей (3.15). В этом случае оператор дифференцирования  $(-\partial/\partial\kappa)^l$  приводит к фактору  $(1-\zeta)^l$ , когда действует на пропагатор глюона, и к множителю  $(1-\xi)^l$  при действии на пропагатор поля  $\chi$ . Определяя для удобства параметр  $\eta$ , степень которого задает порядок разложения, символически можно записать структуру ВТВ-ряда следующим образом:

$$1 + \eta(1-\zeta) + \eta^2 \left[ (1-\zeta)^2 + g^2\zeta^3 + g^2\xi \right] + \quad (3.18)$$

$$+ \eta^3 \left[ (1-\zeta)^3 + g^2\zeta^3(1-\zeta) + g^2\xi(1-\zeta) + g^2\xi(1-\xi) \right] + \dots$$

Для иллюстрации на рис. 4 изображены диаграммы для полного пропагатора глюона, соответствующие новому разложению. Перечеркнутая линия обозначает дифференцирование по параметру  $\kappa$  и содержит фактор  $(1-\zeta)$  для глюонной линии и множитель  $(1-\xi)$  в том случае, когда глюонная линия возникла через  $\chi$ -поле.

$$\text{shaded circle} = \text{line} + \eta \text{ slash} + \eta^2 \left[ \text{slash} + \text{loop} + \text{loop with slash} + \text{loop with slash and dot} \right]$$

$$+ \eta^3 \left[ \text{slash} + \text{loop} + \text{loop with slash} + \dots \right]$$

$$+ \left[ \text{loop} + \text{loop with slash} + \dots \right] + \dots$$

Рис. 4. Диаграммы, соответствующие ВТВ-разложению полного глюонного пропагатора

Из (3.18) видно, что, полагая  $\xi = \zeta^3$  и  $(1-\zeta)^2 \sim g^2\zeta^3$ , получаем, что  $n$ -й член ряда ВТВ содержит общий множитель  $(1-\zeta)^n$ , причем второе условие гарантирует выполнение неравенства  $(1-\zeta) < 1$  для всех положительных значений константы связи.

Аналогичный результат можно получить и в более общем случае, включающем фермионы. Здесь более удобной оказывается формулировка с рескейлингом полей (3.15). Отметим, что в контексте калибровочной инвариантности выбор  $\xi = \zeta^3$  служит также для согласования констант во взаимодей-

ствиях юкавского типа и четырехглюонного взаимодействия. Такой выбор обеспечивает выполнение для получаемых в рассматриваемом подходе констант перенормировки тождеств Славнова — Тейлора.

Таким образом, возникает новый параметр разложения  $a = 1 - \zeta$ , связанный с константой связи  $g$  посредством уравнения

$$\lambda = \frac{g^2}{(4\pi)^2} = \frac{1}{C} \frac{a^2}{(1-a)^3}, \quad a = 1 - \zeta, \quad (3.19)$$

где  $C$  — некоторая положительная константа. Как следует из (3.19), при любых значениях константы связи  $g$  новый параметр разложения  $a$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq a < 1$ .

Приведем результат ВТВ-разложения для функций Грина с точностью  $O(a^7)$ , которая обеспечивает возможность проведения вычислений на двухпетлевом уровне в данном подходе. Запишем выражение для функций Грина в виде

$$G(\dots) = \int D_{\text{QCD}}(\dots) V(A, q, \varphi) \exp(i S_0), \quad (3.20)$$

тогда, используя (3.16)—(3.19), находим

$$\begin{aligned} V = & 1 + a A_3 + a^2 \left[ \frac{1}{2} A_3^2 + \frac{3}{2} A_3 \right] + \\ & + a^3 \left[ \frac{1}{6} A_3^3 + \frac{3}{2} A_3^2 + A_3 A_4 + 3 A_4 + \frac{15}{8} A_3 \right] + \\ & + a^4 \left[ \frac{1}{24} A_3^4 + \frac{1}{2} A_4^2 + \frac{1}{2} A_3^2 A_4 + \frac{3}{4} A_3^3 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{9}{2} A_3 A_4 + 3 A_3^2 + 6 A_4 + \frac{35}{16} A_3 \right] + \\ & + a^5 \left[ \frac{1}{120} A_3^5 + \frac{1}{6} A_3^3 A_4 + \frac{1}{2} A_3 A_4^2 + \frac{1}{4} A_3^4 + 3 A_3^2 A_4 + \right. \\ & \quad \left. + 3 A_4^2 + \frac{33}{16} A_3^3 + \frac{99}{8} A_3 A_4 + 5 A_3^2 + 10 A_4 + \frac{315}{128} A_3 \right] + \\ & + a^6 \left[ \frac{1}{720} A_3^6 + \frac{1}{24} A_3^4 A_4 + \frac{1}{4} A_3^2 A_4^2 + \frac{1}{6} A_4^3 + \frac{1}{16} A_3^5 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{4} A_3^3 A_4 + \frac{15}{4} A_3 A_4^2 + \frac{7}{8} A_4^4 + \frac{21}{2} A_3^2 A_4 + \frac{21}{2} A_4^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{143}{32} A_3^3 + \frac{129}{16} A_3 A_4 + \frac{15}{2} A_3^3 + 15 A_4 + \frac{693}{256} A_3 \right] + O(a^7), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $A_3 = 4\pi (i S_3) / \sqrt{C}$ ,  $A_4 = (4\pi)^2 (i S_4) / C$ .

Нетрудно показать, что  $N$ -й порядок ВТВ-ряда совпадает с  $N$ -м порядком теории возмущений с точностью  $O(g^{N+1})$ :

$$G_{VPT}^{(N)} = \sum_{n=0}^N G_n = G_{PT}^{(N)} + O(g^{N+1}). \quad (3.22)$$

Поэтому при малых константах связи ВТВ-разложение приведет к тем же результатам, что и стандартная теория возмущений. Однако, как мы увидим в дальнейшем, в непертурбативной области, когда константа связи становится большой и прямое использование теории возмущений оказывается невозможным, построенное  $a$ -разложение, так же, как и в рассмотренном ранее простом примере, остается хорошо определенным и позволяет непротиворечивым образом проводить исследования вне рамок слабой связи.

**Перенормировка.** Применяя размерную регуляризацию с  $d = 4 - 2\varepsilon$ , для констант перенормировки  $Z_1$  и  $Z_3$  в ведущем порядке ВТВ-разложения находим

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \lambda \zeta^3 \left[ N \left( \frac{17}{6} - \frac{3}{2} \alpha_G \right) - \frac{4}{3} N_f \right] \frac{1}{2\varepsilon}, \\ Z_3 &= 1 + \lambda \zeta^3 \left[ N \left( \frac{13}{3} - \alpha_G \right) - \frac{4}{3} N_f \right] \frac{1}{2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Напомним, что константа связи  $\lambda \equiv \alpha_s/4\pi$  и параметр  $\zeta$  связаны друг с другом соотношением  $(1 - \zeta)^2 = C\lambda\zeta^3$ .

Из (3.23) получаем

$$\lambda_0 = \mu^{2\varepsilon} Z_1^2 Z_3^{-3} \lambda = \lambda \mu^{2\varepsilon} \left[ 1 - \lambda \zeta^3 \frac{\beta_0}{\varepsilon} \right], \quad (3.24)$$

где  $\beta_0 = 11 - 2/3 N_f$ . Откуда для  $\beta$ -функции находим выражение

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \mu^2} = \\ &= -\beta_0 \left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - 1 \right) (\lambda^2 \zeta^3) = -2\beta_0 \lambda^2 \frac{\zeta^4}{3 - \zeta}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Решая соответствующее ренормгрупповое уравнение, получаем

$$\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = \frac{C}{2\beta_0} f(\zeta), \quad (3.26)$$

где функция  $f(\zeta)$  имеет вид

$$f(\zeta) = \frac{2}{(1 - \zeta)^2} + \frac{12}{1 - \zeta} + 21 \ln \frac{\zeta}{1 - \zeta} - \frac{9}{\zeta}. \quad (3.27)$$

Нетрудно видеть, что в пертурбативной области, когда  $Q^2 \gg \Lambda^2$  ( $\zeta \sim 1$ ), из приведенных выражений легко получается хорошо известный однопетлевой результат:

$$\lambda(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}.$$

При уменьшении  $Q^2$  и, соответственно, увеличении значения константы связи ее логарифмический рост, как будет показано далее, сменяется степенным:  $\lambda(Q^2) \sim 1/Q^2$ . В потенциальной кварковой модели такое поведение в инфракрасной области согласуется с феноменологией мезонной спектроскопии.

**Связь с потенциальной кварковой моделью.** Для того чтобы фиксировать параметры полученного разложения, будем использовать непертурбативную информацию, связанную с физикой больших расстояний, вытекающую из феноменологии спектроскопии мезонов. Это позволит полностью определить закон эволюции бегущей константы связи  $\alpha_s(Q^2)$  без привлечения каких-либо высокоэнергетических экспериментальных данных, которые обычно используются для определения масштабного параметра  $\Lambda$  квантовой хромодинамики. Другими словами, мы найдем связь между универсальной напряженностью  $\sigma$  в линейной части статического кварк-антикваркового потенциала

$$V_{\text{lin}}(r) = \sigma r, \quad (3.28)$$

который может быть определен из спектроскопии мезонов (см., например, [88, 89] и обзор [90]), и поведением инвариантного заряда в пертурбативной ультрафиолетовой области.

Если принять, что  $q\bar{q}$ -потенциал в импульсном пространстве может быть записан в виде

$$V(q^2) = -\frac{16\pi}{3} \frac{\bar{\alpha}_s(q^2)}{q^2}, \quad (3.29)$$

где  $\bar{\alpha}_s(q^2)$  описывает область как больших, так и малых  $q^2$ , и имеет сингулярное инфракрасное поведение  $\bar{\alpha}_s(q^2) \sim q^{-2}$ , мы получаем линейно растущий на больших расстояниях потенциал (3.28). Сингулярное поведение инвариантного заряда в инфракрасной области соответствует асимптотическому поведению  $\beta$ -функции

$$\beta(\lambda) \simeq -\lambda \quad (3.30)$$

при больших значениях константы связи.

Описанное выше представление о конфайнменте использовано в ряде подходов. Одна из первых попыток объединить описание малых и больших расстояний, используя единое выражение для инвариантного заряда, предпринята в работе [91], где было предложено простое предписание, согласно



которому исходное асимптотически свободное выражение для бегущей константы связи модифицируется следующим образом:

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \Rightarrow \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(1 + Q^2/\Lambda^2)}. \quad (3.31)$$

Для такой модели ультрафиолетовое асимптотически свободное поведение бегущей константы связи сохраняется, а в инфракрасной области у константы связи появляется требуемая для получения линейного потенциала сингулярность. Таким образом, в [91] феноменологический кварк-антикварковый потенциал получен на основе гладкой модельной сшивки пертурбативного поведения при больших импульсах и предполагаемой инфракрасной асимптотики. Конечно, такой подход носит исключительно модельный характер. Более последовательное рассмотрение этого вопроса дано в работах [92–94], где выполнен анализ на основе приближенного решения уравнений Швингера—Дайсона с явным учетом тождеств Славнова—Тейлора. Этот вопрос изучался также и в решеточных вычислениях (см., например, обзор [95]).

Статический потенциал взаимодействия кварков, полученный в первом порядке ВТВ-разложения, был найден в работе [50], он изображен на рис. 5 сплошной линией. Для сравнения точечной линией отмечен феноменологический потенциал, взятый из [89], хорошо согласующийся с данными по мезонной спектроскопии и близкий к ВТВ-потенциалу.

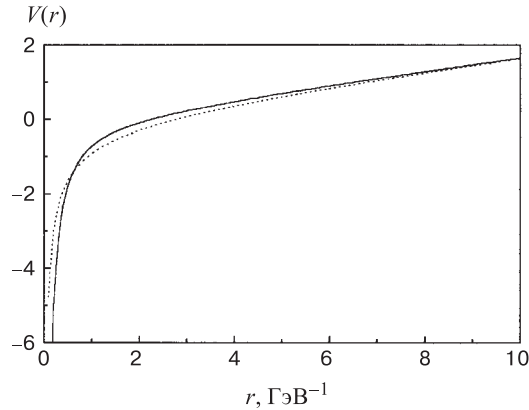


Рис. 5. Статический потенциал взаимодействия кварков. Сплошная линия соответствует ВТВ-потенциалу, точечная — феноменологическому потенциалу [89], который хорошо воспроизводит данные мезонной спектроскопии

Таким образом, в рамках ВТВ-подхода возможно установить поведение инвариантного заряда в ультрафиолетовой области, используя для этого ин-

формацию, вытекающую из физики больших расстояний. Прежде чем непосредственно перейти к этому вопросу, важно рассмотреть проблему стабильности получаемых результатов.

**Поправки и стабильность.** Произвольная функция Грина  $G(\dots)$ , отвечающая четному числу полей, с точностью  $O(a^5)$  запишется в виде

$$\begin{aligned} G(\dots) &= g_0(\dots) + \frac{a^2}{C} g_2(\dots) + 3 \frac{a^3}{C} g_2(\dots) + \\ &+ \frac{a^4}{C^2} [6 C g_2(\dots) + g_4(\dots)] + \\ &+ \frac{a^5}{C^2} [10 C g_2(\dots) + 6 g_4(\dots)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

где  $(\dots)$  обозначает набор аргументов соответствующих полей, а  $g_k(\dots)$  являются коэффициентами пертурбативного разложения с параметром  $\lambda$ , которые в форме функционального интеграла записываются как

$$\begin{aligned} g_0(\dots) &= \int DA(\dots) \exp [i S_0], \\ g_2(\dots) &= \int DA(\dots) \left[ \frac{(iS_3)^2}{2!} + \frac{(iS_4)}{1!} \right] \exp [i S_0], \\ g_4(\dots) &= \int DA(\dots) \left[ \frac{(iS_3)^4}{4!} + \frac{(iS_4)^2}{2!} + \frac{(iS_3)^2}{2!} \frac{(iS_4)}{1!} \right] \exp [i S_0]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Аналогично может быть записано ВТВ-разложение функций Грина с нечетным числом полей.

В соответствии с механизмом индуцированной сходимости [83, 84, 86, 96, 97] вариационный параметр  $C$  подстраивается в каждом порядке аппроксимации, исходя из того или иного принципа оптимизации. Здесь мы выполним вычисления на четырех уровнях, соответствующих порядкам аппроксимации  $O(a^2)$ ,  $O(a^3)$ ,  $O(a^4)$  и  $O(a^5)$ , и сравним полученные  $\beta$ -функции.

Применяя размерную регуляризацию, используя результаты работы [98] (см. также обзор [99]) и проводя вычисления в ковариантной калибровке с произвольным калибровочным параметром  $\alpha_G$ , находим константу перенормировки заряда  $Z_\lambda$  ( $\lambda_0 = \mu^{2\varepsilon} Z_\lambda \lambda$ ) [51]:

$$\begin{aligned} Z_\lambda^{-1} &= \frac{Z_3 \tilde{Z}_3^2}{\tilde{Z}_1^2} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{a^2}{3C} (11N - 2N_f) + \frac{a^3}{C} (11N - 2N_f) + \right. \\ &+ \left. \frac{a^4}{6NC^2} (34N^3 - 13N^2 N_f + 3N_f + 132CN^2 - 24CNN_f) + \right. \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$+ \frac{a^5}{3NC^2} (102N^3 - 39N^2N_f + 9N_f + 110CN^2 - 20CNN_f) \Big],$$

где  $Z_3$  и  $\tilde{Z}_3$  — константы перенормировки глюонных и духовых полей, а  $\tilde{Z}_1$  — константа перенормировки вершины дух-глюон-дух. Непосредственной проверкой убеждаемся, что, как и ожидалось, константа перенормировки заряда  $Z_\lambda$  не зависит от калибровочного параметра  $\alpha_G$ , что служит дополнительным тестом корректности вычислений.

Зная константу перенормировки заряда  $Z_\lambda$ , можно вычислить соответствующую (3.34)  $\beta$ -функцию:

$$\beta(\lambda) = -\frac{1}{C^2} \frac{a^2}{(2+a)(1-a)^2} \times \quad (3.35)$$

$$\times \left[ 2\beta_0 a^2 + 9\beta_0 a^3 + 4 \left( 6\beta_0 + \frac{\beta_1}{2C} \right) a^4 + 5 \left( 10\beta_0 + 6\frac{\beta_1}{2C} \right) a^5 \right],$$

где  $\beta_0$  и  $\beta_1 = 102 - 38N_f/3$  — пертурбативные коэффициенты  $\beta$ -функции.

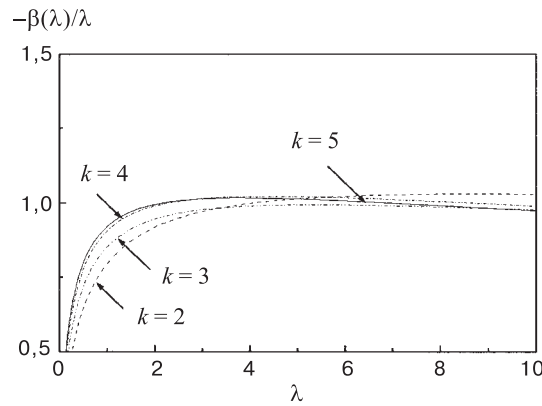


Рис. 6. Поведение функции  $-\beta^{(k)}(\lambda)/\lambda$  для  $k = 2, 3, 4, 5$

Ограничиваясь в выражении для константы перенормировки (3.34) слагаемыми порядка  $O(a^2)$ ,  $O(a^3)$ ,  $O(a^4)$  и  $O(a^5)$ , получим соответствующие этим приближениям четыре  $\beta$ -функции:  $\beta^{(2)}$ ,  $\beta^{(3)}$ ,  $\beta^{(4)}$  и  $\beta^{(5)}$ . На рис. 6 показаны функции  $-\beta^{(k)}(\lambda)/\lambda$  для параметров  $C_2 = 0,977$ ,  $C_3 = 4,1$ ,  $C_4 = 10,4$  и  $C_5 = 21,5$ . Выход отношения  $-\beta^{(k)}(\lambda)/\lambda$  на единицу при больших значениях константы связи соответствует инфракрасной сингулярности бегущего заряда  $\bar{\alpha}_s(Q^2) \sim Q^{-2}$  при малых  $Q^2$ . Возрастание величины вариационного параметра  $C_k$  с ростом порядка аппроксимации вызвано теми же причинами,

что и в рассмотренном выше простом примере механизма индуцированной сходимости.

Для полного определения всех параметров из физики больших расстояний рассмотрим параметр  $\sigma$  в линейной части кваркового потенциала  $V_{\text{lin}}(r) = \sigma r$ . Его феноменологическое значение составляет  $\sigma \simeq 0,15 \div 0,20 \text{ ГэВ}^2$  [88–91]. Инвариантный заряд  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$  в инфракрасной области ведет себя как

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) \simeq \frac{3}{2} \frac{\sigma}{Q^2}. \quad (3.36)$$

Для нормировки при некотором  $Q_0$  будем использовать значение из работы [89]  $3/2\sigma = 0,2652 \text{ ГэВ}^2$  ( $\sigma = 0,1768 \text{ ГэВ}^2$ ).

Ренормгрупповая эволюция параметра разложения  $a$  описывается уравнением

$$Q = Q_0 \exp [\phi(a, N_f) - \phi(a_0, N_f^0)], \quad (3.37)$$

где

$$\phi(a, N_f) = \frac{1}{2} \int^{\lambda} \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)}, \quad (3.38)$$

и  $\beta$ -функция определена согласно (3.35).

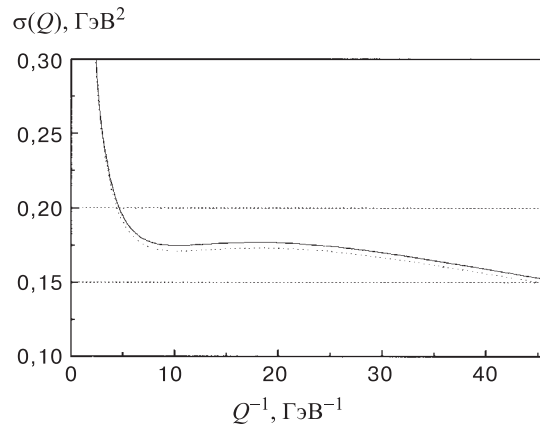


Рис. 7. Параметр  $\sigma(Q^2)$  как функция обратного импульса  $Q^{-1}$  для точек нормировки:  $Q_0 = 50 \text{ МэВ}$  (сплошная кривая) и  $Q_0 = 150 \text{ МэВ}$  (пунктирная кривая). Горизонтальными прямыми обозначен интервал значений  $\sigma$ , которые совместимы с имеющимися экспериментальными данными

Поведение  $\sigma(Q^2) = 2/3Q^2\alpha_s(Q^2)$  как функции обратного импульса  $Q^{-1}$  (чтобы иметь некоторую аналогию с расстоянием) показано на рис. 7 для

двух точек нормировки:  $Q_0 = 50$  МэВ (сплошная кривая) и  $Q_0 = 150$  МэВ (пунктирная кривая). Результат в области малых импульсов укладывается в интервал феноменологических оценок  $\sigma \simeq 0,15 \div 0,20$  ГэВ<sup>2</sup> (на рис. 7 соответствующий коридор обозначен двумя горизонтальными прямыми), и, как можно было бы ожидать, слабо зависит от величины  $Q_0$  и соответствующего числа активных кварков  $N_f^0$ . Мы провели расчет для  $N_f^0 = 3$ , что выглядит разумным для наших целей, так как значительная доля информации о нерелятивистском потенциале взаимодействия кварков складывается на основе данных о семействе чармония. Отметим, тем не менее, что сильной чувствительности к числу активных кварков  $N_f^0$  здесь нет, и, например, для  $N_f^0 = 2$  возникают близкие результаты.

Таким образом, все параметры найдены на основе информации непертурбативного характера, вытекающей из спектроскопии мезонов. Закон эволюции параметра разложения  $a = a(Q^2)$ , определяемый уравнением (3.37), позволяет найти инвариантный заряд в ультрафиолетовой области. Так, при найденных выше параметрах на масштабе массы  $Z$ -бозона получаем  $\bar{\alpha}_s(M_Z = 91,2 \text{ ГэВ}) = 0,126$ . Учитывая, что все параметры были фиксированы на основе существенно непертурбативной информации, соответствующей инфракрасной области, найденное значение константы связи в ультрафиолетовой области выглядит вполне разумным. Таким образом, диапазон применимости ВТВ-метода значительно шире, чем в случае обычной теории возмущений. В рамках этого подхода удастся с единых позиций рассматривать не только ультрафиолетовую область малых значений константы связи, но и существенно продвинуться в инфракрасную область.

#### 4. $e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИЯ В АДРОНЫ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

При аппроксимации некоторой физической величины, например, известного  $R(s)$ -отношения для процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны, некоторой частичной суммой ряда теории возмущений, с силу обрыва этого ряда возникает важная проблема зависимости результатов от применяемой ренормализационной схемы. В особенности такая зависимость проявляется вне асимптотической ультрафиолетовой области. С одной стороны, возникающая зависимость физической величины от ренормализационной схемы может рассматриваться как досадный факт. С другой стороны, появляется дополнительная степень свободы, которую можно использовать для построения оптимального разложения, обладающего по сравнению с обычной теорией возмущений более широкой областью применимости. В частности, как показано в работах [100–102], на этом пути удастся расширить область, характерную для обычной теории возмущений, и продвинуться в область низких энергий. По-

лученный в этих работах результат основан на оптимизации схемной зависимости, возникающей в третьем порядке пертурбативной аппроксимации. При этом использовались уточненные пертурбативные коэффициенты [103, 104], а для оптимизации схемной зависимости в работах [101, 102] был выбран принцип минимальной чувствительности [96, 97]. В работе [100] для анализа рассматриваемого здесь процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции применялся также иной способ оптимизации схемной зависимости, использующий метод эффективных зарядов [105]. Отметим здесь, что зависимость от схемы перенормировок может быть существенным образом уменьшена в аналитической теории возмущений [106].

Применим полученные результаты для описания  $R(s)$ -отношения в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны. Для удобства сравнения, так же, как и в [102], будем рассматривать интервал  $Q = \sqrt{s}$  от 0 до 6 ГэВ. Использование пертурбативных выражений для непосредственного описания экспериментально наблюдаемой величины  $R(s)$  при малых  $s$  не представляется возможным ввиду наличия пороговых сингулярностей в пертурбативном разложении вида  $(\alpha_s/v)^n$ . В работе [107] был предложен так называемый “смиринг”-метод, позволяющий провести сравнение с опытом. Согласно [107] проблема резонансов и пороговых сингулярностей решается следующим образом. Вместо исходной величины  $R(s)$ , которая определяется через скачок корреляционной функции  $\Pi(s)$  на разрезе

$$R(s) = \frac{1}{2i} [\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)], \quad (4.1)$$

предлагается ввести “смиринг”-величину

$$R_\Delta(s) = \frac{1}{2i} [\Pi(s + i\Delta) - \Pi(s - i\Delta)] \quad (4.2)$$

с некоторым конечным значением  $\Delta$ . Для значений  $s$  вблизи порога величина (4.1) оказывается очень чувствительной к пороговым сингулярностям, при подходе к которым пертурбативное разложение перестает работать. Отступив в комплексной плоскости  $q^2$  от вещественной оси на конечную величину  $\Delta$ , как в выражении (4.2), можно рассчитывать на то, что при использовании корректной пертурбативной аппроксимации можно описать  $R_\Delta(s)$  (4.2). Оценка параметра  $\Delta$ , которую следует использовать для эффективного сравнения с экспериментальными данными, дана в работе [107] и имеет порядок  $1 \div 3$  ГэВ<sup>2</sup>.

“Экспериментальная” кривая, соответствующая (4.2), возникает, если воспользоваться дисперсионным соотношением

$$\Pi(q^2) = \text{const} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{s - q^2 - i\epsilon}, \quad (4.3)$$

переписать выражение (4.2) в виде

$$R_{\Delta}(s) = \frac{\Delta}{\pi} \int_0^{\infty} ds' \frac{R(s')}{(s-s')^2 + \Delta^2}. \quad (4.4)$$

Подставив сюда соответствующий фит экспериментальных данных по  $e^+e^-$ -аннигиляции  $R_{\text{exp}}(s)$ , можно найти экспериментальную кривую, отвечающую функции (4.2). Для некоторых значений параметра  $\Delta$ , оценки которого даны в [107], такие кривые были найдены в [101, 102]. Будем использовать их для сравнения с полученными на основе рассматриваемого подхода результатами.

При рассмотрении “смиринг”-величин трудности с малыми  $v$  не возникает. Тем не менее прямое применение теории возмущений для описания  $R_{\Delta}(s)$  все еще невозможно. Действительно,  $R$ -отношение в выражении (4.4), параметризованное с помощью инвариантного заряда с нефизическими сингулярностями, приводит к расходимости интеграла в (4.4). Таким образом, несмотря на то, что использование “смиринг”-величины (4.2) позволяет обойти затруднение с пороговыми сингулярностями, возникает проблема, связанная с поведением бегущей константы в инфракрасной области. Применение метода ВТВ дает возможность избежать этой трудности.

Ограничимся первым нетривиальным порядком, определяемым ВТВ-разложением (3.21). В этом случае получаем

$$R(s) = 3 \sum_f Q_f^2 T(v_f) \theta(s - 4m_f^2) \left[ 1 + g(v_f) \frac{\alpha_{\text{eff}}(Q)}{\pi} \right]. \quad (4.5)$$

Функции  $v_f(s)$ ,  $T(v)$  и  $g(v)$  определены следующим образом\*:

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{1 - 4m_f^2/s}, \\ T(v) &= \frac{v(3-v^2)}{2}, \\ g(v) &= \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{\pi}{2v} - \frac{3+v}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4\pi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для  $\alpha_{\text{eff}}(Q)/\pi$  рассмотрим два выражения, которые отвечают различным уровням аппроксимации, соответственно,  $O(a^2)$  и  $O(a^3)$ :

$$\frac{\alpha_{\text{eff}}^{(2)}}{\pi} = \frac{4}{C_2} a^2, \quad \frac{\alpha_{\text{eff}}^{(3)}}{\pi} = \frac{4}{C_3} a^2 (1 + 3a). \quad (4.7)$$

---

\*Функция  $g(v)$  в (4.6) отвечает интерполяционной формуле Швингера [108]. Точные выражения для двухпетлевых массивных корреляторов, которые будут использоваться в дальнейшем при рассмотрении правил сумм квантовой хромодинамики, приведены в приложении В.

Значения параметров  $C_2$  и  $C_3$  не связаны с фитированием  $e^+e^-$ -экспериментальных данных, а были найдены нами ранее из условия, что ренормгрупповая  $\beta$ -функция ведет себя при достаточно больших значениях константы связи следующим образом:  $\beta(\lambda) \simeq -\lambda$ . Такое поведение соответствует сингулярному инфракрасному поведению инвариантного заряда  $\alpha_s(Q^2) \sim Q^{-2}$  и обеспечивает линейный рост статического кварк-антикваркового потенциала на больших расстояниях. Таким образом, мы фиксируем параметры  $C_i$ , фигурирующие в (4.7), основываясь на данных по адронной спектроскопии. Это, как было отмечено выше, дает:  $C_2 = 0,977$  и  $C_3 = 4,1$ . Для масс кварков, так же как и в [102], возьмем следующие значения:  $m_u = 5,6$  МэВ,  $m_d = 9,9$  МэВ,  $m_s = 199$  МэВ,  $m_c = 1,350$  ГэВ и  $m_b = 4,75$  ГэВ.

Бегущий параметр разложения как функция импульса  $Q$  определяется из уравнения

$$Q = Q_0 \exp \left\{ \frac{C_i}{4\beta_0} [f_i(a) - f_i(a_0)] \right\}, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(a) &= \frac{2}{a^2} + \frac{12}{a} + 21 \ln \frac{1-a}{a} - \frac{9}{1-a}, \\ f_3(a) &= \frac{2}{a^2} - \frac{6}{a} - 48 \ln a - \frac{18}{11} \frac{1}{1-a} + \frac{624}{121} \ln(1-a) + \\ &+ \frac{5184}{121} \ln\left(1 + \frac{9}{2}a\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для определения всех параметров воспользуемся нормировкой  $\alpha_{\text{eff}}(Q_0) = \alpha_0$ , а в качестве  $Q_0$  выберем значение массы  $Z$ -бозона  $Q_0 = M_Z = 91,2$  ГэВ и  $\alpha_0 = 0,12$ , после чего свободных параметров не остается. Отметим, что при этом какая-либо информация, вытекающая из низкоэнергетических данных по  $e^+e^-$ -аннигиляции, не используется.

На рис. 8 приведены графики функций  $\alpha_{\text{eff}}^{(2)}/\pi$  и  $\alpha_{\text{eff}}^{(3)}/\pi$ , определенных согласно (4.7), которые практически совпадают друг с другом. Для сравнения мы также приводим соответствующее пертурбативному случаю поведение однопетлевой константы связи. Близость ВТВ-кривых, представленных на рис. 8, свидетельствует об устойчивости результатов, получаемых в различных порядках ВТВ-аппроксимации. Как

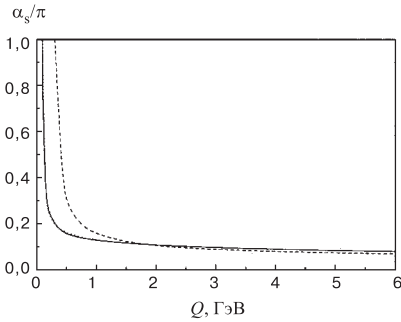


Рис. 8. Поведение функций  $\alpha_{\text{eff}}^{(2)}/\pi$  (точечная кривая),  $\alpha_{\text{eff}}^{(3)}/\pi$  (сплошная) в ВТВ-подходе и соответствующей однопетлевой пертурбативной константы связи  $\alpha_s$  (пунктир)



мы видели выше, аналогичная картина в широкой области изменения константы связи наблюдается и для  $\beta$ -функций, отвечающих различным уровням приближений. Такая же устойчивость по отношению к учету следующих петлевых поправок имеет место и для “смиринг”-величины (4.4).

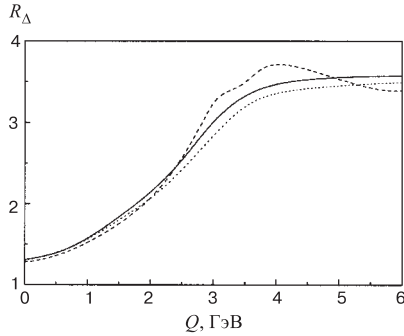


Рис. 9. График “смиринг”-величины  $R_\Delta$  для  $\Delta = 3 \text{ ГэВ}^2$ . Сплошная кривая соответствует ВТВ-результату. Экспериментальная “смиринг”-кривая, обозначенная длинным пунктиром, взята из [102]. Результат оптимизации третьего порядка пертурбативного разложения, выполненный в [102] на основе принципа минимальной чувствительности, обозначен пунктирной линией

Поведение найденной функции  $R_\Delta$  для  $\Delta = 3 \text{ ГэВ}^2$  демонстрируется на рис. 9 (две кривые, отвечающие функциям (4.7), практически совпадают, и мы приводим лишь график, соответствующий  $\alpha_{\text{eff}}^{(3)}$ ). Экспериментальная “смиринг”-кривая взята из [102]. Мы привели также теоретический расчет из этой работы, полученный при оптимизации третьего порядка пертурбативного разложения на основе принципа минимальной чувствительности. Таким образом, результат, найденный уже в первом порядке ВТВ, достаточно хорошо воспроизводит экспериментальную кривую и близок к результату, полученному на основе оптимизации третьего порядка обычной теории возмущений. Интересно, что аналогичная ситуация имеет место и в аналитической теории возмущений [106], в которой, так же, как в ВТВ-подходе, существует инфракрасно-стабильная точка.

В последнее время широко обсуждается вопрос о “заморозке” константы связи КХД при малых энергиях. В необходимости такой “заморозки” нуждаются многие основанные на КХД модельные подходы (см. подробное обсуждение этого вопроса в [102] и цитируемую там литературу). К сожалению, прямой экспериментальной информации о поведении КХД константы связи в глубокоинфракрасной области в настоящее время не имеется. Существуют лишь некоторые интегральные характеристики такого поведения. Одна из них, соответствующая “смиринг”-величине  $R_\Delta$ , была рассмотрена выше. В качестве другой удобной для сравнения экспериментальной величины будем использовать здесь не зависящий от фитирования данных интеграл [109]:

$$I = \int_0^{1 \text{ ГэВ}} dQ \frac{\alpha_s^{\text{eff}}(Q)}{\pi} \simeq 0,2 \text{ ГэВ}, \quad (4.10)$$

величину которого ухитряются извлекать из физики струй. В нашем случае

для  $\alpha_{\text{eff}}^{(2)}$  значение этого интеграла равно 0,239 ГэВ, а для  $\alpha_{\text{eff}}^{(3)}$  интеграл равен 0,237 ГэВ.

Выше мы рассмотрели метод построения вариационных рядов в квантовой хромодинамике, используя ренормализационные предписания из класса MS-схем. Обобщению на случай MOM-схемы перенормировок посвящены работы [64, 66–68]. При этом оказалось, что для функции  $R_{\Delta}(s)$  получается результат, который весьма близок к рассмотренному выше  $\overline{\text{MS}}$ -случаю. Этот факт свидетельствует о схемной стабильности ВТВ-подхода.

## 5. ИНКЛЮЗИВНЫЙ РАСПАД $\tau$ -ЛЕПТОНА

В соответствии с методом ренормализационной группы [1] инвариантный заряд определяется в пространственно-подобной евклидовой области. Для параметризации в рамках квантовой хромодинамики процессов, для которых характерными являются времениподобные импульсы, как, скажем, в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции, требуется специальная процедура “аналитического продолжения”. В рамках пертурбативного подхода этот вопрос рассматривался в работах [103, 110–113]. Как станет понятно из дальнейшего, для самосогласованного выполнения процедуры “аналитического продолжения” принципиально важными оказываются аналитические свойства бегущей константы связи, согласующиеся с представлением Челлена — Лемана, которые, очевидно, разрушаются пертурбативным приближением, приводящим к нефизическим особенностям типа призрачного полюса. В этом разделе рассмотрим вопрос определения инвариантного заряда во времениподобной области, следуя работе [59], а также обсудим применение метода для описания инклюзивного распада  $\tau$ -лептона [60, 61, 64]\*, изучим влияние ренормального вклада на извлекаемое из  $\tau$ -распада значение константы связи [69, 71].

**Инвариантный заряд во времениподобной области.** Рассмотрим  $D$ -функцию [119], связанную с коррелятором векторных токов  $\Pi(q^2)$ , определенным соотношением

$$i \int d^4x \exp(iq \cdot x) \langle 0 | T \{ J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) \} | 0 \rangle \propto (q_{\mu} q_{\nu} - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2), \quad (5.1)$$

---

\*В рамках уже упомянутой выше аналитической теории возмущений вопрос определения инвариантного заряда во времениподобной области изучался в [114, 115], а полуплептонный  $\tau$ -распад рассматривался в [116–118].

следующим образом\*:

$$D(q^2) = q^2 \left( -\frac{d}{dq^2} \right) \Pi(q^2). \quad (5.2)$$

Связь  $D$ -функции с  $R(s)$ -отношением определяется дисперсионным интегралом

$$D(q^2) = -q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s - q^2)^2} R(s). \quad (5.3)$$

Таким образом,  $D$ -функция является аналитической в комплексной  $q^2$ -плоскости, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси. Можно разрешить выражение (5.3) относительно  $R(s)$  и записать обратное соотношение в виде

$$R(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} D(z). \quad (5.4)$$

Контур интегрирования в (5.4), соединяющий точки  $s - i\epsilon$  и  $s + i\epsilon$ , изображен на рис. 10.

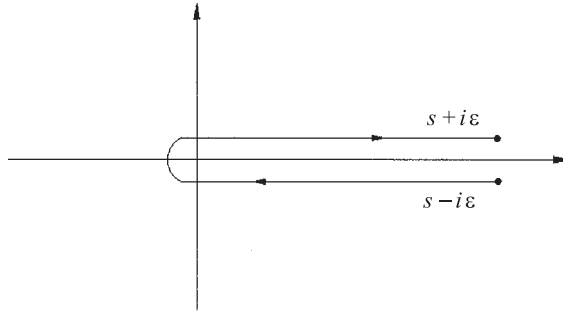


Рис. 10. Контур интегрирования в формуле обращения (5.4)

Представим  $D(q^2)$  и  $R(s)$  в виде

$$\begin{aligned} D(q^2) &\propto \sum_f Q_f^2 [1 + d_0 \lambda(q^2) + d_1 \lambda^2(q^2) + \dots] \equiv \\ &\equiv \sum_f Q_f^2 [1 + d_0 \lambda^{\text{eff}}(q^2)], \end{aligned} \quad (5.5)$$

\*Мы пользуемся общепринятым соглашением  $Q^2 = -q^2$ , так что евклидовой области соответствуют положительные  $Q^2$ .

$$\begin{aligned}
 R(s) &\propto \sum_f Q_f^2 \left[ 1 + r_0 \lambda_s(s) + r_1 \lambda_s^{(2)}(s) + \dots \right] \equiv \\
 &\equiv \sum_f Q_f^2 \left[ 1 + r_0 \lambda_s^{\text{eff}}(s) \right]. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $d_k$ ,  $r_k$  и функции  $\lambda$  зависят от числа фермионов  $f$ , а индекс  $s$  у константы связи в (5.6) означает  $s$ -канал. Таким образом, для наблюдаемой  $R(s)$ , определенной для времениподобных значений аргумента, можно написать представление, аналогичное представлению для евклидовой ( $t$ -канальной) величины (5.5)\*. Поэтому естественно принять функцию  $\lambda_s^{\text{eff}}(s)$  в выражении (5.6) за определение эффективной константы связи во времениподобной области.

Принимая во внимание, что коэффициенты  $d_0$  и  $r_0$  в (5.5) и (5.6) совпадают, получим следующую взаимосвязь между  $t$ - и  $s$ -канальными константами:

$$\lambda^{\text{eff}}(q^2) = -q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s-q^2)^2} \lambda_s^{\text{eff}}(s), \quad (5.7)$$

$$\lambda_s^{\text{eff}}(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} \lambda^{\text{eff}}(z). \quad (5.8)$$

Для нахождения  $s$ -канальной константы связи можно попытаться воспользоваться соотношением (5.8) в теории возмущений, при этом закрыв глаза на нарушение пертурбативной аппроксимацией необходимых для согласования (5.7) и (5.8) аналитических свойств. Такое рассмотрение ведет к известным  $\pi^2$ -вкладам в пертурбативные  $s$ -канальные коэффициенты. Этот вклад оказывается весьма существенным с точки зрения феноменологии. Так, на масштабе массы  $\tau$ -лептона, где  $\bar{\alpha}_s(M_\tau^2) \simeq 0,35$ , разница между  $t$ - и  $s$ -канальными константами, обусловленная  $\pi^2$ -вкладами, достигает 20%. Однако нарушение при пертурбативном рассмотрении вышеупомянутых аналитических свойств приводит к тому, что найденный таким образом  $s$ -канальный заряд при подстановке в выражение (5.7) не воспроизведет исходную функцию. Это говорит о том, что при обычном пертурбативном рассмотрении не удастся самосогласованным образом определить константу связи во времениподобной области.

---

\*Отметим, что  $\lambda_s^{(2)}$  в выражении (5.6) не совпадает с квадратом  $\lambda_s$ , и разложение в (5.6) является степенным. Аналогичная ситуация имеет место и в аналитической теории возмущений. Соответствующие аналитическому подходу нестепенные разложения изучались в [120].

В ВТВ-подходе соответствующий (5.8)  $s$ -канальный заряд находится следующим образом [59]:

$$\lambda_s^{(i)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\beta_0} \left[ \phi^{(i)}(a_+) - \phi^{(i)}(a_-) \right], \quad (5.9)$$

где  $a_{\pm}$  подчиняются уравнению

$$f(a_{\pm}) = f(a_0) + \frac{2\beta_0}{C} \left[ \ln \frac{s}{Q_0^2} \pm i\pi \right], \quad (5.10)$$

в котором в низших порядках функции  $f(a)$  определены согласно (4.9), а соответствующие им функции  $\phi(a)$  имеют вид

$$\phi^{(2)}(a) = \frac{1}{1-a} [2 - 11a - 4(1-a) \ln a + 3(1-a) \ln(1-a)], \quad (5.11)$$

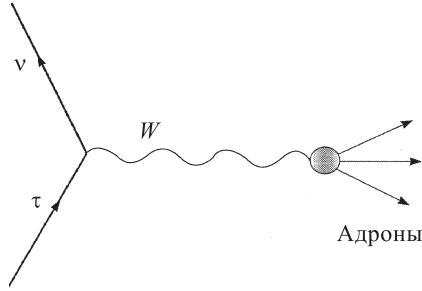
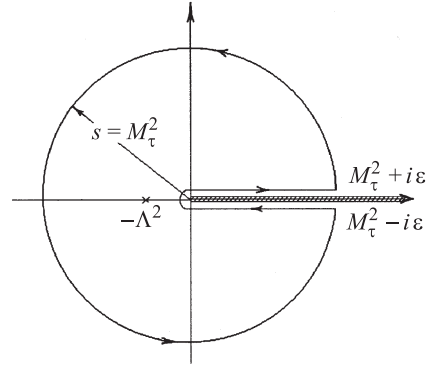
$$\phi^{(3)}(a) = -4 \ln a - \frac{72}{11} \frac{1}{1-a} + \frac{318}{121} \ln(1-a) + \frac{256}{363} \ln \left( 1 + \frac{9}{2}a \right). \quad (5.12)$$

Константы связи  $\lambda(q^2)$  и  $\lambda_s(s)$ , очевидно, имеют одинаковые, определяемые свойством асимптотической свободы ультрафиолетовые “хвосты” и одни и те же инфракрасные предельные значения. Однако при конечных значениях аргументов эти функции отличаются друг от друга. Так, на масштабе массы  $\tau$ -лептона это различие составляет порядка 7%, что заметно меньше, чем при пертурбативном рассмотрении, и поэтому важно с точки зрения феноменологии низкоэнергетических процессов. Отметим, что подобная ситуация с  $t$ - и  $s$ -константами связи имеет место и в аналитическом подходе в квантовой хромодинамике [114, 115].

**$\tau$ -распад.** Единственным известным на сегодняшний день лептоном, который допускает адронную моду распада, является  $\tau$ -лептон. Инклюзивный  $\tau$ -распад (соответствующая диаграмма изображена на рис. 11) предоставляет уникальные возможности для низкоэнергетического тестирования квантовой хромодинамики. Масса  $\tau$ -лептона  $M_{\tau} = 1777,05_{-0,26}^{+0,29}$  МэВ [121], с одной стороны, достаточно велика, чтобы были возможны адронные моды распада, а с другой — в шкале хромодинамических масштабов ее значение мало и находится в низкоэнергетической области.

Именно инклюзивный распад  $\tau$ -лептона является наиболее интересным, так как его описание в принципе возможно без существенных модельных допущений [122–125] и позволяет с довольно высокой точностью находить значение константы связи  $\bar{\alpha}_s(M_{\tau}^2)$ . Удобной величиной для исследования является экспериментально измеряемая величина  $R_{\tau}$ , которая определяется отношением адронной и лептонной ширин распада:

$$R_{\tau} = \frac{\Gamma[\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} \text{ hadrons}(\gamma)]}{\Gamma[\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} e^- \bar{\nu}_e(\gamma)]}. \quad (5.13)$$


 Рис. 11. Диаграмма инклюзивного распада  $\tau$ -лептона

 Рис. 12. Переход к контурному представлению для  $R_\tau$ 

Исходным выражением для теоретического анализа служит следующая формула:

$$R_\tau = 2 \int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) \tilde{R}(s), \quad (5.14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}(s) &= \frac{N}{2\pi i} [\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)], \\ \Pi(s) &= \sum_{q=d,s} |V_{uq}|^2 (\Pi_{uq,V}(s) + \Pi_{uq,A}(s)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь  $V_{uq}$  — элементы матрицы Кобаяши — Маскава, а нормировочный фактор  $N$  определяется таким образом, чтобы на партонном уровне выполнялось  $\tilde{R}_{\text{parton}}^{(0)} = 3$ . В рассматриваемом ниже случае безмассовых кварков векторный и аксиально-векторный адронные корреляторы в (5.15),  $\Pi_{uq,V}$  и  $\Pi_{uq,A}$ , совпадают.

При пертурбативном анализе полулептонного  $\tau$ -распада сразу же встречаемся с трудностью применения исходной формулы (5.14). Действительно, параметризация функции  $\tilde{R}(s)$ , которая в рассматриваемом здесь случае безмассовых кварков просто совпадает с отношением  $R(s)$  для процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны, с помощью пертурбативной константы связи, обладающей нефизическими особенностями, приводит к сингулярностям подынтегрального выражения в (5.14). В [122] был предложен следующий выход из этого затруднения. Интеграл (5.14) можно представить как комбинацию интегралов по берегам разреза в комплексной плоскости  $s$  (см. рис. 12). Затем по теореме Коши этот интеграл можно преобразовать к интегралу по контуру

$|s| = M_\tau^2$ . В итоге, после интегрирования по частям, приходим к контурному представлению для  $R_\tau$  через  $D$ -функцию (5.2):

$$R_\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} (1-z)^3 (1+z) D(M_\tau^2 z). \quad (5.16)$$

Запишем  $D$ -функцию в виде

$$D(M_\tau^2 z) = d_0 [1 + d_1 \lambda^{\text{eff}}(M_\tau^2 z)] \quad (5.17)$$

и выделим из  $R_\tau$  вклад сильных взаимодействий  $\Delta_\tau$ :

$$R_\tau = R_\tau^{(0)} (1 + \Delta_\tau), \quad (5.18)$$

где соответствующая партонному уровню величина  $R_\tau^{(0)}$  определяется следующим образом:

$$R_\tau^{(0)} = 3 (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2) S_{\text{EW}}. \quad (5.19)$$

Здесь  $S_{\text{EW}} = 1,0194$  — известный электрослабый фактор, и матричные элементы Кобаяши — Маскава имеют следующие значения  $|V_{ud}| = 0,9753$  и  $|V_{us}| = 0,221$  [121, 123].

Для  $\Delta_\tau$  находим выражение

$$\Delta_\tau = \frac{1}{2\pi i} d_1 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} (1-z)^3 (1+z) \lambda^{\text{eff}}(M_\tau^2 z), \quad (5.20)$$

которое после подстановки  $z = -M_\tau^2 \exp(i\theta)$  и учета того, что коэффициент  $d_1 = 4$ , переписывается в удобном для численных расчетов виде

$$\Delta_\tau = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1 + 2e^{i\theta} - 2e^{3i\theta} - e^{4i\theta}) \lambda^{\text{eff}}(M_\tau^2 e^{i\theta}). \quad (5.21)$$

Для безмассовых схем перенормировки особо следует рассмотреть вопрос о числе активных кварков. Отметим, что в восходящем к Н.Н. Боголюбову массовозависимом ренормгрупповом формализме, развитом Д.В. Ширковым в работах [128, 129], этой проблемы не возникает. Такой алгоритм гладкой “сшивки” был использован в [130] для анализа поведения инвариантного заряда в широком интервале переданных импульсов. Однако в схемах типа MS необходим дополнительный анзац, позволяющий согласованно рассматривать различное число кварков. Обычно используется “сшивка” бегущей константы связи, отвечающей различному числу фермионов, в евклидовой области при  $Q = \xi m_q$  с некоторым параметром сшивки  $1 \leq \xi \leq 2$  [126] (см. также [127]). Очевидно, что такая процедура приводит к разрыву производной и нарушает упомянутые выше аналитические свойства инвариантного

заряда. В ВТВ-подходе этой трудности можно избежать, воспользовавшись возможностью самосогласованного определения эффективного заряда во времениподобной области, в которой число активных кварков непосредственно связано с энергией рождения кварковой пары. При этом переход между областями с различным числом фермионов определяется следующей системой уравнений\*:

$$\frac{1}{\beta_0(f-1)} \operatorname{Im} \phi(a_+^{(f-1)}) = \frac{1}{\beta_0(f)} \operatorname{Im} \phi(a_+^{(f)}), \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{C^{(f-1)}} \operatorname{Im} \left[ \left( a_+^{(f-1)} \right)^2 \left( 1 + 3a_+^{(f-1)} \right) \right] = \frac{1}{C^{(f)}} \operatorname{Im} \left[ \left( a_+^{(f)} \right)^2 \left( 1 + 3a_+^{(f)} \right) \right],$$

которая позволяет установить соотношение между параметрами  $C^{(f)}$  и  $a_0^{(f)}$ , отвечающими областям с различным числом активных кварков. В результате такой процедуры мы приходим к следующей привлекательной с физической точки зрения картине. Бегущий параметр разложения в евклидовой области, восстановленный с помощью дисперсионного интеграла (5.7), как и в массовозависимых схемах, не соответствует какому-то определенному числу фермионов, он будет “знать” обо всех порогах в физической области.

Обработка экспериментальных данных по инклюзивному распаду  $\tau$ -лептона, выполненная [60] в порядке  $O(a^3)$ , привела к следующим значениям  $s$ - и  $t$ -канальных констант связи:  $\alpha_s(M_\tau^2) = 0,37$  и  $\alpha(M_\tau^2) = 0,40$ . Таким образом, значение  $t$ -канальной константы связи несколько больше величины инвариантного заряда, определенного во времениподобной области. Отметим, что аналогичный факт имеет место и при проведенном в [116, 117] анализе, основанном на аналитической теории возмущений. Выполненный в [61] расчет с точностью  $O(a^5)$  приводит к несколько меньшему значению извлекаемых констант связи. Заметное влияние на величину инвариантного заряда, найденного из тех же экспериментальных данных, оказывает ренормалонный вклад. Эти вопросы обсудим ниже.

**Ренормалонный вклад.** Рассмотрим теперь способ эффективного учета вклада ренормалонных цепочек [69]. В низшем порядке пертурбативная аппроксимация  $D$ -функции имеет вид  $D(t, \lambda) = 1 + 4\lambda(\mu^2)$ , где  $t = Q^2/\mu^2$ . Стандартное ренормгрупповое суммирование ведущих логарифмов приводит к подстановке  $\lambda(\mu^2) \rightarrow \bar{\lambda}(t, \lambda)$ . Однако из-за призрачного полюса у бегущей константы связи при  $Q^2 = \Lambda_{QCD}^2$  такая подстановка приводит к нарушению

---

\*Здесь мы приводим систему уравнений (5.22), определяющую процедуру шивки, в порядке  $O(a^3)$ . Функция  $\phi(a)$  в ней определяется выражением (5.12), а  $a_+$  удовлетворяет уравнению (5.10).



аналитических свойств  $D$ -функции в комплексной плоскости  $q^2 = -Q^2$ , в которой  $D$ -функция является аналитической с разрезом вдоль положительной части вещественной оси. Эта ситуация может быть исправлена, если заметить, что используемое решение ренормгруппового уравнения, эквивалентное подстановке  $\lambda(\mu^2) \rightarrow \bar{\lambda}(t, \lambda)$ , не является единственным. Общим решением является некоторая функция бегущей константы связи с асимптотическим поведением  $1 + 4\lambda$  в области малых  $\lambda$ . Чтобы сохранить аналитические свойства  $D$ -функции, запишем ее как дисперсионный интеграл от функции  $R(s) = (1/\pi) \text{Im} \Pi(s + i\epsilon)$ . Если теперь для  $R(s)$  применить метод ренормгруппы, то получим  $D(t, \lambda) = 1 + 4\lambda_{\text{eff}}(t, \lambda)$  со следующим представлением Бореля для эффективной константы связи

$$\lambda_{\text{eff}}(t, \lambda) = \int_0^\infty db \exp \left[ -\frac{b}{\bar{\lambda}(t, \lambda)} \right] B(b), \quad (5.23)$$

где  $B(b) = \Gamma(1 + b\beta_0) \Gamma(1 - b\beta_0)$ .

Таким образом, в борелевской  $b$ -плоскости имеются сингулярности в точках  $b\beta_0 = -1, -2, \dots$  и  $b\beta_0 = 1, 2, \dots$ , которые соответствуют ультрафиолетовым и инфракрасным ренормалонам. Первая инфракрасная ренормалонная сингулярность при  $b\beta_0 = 1$  отвечает степенным поправкам  $1/Q^2$ , которые, как известно, отсутствуют в операторном разложении. Хотя отсутствие сингулярности при  $b = 1/\beta_0$  не является строго доказанным фактом (см., например, дискуссию в [125]), разумно для согласования со структурой операторного разложения предположить, что инфракрасные ренормалонные сингулярности начинаются с  $b = 2/\beta_0$ . Этот факт приводит к дополнительному ограничению на выбор ренормгруппового решения. Интегрируя в исходном дисперсионном представлении  $D$ -функции по частям и выбирая затем  $R(s)$  в стандартном ренормгрупповом виде, находим следующее выражение для эффективной константы:

$$\lambda_{\text{eff}}(t, \lambda) = \int_0^\infty d\tau \omega(\tau) \frac{\bar{\lambda}(k\tau, \lambda)}{1 + \bar{\lambda}(k\tau, \lambda)\beta_0 \ln \tau}. \quad (5.24)$$

Здесь фактор  $k$  зависит от выбора ренормализационного предписания. Полученная таким образом функция

$$\omega(\tau) = \frac{2\tau}{(1 + \tau)^3} \quad (5.25)$$

описывает распределение виртуальностей в кварковой петле. Эта функция совпадает с используемой в работе [131] и найденной на основе других соображений и, как показано на рис. 13, близка к точной [132].

Функция  $B(b)$ , возникающая в борелевском преобразовании эффективной константы (5.24), имеет вид

$$B(b) = \Gamma(1 + b\beta_0) \Gamma(2 - b\beta_0). \quad (5.26)$$

Таким образом, описанная выше процедура привела к тому, что положение ультрафиолетовых сингулярностей не изменилось, в то время как инфракрасные сингулярности начинаются теперь с  $b = 2/\beta_0$ . В отличие от пертурбативного подхода, приводящего к сингулярностям подынтегрального выражения в (5.24), в методе  $a$ -разложения интеграл (5.24) оказывается хорошо определенным.

Вернемся опять к рассмотрению инклюзивного распада  $\tau$ -лептона и оценим, воспользовавшись вышеизложенным приемом, влияние ренормального вклада на величину извлекаемой из  $\tau$ -распада константы связи.

Представим, как и ранее,  $R_\tau$  в виде  $R_\tau = R_\tau^0 (1 + \Delta_\tau)$ , где вклад сильного взаимодействия может быть записан следующим образом:

$$\Delta_\tau = 12 d_1 \int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2} \left( \frac{s}{M_\tau^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{s}{M_\tau^2} \right) \tilde{\lambda}(ks). \quad (5.27)$$

В  $\overline{\text{MS}}$ -схеме  $k = \exp(-5/3)$  [133], а эффективная константа  $\tilde{\lambda}$  связана с параметром разложения:

$$\tilde{\lambda}(\sigma) = \frac{a^2}{C} + 3 \frac{a^3}{C} + \frac{a^4}{C} \left( 6 + \frac{1}{C} \frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{a^5}{C} \left( 10 + \frac{6}{C} \frac{d_2}{d_1} \right), \quad (5.28)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — коэффициенты пертурбативного разложения  $D$ -функции [134]:

$$d_1 = 4, \quad d_2 = \frac{2}{3} [365 - 22N_f - 8\zeta(3)(33 - 2N_f)]. \quad (5.29)$$

Здесь  $\zeta(n)$  —  $\zeta$ -функция Римана и  $\zeta(3) \simeq 1,202$ .

Зависимость бегущего параметра  $a$  от импульсной переменной  $\sigma$  определяется с помощью метода ренормализационной группы и может быть найдена как решение следующего уравнения:

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{C}{2\beta_0} [\tilde{f}(a) - \tilde{f}(a_0)], \quad (5.30)$$

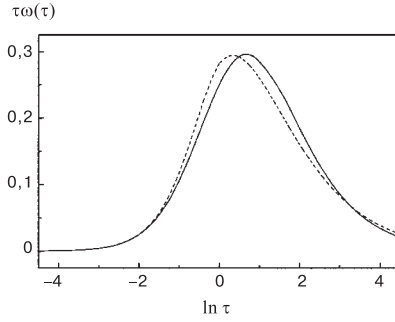


Рис. 13. Функция распределения виртуальностей  $\tau\omega(\tau)$  в кварковой петле. Сплошная кривая соответствует модельной функции (5.25), пунктирная — точному расчету [132]

где  $\sigma_0$  — некоторая точка нормировки,  $a_0$  — соответствующее ей значение параметра  $a$ . Функция  $\tilde{f}$  имеет вид

$$\tilde{f}(a) = \frac{1}{5(5 + 3B)} [x_1 J(a, a_1) + x_2 J(a, a_2) + x_3 J(a, a_3)], \quad (5.31)$$

где

$$J(a, b) = -\frac{2}{a^2 b} - \frac{4}{ab^2} - \frac{12}{ab} - \frac{9}{(1-a)(1-b)} + \frac{4 + 12b + 21b^2}{b^3} \ln a + \\ + \frac{30 - 21b}{(1-b)^2} \ln(1-a) - \frac{(2+b)^2}{b^3(1-b)^2} \ln(a-b). \quad (5.32)$$

В выражении (5.31) параметры  $a_i$  являются корнями полинома

$$\phi(a) = 1 + \frac{9}{2}a + 2(6+a)a^2 + 5 \left( 5 + 3\frac{\beta_1}{2C\beta_0} \right) a^3 \quad (5.33)$$

и

$$x_i = \frac{1}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}, \quad (5.34)$$

где индексы  $\{i, j, k\}$  переставляются циклическим образом. Решение уравнения (5.30), определяющее бегущий параметр  $a = a(\sigma)$ , в силу монотонности функции  $\tilde{f}(a)$  является единственным.

Для экспериментального значения  $R_\tau^{\text{exp}} = 3,56 \pm 0,03$  [135, 136] \* в случае трех активных кварков находим соответствующее значение сильной константы связи на масштабе массы  $\tau$ -лептона  $\alpha_s(M_\tau^2) = 0,326 \pm 0,015$ . Это значение можно сравнить с  $\alpha_s(M_\tau^2) = 0,40$ , найденным в [60] при расчетах с точностью  $O(a^3)$  и без учета ренормалонного вклада. Таким образом, вклад ренормалонных цепочек, а также следующих членов  $a$ -разложения, оказываются существенным при извлечении константы связи сильного взаимодействия из экспериментальных данных по инклюзивному распаду  $\tau$ -лептона. Для эволюции найденного значения  $\alpha_s(M_\tau^2)$  на масштаб  $Z$ -бозона следует учесть пороги, обусловленные тяжелыми  $c$ - и  $b$ -кварками. Как было отмечено выше, в данном подходе возможна такая процедура сшивки, при которой константа связи, определенная во времениподобной области, и ее производная остаются непрерывными на пороге\*\*  $s = 4m_q^2$ . Используя следующие значения масс

\* Анализ другого экспериментального значения  $R_\tau$ , отвечающего мировому среднему, приведенному в [137], был выполнен в [69].

\*\* Ранее мы привели соответствующую случаю  $O(a^3)$  систему уравнений (5.22). Для рассматриваемого здесь случая  $O(a^5)$  определяющая процедуру сшивки система уравнений, а также некоторые другие подробности могут быть найдены в [138].

тяжелых кварков:  $m_c = 1,6$  ГэВ и  $m_b = 4,5$  ГэВ, для  $R_Z$ -отношения получаем значение  $R_Z = 20,85 \pm 0,03$ , которое находится в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными [121].

## 6. ПРАВИЛА СУММ КХД И $a$ -РАЗЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим проблему описания  $q\bar{q}$ -связанных состояний на основе метода правил сумм квантовой хромодинамики [139] (см. также обзорную статью [140]), применяя при этом ВТВ-подход для описания не только пертурбативных, но и, следуя недавней работе [72], существенно непертурбативных вкладов. Здесь следует отметить, что ВТВ-метод дает единое описание системы, и явное разделение (с точки зрения обычного рассмотрения, основанного на операторном разложении) на пертурбативную, содержащую логарифмическую зависимость, и непертурбативную часть, определяемую степенными поправками, не всегда естественно и возможно лишь в простейших случаях, как, например, в приведенном в [72] примере.

Начнем анализ с рассмотрения адронного коррелятора, отвечающего некоторому току с матричной структурой  $\Gamma$ , мнимую часть которого на двухпетлевом уровне запишем в виде

$$\text{Im}\Pi^\Gamma(s) = \frac{1}{4\pi} \left[ \Pi_\Gamma^{(0)}(s) + 4\lambda\Pi_\Gamma^{(1)}(s) \right]. \quad (6.1)$$

Сводка необходимых для дальнейшего формул для компонент  $\Pi^{(0)}$  и  $\Pi^{(1)}$  приведена в приложении В.

Рассмотрим первый, связанный с  $D$ -функцией момент

$$M_{1+N_\Gamma}^{(\Gamma)}(Q^2) \equiv -\frac{d\Pi^\Gamma(Q^2)}{dQ^2} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{(s+Q^2)^2} \text{Im}\Pi^\Gamma(s). \quad (6.2)$$

Определяя переменную  $\sigma = s - 4m^2$ , которая связывается с виртуальностью в ренормальном представлении, и  $u^2 = \sigma/(\sigma + 4m^2)$ , получаем

$$M_{1+N_\Gamma}^{(\Gamma)}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\sigma \frac{(\sigma + 4m^2)^{N_\Gamma}}{(Q^2 + \sigma + 4m^2)^{2+N_\Gamma}} \times \left[ \Pi_\Gamma^{(0)}(u) + 4\lambda\Pi_\Gamma^{(1)}(u) \right]. \quad (6.3)$$

Дополнительная проблема, которую следует обсудить особо, связана с так называемыми кулоновскими сингулярностями. Пертурбативное разложение осуществляется по степеням эффективного параметра  $\lambda/u$ . В пертурбативном рассмотрении моментов высшего порядка доминирующей оказывается

область малых  $u$ , и пертурбативная аппроксимация становится неприменимой [142] (см. также [143, 144]). Таким образом, для непротиворечивого рассмотрения моментов высокого порядка необходимо провести некоторое суммирование кулоновских сингулярностей. Переход к рассмотренному выше ренормалонному представлению позволяет выполнить необходимое суммирование [72]. Это может быть продемонстрировано на простом примере, что мы и делаем в приложении С, где также рассматривается связь с известным фактором Зоммерфельда — Сахарова [145, 146].

Перепишем (6.3) в следующем виде:

$$M_{1+N_\Gamma}^{(\Gamma)}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\sigma \frac{(\sigma + 4m^2)^{N_\Gamma} \Pi_\Gamma^{(0)}(u)}{(Q^2 + W(\sigma))^{2+N_\Gamma}}, \quad (6.4)$$

где

$$W(\sigma) = (\sigma + 4m^2) \left[ 1 - 4\lambda \frac{\psi_\Gamma(u)}{\Pi_\Gamma^{(0)}(u)} \right], \quad (6.5)$$

$$\psi_\Gamma(u) = (1 - u^2)^{1+N_\Gamma} \int_0^u du \frac{2u}{(1 - u^2)^{2+N_\Gamma}} \Pi_\Gamma^{(1)}(u). \quad (6.6)$$

Применение метода ренормгруппы к подынтегральному выражению в (6.4), когда ток имеет нулевую аномальную размерность, приводит к замене константы связи  $\lambda$  и массы  $m$  на бегущие параметры  $\bar{\lambda}(\sigma)$  и  $\bar{m}(\sigma)$ , где в рассматриваемой  $\overline{MS}$ -схеме аргумент  $\sigma$  должен быть масштабирован фактором  $k_{\overline{MS}} = \exp(-5/3)$  [133]. В том случае, когда аномальная размерность тока ненулевая, появляется связанный с ней дополнительный общий фактор, который, однако, как будет понятно из дальнейшего, оказывается несущественным для выводов, основанных на анализе моментов с большими номерами  $n$ , так что в результате этот фактор не играет роли при таком рассмотрении.

Будем использовать ВТВ бегущие параметры, что не приводит, как было отмечено выше, к каким-либо трудностям, связанным с определением интеграла, когда эти параметры входят в подынтегральное выражение. Таким образом, выражение для момента  $n$ -го порядка имеет вид

$$M_n^{(\Gamma)}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\sigma \frac{[\sigma + 4m^2(k\sigma)]^{N_\Gamma}}{[Q^2 + W(\sigma)]^{1+n}} \Pi_\Gamma^{(0)}(u). \quad (6.7)$$

Здесь

$$W(\sigma) = [\sigma + 4m^2(k\sigma)] \left[ 1 - 4\lambda_{\text{эф}}(k\sigma) \frac{\psi_\Gamma(u)}{\Pi_\Gamma^{(0)}(u)} \right], \quad (6.8)$$

и теперь  $u^2 = \sigma / [\sigma + 4m^2(k\sigma)]$ . В методе правил сумм масса первого резонанса может быть определена через отношение моментов

$$R_n^\Gamma = \frac{M_{n-1}^\Gamma}{M_n^\Gamma} \quad (6.9)$$

при больших номерах  $n$ .

Рассмотрим спектр масс семейств чармония и боттония ( $c\bar{c}$ - и  $b\bar{b}$ -связанные состояния). В обсуждаемом подходе параметрами являются: значение константы связи  $\alpha_0$  в некоторой точке нормировки, в качестве которой мы будем брать масштаб массы  $\tau$ -лептона, а также значение массы тяжелого кварка (в данном случае  $m_c$  или  $m_b$ ), заданного на некотором масштабе (будем использовать для этого 1 ГэВ). При этом, конечно, соответствующие лучшему фиту значения должны согласовываться с другими данными. Что касается параметра  $C$ , то мы не будем его варьировать, а примем для него найденное ранее значение  $C = 4,1$ , соответствующее уровню  $O(a^3)$  аппроксимации констант перенормировки [51]. В работе [72] было найдено значение константы связи  $\alpha_0(M_\tau^2) = 0,379$ . Для масс  $c$ - и  $b$ -кварков получены значения  $m_c = 1,51$  ГэВ и  $m_b = 4,72$  ГэВ, которые хорошо согласуются с другими результатами [121].

При больших  $n$  основной вклад в моменты определяется окрестностью точки минимума функции  $W(\sigma)$ :  $\sigma = \tilde{\sigma}$ . Выполненный в работе [72] анализ различных каналов показал, что для  $c\bar{c}$ -систем такой минимум достигается при  $\tilde{\sigma} \sim 4 \div 6$  ГэВ<sup>2</sup>, а для  $b\bar{b}$ -состояний при  $\tilde{\sigma} \sim 20 \div 30$  ГэВ<sup>2</sup>. Основной вклад в моменты (6.7) при больших  $n$  определяется стационарной точкой, и, очевидно, для отношения моментов можем записать

$$R_n(Q^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q^2 + W(\tilde{\sigma}). \quad (6.10)$$

Эту величину следует сравнить с соответствующим адронным отношением  $R_n^{\text{had}}(Q^2)$ , для которого в приближении узких резонансов легко находим

$$R_n^{\text{had}}(Q^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q^2 + M_R^2. \quad (6.11)$$

Таким образом, при любых значениях  $Q$  для массы резонанса получаем

$$M_R = \sqrt{W(\tilde{\sigma})}. \quad (6.12)$$

Отметим, что факт выпадения зависимости от  $Q$  не является тривиальным. Такая зависимость присутствует при обычном рассмотрении и требует специального анализа (см. обсуждение в [140]).

На рис. 14 и 15 приведены функции  $\sqrt{R_n}$  и  $\sqrt{W(\sigma)}$  для  $c\bar{c}$ - и  $b\bar{b}$ -систем соответственно. Результаты для  $c\bar{c}$ -систем с массой  $c$ -кварка  $m_c = 1,51$  ГэВ суммированы в табл.2, а для  $b\bar{b}$ -систем с массой  $b$ -кварка  $m_b = 4,72$  ГэВ — в табл.3. Используемые здесь массы  $c$ - и  $b$ -кварков хорошо согласуются с оценками, даваемыми другими подходами [121].

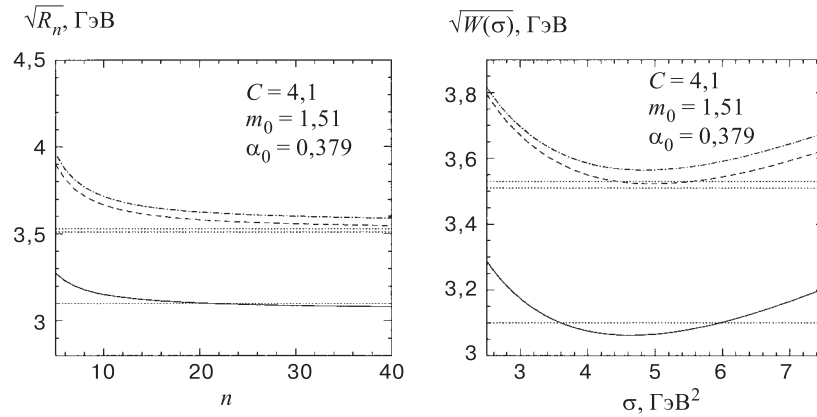


Рис. 14. Поведение функций  $\sqrt{R_n}$  в зависимости от номера  $n$  и  $\sqrt{W(\sigma)}$  как функции  $\sigma$  для связанных  $c\bar{c}$ -состояний. Сплошная линия соответствует векторному току, пунктир отвечает аксиально-векторному току, а штрихпунктирная кривая —  $A'$ -мезону. Горизонтальные прямые отвечают массам соответствующих мезонов, значения которых взяты из [137]

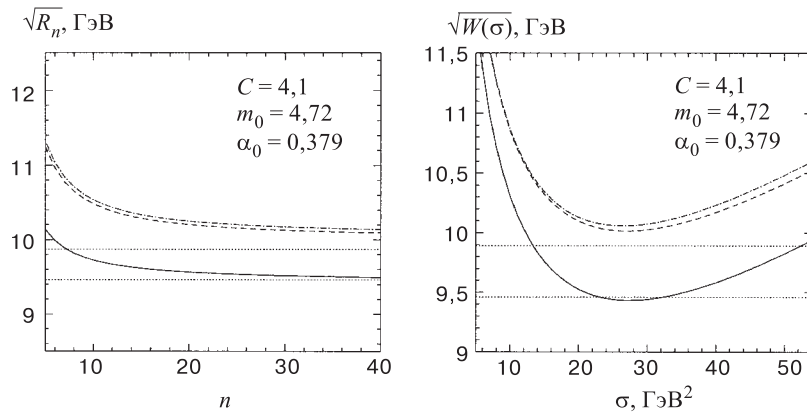


Рис. 15. То же, что и на рис. 14, но для  $b\bar{b}$ -систем

Подводя краткий итог приведенного в этом разделе анализа, отметим, что при таком подходе область стабильности моментов по переменной  $n$  значительно расширилась по сравнению с обычным рассмотрением, при котором интервал стабильности находится, как правило, в районе  $n = 6 \div 8$ . Положительной чертой также является тот факт, что при больших значениях  $n$   $Q^2$ -зависимость для отношения вычисляемых таким образом моментов точно такая же, как и в адронном секторе. Расщепление между векторным, ак-

сиально-векторным и  $A'$ -состояниями воспроизводится с хорошей точностью. Отметим, однако, что изложенный в этом разделе подход к описанию спектроскопии кваркониев находится лишь в самом начале своего развития. Ряд вопросов нуждается в уточнении и дальнейшей разработке. Например, более детального изучения требует вопрос, связанный с описанием скалярных и псевдоскалярных состояний, для которых, по-видимому, следует принимать в расчет некоторые другие дополнительные эффекты [72].

Таблица 2. Спектр масс  $c\bar{c}$ -систем

Ток	$M_{\text{exp}}$ , ГэВ	$M_{\text{theor}} = \sqrt{W(\bar{\sigma})}$ , ГэВ	$\bar{\sigma}$ , ГэВ <sup>2</sup>
$j_V$	3,10	3,06	4,6
$j_A$	3,51	3,52	4,8
$j_{A'}$	3,53	3,56	4,8
$j_S$	3,42	3,27	6,0
$j_P$	2,98	3,19	3,9

Таблица 3. Спектр масс  $b\bar{b}$ -систем

Ток	$M_{\text{exp}}$ , ГэВ	$M_{\text{theor}} = \sqrt{W(\bar{\sigma})}$ , ГэВ	$\bar{\sigma}$ , ГэВ <sup>2</sup>
$j_V$	9,46	9,43	27
$j_A$	9,89	10,02	26
$j_{A'}$	–	10,07	26
$j_S$	9,86	9,80	30
$j_P$	–	9,56	24

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, при построении пертурбативного разложения в качестве возмущения обычно используется часть полного лагранжиана, называемая лагранжианом взаимодействия, которая содержит высшие степени полей. Свободная система при этом описывается гармонической, квадратичной по полям частью. В результате для моделей с одной константой связи возникает степенное разложение, которое для большинства интересных случаев является асимптотическим. При малых значениях константы связи ряд теории возмущений, несмотря на асимптотический характер, позволяет анализировать довольно широкий круг практически важных задач. Тем не менее для решения многих вопросов необходимо выйти за рамки теории возмущений.



В данной работе представлен обзор результатов, полученных на основе непertурбативных вариационных разложений в квантовой теории поля. Идея такого подхода достаточно проста. Обычное разбиение полного функционала действия, соответствующего некоторой квантовой системе, на свободную, квадратичную по полям часть и часть, описывающую взаимодействие и содержащую высшие степени полей, в известной степени условно. Система описывается полным лагранжианом, и традиционное разбиение его на свободную часть и часть, соответствующую взаимодействию, во многом продиктовано необходимостью нахождения приближенных решений по теории возмущений, когда процедура точного интегрирования неизвестна. В формализме континуального интеграла возможность проведения вычислений связана с гауссовыми функциональными квадратурами. Их очевидное применение, когда под знаком функционального интеграла разложение осуществляется по степеням исходного действия взаимодействия, приводит к традиционной теории возмущений. Однако, как мы показали, теория возмущений — не единственно возможное следствие гауссовского интегрирования. Существует иной способ аппроксимации функциональных интегралов и проведения вычислений в квантовой теории поля. Этот метод опирается на “зондирование” системы с помощью специальных функционалов, содержащих пробные параметры вариационного типа. Изучая отклик системы на изменение таких параметров вариационного “зонда”, можно выбрать их оптимальным образом, так, чтобы вариационная аппроксимация была адекватна рассматриваемой системе не только в области слабой связи.

Рассмотренный подход, названный нами вариационной теорией возмущения, объединяет в себе некоторый вариационный принцип и регулярный метод вычисления поправок. Исходный функционал действия в ВТВ-подходе переписывается с помощью некоторой добавки вариационного типа, и применяется разложение по эффективному действию взаимодействия. Специальные параметры, входящие в вариационный функционал, позволяют управлять свойствами возникающего плавающего ряда. Таким образом, уже с самого начала, в отличие от многих иных непertурбативных подходов, в ВТВ рассматриваемая величина представляется в виде некоторого ряда, что позволяет вычислить необходимые поправки и изучить вопрос устойчивости полученных результатов. Иными словами, рассмотренный здесь метод вариационных разложений предоставляет возможность ответа на вопрос, в какой мере основной вклад, определяемый вариационным путем на основе того или иного принципа оптимизации, адекватен рассматриваемой системе и какова область применимости найденных выражений. Так же, как в стандартной теории возмущений, для построения ВТВ используются лишь гауссовские функциональные квадратуры. При этом, конечно, возникающий ряд обладает иной структурой и, кроме того, модифицируются некоторые фейнмановские правила на уровне пропагаторов и вершин.

В случае КХД применение идеи построения вариационных рядов приводит к новому малому параметру разложения. Этот параметр подчиняется уравнению, решения которого оказываются всегда меньше единицы при любой величине исходной константы связи. По сравнению с теорией возмущений, оставаясь в рамках применимости такого разложения, можно продвинуться в область существенно меньших энергий. Для применяемого здесь метода можно рассчитывать на индуцированную сходимость ВТВ-ряда. На сегодняшний день доказательство такого рода сходимости имеется лишь для простых моделей. В случае квантовой хромодинамики предложить строгое доказательство индуцированной сходимости рассмотренного здесь вариационного разложения пока не представляется возможным. Однако проведенный здесь анализ приводит к некоторым аргументам эмпирического характера в пользу возможного существования сходимости такого типа. Например, поведение непертурбативной  $\beta$ -функции, найденной методом  $a$ -разложения в различных порядках ВТВ-аппроксимации, оказалось удивительно устойчивым к влиянию поправок в смысле индуцированной сходимости в широком интервале изменения константы связи. Важной особенностью ВТВ-подхода является тот факт, что для достаточно малых  $\bar{\alpha}_s$  вариационное разложение воспроизводит стандартную теорию возмущений, и пертурбативная высокоэнергетическая физика сохраняется. При продвижении в область низких энергий, когда обычная теория возмущений перестает работать ( $\bar{\alpha}_s(Q^2) \sim 1$ ), параметр ВТВ-разложения остается все еще малым, и мы не выходим за рамки применимости метода.

В обзоре рассмотрен ряд феноменологических приложений ВТВ-метода. Одним из его применений является описание процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны в области низких (для масштабов КХД) энергий. Для возможности сравнения с экспериментальными данными применен специальный метод сглаживания резонансов, так называемая “смиринг”-процедура. Использование “смиринг”-метода позволяет избежать трудностей, связанных с пороговыми сингулярностями в пертурбативном разложении. Однако прямое применение теории возмущений для описания соответствующих экспериментальных данных все еще остается невозможным. Причина этого связана с нефизическими сингулярностями, которые имеются у пертурбативного инвариантного заряда в инфракрасной области. В методе  $a$ -разложения такие сингулярности отсутствуют, “смиринг”-интегралы оказываются хорошо определенными, и уже в первом порядке ВТВ-разложения удается добиться хорошего согласия с экспериментальными данными.

Применение обычного ренормгруппового ресуммирования в теории возмущений приводит к нефизическим особенностям типа призрачного полюса в поведении инвариантного заряда. Наличие таких особенностей ведет к конфликту с фундаментальными принципами теории. Важной чертой ВТВ-подхода является возможность сохранения продиктованных общими принципами

квантовой теории поля аналитических свойств эффективной константы разложения. Именно этот факт позволяет самосогласованным образом ввести определение инвариантного заряда во времениподобной области. Это понятие оказывается удобным для построения процедуры шивки во времениподобной области, согласно которой число активных кварков непосредственно связано с порогами рождения кварк-антикварковой пары. Такая процедура в отличие от часто используемой шивки в евклидовой области не разрушает аналитичности. Отсутствие нефизических особенностей при использовании ВТВ-метода играет ключевую роль при получении ренормального представления. ВТВ-подход, будучи в своей основе непertурбативным подходом, позволяет по-новому взглянуть на использование метода правил сумм КХД, в частности, на его применение к описанию спектра масс мезонов. Корректные аналитические свойства оказываются принципиально важными для описания инклюзивного распада  $\tau$ -лептона. Этот процесс предоставляет уникальную возможность для низкоэнергетического тестирования КХД. Здесь точность экспериментальных данных заметно выше, чем для многих других низкоэнергетических процессов, а метод теоретического описания позволяет в принципе избежать допущений модельного характера. Однако использование теории возмущений ведет к вышеупомянутым нефизическим особенностям, и необходимые для непротиворечивого описания свойства аналитичности разрушаются. В рассмотренном здесь методе  $a$ -разложения нефизических сингулярностей можно избежать. В этом отношении ВТВ-подход близок к аналитической теории возмущений, в которой ренормгрупповое ресуммирование выполняется таким образом, чтобы не входить в конфликт с общими принципами теории. Это приводит к тому, что корректные аналитические свойства восстанавливаются за счет появляющихся автоматически непertурбативных вкладов. Несмотря на различие этих двух методов, один из которых основывается на вариационном разложении, а другой ставит во главу угла ренормгрупповое суммирование с наложением условия аналитичности, они имеют немало общих черт и зачастую приводят к близким друг к другу следствиям.

Авторы выражают глубокую благодарность Х.Ф. Джоунсу, А. Ритцу и О.П. Соловцовой, в соавторстве с которыми были получены многие из изложенных здесь результатов, а также признательность Б.А. Арбузову, А.М. Балдину, В.Г. Кадышевскому, В.А. Матвееву, К.А. Милтону, М.В. Савельеву, А.Н. Тавхелидзе, А.Т. Филиппову, Д.В. Ширкову и Н.М. Шумейко за интерес к работе и полезные обсуждения затронутых здесь вопросов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-02-17727).

ПРИЛОЖЕНИЯ

**А. Решение уравнений методом вариационных итераций.** Рассмотрим кратко еще одну возможность, которую предоставляет вариационная теория возмущений. Речь идет о нахождении приближенных решений уравнений, при использовании метода вариационных итераций. Такой прием, как и в случае функциональных интегралов, приводит к “плавающим” разложениям, свойства сходимости которых можно контролировать с помощью специальных вариационных параметров. В наше намерение здесь не входит сколь-нибудь детальное обсуждение этого вопроса. Приведем лишь некоторую иллюстрацию возможностей применения идеи ВТВ для нахождения решений уравнений.

Рассмотрим для конкретности нерелятивистское уравнение Липпмана — Швингера для функции Грина  $G(E; \mathbf{p}, \mathbf{q})$ :

$$\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) G(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) G(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (\text{A.1})$$

Итерируя уравнение (A.1), получаем хорошо известный ряд стандартной теории возмущений, который может быть интерпретирован как серия перерасеяний свободной частицы с пропагатором

$$G_0(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{E - \mathbf{p}^2/2m} \quad (\text{A.2})$$

на потенциале  $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Такое представление возможно в пределе слабой связи, в случае же сильной связи требуется иной подход.

Рассмотрим применение метода вариационной теории возмущений к этой задаче. Запишем уравнение Липпмана — Швингера (A.1) в символическом виде

$$G - G_0 V G = G_0. \quad (\text{A.3})$$

В соответствии с ВТВ изменим нулевое приближение, записав (A.3) в эквивалентной форме

$$G - \tilde{G}_0 \tilde{V} G = \tilde{G}_0, \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{V} = V + [\tilde{G}_0^{-1} - G_0^{-1}]. \quad (\text{A.5})$$

Таким образом, итерации этого уравнения могут быть интерпретированы как серия перерасеяний эффективной частицы с пропагатором  $\tilde{G}_0$  на новом эффективном потенциале  $\tilde{V}$  (см. рис. 16).

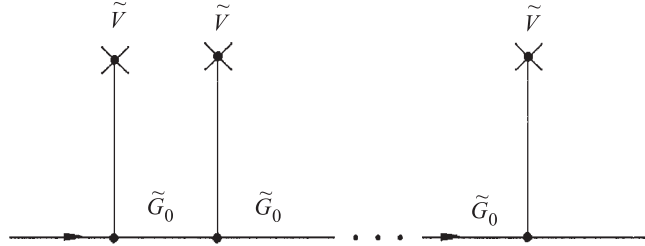


Рис. 16. Диаграммная интерпретация итерационного решения в методе вариационной теории возмущений

Как и в случае гармонической вариационной процедуры, выберем

$$\tilde{G}_0 = \zeta G_0. \quad (\text{A.6})$$

В результате ряд ВТВ запишется в виде

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n, \quad (\text{A.7})$$

$$G_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \left(-\frac{\partial}{\partial \kappa}\right)^{n-k} g_k.$$

Функции  $g_k$  в (A.7) могут быть представлены обычным набором диаграмм с модифицированным пропагатором

$$\tilde{G}'_0 = \frac{1}{1 + \kappa(\zeta^{-1} - 1)} G_0, \quad (\text{A.8})$$

где мы опять для удобства ввели параметр  $\kappa$ , который положим равным единице в конце всех вычислений.

Анализ структуры ВТВ-разложения показывает, что элементы ВТВ-ряда будут пропорциональны новому параметру разложения  $a$  в том случае, когда исходная константа  $g$  и  $a$  связаны соотношением \*

$$g = \frac{1}{C} \frac{a}{1-a}. \quad (\text{A.9})$$

Здесь  $C$  — параметр вариационного типа, который должен быть определен на основе той или иной процедуры оптимизации.

---

\*Рассматриваемая задача о движении частицы во внешнем поле соответствует наиболее простой взаимосвязи нового параметра разложения  $a$  и исходной константы связи  $g$ .

Чтобы иметь возможность сравнить результат ВТВ, рассмотрим случай сепарабельного взаимодействия

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = g f(\mathbf{p}^2) f(\mathbf{q}^2). \quad (\text{A.10})$$

В этом случае существует точное решение

$$\begin{aligned} G(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{E - \mathbf{p}^2/2m} + \frac{g f(\mathbf{p}) f(\mathbf{q})}{(E - \mathbf{p}^2/2m)(E - \mathbf{q}^2/2m)} \times \\ &\times \left[ 1 - g \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{f^2(\mathbf{k}^2)}{E - \mathbf{k}^2/2m} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Ограничимся первым нетривиальным порядком ВТВ-приближения, который позволяет получить уравнение на вариационный параметр  $C$  и в данном случае соответствует разложению с точностью  $O(a^2)$ . В этом порядке ( $N = 2$ ) имеем

$$\begin{aligned} G^{(2)}(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= g_0(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + a \frac{g_1(E; \mathbf{p}, \mathbf{q})}{C} + \\ &+ a^2 \left[ \frac{g_2(E; \mathbf{p}, \mathbf{q})}{C^2} + \frac{g_1(E; \mathbf{p}, \mathbf{q})}{C} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

где пертурбативные коэффициенты  $g_k(E; \mathbf{p}, \mathbf{q})$  имеют вид

$$\begin{aligned} g_0(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{E - \mathbf{p}^2/2m}, \\ g_1(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{g f(\mathbf{p}^2) f(\mathbf{q}^2)}{(E - \mathbf{p}^2/2m)(E - \mathbf{q}^2/2m)}, \\ g_2(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{g^2 f(\mathbf{p}^2) f(\mathbf{q}^2)}{(E - \mathbf{p}^2/2m)(E - \mathbf{q}^2/2m)} \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{f^2(\mathbf{k}^2)}{E - \mathbf{k}^2/2m}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Принцип минимальной чувствительности

$$\frac{\partial G^{(2)}(E; \mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial C} = 0$$

определяет вариационный параметр  $C$  как

$$C = - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{f^2(\mathbf{k}^2)}{E - \mathbf{k}^2/2m}. \quad (\text{A.14})$$

В результате, как нетрудно проверить из сравнения с (A.11), получаем

$$G^{(2)}(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = G_{\text{exact}}(E; \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (\text{A.15})$$

а все последующие члены ВТВ-ряда равны нулю.

**В. Корреляторы токов массивных кварков.** Запишем здесь двухпетлевые выражения для корреляторов токов массивных кварков. Токи, приведенные ниже, соответствуют формату  $j_{\Gamma} = \dots(J^{PC})$ .

- *Скалярный ток:*  $j_S = \bar{\psi}_i \psi_j$  ( $0^{++}$ ).
- *Псевдоскалярный ток:*  $j_P = i\bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_j$  ( $0^{-+}$ ).
- *Векторный ток:*  $j_V = \bar{\psi}_i \gamma_{\mu} \psi_j$  ( $1^{--}$ ).
- *Аксиально-векторный ток:*  $j_A = (q_{\mu} q_{\nu} / q^2 - g_{\mu\nu}) \bar{\psi}_i \gamma_{\nu} \gamma_5 \psi_j$  ( $1^{++}$ ).
- *A'-ток:*  $j_{A'} = \bar{\psi}_i \partial_{\mu} \gamma_5 \psi_j$  ( $1^{+-}$ ).

Для параметризации общих компонент корреляторов удобно определить функции [140]:

$$\begin{aligned} A(u) = & (1+u^2) \left[ \frac{\pi^2}{6} + \ln \frac{1+u}{1-u} \ln \frac{1+u}{2} + 2l \left( \frac{1-u}{1+u} \right) + \right. \\ & \left. + 2l \left( \frac{1+u}{2} \right) - 2l \left( \frac{1-u}{2} \right) - 4l(u) + l(u^2) \right] + \\ & + 3u \ln \frac{1-u^2}{4u} - u \ln u, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} A'(u) = & (1+u^2) \left[ 2l \left[ \left( \frac{1-u}{1+u} \right)^2 \right] - 2l \left( \frac{u-1}{u+1} \right) - \right. \\ & \left. - 3 \ln \frac{1-u}{1+u} \ln \frac{1+u}{2} + 2 \ln \frac{1-u}{1+u} \ln u \right], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где

$$l(x) = - \int_0^x dt \frac{1}{t} \ln(1-t) \quad (\text{B.3})$$

— функция Спенса.

Необходимые нам функции  $\Pi^0$  и  $\Pi^1$  имеют следующий вид.

**Векторный ток** [140] ( $\Gamma = \gamma_{\mu}$ ):

$$N_V = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\Pi_V^0 = \frac{1}{2} u(3-u^2), \quad (\text{B.5})$$

$$\Pi_V^1 = 2 \left[ \left( 1 - \frac{u^2}{3} \right) A(u) + P_V(u) \ln \frac{1+u}{1-u} + Q_V(u) \right], \quad (\text{B.6})$$

$$P_V(u) = \frac{1}{24} (33 + 22u^2 - 7u^4), \quad (\text{B.7})$$

$$Q_V(u) = \frac{1}{4} (5u - 3u^3). \quad (\text{B.8})$$

Аксиально-векторный ток [140] ( $\Gamma = \gamma_5 \gamma_\nu (q_\mu q_\nu / q^2 - g_{\mu\nu})$ ):

$$N_A = 1, \quad (\text{B.9})$$

$$\Pi_A^0 = u^3, \quad (\text{B.10})$$

$$\Pi_A^1 = \frac{4}{3} \left[ u^2 A(u) + P_A(u) \ln \frac{1+u}{1-u} + Q_A(u) \right], \quad (\text{B.11})$$

$$P_A(u) = \frac{1}{32} (21 + 59u^2 - 19u^4 - 3u^6), \quad (\text{B.12})$$

$$Q_A(u) = \frac{1}{16} (-21u + 30u^3 + 3u^5). \quad (\text{B.13})$$

$A'$ -ток [140] ( $\Gamma = \partial_\mu \gamma_5$ ):

$$N_{A'} = 2, \quad (\text{B.14})$$

$$\Pi_{A'}^0 = \frac{1}{2} u^3, \quad (\text{B.15})$$

$$\Pi_{A'}^1 = \frac{2}{3} \left[ u^2 A(u) + P_{A'}(u) \ln \frac{1+u}{1-u} + Q_{A'}(u) \right], \quad (\text{B.16})$$

$$P_{A'}(u) = \frac{1}{16} (13 + 28u^2 + 17u^4 - 2u^6), \quad (\text{B.17})$$

$$Q_{A'}(u) = \frac{1}{24} (-39u + 47u^3 + 6u^5). \quad (\text{B.18})$$

Скалярный ток [141] ( $\Gamma = \mathbf{1}$ ):

$$N_S = 1, \quad (\text{B.19})$$

$$\Pi_S^0 = \frac{3}{2} u^3, \quad (\text{B.20})$$

$$\Pi_S^1 = 2 \left[ u^2 A'(u) + P_S(u) \ln \frac{1+u}{1-u} + Q_S(u) \right], \quad (\text{B.21})$$

$$P_S(u) = \frac{1}{16} (3 + 34u^2 - 13u^4), \quad (\text{B.22})$$

$$Q_S(u) = \frac{1}{8} (21u - 3u^3). \quad (\text{B.23})$$



Псевдоскалярный ток [141] ( $\Gamma = \gamma_5$ ):

$$N_P = 1, \quad (\text{B.24})$$

$$\Pi_P^0 = \frac{3}{2}u, \quad (\text{B.25})$$

$$\Pi_P^1 = 2 \left[ A'(u) + P_P(u) \ln \frac{1+u}{1-u} + Q_P(u) \right], \quad (\text{B.26})$$

$$P_P(u) = \frac{1}{16}(19 - 48u + 2u^2 + 3u^4), \quad (\text{B.27})$$

$$Q_P(u) = \frac{1}{8}(21u - 3u^3). \quad (\text{B.28})$$

**С. Кулоновские сингулярности.** Воспользовавшись простой моделью, рассмотрим вопрос о том, как представление (6.4) позволяет обойти упомянутую трудность, связанную с кулоновскими сингулярностями, и непротиворечивым образом рассматривать моменты с большими номерами  $n$ .

Как хорошо известно [142] (см. также [143, 144]), пертурбативное разложение для  $\text{Im} \Pi(s)$  даже при небольших значениях константы связи является плохо определенным для малых скоростей

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}, \quad (\text{C.1})$$

так как эффективным параметром разложения является величина  $\lambda/u$ . Этот факт приводит к тому, что для моментов с большими номерами  $n$ , для которых доминирующий вклад определяется областью  $u \sim 1/\sqrt{n}$ , а соответствующим эффективным параметром разложения служит величина  $\sqrt{n}\lambda$ , непосредственное применение исходного пертурбативного ряда не кажется оправданным.

Суммирование таких сингулярных выражений для нерелятивистских кулоновских систем осуществляется с помощью фактора Зоммерфельда—Сахарова [145, 146]:

$$S = \frac{X}{1 - \exp(-X)}, \quad X = \frac{16\pi^2 \lambda}{3} \frac{\lambda}{u}. \quad (\text{C.2})$$

В применяемом здесь способе описания кваркониев рассмотрим этот вопрос, используя простую модель. Запишем  $n$ -й момент в виде

$$M_n(Y) = \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{(\sigma + Y)^{n+1}}, \quad (\text{C.3})$$

где виртуальность  $\sigma = s - 4m^2$ , а через  $Y$  обозначим величину  $Y = Q^2 + 4m^2$ . Выберем далее спектральную функцию  $\rho(\sigma)$ , нормированную условием

$\rho(\sigma, \lambda = 0) = 1$ , в виде

$$\rho(\sigma) = \left( \frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda + \sqrt{\sigma}} \right)^p, \quad (\text{C.4})$$

где  $p$  — некоторое положительное целое число.

Пертурбативное разложение (C.4), имеющее вид

$$\rho_{\text{pert}}(\sigma) \sim 1 - p \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma}} + O\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\sigma}}\right)^2 \sim 1 - \frac{p}{2m} \frac{\lambda}{u} + O\left(\frac{\lambda}{u}\right)^2, \quad (\text{C.5})$$

демонстрирует наличие кулоновских сингулярностей при малых  $u$ .

Предполагая определенные свойства гладкости у функции  $\rho(\sigma)$  [144], моменты для больших  $n$  можно записать в виде

$$M_n(Y) \sim Y^{-(n+1)} \int_0^\infty d\sigma \rho(\sigma) \exp\left(-n \frac{\sigma}{Y}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (\text{C.6})$$

Доминирующий вклад определяется областью  $\sigma \sim Y/n$ , что в терминах переменной  $u$  соответствует  $u \sim 1/\sqrt{n}$ . В то же время без использования пертурбативной аппроксимации для исходных моментов  $M_n^{\text{ex}}$ , определенных согласно (C.3) со спектральной функцией (C.4), аналогичная асимптотическая формула при больших  $n$ , когда в интеграле опять-таки доминирует вклад малых скоростей, имеет вид

$$\rho_{\text{ex}} \longrightarrow \left(1 + \sqrt{n} \frac{\lambda}{\sqrt{Y}}\right)^{-p}. \quad (\text{C.7})$$

Если же исходить из пертурбативного выражения, взятого в порядке  $O(\lambda)$ , то получим

$$\rho_{\text{pert}} \longrightarrow 1 - p \sqrt{n} \frac{\lambda}{\sqrt{Y}}. \quad (\text{C.8})$$

Теперь явно видно, что при достаточно больших  $n$  использование пертурбативного выражения (C.8) необоснованно.

Рассмотрим теперь, что же происходит в обсуждаемом здесь подходе. Для соответствия с операторным разложением вначале следует переписать выражение для моментов (C.3) в ренормальном представлении, которое в данном случае имеет вид

$$M_n^{\text{re}}(Y) = \int_0^\infty d\sigma' \frac{1}{(f(\sigma') + Y)^{n+1}}, \quad (\text{C.9})$$

где функция  $f(\sigma')$  определяется неявным образом с помощью уравнения

$$\sigma' = \int_0^{f(\sigma')} d\sigma \rho(\sigma). \quad (\text{C.10})$$

Это выражение получается при замене переменной  $\sigma = f(\sigma')$  и в предположении, что спектральная функция  $\rho(\sigma)$  такова, что выполняется  $f(\infty) = \infty$  и  $f(0) = 0$ .

Хотя преобразование, определяемое выражениями (С.9) и (С.10), является точным, нас интересует уровень  $O(\lambda)$ . В этом приближении для функции  $f(\sigma')$  получаем явное выражение

$$f(\sigma') = \sigma' + 2p\lambda\sqrt{\sigma'}. \quad (\text{С.11})$$

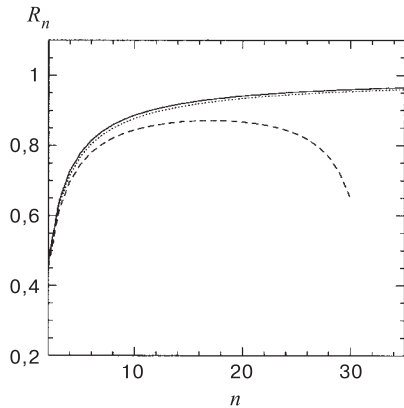


Рис. 17. Отношение моментов  $R_n^{\text{ex}}$  (сплошная кривая),  $R_n^{\text{pert}}$  (пунктирная) и  $R_n^{\text{re}}$  (точечная) для параметров  $Y = 1$ ,  $\lambda = 0, 1$  и  $p = 1$

Иной выбор параметров приводит к аналогичному результату. Отметим, что при использовании ренормального представления область  $u \sim 1/\sqrt{n}$  не определяет более ведущий вклад в интеграл для моментов при больших  $n$ . Теперь перевальная точка определяется некоторым, не зависящим от  $n$  значением  $\tilde{\sigma}$ , что полностью соответствует проведенному анализу правил сумм КХД.

При таком подходе проблемы кулоновских сингулярностей не возникает, а уже первого приближения оказывается достаточно для воспроизведения  $n$ -зависимости моментов для больших значений  $n$ . Рассмотрим, как и в методе правил сумм, отношение  $R_n = M_n/M_{n-1}$  и вычислим три функции: точную  $R_n^{\text{ex}}$ , пертурбативную  $R_n^{\text{pert}}$  в порядке  $O(\lambda)$  и суммированную на основе ренормального представления ( $R_n^{\text{re}}$ ) в том же порядке  $O(\lambda)$ . Эти функции приведены на рис. 17 для параметров  $Y = 1$ ,  $\lambda = 0, 1$  и  $p = 1$ . Иной выбор параметров приводит к аналогичному результату.

Отметим, что при использовании ренормального представления область  $u \sim 1/\sqrt{n}$  не определяет более ведущий вклад в интеграл для моментов при больших  $n$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1986.
2. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
3. Барбашов Б.М. — ЖЭТФ, 1965, т.48, вып.2, с.607.
4. Блохинцев Д.И., Барбашов Б.М. — УФН, 1972, т.106, вып.4, с.593.
5. Барбашов Б.М., Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н. — ТМФ, 1970, т.3, № 3, с.342;  
Барбашов Б.М., Кулешов С.П., Матвеев В.А. и др. — ТМФ, 1970, т.5, № 3, с.330.

6. Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н. и др. — ЭЧАЯ, 1974, т.5, вып.1, с.1.
7. Сисакян А.Н., Соловцов И.Л. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, вып.3, с.1127.
8. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — Int. J. Mod. Phys., 1994, v.A9, No.12, p.1929.
9. Юкалов В.И. — Вест. Моск. университета, 1976 т.17, с.270.
10. Halliday I.J., Suranyi P. — Phys. Lett., 1979, v.85B, p.421.
11. Halliday I.J., Suranyi P. — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.1529.
12. Shaverdyn B.S., Ushveridze A.G. — Phys. Lett., 1983, v.123B, p.403.
13. Ushveridze A.G. — Phys. Lett., 1984, v. B142, p.403 .
14. Ушверидзе А.Г., Шубитидзе Н.И. — ЯФ, 1984, т.40, с.1195.
15. Соловцов И.Л. — Изв. вузов, Физика, 1990, №7, с.64.
16. Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — Phys.Lett., 1991, v. A157, p. 261.
17. Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — Z.Phys., 1992, v. C54, p. 263.
18. Корсун Л.Д., Сисакян А.Н., Соловцов И.Л. — ТМФ, 1992, т.90, с. 37.
19. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — Phys.Lett., 1992, v. B297, p. 305.
20. Korsun L.D., Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — Int. J. Mod. Phys., 1993, v.A8, No. 29, p. 5129.
21. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — Phys.Lett., 1993, v.B313, p.367.
22. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — Int. J. Mod. Phys., 1994, v. A9, p. 1797.
23. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — Phys. Lett., 1994, v. B321, p. 381.
24. Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — In: Proc. of the XVI Workshop, Protvino, September 14-17, 1993, Probl. High Energy Phys. and Field Theory, Protvino, 1995, p.138-146.
25. Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — In: Bogoliubov Intern. Simp., Dubna, 1994, p. 191.
26. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — In: Intern. Workshop “Symmetry Methods in Physics”, Dubna, 1994, v.2, p. 494.
27. Schiff L.I. — Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 458.
28. Rosen G. — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1632.
29. Feynman R.P., Kleinert H. — Phys. Rev., 1986, v. A34, p. 5080.
30. Variational Calculation in Quantum Field Theory, Proc. of the Workshop (Wangerooge, Germany, 1987) Eds. Polley L. and Pottinger E.L., World Scientific, Singapore, 1988.
31. Ефимов Г.В. — Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985, с.216.
32. Efimov G.V. — Comm. Math. Phys., 1979, v. 65, p.15;  
Ефимов Г.В., Иванов М.А. — Препринт ОИЯИ, P2-81-707, Дубна, 1981.
33. Barnes T., Ghandour G.T. — Phys. Rev., 1980, v. D22, p.924.
34. Stevenson P.M. — Phys. Rev., 1984, v. D30, p.1712;  
Hajj G.A., Stevenson P.M. — Phys. Rev., 1988, v. D37, p.413;  
Stancu I., Stevenson P.M. — Phys. Rev., 1990, v. D42, p.2710;  
Stancu I. — Phys. Rev., 1991, v. D43, p.1283.
35. Stevenson P.M. — Phys. Rev., 1985, v. D32, p.1389.
36. Okopinska A. — Phys. Rev., 1987, v. D35, p.1835; Phys. Rev., 1987, v.D 36, p.1273.

37. Coleman S., Weinberg E. — Phys. Rev., 1973, v. D7, p.1888.
38. Bardeen W.A., Moshe M. — Phys. Rev., 1983, v. D28, p.1372.
39. Ganbold G., Efimov G.V. — Mod. Phys. Lett., 1992, v.A7, p.2189; ЭЧАЯ, 1995, т.26, с.459; Efimov G.V., Nedelko S.N. — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.4539; ЭЧАЯ 1994, т.25, с.779.
40. Dineykhаn M., Ganbold G., Efimov G.V., Nedelko S.N. — Oscillator Representation in Quantum Physics. Lecture Notes in Physics, m 26, Springer, 1995, p.279.
41. Consoli M. — Phys. Lett., 1993, v.B305, p.78.
42. Branchina V., Consoli M., Stivala N. M. — Z. Phys., 1993, v.C57, p.251; Agodi A., Andronico G., Cea P., Consoli M., Cosmai L. — Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 1998, v.63, p.637.
43. Consoli M., Stevenson P.M. — Z. Phys., 1994, v.C63, p.427; Mod. Phys. Lett., 1996, v.A11, p.2511.
44. Branchina V., Castorina P., Consoli M., Zappala D. — Phys. Lett., 1992, v. B274, p. 404.
45. Филиппов А.Т. — ЭЧАЯ, 1979, т. 10, вып. 8, с. 501.
46. Bender C.M., Duncan A., Jones H.F. — Phys. Rev., 1994, v. D49, p. 4219.
47. Gromes D. — Z. Phys., 1996, v. C71, p. 347.
48. Yukalov V.I., Yukalova E.P., Gluzman S. — Phys. Rev., 1998, v. A58, p. 96.
49. Kleinert H. — Phys. Lett. 1995, v. B360, p. 65; Phys. Rev. 1998, v. D57, No. 4, p. 2264.
50. Solovtsov I.L. — Phys. Lett., 1994, v. B327, p.335.
51. Solovtsov I.L. — Phys. Lett., 1994, v. B340, p.245.
52. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — Mod. Phys. Lett., 1994, v.A9, p.2437.
53. Redmond P. — Phys. Rev., 1958, v.112, p.1404.
54. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Ширков Д.В. — ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 3(9), с.805.
55. Shirkov D.V., Solovtsov I.L. — JINR Rapid Comm., No. 2[76]-96, 5, hep-ph/9604363.
56. Shirkov D.V., Solovtsov I.L. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.1209.
57. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. — Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969, с.424.
58. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. — Общие принципы квантовой теории поля, М.: Наука, 1987.
59. Jones H.F., Solovtsov I.L. — Phys. Lett., 1995, v. B349, p. 519.
60. Jones H.F., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — Phys. Lett., 1995, v. B357, p. 441.
61. Jones H.F., Solovtsov I.L. — In: Proc. of the Int. Europhysics Conference on High Energy Physics, Brussels, July 27 – August 2, 1995, Editors J. Lemonne, C. Vander Velde, F. Verbeure, World Scientific (Singapore, New Jersey, London, Hong Kong) 1996, p.242.
62. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — In: Proc. of the VII Int. Conf. on Symmetry Methods in Physics, July 10 - 16, Dubna, 1995, JINR, Dubna, 1996, v.2, p.513.
63. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — In: Proc. of the XVIII Workshop on High Energy Physics and Field Theory, Protvino, June 26–30, 1995, Protvino, 1996, p.235–242.
64. Jones H.F., Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — Chin. J. Phys., 1996, v.34, No.3-II, p.973.
65. Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — Phys. Lett., 1995, v. B344, p. 377.

66. **Ebert D., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Preprint DESY 96-075, Hamburg, 1996.
67. **Ebert D., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Preprint JINR E2-95-385, Dubna, 1995.
68. **Ebert D., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Nuovo Cimento, 1997, v. 110A, p. 315.
69. **Jones H.F., Ritz A., Solovtsov I.L.** — Mod. Phys. Lett., 1997, v. 12, No. 9, p. 1361.
70. **Jones H.F., Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — In: Proc. of the 28th Int. Conference on High Energy Physics, Warsaw, July 25-31, 1996, Editors Z. Ajduk and A.K. Wroblewski, World Scientific, Singapore, 1997, v.II, p.1650.
71. **Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.** — ЯФ, 1998, т.61, №11, с.2052.
72. **Jones H.F., Ritz A., Solovtsov I.L.** — Int. J. Mod. Phys., 1998, v.A13, p.3929.
73. **Фейнман Р.** — Rev. Mod. Phys., 1948, v.20, No.2, p.367.
74. **Фейнман Р., Хибс А.** — Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
75. **Фейнман Р.** — Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
76. **Боголюбов Н.Н.** — ДАН СССР, 1954, т.99, №1, с.225.
77. **Matthews P.T., Salam A.** — Nuovo Cimento, 1954, v.12, No.4, p.563.
78. **Гельфанд И.М., Минлос Р.А.** — ДАН СССР, 1954, т.97, №2, с.209.
79. **Халатников И.М.** — ЖЭТФ, 1955, т.28, № 5, с.633.
80. **Фрадкин Е.С.** — Труды ФИАН, 1965, т.29, с.7.
81. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys. Lett., 1967, v.25B, p.30.
82. **Fried H.M.** — Basics of functional methods and eikonal model. Editions Frontières (Singapore), 1990.
83. **Caswell W.E.** — Ann. Phys., 1979, v.123, p.153.
84. **Killingbeck J.** — J. Phys., 1981, v.A14, p.1005;  
**Austin E.J., Killingbeck J.** — J. Phys., 1982, v.A15, p.443.
85. **Buckley I.R.C., Duncan A., Jones H.F.** — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.2554.
86. **Duncan A., Jones H.F.** — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.2560.
87. **Guida R., Konishi K., Suzuki H.** — Ann. Phys., 1995, v.241, p.152; Ann. Phys., 1996, v.249, p.109.
88. **Eichten E., Gottfried K.** — Phys. Lett., 1977, v.66B, p.286;  
**Eichten E., Gottfried K., Kinoshita T. et al.** — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.203;  
**Deo B.B., Baric B.K.** — Phys. Rev., 1983, v.D27, p.249;  
**Gupta S.N., Radford S.F.** — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.781.
89. **Levine R., Tomozawa Y.** — Phys. Rev., 1979, v.D19, p.1572.
90. **Арбузов Б.А.** — ЭЧАЯ, 1988, т.19, вып.1, с.5.
91. **Richardson J.L.** — Phys. Lett., 1979, v.82B, p.272.
92. **Mandelstam S.** — Phys. Rev., 1979, v.D20, p.3223.
93. **Anishetty R., Baker M., Kim S.K. et al.** — Phys. Lett., 1979, v.86B, p.52;  
**Baker M., Ball J.S., Lucht P., Zachariasen F.** — Phys. Lett., 1979, v.86B, p.52;  
**Ball J.S., Zachariasen F.** — Phys. Lett., 1980, v.95B, p.273.
94. **Baker M., Ball J.S., Zachariasen F.** — Nucl. Phys., 1981, v.B186, p.560.
95. **Bander M.** — Phys. Rep., 1981, v.75, p.205.
96. **Stevenson P.M.** — Phys. Rev., 1981, v.D23, p.2916.

97. **Stevenson P.M.** — Nucl. Phys., 1984, v.B231, p.65.
98. **Егорян Э.С., Тарасов О.В.** — ТМФ, 1979, т.41, с.26.
99. **Narison S.** — Phys. Rep., 1982, v.84, p.263.
100. **Chýla J., Kataev A.L., Larin S.A.** — Phys. Lett., 1991, v.B267, p.269.
101. **Mattingly A.C., Stevenson P.M.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.1320.
102. **Mattingly A.C., Stevenson P.M.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.437.
103. **Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A.** — Phys. Lett., 1991, v.B259, p.144.
104. **Surguladze L.R., Samuel M.A.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.560.
105. **Grunberg G.** — Phys. Rev., 1984, v.D29, p.2315.
106. **Solovtsov I.L., Shirkov D.V.** — Phys. Lett., 1998, v.B442 p.344.
107. **Poggio E.C., Quinn H.R., Weinberg S.** — Phys. Rev., 1976, v.D13, p.1958.
108. **Швингер Ю.** — Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1983, т.И.
109. **Dokshitzer Yu.L., Webber B.R.** — Phys. Lett., 1995, v.B352, p.451;  
**Dokshitzer Yu.L., Khoze V.A., Troyan S.I.** — Phys. Rev., 1996, v.D53, p.89.
110. **Pennington M.R., Ross G.G.** — Phys. Lett., 1981, v.102B, p.167.
111. **Radyushkin A.V.** — JINR Preprint, E2-82-159, 1982; JINR Rapid Comm. No. 4[78]-96, p.9.
112. **Krasnikov N.V., Pivovarov A.A.** — Phys. Lett., 1982, v.B116, p.168.
113. **Bjorken J.D.** — Preprint SLAC-PUB-5103, 1989; In: Particle Physics, Proc. of the Cargese Summer Institute, Cargese, France, 1989, ed. M. Levy et al. NATO Advanced Institute, Series B: v.223, Plenum, New York, 1990.
114. **Milton K.A., Solovtsov I.L.** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.5295.
115. **Milton K.A., Solovtsova O.P.** — Phys. Rev., 1998, v.D57, p.5402.
116. **Соловцова О.П.** — Письма в ЖЭТФ, 1996, v.64. p.664.
117. **Milton K.A., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1997, v.B415, p.104.
118. **Milton K.A., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Talk given at the XXIX Int. Conference on High Energy Physics, Vancouver, B.C., Canada, July 23-29, 1998 (to be published in the Proceedings), hep-ph/9808457.
119. **Adler P.D.** — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.3714.
120. **Ширков Д.В.** — ТМФ, 1999, т.119, с.55.
121. Review of Particle Physics — The Europ. Phys. Journal, 1998, v.C3, p.1.
122. **Braaten E.** — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.1606; Phys. Rev., 1989, v.D39, p.1458.
123. **Braaten E., Narison S., Pich A.** — Nucl. Phys. 1992, v.B373, p.581.
124. **Le Diberder F., Pich A.** — Phys. Lett. 1992, v.B286, p.147.
125. **Altarelli G., Nason P., Ridolfi G.** — Z. Phys. C., 1995, v.68, p.257.
126. **Marciano W.J.** — Phys. Rev., 1984, v.D 29, p.580.
127. **Altarelli G.** — Preprint CERN-TH.5290/89, 1989;  
**Bethke S.** — Talk presented at the QCD'94, Montpellier, France, July 7-13, 1994; Preprint PITHA 94/30.
128. **Shirkov D.V.** — Nucl. Phys., 1992, v.B371, p.476.
129. **Ширков Д.В.** — ТМФ, 1992, т.93, с.466.

130. **Shirkov D.V., Mikhailov S.V.** — *Z. Phys.*, 1994, v.C63, p.463.
131. **Bigi I.I., Shifman M.A., Uraltsev N.G., Vainshtein A.I.** — *Phys. Rev.*, 1994, v.D50, p.2234.
132. **Neubert M.** — *Phys. Rev.*, 1995, v.D51, p.5924.
133. **Neubert M.** — *Nucl. Phys.*, 1996, v.B463, p.511.
134. **Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A.** — *Nuovo Cimento*, 1986, v.A92, p.119.
135. **Particle Data Group.** — *Phys. Rev.*, 1994, v.D50, Part I.
136. **CLEO Collaboration** — *Phys. Lett.*, 1995, v.B356, p. 580.
137. **Barnett R. et al.** — *Phys. Rev.*, 1996, v.D54, p.1.
138. **Jones H.F., Ritz A., Solovtsov I.L.** — Preprint Imperial/TP/95-96/62, 1996, 8p, hep-ph/9608284.
139. **Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.** — *Nucl. Phys.*, 1979, v.B147, p.385; *Nucl. Phys.*, 1979, v.B147, p.448; *Nucl. Phys.*, 1979, v.B147, p.519.
140. **Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S.** — *Phys. Rep.*, 1985, v.127, p.1.
141. **Broadhurst D.J., Generalis S.C.** — Open University Preprint OUT-4102-8/R, 1982.
142. **Novikov V.A. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v.38, p.626; *Phys. Rep.*, 1978, v.41C, p.1; **Voloshin M.B., Zaitsev Yu.M.** — *Sov. Phys. (Usp.)* 1987, v.30, p.553.
143. **Voloshin M.B.** — *Int. J. Mod. Phys.*, 1995, v.A10, p.2865; **Jamin M., Pich A.** — *Nucl. Phys.*, 1997, v.B507, p.334.
144. **Kuhn J.H., Penin A.A., Pivovarov A.A.** — Preprint: hep-ph/9801356, 1998.
145. **Sommerfeld A.** — *Atombau und Spektrallinien*. Vieweg, Braunschweig, 1939, v.2.
146. **Сахаров А.Д.** — *ЖЭТФ*, 1948, т.18, с.631.