«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 530.145

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А.В.Маршаков

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва
Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 530.145

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А.В.Маршаков

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва
Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Обзор посвящен точным непертурбативным решениям суперсимметричных квантовых калибровочных теорий поля и их формулировке в терминах интегрируемых систем. Обсуждаются общие свойства интегрируемости в контексте возникновения интегрируемых структур в рамках топологических струнных моделей и (близких к реалистическим) суперсимметричных калибровочных теорий поля. Сначала рассматриваются основные свойства струнного континуального интеграла, которые позволяют понять некоторые общие непертурбативные свойства теории и, в дальнейшем, предположить определение точных непертурбативных эффективных действий как решений систем нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений. Показано, что возникающие нелинейные дифференциальные уравнения относятся к классу интегрируемых моделей типа Кадомцева — Петвиашвили или Тоды, подробно обсуждаются различные интегрируемые системы этого класса и, в особенности, появляющиеся в контексте суперсимметричных калибровочных теорий. Рассматриваются представления Лакса и спектральные кривые этих систем и предлагается некоторая классификация точных непертурбативных решений суперсимметричных теорий поля, основанная на их соответствии интегрируемым моделям.

The review is devoted to the exact nonperturbative solutions to supersymmetric quantum gauge theories and their formulation in terms of integrable systems. We discuss general phenomenon of integrability as it appears in the formulation of effective actions for various models of (topological, low-dimensional) string theories and almost realistic supersymmetric gauge field theories. We consider, first, preliminary basic features of the string theory path integral which allow to understand better nonperturbative properties of the theory and, then, propose the formulation of the exact effective actions based on the systems of nonlinear differential equations. It is demonstrated, that arising nonlinear differential equations are from the class of integrable models of, the so-called, Kadomtsev — Petviashvili and Toda type. We discuss various particular models from this class and especially pay attention to the integrable systems, appearing in the context of multidimensional supersymmetric gauge theories. Their Lax representations and spectral curves are considered in detail and some classification of the exact solutions to $N = 2$ supersymmetric gauge theories is proposed along these lines.

1. ВВЕДЕНИЕ

На протяжении последних десятилетий особый интерес в теоретической физике — теории элементарных частиц — вызывают две фундаментальные проблемы: конфайнмент, или проблема невылетания кварков из адронов, и квантовая теория гравитации. Важнейшей их особенностью является то, что прогресс в понимании и решении этих задач невозможен без исследования свойств неабелевой калибровочной теории поля — квантовой хромодинамики и общей теории относительности в области сильной связи, т.е. там, где оказываются неприменимыми, по сути дела, все стандартные теоретико-полевые методы, сыгравшие свою роль в формулировке квантовой электродинамики и модели электрослабых взаимодействий Вайнберга — Салама и основанные на теории возмущений. Тем самым прогресс в понимании ключевых современных задач физики элементарных частиц и теории гравитации невозможен без разработки существенно новых методов, позволяющих исследовать физические теории в непертурбативном режиме.

Исторически важным моментом явилось осознание того факта, что сложные нелинейные уравнения, лежащие в основе классического предела соответствующих квантовых теорий, являются интегрируемыми, более того, по крайней мере часть их решений может быть построена явно. Так, обнаруженные А.Поляковым и др. инстантонные решения классических уравнений [1, 2] (в особенности, найденные, начиная с работы А.Белавина, А.Полякова, А.Шварца и Ю.Тюпкина, инстантонные решения уравнений Янга — Миллса [3]) оказали существенное воздействие на понимание не только классической, но и квантовой структуры σ-моделей и калибровочных теорий поля [4] (см. также [5] и список литературы в этой работе). Кроме того, именно инстантоны впервые продемонстрировали важность применения техники комплексного анализа [6] при решении современных нелинейных задач теоретической физики.

Появление инстантонов и других непертурбативных решений существенно расширило горизонт теории сильных взаимодействий и ясно продемонстрировало, что физика элементарных частиц не сводится к теории возмущения, рамки которой в квантовой хромодинамике (КХД) ограничены областью высоких энергий (режим асимптотической свободы), где хорошо работает стандартная формулировка теории калибровочных полей [7]. Тем не менее инстантонные вычисления оказались лишь следующим приближением в КХД, явно недостаточным для того, чтобы описать конфайнмент кварков и другие эффекты в области сильной связи. Что касается квантования общей теории относительности, то даже появление суперсимметрии [8] как механизма сокращения расходимостей не позволяло надеяться на возникновение согласованной теории квантовой гравитации в рамках квантовой теории поля (см., например, [9]).

Оказалось, что для построения согласованной картины квантовой гравитации необходимо фундаментальное изменение теории на планковских масштабах, в основе которого лежит переход от точечных к одномерным протяженным объектам — струнам. Появление [10] и развитие теории струн прежде всего привело, как было отмечено Дж.Шерком и Дж.Шварцем [11], к объединению теории калибровочных полей и гравитации в единое целое, т.е.

две главные проблемы перестали существовать независимо, так как в спектре струны естественным образом имеются *безмассовые* векторные поля и поля спина 2. Геометрическая структура теории струн была сформулирована А.Поляковым в виде интеграла по двумерным геометриям [12]:

$$F_g = \int Dg_{ab} D\mathbf{x} e^{-\int_{\Sigma_g} |\partial \mathbf{x}|^2}; \qquad \mathcal{F} = \sum_g \Lambda_{\mathrm{str}}^g F_g, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}$ — поля двумерной конформной теории поля или координаты струны, g_{ab} — двумерные метрики на римановой поверхности Σ_g рода g, классы эквивалентности которых (относительно замен координат на ненаблюдаемых мировых листах) отвечают различным двумерным геометриям, а Λ_{str} — струнная константа связи. По теореме Белавина — Книжника [13] интеграл (1.1) сводится к интегралу по пространству модулей комплексных структур римановых поверхностей специального вида

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} d\mu(y) |f(y)|^2, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{M}_g$ — (конечномерное) пространство модулей комплексных структур римановой поверхности Σ_g, а конкретный вид меры интегрирования зависит от выбора струнной модели. Как будет видно в дальнейшем (разд. 2), формулировка (1.1), (1.2), в принципе, позволяет использовать соображения симметрии для получения непертурбативной информации, хотя по самому своему определению она является пертурбативным разложением в окрестности некоторого вакуума, и интеграл (1.1) вычисляет g-петлевую поправку в теории.

Развитие теории струн привело к появлению более или менее реалистических струнных моделей (см., например, книгу [14] и список литературы в ней), в основе которых лежат представления о реальном мире как о части многомерного пространства-времени (в большинстве случаев десятимерия), оставшиеся измерения которого компактны и представляют собой многообразие специального вида (например, многообразия Калаби — Яо). Структура компактифицированных струнных моделей позволяет предположить, что существует совершенно нетривиальная симметрия (дуальность) [15–17], связывающая между собой различные модели теории струн, в частности, таким образом, что пертурбативный режим в одной из них позволяет делать разумные предположения о непертурбативных эффектах в другой. Другими словами, преобразования дуальности позволяют рассматривать разные струнные модели как пертурбативные разложения (1.1) вокруг различных вакуумов одной и той же теории. Недостатком (на сегодняшний день) этой концепции является пока лишь отсутствие каких бы то ни было строгих в математическом смысле утверждений.

С другой стороны, именно в теории струн (точнее, в некоторых ее простейших моделях) впервые оказалось возможным получить непертурбативную информацию о (точных) корреляционных функциях. Из-за ограниченности прямых методов вычисления — непосредственно из поляковского континуального интеграла (1.1), позволяющих лишь вычислять критические индексы и простейшие корреляционные функции на сфере [19, 20], прогресс был достигнут с помощью изящной дискретизации $c < 1$ струнных моделей или матричных моделей двумерной гравитации [22]:

$$Z[V] = \int DM_1 \ldots DM_k \mathrm{e}^{-V(M_1,\ldots,M_k)} \tag{1.3}$$

(где $DM_\alpha \sim \prod_{i,j} dM_{\alpha,ij}$ обозначает интеграл по конечной матрице, а $V(M_1,\ldots,M_k)$ — обычно полиномиальный потенциал), разложение по петлям в которой воспроизводит (дискретизованную версию) разложения по петлям $c \leq 1$ струнных моделей (c — центральный заряд алгебры Вирасоро — количество степеней свободы соответствующей теории струн). Предложенный В.Казаковым двойной скейлинговый предел формулы (1.3) [23] позволил исследовать непертурбативную статсумму (или, в более общей ситуации, производящую функцию струнных корреляторов) $\mathcal{F} \sim \log Z$, информация о которой, как оказалось, может быть закодирована в нелинейных интегрируемых уравнениях [24–28]. Одним из способов получать дифференциальные уравнения на производящую функцию (1.3) является исследование петлевых уравнений или тождеств Уорда для интеграла (1.3) [25–27] $\langle \delta V \rangle = 0$ (усреднение понимается в смысле статсуммы (1.3)), являющихся, по сути дела, простейшим аналогом тождеств Уорда в калибровочной теории поля [30].

Другим (хотя, как оказалось, связанным с предыдущим) примером прямого появления интегрируемых структур могут служить *топологические* струнные модели [31, 32, 35–37], в которых теория фактически *определяется* тем, что ее корреляционные функции "считают" топологические характеристики пространств модулей комплексных кривых — индексы пересечения, эйлеровские характеристики и т.д. Интеграл по пространству модулей комплексных структур (1.2) (точнее, по его компактификации $\overline{\mathcal{M}}_g$, в качестве которой обычно выбирается компактификация Делиня — Мамфорда) при этом вычисляет классы когомологий $\overline{\mathcal{M}}_g$, а с точки зрения теории поля это означает, что физическим степеням свободы отвечает лишь конечное число топологических операторов, построение которых возможно, например, на языке когомологий БРСТ-оператора [38, 39]. Эффективное построение производящей функции индексов пересечения в виде матричной модели М.Концевичем [40] позволило приступить к формулировке непертурбативных топологических струнных моделей как решений интегрируемых уравнений специального вида [33, 34].

Дальнейшее развитие показало, что именно интегрируемые системы являются адекватным языком для описания непертурбативных решений квантовых теорий. Более того, формулировка в терминах интегрируемых систем является универсальной, т.е. единой для многих струнных моделей, которые *a priori* совершенно не похожи друг на друга. Например, существенный прогресс, достигнутый Э.Виттеном и Н.Зайбергом [41,42] в понимании непертурбативной структуры четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной неабелевой калибровочной теории, позволил сформулировать эти точные непертурбативные результаты на языке, знакомом из $c < 1$ теории струн, т.е. описать их как деформацию решений иерархий интегрируемых уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили или Тоды [43], и указал на существенно струнную природу точных решений квантовой теории поля [44–47].

Следует особо отметить, что, хотя развитие этой области теории струн пока далеко еще от непосредственного обращения к проблемам конфайнмента и реальной квантовой гравитации, заслуживает внимания та универсальность, которая отличает именно данный подход к решению задач неабелевой калибровочной теории поля и общей теории относительности. Идейно подход, основанный на интегрируемых системах, на современном этапе охватывает широкий спектр задач от КХД при высоких энергиях (подход Л.Липатова [48]) до точно решаемых моделей двумерной [23, 34, 40] и трехмерной [49] гравитации.

Преимуществом языка интегрируемых систем является его относительная простота: вместо струнных и полевых систем с бесконечным количеством степеней свободы можно работать с конечномерными (т.к. чаще всего речь идет о редукциях) динамическими системами, для исследования которых существует хорошо разработанный формализм. Наиболее удобным для работы с непертурбативными струнными и полевыми теориями оказался алгебро-геометрический подход (С.Новиков, И.Кричевер, Б.Дубровин и др., см. [50–53]), а также гамильтонов подход ленинградской школы Л.Фаддеева [54, 55] и японский фермионный формализм [56,57], приведший к формулировке решений интегрируемых систем в терминах бесконечномерного грассманиана — универсального пространства модулей [58–60].

Следует также заметить, что развитие непертурбативной квантовой теории поля и теории струн оказало, в свою очередь, существенное воздействие на теорию интегрируемых систем, так как привело к необходимости более детального исследования новых, вообще говоря, сингулярных решений интегрируемых уравнений [34, 40, 63]. Сингулярные свойства этого класса решений (которые в дальнейшем будут называться *струнными* решениями) напрямую связаны с их физическим смыслом — отождествлением с суммой ряда теории возмущений, являющегося в общем случае асимптотическим рядом. Тем не менее оказалось, что в нулевом приближении эти решения отвечают хорошо известным задачам конечнозонного интегрирования, а построение точных решений имеет отношение к уиземовским деформациям конечнозонных решений [36, 51, 61, 62].

Работы последних лет показали (см., например, [23, 25, 34, 40–43, 64, 65]), что существует возможность вычислить *точно* непертурбативные результаты (спектр, корреляционные функции, эффективные действия) в теориях, которые не являются *квантовыми интегрируемыми* моделями [54, 66] в каноническом смысле этого слова. В отличие от "канонических" квантовых интегрируемых систем, где обычно существует (бесконечномерная) квантовая алгебра симметрии, позволяющая отождествить гильбертово пространство теории с пространством ее представлений и наложить достаточное число условий на корреляционные функции, теории, обсуждаемые ниже, не являются квантово-интегрируемыми в этом смысле слова. Однако они представляют несомненный интерес с точки зрения близости к реалистическим моделям теории элементарных частиц и являются точно решаемыми в непертурбативном режиме в следующем смысле.

Для каждого из обсуждаемых примеров *существует* эффективное описание в терминах производящего функционала точных корреляционных функций в теории

$$\langle \mathcal{O}_{i_1} \dots \mathcal{O}_{i_n} \rangle = \frac{\delta^n \mathcal{F}}{\delta a_1 \dots \delta a_n} \tag{1.4}$$

и/или эффективного действия. Следует особо отметить, что метод эффективного действия [67] естествен для формулировки струнных теорий, где все струнные эффекты существенны лишь на малых расстояниях. Эффективная теория может быть сформулирована в терминах (классической) интегрируемой системы. Более того, во всех случаях, рассмотренных ниже, эта интегрируемая система оказывается определенной редукцией иерархии интегрируемых уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили (КП) — первое уравнение иерархии

$$3\frac{\partial^2 U}{\partial {T_2}^2} = \frac{\partial}{\partial T_1}\left(4\frac{\partial U}{\partial T_3} - 12U\frac{\partial U}{\partial T_1} - \frac{\partial^3 U}{\partial {T_1}^3}\right) \tag{1.5}$$

или двумерной решетки Тоды, для которой первое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial T_1 \partial \bar{T}_1} = \mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} - \mathrm{e}^{\phi_n - \phi_{n-1}}, \tag{1.6}$$

хотя, вообще говоря, ограничение класса интегрируемых моделей вызвано лишь тем, что мы имеем дело с наиболее простыми, с этой точки зрения, теориями струн: двумерными $(2D)$ топологическими струнными моделями и $c \leq 1$ теориями, взаимодействующими с двумерной квантовой гравитацией (разд. 2, 3), а также $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными неабелевыми калибровочными теориями поля, возникающими в точечном (полевом) пределе реалистических теорий струн (разд. 4). Эффективная формулировка универсальна в том смысле, что она не зависит от очень многих свойств "затравочной" теории, так, например, от размерности пространства-времени: двумерные, четырехмерные и даже пятимерные теории выглядят практически одинаково с этой точки зрения. Более того, полученные эффективные теории во многом напоминают *топологические* теории поля, обладая рядом свойств, присущих двумерным топологическим теориям, хотя затравочные теории являются заведомо многомерными, а главное — в спектре эффективных теорий имеются безмассовые распространяющиеся частицы.

Говоря более точно, под эффективной непертурбативной формулировкой мы будем понимать построение явной зависимости спектра, корреляционных функций, эффективных действий (т.е. эффективных констант связи) как функций параметров (или модулей) теории, являющихся, как правило, низкоэнергетическими значениями фоновых полей в физическом пространстве-времени. Например, в $4D$ суперсимметричных калибровочных теориях — это вакуумные средние хиггсовских полей $h_k = \frac{1}{k}\langle \mathrm{Tr}\, \phi^k \rangle$, в более общих теориях струн — это модули метрики пространства-времени (например, параметры комплексной или кэлеровской структур), калибровочных полей (модули плоских связностей или инстантонов) и т.п. Задача заключается в нахождении точной непертурбативной зависимости физических величин от этих параметров*. Решение этой задачи существенно упрощается тем, что пространственно-временные модули в теориях струн часто могут быть отождествлены с модулями комплексных многообразий, пространство которых обычно является фактором топологически тривиального многообразия по действию дискретной группы. Действие этой дискретной группы гипотетически отождествляется с преобразованиями дуальности [15–17], связывающими между собой различные пертурбативные разложения струнной теории.

Именно комплексно-аналитическая структура, в первую очередь, выделяет класс теорий, для которого ниже будут сформулированы точные непертурбативные результаты. При этом сразу возникает возможность постановки решаемых технически задач, так как многие результаты могут быть сформулированы в терминах *голоморфных* (или мероморфных) функций. Идея работы с голоморфными функциями восходит к применению комплексного анализа в теории инстантонов [6] и теореме Белавина — Книжника [13] в пертурбативной теории струн. Во-вторых, класс рассматриваемых задач еще более ограничен тем, что в нем модули физических теорий могут быть отождествлены с модулями *одномерных* ($1D$) комплексных многообразий —

---

*Кроме параметрической зависимости от модулей физические величины могут зависеть от топологических (дискретных) характеристик пространств модулей; более того, в простейших топологических струнных моделях существенна именно (и только) эта зависимость, т.е. корреляционные функции являются числами.

(пространственно-временных!) комплексных кривых Σ (или двумерных вещественных многообразий — римановых поверхностей). Здесь необходимо сделать два пояснения: во-первых, пространственно-временные римановы поверхности *a priori* не имеют никакого отношения к мировым листам в теории струн, что, тем не менее, совершенно не мешает при работе с ними использовать тот же самый технический арсенал, что и в пертурбативной теории струн; во-вторых, в принципе, следует ожидать той же самой картины для теорий, где пространства модулей отождествляются с пространствами модулей комплексных многообразий старшей размерности ($K3$, $\dim_{\mathbf{C}} = 3$ многообразий Калаби — Яо и т.д.). Более того, в единой картине теории струн рассматриваемые ниже пространственно-временные комплексные кривые часто следует считать вырожденными случаями многообразий струнной компактификации: когда многообразие Калаби — Яо эффективно вырождается в $1_{\mathbf{C}}D$ кривую Σ [47]. Нетривиальная топологическая структура спектральной кривой Σ является существенно непертурбативной информацией, в теории возмущения спектральная кривая появляется лишь "локально", как масштабный параметр. Это означает, что именно струнные эффекты играют существенную роль в структуре точных непертурбативных решений калибровочной теории поля, а топологические степени свободы, существенные для построения эффективной теории, связаны напрямую с "намотками" струн (и, вообще говоря, D-бран) на нетривиальные циклы многообразий струнной компактификации.

Соотношение между непертурбативными решениями квантовой теории и интегрируемыми системами исследовано детально лишь для некоторых $2D$ топологических теорий и теорий квантовой гравитации, а также для решений Зайберга — Виттена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных неабелевых калибровочных теорий: чистой глюодинамики [41,68], включения взаимодействия с ($N_a = 1$) $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплетом материи в присоединенном представлении калибровочной группы, описываемом в терминах семейства интегрируемых систем Калоджеро — Мозера [69–73]. Когда масса гипермультиплета становится бесконечно большой, он эффективно отщепляется от теории Янга — Миллса, и размерная трансмутация приводит к вырождению эллиптической модели Калоджеро — Мозера в периодическую цепочку Тоды, описывающую чистую четырехмерную $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную глюодинамику [43]. Известно также [74,75], что $N_c = 3$, $N_f = 2$ (N_c, N_f — числа цветов и ароматов соответственно) кривые отвечают интегрируемому волчку Горячева — Чаплыгина, в то время как естественной гипотезой, касающейся семейства моделей $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД [42,76], является ее формулировка в терминах интегрируемых (вообще говоря, неоднородных) $sl(2)$ спиновых цепочек, для которых, опять же, цепочка Тоды является предельным случаем. Идея этого отождествления основана [74] на специальной квадратичной форме алгебраических уравнений, описывающих вложение спектральной кривой в $\mathbf{C}^2$ [42, 76]. Другая возможность [78] — оставаться в рамках динамики цепочки Тоды, меняя граничные условия; на этом пути, однако, встречаются трудности в ситуации, когда $N_f > N_c$.

Поскольку решения формулируются в терминах периодов мероморфных дифференциалов на комплексных кривых (один из возможных выборов координат на пространстве модулей), интегрируемые системы (более того, интегрируемые системы типа КП или Тоды, под которыми мы будем понимать те, в которых лиувиллевский тор (угловые переменные) является вещественным сечением специального комплексного тора — якобиана комплексной кривой) возникают почти по определению, благодаря конструкции Кричевера [50].

На сегодняшний день не существует механизма, который позволяет получать точные непертурбативные результаты, непосредственно стартуя с первопринципов теории струн и квантовой теории поля (возможность получить некоторые непертурбативные результаты, исследуя непосредственно поляковский континуальный интеграл (1.1), будет рассматриваться в разд. 2). Необходимо, однако, отметить бросающуюся в глаза аналогию между возникающими при описании деформации конечнозонных решений уравнениями Уизема — уравнениями гидродинамического типа — и методом ренормгруппы в стандартной теории возмущений [79]. Действительно, масштабная зависимость корреляционных функций связана с их зависимостью от констант связи уравнением первого порядка $\left(\frac{d}{d\log\Lambda} - \sum \beta_i(g)\frac{\partial}{\partial g_i}\right) F(g;\Lambda) = 0$. В точном решении нет явной зависимости от масштаба, и можно было бы считать, что производные по Λ следует заменить на производные по модулям, но даже принимая такую гипотезу, необходимо отметить, что не существует способа определить β-функцию вне рамок теории возмущения. Кроме того, уравнения ассоциативности на эффективное действие скорее приводят к выводу о том, что разгадку механизма возникновения интегрируемых уравнений следует искать в теории струн.

Основные понятия, используемые в обзоре. Струнная теория возмущений (1.1) определена континуальным интегралом [12] по отображениям $\mathbf{x} : \Sigma_g \to X$ мирового листа Σ_g в физическое "пространство-время" X и двумерным геометриям — метрикам g_{ab} в (1.1) или их классам эквивалентности с точностью до репараметризаций — модулям комплексной структуры y на пространстве $\mathcal{M}_g$ в (1.2). Вообще говоря, X не обязано быть четырехмерным пространством Минковского или плоским пространством $\mathbf{R}^4$, оно может иметь нетривиальную метрику (удовлетворяющую в силу двумерных симметрий уравнениям Эйнштейна [67]) или даже быть нетривиальным компактным многообразием (точнее, иметь компактную составляющую), что физически отвечает происхождению внутренних (калибровочных) степеней свободы по схеме Калуцы — Клейна. При этом поляковский интеграл (1.1) следует понимать в *обобщенном* смысле, когда вместо свободной двумерной теории поля $\mathbf{x}$, отвечающей плоскому пространству-времени X, следует рассматривать некоторую общую *двумерную конформную теорию поля* [80], в которой поля, вообще говоря, неявно отвечают σ-модели на нетривиальном многообразии. Аномалия меры интегрирования по двумерной метрике Dg_{ab} также может быть отнесена к гравитационному вкладу в действие двумерной конформной теории, при условии $c_{\text{matter}} + c_{\text{gravity}} - 26 = 0$ двумерная гравитация сокращает конформную аномалию и интеграл (1.1) по-прежнему сводится к (1.2). Отсюда, в частности, следует, что даже при отсутствии материи (чистая) двумерная гравитация является, вообще говоря, нетривиальной теорией струн, и именно такие теории (когда вклад материи мал, $c_{\text{matter}} < 1$, по сравнению с вкладом гравитации) поддаются непертурбативному анализу.

Для конформной теории общего вида следует особо отметить два момента. Во-первых, в теории струн одна и та же конформная теория может отвечать струнам на *разных* многообразиях X_1 и X_2. Такие многообразия называются зеркальными [18], простейшим примером этого случая является свободная теория поля, принимающего значения в окружности: теории на $X_1 = S_R$ и $X_2 = S_{\frac{1}{R}}$ эквивалентны. Во-вторых, несмотря на то, что конформные теории, отвечающие нетривиальным многообразиям, наивным образом не являются свободными, для любой $2D$ конформной теории поля существует техника свободных полей или бозонизация, т.е. пертурбативно теория струн принципиально определена, и интегралы (1.1) и (1.2) могут быть вычислены. Естественно, для конформной теории общего вида это технически очень сложная задача, однако существуют примеры конформных теорий, где интеграл по полям материи и даже возникающий интеграл индуцированной гравитации могут быть вычислены до конца. К таким теориям относятся, прежде всего, свободные

$$S_{CFT} = \int\limits_{\Sigma_g} \bar{\partial}\mathbf{x}\partial\mathbf{x} \equiv \int\limits_{\Sigma_g} \sum_{\mu=1}^{c_{\text{matter}}} \bar{\partial}x^\mu \partial x^\mu \tag{1.7}$$

и некоторые теории с $c < 0$. Наличие "отрицательной" материи приводит к дополнительным сокращениям в мере интегрирования (1.2), что часто позволяет вычислить поляковский континуальный интеграл. Техника бозонизации эффективно сводит вычисления в нетривиальных конформных теориях к вычислениям (достаточно сложных корреляционных функций) в теориях вида (1.7), а более точно с "удлиненным" свободным действием $S_{CFT}(\varphi) = \int \bar{\partial}\varphi\partial\varphi + \alpha_0 R\varphi$, где константа α_0 (для случая многих полей — вектор) связана с центральным зарядом теории $c_{CFT} = 1 - 12{\alpha_0}^2$. Наиболее известным примером конформных теорий этого типа являются так называемые pq-модели [80] с центральным зарядом $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$. Все это приводит к тому, что иногда интеграл (1.1) может быть вычислен явно, и именно примеры таких теорий обсуждаются в этом разделе. Во всех теориях $c_{\text{matter}} < 1$

(в том числе и отрицательный) или целый, а выводы о свойствах теории, сохраняющихся в непертурбативном режиме (корреляционных функциях, к которым нет старших поправок, операторной алгебре), основаны на алгебраической структуре двумерной конформной теории (алгебрах Вирасоро и Каца — Муди [81, 82]) и представлении $2D$ конформных теорий поля свободными полями [83–87].

Как и следовало ожидать, информация, полученная при непосредственном изучении интеграла (1.1), имеет весьма ограниченный характер [19,20,88, 89]. Формулировка непертурбативной теории достаточно не явным образом связана со свойствами теории на мировом листе, и ее можно описать следующим образом. Центральным объектом является производящая функция (1.4) точных физических корреляторов (амплитуд рассеяния), вычисление которой и является главной задачей теории. В случае двумерной гравитации и топологических струнных моделей функционал $\mathcal{F}$ (1.4) является в буквальном смысле функцией, вообще говоря, бесконечного (хотя в данной ситуации и дискретного) набора числовых переменных, и вариационные производные в формуле (1.4) превращаются в обычные частные производные.

Производящая функция зависит от переменных двух типов. Первый тип переменных — источники для физических операторов

$$F_g \to F_g(\mathbf{T}) = \int Dg_{ab} D\mathbf{x} \mathrm{e}^{-S_{CFT}(\mathbf{x}, g_{ab}) + \sum T_k \mathcal{O}_k},$$

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}(\Lambda_{\mathrm{str}}, \mathbf{T}) = \sum_g \Lambda_{\mathrm{str}}^g F_g(\mathbf{T}), \tag{1.8}$$

производные по которым определяют корреляционные функции в теории. Выражение (1.8), безусловно, зависит от выбора базиса $\mathcal{O}_k$ или T_k, и только в специальном базисе (не обязательно удобном с точки зрения формулировки теории на мировом листе) оно может быть элегантно описано на языке нелинейных дифференциальных уравнений или соотношений типа унитарности для корреляторов [25, 26, 28, 32]. Вообще говоря, такие соотношения хорошо известны в традиционной квантовой теории поля (тождества Уорда [30], уравнения Швингера — Дайсона и т.п.), однако в теориях струн ситуация отличается тем, что эти уравнения можно написать в виде *полной* системы *интегрируемых* дифференциальных уравнений, полностью определяющих производящую функцию (1.8). Как функция $\mathbf{T}$, производящая функция (1.4), (1.8) может быть определена лишь в виде формального ряда, коэффициенты которого и отождествляются с корреляционными функциями, а сам ряд имеет, вообще говоря, нулевой радиус сходимости. Этот факт, безусловно, отражает хорошо известные свойства рядов теории возмущения в теории струн и квантовой теории поля, а кроме того, согласован с существующими явными формулами для точных непертурбативных решений, которые, если существуют вообще, имеют обычно интегральную форму и иногда могут быть сведены к матричным интегралам (1.3), т.е. к простейшим аналогам калибровочной теории поля.

Другими параметрами, от которых зависит статсумма или производящая функция, являются физические или пространственно-временные модули теории. Пространство этих параметров обычно конечномерно, в рассматриваемых случаях комплексно и часто может быть интерпретировано как пространство модулей комплексных кривых. Следует особо отметить, что возникающие при этом комплексные кривые или римановы поверхности имеют "пространственно-временную" природу (например, происходят из струнной компактификации) и никак не связаны с мировыми листами в теории струн! Как функция модулей, производящая функция является обычной (например, мероморфной) функцией многих комплексных переменных и часто может быть вычислена более или менее явным образом. Самим модулям можно придать смысл низкоэнергетических значений фоновых полей (хиггсовские средние скаляров, модули физической метрики — комплексные и кэлеровские структуры и т.п.), и, как функция модулей, $\mathcal{F}$ обычно имеет смысл эффективного действия.

В топологической $2D$-гравитации и некоторых топологических струнных моделях (A_p-серии) зависимость от модулей t и источников T практически совпадает ($t+T$-формула [64]). Задачей является нахождение явного вида функции $\mathcal{F}(t,\mathbf{T})$ или хотя бы уравнений, которым она удовлетворяет. В случае топологических теорий эта задача решается явно и ответ выражается через интеграл вида $\int DX \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\, V(X)+\mathrm{Tr}\,\Lambda X}$, где модули t связаны с коэффициентами потенциала $V(X)$, а внешние источники — со следами степеней матрицы Λ. Доказательство $t+T$-формулы является нетривиальной задачей (см. разд. 3).

В общем случае эта зависимость, естественно, различна и интерес представляют обе задачи независимо. В случае эффективной $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории в четырех измерениях существует ответ пока лишь на первый вопрос и чрезвычайно существенным фактом является то, что вильсоновское эффективное действие в безмассовом секторе, являясь функционалом полей, может быть выражено через *функцию* нескольких комплексных переменных (см., например, [41, 42] и ссылки в этих работах). Этот эффект легко понять следующим образом.

Для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории с группой $SU(N_c)$ скалярный потенциал имеет вид $V(\boldsymbol{\phi})=\mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi}^\dagger]^2$, и его минимумы с точностью до калибровочных преобразований отвечают диагональным бесследовым матрицам $\boldsymbol{\phi}=\mathrm{diag}\,(A_1,\ldots,A_{N_c})$, инварианты которых

$$\det(\lambda-\boldsymbol{\phi})=P_{N_c}(\lambda)=\sum_{k=0}^{N_c} S_{N_c-k}\lambda^k \tag{1.9}$$

в количестве, равном рангу группы $\mathrm{rank}\ SU(N_c) = N_c - 1$ (или любой другой набор алгебраически независимых инвариантов, например, $h_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\phi}^k$), параметризуют пространство физических модулей. Эффект Хиггса приводит к появлению массы у внедиагональной части калибровочного поля $\mathbf{A}_\mu$, т.к. $[\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_\mu] = (A_i - A_j)\mathbf{A}_\mu^{ij}$, в то же время диагональная часть остается безмассовой, а калибровочная группа нарушается с $G = SU(N_c)$ до $U(1)^{\mathrm{rank}\,G} = U(1)^{N_c-1}$. Таким образом, безмассовый сектор может быть представлен как $\mathcal{N} = 2$ абелева калибровочная теория, эффективный лагранжиан которой определяется в терминах суперполей $\Phi_i = \varphi^i + \vartheta\sigma_{\mu\nu}\tilde{\vartheta}G^i_{\mu\nu} + \ldots$, вакуумные значения которых совпадают с диагональными элементами матрицы $\boldsymbol{\phi}$. Поэтому функция комплексных переменных $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(A)|_{\sum A_i = 0}$ действительно определяет вильсоновское эффективное действие безмассовых полей, которое получается из нее подстановкой

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} \sim \int d^4\vartheta \mathcal{F}(A_i \to \Phi_i) = \ldots \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} G^i_{\mu\nu} G^j_{\mu\nu} + \ldots \tag{1.10}$$

Что касается массивных возбуждений в $\mathcal{N} = 2$ неабелевой калибровочной теории, то оказывается [41,42], что, по крайней мере, спектр БПС-состояний* связан с функцией $\mathcal{F}$ соотношением $M \sim |\mathbf{na} + \mathbf{ma}_D|$, где $\mathbf{a}_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}}$.

Таким образом, именно знание функции комплексных переменных $\mathcal{F}$ как функции модулей и ее всевозможных производных, например, разложение по источникам $\mathbf{T}$, дает наиболее полную непертурбативную информацию о теории. Ниже будет показано, что по крайней мере в некотором классе задач, общие черты которого описаны в данном разделе, главной целью является нахождение и формулировка свойств производящей функции $\mathcal{F}$, которая от части своих переменных зависит как от модулей комплексной структуры некоторой римановой поверхности.

Основной идеей, как уже было сказано, является отождествление функции $\mathcal{F}$, а также других характеристик физической теории с величинами, имеющими смысл в системах интегрируемых уравнений типа КП/Тоды. Для того чтобы сформулировать эту связь, приведем также некоторые определения из теории интегрируемых моделей. В классе рассматриваемых в данном обзоре задач все возникающие уравнения относятся к иерархиям КП (1.5) и Тоды (1.6), точнее, к их редукциям. Понятие иерархии означает, что динамические системы (1.5) и (1.6) обладают бесконечным количеством интегралов движения, которым можно сопоставить бесконечное количество взаимно коммутирующих (и коммутирующих с первыми (1.5) и (1.6)) потоков. Диф-

---

*БПС-состояниями (Богомольного — Прасада — Зоммерфельда) называются состояния, массы которых пропорциональны центральным зарядам расширенной $\mathcal{N} \geq 2$ алгебры суперсимметрии.

ференциальные уравнения по старшим временам T_k имеют более сложный вид, если их писать как уравнения на функции $U(\mathbf{T})$ и $\phi_n(\mathbf{T})$, но существует более изящный способ задания всей иерархии.

Этот способ основан на вспомогательной линейной задаче для иерархии интегрируемых уравнений

$$\frac{\partial}{\partial T_k}\Psi = B_k\Psi, \tag{1.11}$$

где $B_k = B_k[U;\phi]$ — дифференциальные операторы *только* по T_1 в случае КП (1.5) или разностные операторы по дискретному времени n в случае Тоды (1.6), а решение Ψ вспомогательной линейной задачи называется обычно функцией Бейкера — Ахиезера. К уравнениям (1.11) можно добавить уравнение Лакса

$$\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi, \tag{1.12}$$

которое при редукциях возникает как одно из уравнений цепочки (1.11). Иерархия нелинейных интегрируемых уравнений при этом эквивалентна уравнениям Лакса

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial T_k} = [B_k, \mathcal{L}] \tag{1.13}$$

или условиям совместности (Захарова — Шабата)

$$\left[\frac{\partial}{\partial T_k} - B_k, \frac{\partial}{\partial T_l} - B_l\right] = 0. \tag{1.14}$$

Наиболее универсальным объектом в такой формулировке интегрируемых задач является τ-функция Хироты, удовлетворяющая бесконечной цепочке билинейных дифференциальных (разностных) уравнений и генерирующая решения интегрируемой иерархии, функции Бейкера — Ахиезера и т.п. Например, для иерархии КП

$$\Psi = \mathrm{e}^{\sum T_k\lambda^k}\frac{\tau\left(T_k - \frac{1}{k\lambda^k}\right)}{\tau(T)}; \qquad U(\mathbf{T}) = \partial^2\log\tau(\mathbf{T}); \qquad \ldots \tag{1.15}$$

Аналогичные формулы существуют и для других иерархий.

Иерархии Тоды и КП имеют бесконечное число решений, параметризуемых так называемой точкой бесконечномерного грассманиана [58, 59], или, грубо говоря, функцией двух переменных. Частные решения можно выделять дополнительными условиями, часто имеющими вид дополнительных (в основном линейных) уравнений на τ-функцию.

Особую роль играют конечномерные редукции иерархий интегрируемых уравнений, когда только *конечное* число интегралов движения и потоков $\frac{\partial}{\partial T_k}$

являются независимыми. Красивым примером конечномерных редукций иерархий уравнений КП/Тоды являются так называемые конечнозонные решения, определяемые условиями

$$[\mathcal{L}, \mathcal{A}] = 0, \qquad \mathcal{A} = \sum_k^{\text{finite}} c_k B_k, \tag{1.16}$$

где $\mathcal{L}$ — оператор Лакса (1.12), B_k — операторы эволюции функции Бейкера (1.11), а c_k — некоторый *конечный* набор ненулевых констант. Интегрирование конечнозонных решений называется конструкцией Кричевера [50] и сводится к следующим шагам*.

• Совместный спектр коммутирующих операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ (1.16) задается системой уравнений, описывающих комплексную кривую Σ, в простейшем случае $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \mathcal{A}) = 0$.

• Функция Бейкера — Ахиезера является сечением некоторого расслоения над Σ — в используемых ниже случаях почти всегда линейного расслоения.

• Модули комплексной кривой являются интегралами движения системы (1.16).

• Интегрирующей заменой переменных является преобразование Абеля, и лиувиллевский тор (угловые переменные) является вещественным сечением якобиана кривой Σ.

• Гамильтоновская структура конечнозонного решения формулируется с помощью производящего мероморфного 1-дифференциала dS, периоды которого (интегралы по нетривиальным циклам на римановской поверхности) являются переменными действия (каноническим набором интегралов движения) системы.

Возникающие при этом комплексные кривые задаются алгебраическими уравнениями вида

$$\mathcal{P}(\lambda, w) = 0 \tag{1.17}$$

(одно соотношение на две переменные вида (1.17), где $\mathcal{P}$ – полином, коэффициенты которого являются модулями комплексной структуры, задает одномерное комплексное (или двумерное вещественное) многообразие) или системами уравнений на несколько комплексных переменных. Топологически каждая комплексная кривая характеризуется единственным параметром — родом g (количеством приклеенных "ручек"), при этом для поверхности

*Мы приводим здесь лишь "грубую" картину конечнозонного интегрирования исключительно для пояснения утверждений, сделанных в основном тексте, отсылая за точными математическими формулировками к [50–53].

фиксированного рода Σ_g комплексная структура определяется $3g-3$ параметрами — модулями комплексной структуры, т.е. $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_g = 3g-3$. Конечнозонным интегрируемым системам обычно отвечают g-параметрические семейства комплексных кривых (чтобы размерность пространства модулей, равная количеству независимых интегралов движения, совпадала с размерностью якобиана кривой, т.е. числом угловых переменных). Размерность же якобиана совпадает с количеством глобально определенных голоморфных дифференциалов $d\omega_i$, $i = 1, \ldots, g$, и равна роду поверхности. На поверхности рода g существует $2g$ независимых нестягиваемых циклов (по два вокруг каждой "ручки"), канонический набор которых отвечает разбиению на так называемые A_i, $i = 1, \ldots, g$, и B_i, $i = 1, \ldots, g$, циклы с индексом пересечения $A_i \circ B_j = \delta_{ij}$. Голоморфные дифференциалы канонически выбираются нормированными на $\mathbf{A}$-циклы $\oint_{A_j} d\omega_i = \delta_{ij}$, при этом интегралы по $\mathbf{B}$-циклам дают матрицу периодов $\oint_{B_j} d\omega_i = T_{ij}$. Конечнозонные решения являются наиболее простыми решениями интегрируемых систем, из имеющих отношение к непертурбативным квантовым теориям. Вообще говоря, они представляют собой лишь первое приближение к непертурбативным решениям, являющимся основной темой данного обзора, уже позволяя при этом описать часть информации о физических характеристиках эффективной теории. Кроме того, во многих случаях точные решения можно рассматривать как интегрируемые деформации конечнозонных решений, описываемые иерархиями уравнений Уизема. В тех же случаях, когда решение теории струн может быть найдено точно, оно оказывается плохо определенным решением интегрируемой системы (непериодическим, не убывающим, а, наоборот, растущим на бесконечности и т.п.), но в то же время отвечает минимальной деформации уравнения (1.16) — появлению константы в правой части равенства. Такое дополнительное условие называется струнным уравнением [24], при "продлении" его на всю иерархию это условие принимает вид условия инвариантности τ-функции относительно действия линейных дифференциальных операторов, образующих борелевскую ($n \geq -1$) часть алгебры Вирасоро.

О содержании обзора. Мы начнем с формулировки топологической фазы $2D$-гравитации на основе техники двумерной конформной теории поля и теории свободных полей на римановых поверхностях – мировых листах в теории струн. Показано, что корреляторы в теории топологической гравитации имеют представление в терминах $c_{CFT} = -2$ двумерной конформной теории со специальной материей, взаимодействующей с обычной лиувиллевской гравитацией, а также исследовано обобщение двумерной гравитации на случай высших нелинейных двумерных симметрий, отвечающих W-алгебрам. Рассмотрена геометрическая формулировка $2D$- и W-гравитации, при которой естественным образом возникают объекты из теории интегрируемых систем. Исследованы алгебры наблюдаемых в $2D$- и W-гравитации, в частности, показано, что в секторе открытых струн (или голоморфном секторе модели) существуют замкнутые подалгебры, структура которых определяется *моделью* (суммой всех унитарных представлений с единичным весом) соответствующей конечномерной группы (группы G для W_G-гравитации).

Далее в разд.2 мы переходим непосредственно к точной непертурбативной формулировке квантовых теорий в терминах интегрируемых систем и, для начала, рассматриваем появившийся исторически первым пример — модели квантовой $2D$-гравитации. В п.2.3 показано, как точное непертурбативное решение моделей $2D$-гравитации $(2, 2k+1)$-серии (включающих чистую гравитацию — теорию с $k = 1$) формулируется в терминах решения иерархии уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ), инвариантного относительно действия $n \geq 1$ (борелевской) подалгебры алгебры Вирасоро. В этом разделе впервые приведен логарифм τ-функции интегрируемой иерархии, являющийся производящей функцией для корреляторов непертурбативной струнной теории, а также построено непертурбативное эффективное действие для струнного уравнения, позволяющее поставить вопрос об интерполяции между различными критическими точками $(2, 2k+1)$-серии. В п.2.4 доказано, что существует *явное* решение вирасоровских условий, т.е. имеется представление в виде матричного интеграла для τ-функции, для теории *топологической* гравитации, формально производящая функция которой удовлетворяет тем же уравнениям, что и производящая функция квантовой $2D$-гравитации ($(2, 2k+1)$-серии).

Раздел 3 посвящен непертурбативной формулировке топологических $c < 1$ струнных моделей — теорий, где известны не только формулировка непертурбативного режима в терминах систем интегрируемых уравнений, но и найдены явные решения этих уравнений в интегральной форме, позволяющей, в принципе, получить точный ответ для корреляционной функции. В п.3.1 доказана интегрируемость топологических струнных моделей ($A_{(p-1)}$-серии): а именно, что производящая функция является логарифмом τ-функции редуцированной иерархии Кадомцева — Петвиашвили (КП), удовлетворяющей *струнному уравнению* $\sum\limits_k kT_k \frac{\partial \mathcal{F}^{(p)}}{\partial T_{k-p}} + \sum\limits_{a+b=p} aT_a bT_b = 0$. В п.3.2 явно построены решения топологических струнных моделей и их топологические деформации в теории Гинзбурга — Ландау (т.е. определяемые полиномиальным (супер)потенциалом) в виде матрично-интегральных решений иерархии КП. В п.3.3 рассматривается обобщение конструкции на случай нетопологических решений. Показано, что явные решения топологических теорий являются следствием более общей формулы — преобразования pq-дуальности $\Psi^{(p,q)}(\lambda) = \int d\mu(x) \mathrm{e}^{S^{(p,q)}(\lambda,x)} \Psi^{(q,p)}(x)$, формулировка которого и является центральным местом п.3.3. Наконец, в п.3.4 исследован $c \to 1$ предел непертурбативных топологических решений и построена его производящая функция в терминах τ-функции иерархии двумерной решетки Тоды. Кроме того, в п.3.4 предложена интерпретация полученных результатов с точки зрения струнной теории поля.

Наконец, в разд. 4 мы переходим к физически наиболее интересному случаю — четырехмерным $\mathcal{N}=2$ суперсимметричным калибровочным теориям поля, являющимся точечным (или полевым) пределом более сложных $c>1$ теорий струн. В п.4.1 сформулировано непертурбативное решение $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной глюодинамики в терминах периодических решений цепочки Тоды. Показано, в частности, что модули физических решений (параметры решений классических уравнений движения) в случае $\mathcal{N}=2$ могут быть отождествлены с интегралами движения цепочки Тоды, и существует изящный формализм такого отождествления в терминах комплексных кривых. В п.4.2 рассмотрена эллиптическая деформация цепочки Тоды в модель Калоджеро — Мозера, отвечающая включению взаимодействия $\mathcal{N}=2$ неабелевой калибровочной теории с материей в присоединенном представлении калибровочной группы. В п.4.3 исследована альтернативная деформация цепочки Тоды в (классические) спиновые цепочки, и решение соответствующей периодической задачи отождествлено с непертурбативной формулировкой $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной КХД.

Таким образом, в разд. 4 непертурбативные решения $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной неабелевой калибровочной теории сформулированы в терминах конечнозонных решений уравнений типа КП/Тоды. Более подробно детали связи калибровочных теорий с интегрируемыми системами будут рассмотрены в дальнейшем [90].

2. ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В $2D$-ГРАВИТАЦИИ И СТРУННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

2.1. $2D$- и W-гравитация в формализме конформных теорий и интегрируемые системы типа КП. Отправной точкой при исследовании квантовой гравитации будем считать то, что теория, сводящаяся по определению к интегрированию по всем метрикам (если мы не находимся в спонтанно нарушенной фазе), по крайней мере, наивно является топологической теорией. Оставим пока в стороне детальное обсуждение топологической природы произвольной теории гравитации, здесь будет решена гораздо более скромная задача, а именно будет показано, что топологические корреляционные функции в самом деле возникают в оригинальном поляковском подходе [12,19–21] к пертурбативной квантовой $2D$-гравитации.

Мы продемонстрируем, что наблюдаемые в топологическом секторе [32] двумерной гравитации связаны с операторами *нулевой* размерности с точки зрения конформной теории, а вычисление многопетлевых топологических корреляционных функций имеет отношение к проблеме представления свободными бозонными полями бозонных систем первого порядка — так называемых $\beta\gamma$-систем [83, 86, 87].

Сформулированные ниже результаты основаны на следующих *постулатах* конформного подхода к двумерной гравитации [19–21].

• Выбор конформной структуры в двумерии эквивалентен выбору комплексной структуры: в координатах z, $\bar{z}$ на поверхности фиксированного рода g метрика g_{ab} может быть заменена на поле Лиувилля $\phi_{\mathcal{L}}$: $g_{ab} = \mathrm{e}^{\phi_{\mathcal{L}}}(g_0)_{ab}$ и духи bc — антикоммутирующие поля спина 2 и -1 и им комплексно-сопряженные. Действие также зависит от опорной метрики $g_0 = g_0(y)$, являющейся функцией модулей комплексной структуры ($\{y\}$ — координаты на $\mathcal{M}_g$ [12, 13]).

Для системы из конформной теории "материи", с действием $S_{CFT}\{\varphi, g\}$, центральным зарядом c, и $2D$-гравитации поляковский континуальный интеграл (1.1) [12, 19, 20] принимает вид

$$F_g\{\mathcal{K}\} = \int\limits_{\Sigma_g} Dg_{ab}\ \mathrm{e}^{-S_{gravity}\{g_{ab}\}} \int D\varphi\ \mathrm{e}^{-S_{CFT}\{\varphi, g_{ab}\}} \tilde{\mathcal{K}}\{\varphi, g_{ab}\} =$$

$$= A_g \int\limits_{\mathcal{M}_p} dy \int D\phi_{\mathcal{L}} D\varphi\ \mathrm{e}^{-\frac{25-c}{48\pi}\int_{d^2z}\left(\frac{1}{2}|\partial\phi_{\mathcal{L}}|^2 + R_0\phi_{\mathcal{L}}\right) - S_{CFT}\{\varphi, g_0\}} \times$$

$$\times \int \left| Db\ Dc\ \mathrm{e}^{\int b\bar{\partial}c} \right|^2 \mathcal{K}\{\varphi, b, c, \phi_{\mathcal{L}}\}, \tag{2.1}$$

где $R_0 = \partial\bar{\partial}\log g_0$, $|\partial\phi_{\mathcal{L}}|^2 \equiv \partial\phi_{\mathcal{L}}\bar{\partial}\phi_{\mathcal{L}}$, а $\tilde{\mathcal{K}}\{\varphi, g_{ab}\}$ обозначает некоторый набор вершинных операторов в теории *. Коэффициент $\frac{25-c}{48\pi}$ перед действием Лиувилля в правой части (2.1) определяется из условия сокращения конформной, голоморфной и гравитационной аномалии [12, 13, 19, 20]. Константа A_g зависит от выбора нормировки континуального интеграла (2.1) и, вообще говоря, не фиксируется в поляковской теории возмущения. Вопрос о фиксации этой нормировки (точнее, относительной нормировки F_g, отвечающих разным родам) решается лишь путем наложения нелинейных уравнений на производящую функцию и будет рассматриваться ниже.

• Основной постулат заключается в том, что $D\phi_{\mathcal{L}}$ — мера для *свободного* скалярного поля, т.е. определяется нормой $\|\delta\phi\|^2 = \int\limits_{d^2z} |\delta\phi|^2$, а не $\int\limits_{d^2z} |\delta\phi|^2 \mathrm{e}^{\phi}$.

Основной (хотя и не вполне убедительный) аргумент в пользу этого постулата — связь $2D$-гравитации с редукцией Дринфельда — Соколова $SL(2, \mathbf{R})$

---

* $\mathcal{K}$ отличается от $\tilde{\mathcal{K}}$ фактором $\prod\limits_{i=1}^{3g-3} \left| \int\limits_{d^2z} \mu_i b \right|^2$, где μ_i — $(-1, 1)$-дифференциалы Бельтрами, связанные с конкретным выбором координат y_i на пространстве модулей $\mathcal{M}_g$.

модели Весса — Зумино — Новикова — Виттена (ВЗНВ) или геометрическим квантованием алгебры Вирасоро [21, 87], из которой следует $SL(2)$-инвариантная мера интегрирования $D\phi_{\mathcal{L}} \sim \prod_z \frac{dF}{F'}(z) \sim (\det\partial)^{-1}\prod_z d\phi_{\mathcal{L}}(z)$, $F'(z) = \partial F(z) = \mathrm{e}^{\phi_{\mathcal{L}}(z)}$, в то время как $\prod_z \mathrm{e}^{\phi_{\mathcal{L}}(z)} d\phi_{\mathcal{L}}(z)$ отвечает $\prod_z \frac{dF}{F'^2}$, которая *не* инвариантна относительно дробно-линейных преобразований $F \to \to \frac{aF+b}{cF+d}$. Кроме всего прочего, этот аргумент применим лишь к "голоморфному квадратному корню" из $D\phi_{\mathcal{L}}$, а не к самой мере.

• Не все наблюдаемые в конформной теории в правой части (2.1) имеют смысл наблюдаемых в квантовой гравитации. Только проинтегрированные по поверхности (1-мерные) операторы или операторы нулевой размерности могут появиться как операторы $\mathcal{K}$ — они не зависят от положения точек на мировой поверхности, например, $\int_{d^2z} \mathcal{O}_\Delta\{b,c,\varphi\}\mathrm{e}^{A_\Delta\phi_{\mathcal{L}}}$, где $\mathcal{O}_\Delta$ — оператор размерности Δ из сектора материи, а A_Δ подбирается так, что

$$\Delta_{\mathcal{L}} + \Delta = 1, \tag{2.2}$$

где размерность лиувиллевской части $\mathrm{e}^{A_\Delta\phi_{\mathcal{L}}}$ определяется тензором энергии-импульса поля Лиувилля

$$T_{\mathcal{L}} = \frac{25-c}{12}\left(-\frac{1}{2}(\partial\phi_{\mathcal{L}})^2 + \partial^2\phi_{\mathcal{L}}\right); \qquad \Delta_{\mathcal{L}} = -\frac{6}{25-c}A_\Delta^2 + A_\Delta \tag{2.3}$$

(заметим, что $\phi_{\mathcal{L}}(z,\bar z)\phi_{\mathcal{L}}(0,0) = -\frac{12}{25-c}\log\ z\bar z + \ldots$). Решая (2.2) относительно A_Δ, получаем

$$A_\Delta = \frac{1}{12}\left[25 - c - \sqrt{(25-c)(1-c+24\Delta)}\ \right], \tag{2.4}$$

где знак перед корнем выбран так, что $A_\Delta = 0$ при $\Delta = 1$.

Рассмотрим операторы, не зависящие от материи. Простейшие локальные операторы, построенные из духов bc, имеют вид

$$s_n(z) = b\ \partial b \ldots \partial^{n-2}b(z),\quad n > 1; \qquad s_n(z) = c\ \partial c \ldots \partial^{|n|}c(z),\quad n < 1;$$

$$\Delta(s_n) = 2(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} - 1 \tag{2.5}$$

или, в представлении одного бозонного поля Φ

$$|b|^2 = \mathrm{e}^{i\Phi};\ \ |c|^2 = \mathrm{e}^{-i\Phi};\ \ T_{bc} = -\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 - i\left(j - \frac{1}{2}\right)\partial^2\Phi;\ \ |s_n|^2 = \mathrm{e}^{i(n-1)\Phi}. \tag{2.6}$$

Ситуация сильно упрощается, если операторы $\sigma_n = \mathrm{e}^{B_n \phi_{\mathcal{L}}} |s_n|^2$ имеют *нулевую* размерность и при $c = -2$. Действительно, при этом вместо (2.2) и (2.4) имеем

$$\Delta_{\mathcal{L}} + \Delta = 0; \qquad B_\Delta = \frac{1}{12}\left[25 - c - \sqrt{(25-c)(25-c+24\Delta)}\right], \tag{2.7}$$

откуда следует, что

$$B_n = \frac{1}{12}\left(25 - c - \sqrt{(25-c)(1-c+12[n^2+n])}\right) = \frac{3}{2}(1-n). \tag{2.8}$$

Топологический оператор может быть записан в виде

$$\sigma_n = \mathrm{e}^{B_n \phi_{\mathcal{L}}} |s_n|^2 = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(1-n)\phi_{\mathcal{L}}} |s_n|^2 = \mathrm{e}^{(1-n)(\Phi_{\mathcal{L}} - i\Phi)} \tag{2.9}$$

(где введено нормированное поле Лиувилля $\Phi_{\mathcal{L}} = \sqrt{\frac{25-c}{12}}\phi_{\mathcal{L}} = \frac{3}{2}\phi_{\mathcal{L}}$) и, очевидно, имеет нулевую размерность. В отсутствие гравитационной аномалии (случай теории (2.1)) корреляторы операторов нулевой размерности не зависят от положения на поверхности и могут играть роль (части) наблюдаемых в квантовой гравитации.

Операторы σ_n обладают важным свойством: любой их набор $\prod_{i=1}^{N} \sigma_{n_i}(z_i, \bar{z}_i)$, удовлетворяющий правилу отбора $\sum_{i=1}^{N} gh\#(\sigma_{n_i}) = \sum_{i=1}^{N}(n_i - 1) = 3g - 3 = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_g$ по духовому числу, *автоматически* удовлетворяет закону сохранения заряда по полю Лиувилля

$$\sum_{i=1}^{N} A_{n_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{3}{2}(1-n_i) = \frac{25-c}{6}(1-g) = \frac{9}{2}(1-g). \tag{2.10}$$

Это замечательное совпадение происходит только при выделенном значении $c = -2$.

Легко проверить, что древесные ($g = 0$) ненулевые (т.е. удовлетворяющие правилу отбора (2.10)) корреляторы операторов σ_n равны константе — вклад духов в точности сокращается вкладом поля Лиувилля. Это не столь очевидно для многопетлевых корреляционных функций: чтобы обеспечить сокращение между bc- и лиувиллевскими вкладами для старших родов $g > 0$, $\phi_{\mathcal{L}}$ следует рассматривать не как "обычное" скалярное поле со значениями в вещественных числах. Проблема заключается в сокращении инстантонного сектора поля $\Phi - bc$-системы, вклад которого описывается Θ-функцией в следующей формуле:

$$\left\langle \prod_i \mathrm{e}^{i(n_i-1)\Phi(\xi_i)} \right\rangle \sim$$
$$\sim \prod_{i<j} E(\xi_i,\xi_j)^{(1-n_i)(1-n_j)} \Theta\left(2\sqrt{2}\left(\sum_i (1-n_i)\xi_i + 3\sqrt{2}\Delta\right) \mid 4T\right), \quad (2.11)$$

где $E(\xi_i,\xi_j)$ — главная форма на поверхности старшего рода (аналог $\frac{1}{\xi_i-\xi_j}$ на сфере), а Θ обозначает тэта-функцию Римана на якобиане (g-мерном торе) поверхности рода g (см., например, [52, 91, 92]). Оказывается, гораздо более естественно рассматривать поле $\phi_{\mathcal{L}}$ как возникающее при бозонизации $\beta\gamma$-систем и имеющее нетривиальное глобальное поведение при $p > 0$ (см. подробности в [86,87]). В отличие от обычного скалярного поля корреляторы $\Phi_{\mathcal{L}}$ (рассматриваемого как поле, возникающее при бозонизации $\beta\gamma$-системы) вычисляются по формуле [86]:

$$\langle \xi(z) \prod_i \mathrm{e}^{(1-n_i)\Phi_{\mathcal{L}}(\xi_i)} \rangle \sim \prod_{i<j} E(\xi_i,\xi_j)^{-(1-n_i)(1-n_j)} \times$$
$$\times \left(\Theta\left(2\sqrt{2}(\sum_i (1-n_i)\xi_i + 3\sqrt{2}\Delta) \mid 4T\right)\right)^{-1}, \quad (2.12)$$

которая сокращает нетривиальные множители в (2.11) с точностью до константы.

В приведенном выше рассуждении обычная духовая система может быть легко заменена на произвольную систему антикоммутирующих полей спина j ($j \neq 2$) – $b_j c_{1-j}$ (частный случай $j = 0$ обозначим, следуя [83], как $\eta\xi$-систему ($\eta = b$ — поле спина 1), что отвечает весьма специальному случаю материи с отрицательным центральным зарядом $c = -2$). Для случая $c = -2$ конформной материи, реализованной как $\eta\xi$-система, полное действие имеет следующий вид:

$$S_{\text{total}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{d^2z} \left(\frac{1}{2}\left|\partial\Phi_{\mathcal{L}}\right|^2 + \frac{3}{2}R_0\Phi_{\mathcal{L}} + \eta\bar{\partial}\xi + \text{c.c.} + b\bar{\partial}c + \text{c.c.}\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{d^2z} \left(\beta\bar{\partial}\gamma + b\bar{\partial}c + \text{c.c.}\right). \quad (2.13)$$

Члены, стоящие перед $b\bar{\partial}c$, дают в точности действие, возникающее при бозонизации *коммутирующей* $\beta\gamma$-системы со спином $j = 2$ ($\beta = \partial\xi \mathrm{e}^{\Phi_{\mathcal{L}}}$, $\gamma = \eta \mathrm{e}^{-\Phi_{\mathcal{L}}}$). Таким образом, полная теория превращается в комбинацию bc- и $\beta\gamma$-систем с одним и тем же спином $j = 2$. Довольно естественно предположить, что такая суперсимметричная комбинация представляет собой топологическую теорию.

Мера в континуальном интеграле для подобной $c = -2$ теории с $2D$-гравитацией может быть переписана как

$$Dg_{ab}D(c = -2\ CFT) = (d\mu(y)DbDcD\phi)(D\xi D\eta)$$

или

$$d\mu(y)(DbDc)(D\phi D\xi D\eta) = d\mu(y)(DbDc)(D\beta D\gamma). \tag{2.14}$$

Таким образом, оригинальный континуальный интеграл переписывается в форме интеграла для $bc - \beta\gamma$-системы.

Предложенный подход непосредственно обобщается и на теории с более богатой симметрией на мировом листе — так называемые W-струны, где внутренняя геометрия формулируется в терминах W-гравитации, связанной с расширенными алгебрами Вирасоро или W-алгебрами [93, 94]. W-алгебры тесно связаны с теорией интегрируемых систем [95] (W_N-алгебры с N-редукциями иерархии КП: иерархиями КдФ ($N = 2$), Бусинеска ($N = 3$) и т.п.). Основной целью является получение непертурбативной формулировки или "просуммированной" теории возмущений, основанной на технике *универсального пространства модулей* — бесконечномерного грассманиана [58,59], параметризующего различные решения интегрируемых систем типа КП или Тоды. W-геометрия приводит к появлению вирасоровских условий в физическом пространстве-времени [25–27] (в общем случае, буквально, W-условий: в дальнейшем, если не оговаривается специально, вирасоровскими условиями будем называть условия инвариантности относительно действия "борелевской" $W_{N,k\geq -N+1}$ части генераторов именно W-алгебр, являющихся, буквально, генераторами алгебры Вирасоро только при $N = 2$), возникающих из W_∞-симметрий грассманиана [59, 60].

Начнем с представления топологического сектора W-гравитации в терминах свободных полей. Двумерная гравитация определяется континуальным интегралом (2.1), и, как было показано выше, простейший топологический пример отвечает специальному выбору в (2.1) $\eta\xi$-материи (2.13), при котором топологический подсектор (2.13) формулируется в терминах $j = 2$ bc- и $\beta\gamma$-систем

$$S = S_{\text{gravity}} + S_{\text{matter}} = \int b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma + \text{c.c.}, \tag{2.15}$$

где использованы правила бозонизации

$$\beta = \mathrm{e}^{-\phi}\partial\xi\ , \qquad \gamma = \mathrm{e}^{\phi}\eta\ ,$$

$$c_{\beta\gamma} = -c_{bc} = 2(6j^2 - 6j + 1) = 26 = c_{\text{matter}} + c_{\text{Liouville}}. \tag{2.16}$$

Очевидно, как эти формулы обобщаются на случай W-гравитации. Топологическое действие (2.15) имеет следующий вид:

$$S_{\mathrm{W-gravity}} + S_{\mathrm{matter}} = \int \sum_{j=2}^{N} (b_j \bar{\partial} c_{1-j} + \beta_j \bar{\partial} \gamma_{1-j} + \text{c.c.}) =$$

$$= \int \sum_{j=2}^{N} \left(b_j \bar{\partial} c_{1-j} + \eta \bar{\partial} \xi + \text{c.c.} + \frac{1}{2} |\partial \phi_j|^2 + \left(j - \frac{1}{2} \right) R_0(y) \phi_j \right). \qquad (2.17)$$

Заметим сначала, что полный центральный заряд системы W-духов

$$c_N = \sum_{j=2}^{N} -2(6j^2 - 6j + 1) = 2(1-N)(2N(N+1)+1) \qquad (2.18)$$

(в частности, $c_2 = -26$, $c_3 = -100$, и т.д.) ограничивает возможные значения центрального заряда W-алгебры

$$c_{W_N} = \sum_{j=2}^{N} \left\{ 1 + 12 \left(\frac{j-1}{2} \right)^2 \right\} = 4(N-1)(N^2+N+1) \qquad (2.19)$$

(для $N = 2$ формула (2.19) воспроизводит “топологический” вирасоровский центральный заряд $c = 28$). Число нулевых мод $\{b_j,\ c_{1-j}\}$ духовых полей равно (комплексной) размерности пространства W-модулей. Из теоремы Римана — Роха следует, что

$$\sum_{j=2}^{N} \# b_j^{(0)} = (g-1) \sum_{j=2}^{N} (2j-1) = (g-1)(N^2-1) = (g-1) \dim SL(N) \qquad (2.20)$$

(для $N = 2$, $(g-1) \dim SL(2) = 3g - 3 = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_g$ совпадает с размерностью пространства модулей комплексных структур). Равенство (2.20) было отмечено Н.Хитчиным при изучении пространств модулей плоских $SL(N, \mathbf{R})$ связностей [96] и указывает на связь пространств W_G-модулей и плоских G-связностей на римановых поверхностях.

Наиболее общее выражение для континуального интеграла в конформной W-гравитации имеет вид (ср. с (2.1)):

$$\int\limits_{\mathcal{M}_g} \{dy\} \int D\phi \ \mathrm{e}^{-\int_{d^2 z} \left(\frac{1}{2} |\partial \phi|^2 + \beta_0 R_0(y) \boldsymbol{\rho} \phi + \sum_\alpha \mathrm{e}^{\boldsymbol{\alpha} \varphi} \right)} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{N} \int \left| D b_j D c_{1-j} \, \mathrm{e}^{\int b_j \bar{\partial} c_{1-j}} \right|^2 \int D\varphi \ \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{matter}}\{\varphi, g_0\}} \mathcal{K}\{\varphi; \{b_j\}, \{c_{1-j}\}, \phi\}. \qquad (2.21)$$

Перейдем теперь к рассмотрению простейшего примера, позволяющего лучше понять свойства (классической) W-симметрии. Деформируем статсумму теории с W-симметрией

$$\langle\langle 1\rangle\rangle \equiv \langle \mathrm{e}^{\int \mu_2 T+\mu_3 W_3+\ldots}\rangle = \int \mathrm{e}^{-S}\mathrm{e}^{\int \mu_2 T+\mu_3 W_3+\ldots}, \tag{2.22}$$

где $\mu_n d\bar{z}(dz)^{-n}$ — обобщенные дифференциалы Бельтрами, и рассмотрим сначала случай, когда только μ_2 и μ_3 не равны нулю. Вычислим деформацию в первом порядке

$$\bar{\partial}u_2 \equiv \bar{\partial}\langle T(z)\rangle = \int d^2\xi\ \partial_{\bar{z}}\{\mu_2(\xi)\langle T(z)T(\xi)\rangle + \mu_3(\xi)\langle T(z)W(\xi)\rangle\} + O(\delta y^2) =$$

$$= -\frac{c}{12}\partial^3\mu_2 - 2u_2\partial\mu_2 - \mu_2\partial u_2 - 3\partial\mu_3 u_3 - 2\mu_3\partial u_3 + \ldots, \tag{2.23}$$

где

$$u_2(z) = \langle T(z)\rangle, u_3(z) = \langle W_3(z)\rangle, \ldots, u_n(z) = \langle W_n(z)\rangle, \tag{2.24}$$

а c — центральный заряд. Аналогично

$$\bar{\partial}u_3 = 3\partial\mu_2 u_3 + \mu_2\partial u_3 + \frac{c}{360}\partial^5\mu_3 + \frac{1}{3}\partial^3\mu_2 u_2 + \frac{1}{2}\partial^2\mu_3\partial u_2 +$$

$$+\partial\mu_3\left[2b^2\Lambda + \frac{3}{10}\partial^2 u_2\right] + \mu_3\left[b^2\partial\Lambda + \frac{1}{15}\partial^3 u_2\right]. \tag{2.25}$$

При $\mu_3 = 0$, $\mu_2 \equiv \mu$, $u_2 \equiv u$ формула (2.23) превращается в

$$-\bar{\partial}u = 2\partial\mu\ u + \mu\partial u + \frac{c}{12}\partial^3\mu. \tag{2.26}$$

Это равенство можно рассматривать как условие совместности вспомогательной линейной задачи

$$\left(\frac{c}{6}\partial^2 + u\right)\Psi_{-\frac{1}{2}} = 0; \qquad \left(\bar{\partial} + \mu\partial - \frac{1}{2}\partial\mu\right)\Psi_{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{2.27}$$

где $\frac{c}{6}$ — известный квазиклассический коэффициент, а $\Psi_{-\frac{1}{2}}$ обозначает $-\frac{1}{2}$-дифференциал. Совместность этих условий имеет смысл согласованности комплексной и проективной структур. Выбирая $\mu = \bar{\partial}\epsilon$, легко заметить, что последнее равенство в (2.27) является простым следствием закона преобразования $-\frac{1}{2}$-дифференциала

$$\delta\Psi_{-\frac{1}{2}} = \epsilon\partial\Psi_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\partial\epsilon\Psi_{-\frac{1}{2}}. \tag{2.28}$$

Для W_3-тождества Уорда (2.25) вспомогательная линейная задача имеет вид

$$\left(\frac{c}{24}\partial^3 + u_2\partial + \frac{1}{2}\partial u_2 + u_3\right)\Psi_{-1} = 0,$$

$$\left(\bar\partial + \mu_2\partial - \partial\mu_2 - \frac{1}{6}\partial^2\mu_3 + \frac{1}{2}\partial\mu_3\partial - \mu_3\left[\partial^2 - \frac{16}{c}u_2\right]\right)\Psi_{-1} = 0 \qquad (2.29)$$

(с учетом перенормировки $\mu_3 \to \sqrt{\frac{2}{5}}\mu_3$, $u_3 \to \sqrt{\frac{5}{2}}u_3$; коэффициенты в (2.29) упрощаются для специального значения $c = 24$, которое будет использоваться ниже). Второе уравнение в (2.29) отвечает следующему закону преобразования:

$$\delta\Psi_{-1} = \epsilon_2\partial\Psi_{-1} - \epsilon_3(\partial^2 - \frac{2}{3}u_2)\Psi_{-1} + \epsilon\text{-derivative terms}, \qquad (2.30)$$

которое *явно зависит* от "внешнего поля" u_2. В этом заключается главное отличие между случаями W_2 и старших W_n. Общая форма преобразований (2.30) имеет вид

$$\delta f = \sum \epsilon_n D_n(u_0, \ldots, u_{n-1})f + \epsilon\text{-derivative terms}, \qquad (2.31)$$

где

$$D_n(u_0, \ldots, u_{n-1}) = \partial^n + u_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + u_0 \qquad (2.32)$$

— некоторые дифференциальные операторы n-го порядка. Появление в данной ситуации операторов (2.32) с нетривиальными коэффициентами подразумевает связь с иерархией КП и алгеброй псевдодифференциальных операторов [97]:

$$L_{KP} = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\partial^{-i}; \qquad (L^n_{KP})_+ = \partial^n + \ldots + u_0. \qquad (2.33)$$

Действительно, тривиальный дифференциальный оператор ∂^n отвечает выбору тривиальной точки грассманиана $\mathcal{W}_0 = \{1,\, \lambda,\, \lambda^2,\, \lambda^3, \ldots\}$, в то время как дифференциальный оператор общего вида (2.32) отвечает, вообще говоря, любой точке грассманиана. Таким образом, естественно рассматривать функции на римановой поверхности как объекты, зависящие от точки грассманиана. Возьмем, например, некоторую функцию на кривой и представим ее (локально) в виде интеграла Фурье или Лапласа $f(\xi) = \int \mathrm{e}^{\lambda\xi}\hat f(\lambda)d\lambda$. Теперь эту функцию можно поднять до сечения некоторого расслоения над грассманианом, задаваемого потоками иерархии КП $f(t_1, \ldots, t_n) = \int \mathrm{e}^{\lambda t_1 + \ldots + \lambda^n t_n + \cdots}\hat f(\lambda)d\lambda$, где $t_1 \equiv \xi$. Тогда симметрии, отвечающие действию дифференциальных операторов старшего порядка по ξ, связаны с действием потоков иерархии КП $\partial_\xi^n f = \partial_{t_1}^n f = \partial_{t_n} f$ на выражение в тривиальной точке грассманиана. В произвольной точке грассманиана вместо выражения следует написать преобразование

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \int \Psi_{\mathcal{W}}(\lambda, \{t_n\}) \hat{f}(\lambda) d\lambda, \tag{2.34}$$

где $\Psi_{\mathcal{W}}(\lambda, \{t_n\})$ — некоторая функция Бейкера — Ахиезера. При такой замене появляются нетривиальные потоки

$$\partial_{t_n} f = (\partial^n + u_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + u_0) f, \tag{2.35}$$

что является следствием перехода к общей точке $\mathcal{W}$. На самом деле, общая точка грассманиана отвечает W_∞-гравитации [59]. Более часто встречающийся случай *конечных* W_N отвечает специальным редукциям W_∞. Рассмотрим, например, специальную редукцию функции Бейкера — Ахиезера

$$\Psi_{\mathcal{W}}(\lambda, \{t_n\}) \mathrm{e}^{\sum \lambda^k t_k} \frac{\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, \ldots, t_n - \frac{1}{n\lambda^n}, \ldots)}{\tau(t_1, \ldots, t_n, \ldots)} =$$

$$= \mathrm{e}^{\sum t_n \lambda^n} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\{t_n\}) \lambda^{-i} \right], \tag{2.36}$$

такую, что сумма в правой части *конечна* — порядка N. Соответствующая τ-функция выражается через решения уравнения $(\partial^N + w_1\partial^{N-1} + \ldots + w_N) f_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$ [98], $\tau = \det_{ij} f_i^{(j-1)}$. Нетрудно вычислить соответствующую Ψ-функцию:

$$\Psi(\lambda, t_1, \ldots, t_n, \ldots) = \mathrm{e}^{\sum \lambda^k t_k} \frac{\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, \ldots, t_n - \frac{1}{n\lambda^n}, \ldots)}{\tau(t_1, \ldots, t_n, \ldots)} =$$

$$= \mathrm{e}^{\sum \lambda^k t_k} \left(1 + \frac{w_1}{\lambda} + \ldots + \frac{w_N}{\lambda^N} \right), \tag{2.37}$$

где $w_{N-i} = \det_{kl} f_k^{(l)} \Big|_{l \neq i} \cdot \left(\det_{kl} f_k^{(l-1)} \right)^{-1}$. $GL(N)$-преобразования функций f_i не меняют значения Ψ-функции. Налагая дополнительное условие $w_1 = 0$, убеждаемся, что $\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = 0$. Существует простое соотношение между выражениями w_n из (2.37) и u_n из (2.32). Разлагая логарифм в обеих частях равенства (2.37) в ряд по $\frac{1}{\lambda}$ и пользуясь равенством $\partial_{t_1}\partial_{t_n} \log \tau = (L_{KP}^n)_{-1}$ (т.е. просто коэффициент перед членом с ∂^{-1}), немедленно получаем

$$w_2 = \partial_{t_1}^2 \log \tau + \partial_{t_2} \log \tau; \quad w_3 = \partial_{t_1}^3 \log \tau + \partial_{t_1}\partial_{t_2} \log \tau + \partial_{t_3} \log \tau; \quad \ldots \tag{2.38}$$

Рассмотрим теперь случай, когда независимой функцией является только u_2 (т.е. $\widehat{SL(2)}$- или КдФ-редукция КП). Тогда $\partial_{t_2}\log\tau = 0$ и $w_2 = u_2$. Аналогично для $\widehat{SL(3)}$-редукции $\partial_{t_3}\log\tau = 0$ и $w_3 = \frac{1}{2}\partial u_2 + u_3$.

2.2. Алгебры наблюдаемых в 2D- и W-гравитации. Перейдем теперь к рассмотрению *алгебр наблюдаемых* в $c = 1$ теориях $2D$-гравитации и теориях W-гравитации с целым центральным зарядом. Эти алгебры можно рассматривать как основные инвариантные характеристики топологических струнных моделей, в том числе *вне* рамок теории возмущений, так как они, в частности, не зависят от порядка члена в пертурбативном разложении. В обсуждаемом подходе примарные поля двумерной конформной теории — (расширенной) алгебры Вирасоро, "одетые" с помощью лиувиллевских полей и духов, являются представителями классов БРСТ-когомологий [38, 100] или физическими операторами. С точки зрения лагранжевского подхода это заметное упрощение, так как множество примарных полей, как правило, обладает дополнительными структурами или симметриями, не заметными при рассмотрении всех полей двумерной конформной теории. Здесь будет показано, что примером подобной структуры является, по сути дела, обнаруженная [101] в $SU(2)$-инвариантной точке $c = 1$ конформной теории *модель* группы $SU(2)$, т.е. прямая сумма всех унитарных представлений $SU(2)$ старшего веса, в которую каждое представление входит только один раз. Структура *модели* сохраняется при "одевании" полем Лиувилля и объединяет некоторый класс наблюдаемых в соответствующей струнной модели, а более точно — в секторе открытых струн. Более того, эта структура определяет до некоторой степени и алгебру наблюдаемых в соответствующей струнной теории. Ниже будет предложено естественное обобщение этой структуры на произвольные группы G (ADE-серии), физически отвечающие $c = \mathrm{rank}\, G$ W_G-гравитации.

Конструкция [101] выглядит следующим образом.

1. Рассмотрим скалярное поле (материи) X, компактифицированное на окружность радиуса $r = \sqrt{2}$ (т.е. $X \sim X + 2\pi r = X + 2\pi\sqrt{2}$), с тензором энергии-импульса $-\dfrac{1}{2}(\partial X)^2$. При таком радиусе очевидная симметрия $U(1)\times U(1)$ возрастает до $SU(2)\times SU(2)$ и мы можем рассмотреть киральный сектор с $SU(2)$-симметрией. Это отвечает самодуальной точке $c = 1$ гауссовской модели [102], где $SU(2)\times SU(2)$ естественно действует на вирасоровские примарные поля. Ниже мы рассмотрим голоморфный сектор в такой теории (сектор открытых струн), в котором естественно действует "левая" (или "правая") группа $SU(2)$. При этом все киральные примарные вершинные операторы в теории образуют *модель* $SU(2)$: $M[SU(2)]$.

2. Для выделения структуры примарных полей можно избавиться от потомков, введя взаимодействие с $2D$-гравитацией, т.е. перейти к теории струн. Среди струнных наблюдаемых существует подсектор, состоящий из интегра-

лов по поверхности (для голоморфного сектора по контурам) от гравитационно-одетых примарных полей с полной единичной размерностью. Соответствующие вершинные операторы имеют вид

$$q_{J,m} = \oint \psi_{J,m}(x) \mathrm{e}^{(J-1)\sqrt{2}\phi} \ . \tag{2.39}$$

3. Эти операторы образуют *алгебру Ли* $\mathcal{G}$ (в отличие от операторного разложения (OPE) в конформной теории), структурные константы которой являются трехточечными корреляторами на сфере. Таким образом, мы получили отображение $M[SU(2)]$ в некоторую алгебру (части) наблюдаемых, которая является алгеброй Ли $\mathcal{G}[SU(2)]$. Более того, отображение $M[SU(2)] \hookrightarrow \mathcal{G}[SU(2)]$ является представлением, т.е. сохраняет структуру модели: а) $q_{1,m} = Q_m$ образует *присоединенное* представление $SU(2)$ в $\mathcal{G}[SU(2)]$; б) поскольку Q_m действуют тривиально на лиувиллевское поле ϕ, $\{q_{J,m}\}$ образуют *модель* $SU(2)$: набор представлений старшего веса спина J.

4. Благодаря специальным правилам отбора, определяемым свойствами лиувиллевского сектора, коммутатор $[q_{J',m'}, q_{J'',m''}]$ содержит единственный член $q_{J,m}$ с $J = J' + J'' - 1$ (и $m = m' + m''$):

$$[q_{J',m'},\, q_{J'',m''}] = C_{J',J''}^{J'+J''-1} q_{J'+J''-1,m'+m''} \ . \tag{2.40}$$

Коэффициенты $C[SU(2)]$ являются $3j$-символами (коэффициентами Клебша — Гордана) группы $SU(2)$ в некотором базисе.

5. Структурные константы, заданные $3j$-символами $C_{J',J``}^{J'+J``-1}$, имеют также интерпретацию структурных констант алгебры диффеоморфизмов двумерной плоскости $\mathbf{R}^2 \sim \mathbf{C}$, сохраняющих площадь (т.е. алгебры гамильтоновых векторных полей на плоскости, часто отождествляемой с алгеброй W_∞) *.

Рассмотрим подробнее теорию одного свободного скалярного поля X, компактифицированного на окружность, с лагранжианом $\int \partial X \bar{\partial} X$. В такой теории киральная алгебра обычно содержит $\hat{U}(1) \times \hat{U}(1)$, генерируемую током $\mathcal{J}_0 = \partial X$, и алгебру Вирасоро, генерируемую $T = -\frac{1}{2}(\partial X)^2$ (плюс соответствующие им сопряженные). Стандартный набор примарных полей в этой теории задается экспонентами $\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{e}^{i\bar{p}\bar{x}}$ **, где

$$p + \bar{p} = \frac{n}{R}, \qquad p - \bar{p} = 2mR, \tag{2.41}$$

---

*Кроме того, $\mathcal{G}[SU(2)]$ является алгеброй производных вакуумного кольца, образуемого другой частью алгебры наблюдаемых: физических вершинных операторов нулевой размерности и нулевого духового числа [100, 101], изоморфного, на самом деле, кольцу гамильтонианов (полиномов на $\mathbf{R}^2 \sim \mathbf{C}$).

**x и $\bar{x}$ обозначают голоморфную и антиголоморфную части X соответственно.

$n, m \in \mathbf{Z}$, а R — так называемый радиус компактификации [102] (заметим, что на самом деле эта величина является *половиной* настоящего радиуса компактификации: $x \sim x+2\pi R$ и $\bar{x} \sim \bar{x}+2\pi R$ означает, что $x+\bar{x} = X \sim X+2\pi r$, где $r = 2R$). Однако в некоторых случаях голоморфная киральная алгебра возрастает до $S\hat{U}(2)_{k=1}$, образуемая токами $\mathcal{J}_{\pm} = \mathrm{e}^{\pm i\sqrt{2}x}$ и $\mathcal{J}_0$. Это происходит в самодуальной точке при $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (в которой теория связана с $\hat{S}U(2)_{k=1}$ моделью ВЗНВ). При этом множество примарных полей становится $SU(2) \times SU(2)$-инвариантным, а для голоморфного сектора (или соответствующей теории открытых струн) это означает, что для каждого e^{ipx} спектр содержит все ненулевые $(Q_-)^k \mathrm{e}^{ipx}$ (при $p > 0$, или $(Q_+)^k \mathrm{e}^{ipx}$ при $p < 0$; $Q_{\pm} = \oint \mathcal{J}_{\pm}$ являются генераторами $SU(2)$ и коммутируют с тензором энергии-импульса). Если $p = \text{integer} \times \sqrt{2}$, эта последовательность конечна: $k \le \frac{|p|}{\sqrt{2}}$ и образует представление $SU(2)$ спина J ($J = |p|/2$). Каждое представление возникает один раз, и мы получаем *модель* $SU(2)$.

Этот вывод подтверждается вычислением однопетлевой статсуммы в теории. Действительно [87, 102, 103], для $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем ($q = \mathrm{e}^{2\pi i\tau}$):

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{\left|\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(2\tau)\right|^2 + \left|\theta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(2\tau)\right|^2}{|\eta(q)|^2}, \tag{2.42}$$

где θ — тэта-функция Якоби, и совпадает со статсуммой $SU(2)_{k=1}$ модели ВЗНВ. Введем величину

$$Z(\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(2\tau)}{\eta(q)} + \frac{\theta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(2\tau)}{\eta(q)}, \tag{2.43}$$

которую можно интерпретировать как "голоморфный квадратный корень" статсуммы или, что практически то же самое, как статсумму соответствующей модели открытых струн [104]. Эта голоморфная статсумма может быть представлена как сумма вирасоровских характеров по всем вирасоровским примарным полям из спектра теории. В соответствии с приведенными выше аргументами (2.43) является в точности статсуммой *модели* или всех представлений $SU(2)$:

$$Z(\tau) = \sum_{J \in \mathbf{Z}_+/2} (2J+1)\chi_J(\tau), \tag{2.44}$$

где $\chi_J(\tau)$ обозначают характеры представлений алгебры Вирасоро при $c = 1$, $\chi_J(\tau) = \frac{q^{J^2} - q^{(J+1)^2}}{\eta(q)}$ [105], а множитель $(2J+1) = \dim R_J$ буквально отражает тот факт, что мы имеем дело с *моделью* $SU(2)$. Таким образом, получаем

$$\eta(q)Z(\tau)=\frac{1}{2}\left(\sum_{J\in\boldsymbol{Z}_{+/2}}(2J+1)\chi_J(\tau)+(J\to -J-1)\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n/2)^2}=\theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(\tau/2)=\theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(2\tau)+\theta\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}(2\tau) \qquad (2.45)$$

в соответствии с (2.43).

Перейдем к случаю произвольной ADE-алгебры Ли G, а именно рассмотрим $r_G=\mathrm{rank}(G)$ *свободных* скалярных полей $\mathbf{X}=\{X_1,\ldots,X_{r_G}\}$ с лагранжианом $\int\partial\mathbf{X}\bar{\partial}\mathbf{X}$. Обычно киральная алгебра в r_G-мерной свободной теории есть $\hat{U}(1)^{r_G}\times\hat{U}(1)^{r_G}$, а генератором алгебры Вирасоро является $T=-\frac{1}{2}\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{X}$. В случае многих полей более естественно рассматривать не вирасоровскую подалгебру киральной алгебры, а алгебру (высших спинов) W_G, образуемую генераторами вида $\sum(\boldsymbol{\mu}\partial\mathbf{X})^n$. При компактификации на r-мерную решетку $\Gamma=\{\boldsymbol{\gamma}\}$: $\mathbf{X}\sim\mathbf{X}+2\pi\boldsymbol{\gamma}$ примарными полями Вирасоро являются $\mathrm{e}^{i\mathbf{px}}\mathrm{e}^{i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}}$, когда

$$\mathbf{p}=\boldsymbol{\gamma}^*+\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\ ,\qquad \bar{\mathbf{p}}=\boldsymbol{\gamma}^*-\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\ ;\qquad \boldsymbol{\gamma}\in\Gamma,\ \ \boldsymbol{\gamma}^*\in\Gamma^*\ , \qquad (2.46)$$

где Γ^* — дуальная к Γ решетка, т.е. $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^*=$ целое число. Однако в случае специальных решеток киральная алгебра возрастает до $\hat{G}_{k=1}$ с генераторами $\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha}}=\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}}$, $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\partial\mathbf{x}$, где α — все корни G, а $\boldsymbol{\nu}$ — некоторый базис в картановской (гипер)плоскости. Это происходит, когда Γ ($\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$) является *решеткой корней* алгебры G; тогда заряды $Q_{\boldsymbol{\alpha}}=\oint\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $Q_{\boldsymbol{\nu}}=\oint\mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu}}$, являющиеся генераторами алгебры глобальной симметрии G, коммутируют с тензором энергии-импульса, а вирасоровские примарные поля образуют представление G. Это подразумевает, что, как и в случае $SU(2)$, наряду с "наивными" примарными полями (или тахионами) $\mathrm{e}^{i\mathbf{px}}\mathrm{e}^{i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}}$ существуют и другие, образуемые действием G. Когда $r_G>1$, ситуация этим не исчерпывается, а именно: примарных полей *Вирасоро* гораздо больше (гравитоны и т.п. — все старшие спины). Чтобы сузить класс примарных полей и заметить структуру *модели* группы G, нужно перейти к примарным полям W_G-алгебры. Генераторами W_G-алгебры являются комбинации типа $\sum_{a=0}(\boldsymbol{\nu}_a\partial\mathbf{x})^n$, где $n=1,\ldots,r_G$ (а $\boldsymbol{\nu}_a$ — некоторые векторы в картановской (гипер)плоскости, связанные с фундаментальными весами). Сама W_G-алгебра (или ее универсальная обертывающая) определяется как часть киральной алгебры (в нашем случае универсальная обертывающая $\hat{G}_1$), коммутирующая с зарядами $Q_{\boldsymbol{\alpha}}$, $Q_{\boldsymbol{\nu}}$. Поэтому примарные поля W_G по-прежнему образуют мультиплеты G, а полный их набор — *модель* $M[G]$. Чтобы продемонстрировать это, обратимся опять к формулам для однопетлевых статсумм:

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = |\eta(q)^{-r_G}|^2 \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \left|\Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\epsilon}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}(\tau)\right|^2, \tag{2.47}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ пробегает по векторам $\{\frac{1}{2}\mathbf{e}_i\}$ и $\mathbf{0}$ ($\{\mathbf{e}_i\}$ — базис решетки Γ) [87, 103]. Член с $\boldsymbol{\epsilon}=0$

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = |\eta(q)^{-r_G}|^2 \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma} \left|\Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}(\tau)\right|^2 \tag{2.48}$$

модулярно-инвариантен и является однопетлевой статсуммой $k=1$ модели ВЗНВ для ADE-группы G. Соответствующая однопетлевая статсумма в "киральном" или "открытом" секторе есть

$$Z(\tau) \equiv \eta(q)^{-r_G} \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma} \Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ 0\end{bmatrix}(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda}\in\Gamma_*} D_{\boldsymbol{\Lambda}}\chi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau), \tag{2.49}$$

где представление старшего веса $R_G[\boldsymbol{\Lambda}]$ группы G — взаимно однозначно старший вектор $\boldsymbol{\Lambda}$, лежащий в "положительной" камере Вейля Γ^+. Размерность представления $R_G[\boldsymbol{\Lambda}]$ вычисляется как произведение по всем *положительным* корням $\boldsymbol{\alpha}$ [106]:

$$D_{\boldsymbol{\Lambda}} = \prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+} \frac{\langle\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle} \tag{2.50}$$

($\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+}\boldsymbol{\alpha}$, $\langle,\rangle$ — скалярное произведение в картановской (гипер)плоскости). Согласно приведенным выше аргументам, те же самые векторы $\boldsymbol{\Lambda}$ отвечают примарным полям алгебры W_G или неприводимым представлениям $\mathcal{R}_{W_G}[\boldsymbol{\Lambda}]$ с $c=r_G$. (Заметим, однако, что сами *представления* $\mathcal{R}_{W_G}[\boldsymbol{\Lambda}]$ и $R_G[\boldsymbol{\Lambda}]$ не совпадают: являются представлениями различных алгебр!) Обозначим $\chi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau)$ аналоги вирасоровских характеров Каца — Роша — Кариди для неприводимых представлений $\mathcal{R}_{W_G}[\boldsymbol{\Lambda}]$ с конформными размерностями $\Delta_{\boldsymbol{\Lambda}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^2$:

$$\chi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau) = \eta(q)^{-r_G} \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \det(\sigma)\, q^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\rho}-\sigma(\boldsymbol{\rho}))^2}, \tag{2.51}$$

где $\mathcal{W}$ — группа Вейля алгебры G, а $\det(\sigma)$ обозначает детерминант преобразования $\sigma\in\mathcal{W}$. Эти характеры зависят только от размерности Δ, поэтому они одинаковы для всех примарных полей $D_{\boldsymbol{\Lambda}}$, представления $R[\boldsymbol{\Lambda}]$ и дают одинаковый вклад в (2.49), приводя к появлению множителей $D_{\boldsymbol{\Lambda}}$. Формула (2.49) доказывает, что W_G-примарные поля образуют *модель* группы G.

Для доказательства (2.49) вычислим сумму в правой части. Сначала перепишем ее как сумму по всей решетке весов, используя то, что вследствие (2.50) и (2.51) для любого $\sigma \in \mathcal{W}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеем

$$D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = D_{\boldsymbol{\nu}_\sigma}\chi_{\boldsymbol{\nu}_\sigma}(\tau), \tag{2.52}$$

где $\boldsymbol{\nu}_\sigma \equiv \sigma(\boldsymbol{\nu}) + \sigma(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}$. Это дает для любой решетки $\mathcal{T}$

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{T}_+} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \frac{1}{\mathrm{ord}\,\mathcal{W}}\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\hat{\mathcal{T}}} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)\right), \tag{2.53}$$

где $\mathrm{ord}\,\mathcal{W}$ — порядок (число элементов) группы Вейля, $\mathcal{T}_+$ — пересечение $\mathcal{T}$ с камерой Вейля, а

$$\hat{\mathcal{T}} = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{W}} [\sigma(\mathcal{T}_+) + \sigma(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}]. \tag{2.54}$$

Вообще говоря, $\hat{\mathcal{T}}$ не совпадает с изначальной решеткой $\mathcal{T}$: это верно для решетки *корней* $\hat{\Gamma} = \Gamma$, но не для $\hat{\Gamma}^* \neq \Gamma^*$. (В простейшем примере $SU(2)$ $\Gamma^* = \{n/\sqrt{2}, n \in \mathbf{Z}\}$, $\rho = 1/\sqrt{2}$, $\Gamma^*_+ = \{n/\sqrt{2}, n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0\}$, а $\hat{\Gamma}^*_+ = \{n/\sqrt{2}, n \in \mathbf{Z},\ n \neq -1\}$. Тем не менее разница между Γ^*_+ и $\hat{\Gamma}^*_+$ состоит из единственной точки $\nu = -\rho$, а согласно (2.50) в этой точке $D_{-\rho} = 0$, т.е. она не дает вклада в сумму в правой части (2.53), так что суммирование может проводиться по всей решетке Γ^*_+.) Последнее утверждение верно для произвольных ADE-алгебр G: в общем случае разница между Γ^*_+ и $\hat{\Gamma}^*_+$ уже не точка, а состоит из гиперплоскостей коразмерности 1, так что для любого $\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^* - \hat{\Gamma}^*$ сумма $\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\rho}$ ортогональна по крайней мере одному из положительных корней, а поэтому согласно (2.50) соответствующий $D_{\boldsymbol{\nu}} = 0$, и суммирование в правой части (2.53) может производиться по полной решетке Γ^* вместо $\hat{\Gamma}^*$. После этого имеем

$$Z(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*_+} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \frac{1}{\mathrm{ord}\,\mathcal{W}}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\hat{\Gamma}^*} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \frac{1}{\mathrm{ord}\,\mathcal{W}}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau), \tag{2.55}$$

где также использовано, что $D_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ для $\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^* - \hat{\Gamma}^*$. Подставляя (2.55) и делая замену переменной суммирования $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\rho} - s(\boldsymbol{\rho})$, получаем

$$\eta(q)^{r_G} Z(\tau) = \frac{1}{\mathrm{ord}\,\mathcal{W}}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*}\sum_{s\in\mathcal{W}}\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+}\frac{\langle\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle}\det(s) q^{\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\rho}-s(\boldsymbol{\rho})]^2} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ord}\,\mathcal{W}}\sum_{s\in\mathcal{W}}\det(s)\sum_{\boldsymbol{\Lambda}\in\Gamma^*}\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+}\frac{\langle\boldsymbol{\Lambda}+s(\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^2} = \sum_{\boldsymbol{\Lambda}\in\Gamma^*} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^2}, \tag{2.56}$$

где использовано, что $s^2 = 1$ для $s \in \mathcal{W}$, а также

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \det(\sigma) \frac{\langle \boldsymbol{\Lambda} + \sigma(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\alpha} \rangle}{\langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \operatorname{ord} \mathcal{W} \tag{2.57}$$

для любого $\boldsymbol{\Lambda}$. Наконец, для правой части (2.56) получаем

$$\sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^*} q^{\boldsymbol{\nu}^2/2} = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^*/\Gamma} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Gamma} q^{(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\nu})^2/2} \right) = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^*/\Gamma} \Theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} (\tau), \tag{2.58}$$

где появилась *решеточная* Θ-функция, определенная как сумма по решетке *корней* Γ.

Характеры неприводимых представлений алгебры W_G (2.51) можно получить предельным переходом $c \to r_G$ или $\alpha_0 \to 0$, а именно используя характеры "минимальной" серии, возникающие при значениях $c = r_G - 12\alpha_0^2 \boldsymbol{\rho}^2 = r_G - 6\frac{(p-p')^2}{pp'}\boldsymbol{\rho}^2$. Согласно [94]

$$\chi_{\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2}(\tau) = \eta(q)^{-r_G} \sum_{s_1, s_2 \in \mathcal{W}} \frac{\det(s_1)\det(s_2)}{\operatorname{ord} \mathcal{W}} \Theta \begin{bmatrix} p s_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 - p' s_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} (pp'\tau) =$$

$$= \eta(q)^{-r_G} \sum_{s \in \mathcal{W}} \det(s) \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma} \exp\left(\frac{i\pi\tau}{pp'} (p s \boldsymbol{\Lambda}_1 - p' \boldsymbol{\Lambda}_2 - 2pp'\boldsymbol{\alpha})^2 \right), \tag{2.59}$$

откуда в пределе $p \to \infty$, $p' \to \infty$ при фиксированной разности $p' - p$ остается лишь член с $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Переопределив $\boldsymbol{\Lambda}_i \to \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\rho}$ и положив $\boldsymbol{\Lambda}_1 = 0$ ($n = 1$ в случае $SU(2)$), а $\boldsymbol{\Lambda}_2 \equiv \boldsymbol{\Lambda}$, приходим к формуле (2.51).

Взаимодействие с W_G-гравитацией. Наконец, чтобы выделить структуру *модели*, необходимо избавиться от потомков: сделать W_G-симметрию калибровочной или перейти к W_G-струнам. Главным отличием W_G-гравитации от обычной $2D$-гравитации является проблема с формулировкой, в которой физические операторы (наблюдаемые) представляются как проинтегрированные простые операторы единичной размерности, не содержащие духовых полей. В действительности бездуховые операторы имеют естественную размерность $\Delta^{\{G\}} = 2\boldsymbol{\rho}^2 = \dfrac{1}{6} C_V[G] \dim G$. Даже трехточечные корреляционные функции таких операторов содержат нетривиальную духовую часть (т.е. пространство модулей W_G-гравитации нетривиально уже для сферы с тремя отмеченными точками).

Аналогом действия Лиувилля является действие конформной G-тодовской теории поля (2.21):

$$\int_{d^2 z} \left(|\partial \boldsymbol{\phi}|^2 + \beta_0 R_0(y) \boldsymbol{\rho\phi} + \sum_{\text{simple } \boldsymbol{\alpha}} \eta_i e^{\boldsymbol{\alpha\phi}} \right), \tag{2.60}$$

где суммирование производится по r_G *простым* корням G, и, как обычно, в формализме ДДК рассматривается точка, где все $\eta_i = 0$. Кроме r_G-компонентного поля W-Тоды $\boldsymbol{\phi}$, следует ввести r_G духовых пар — bc-систем $\int\limits_{d^2z} \sum\limits_{j\in S_G} \left(b_j\bar{\partial}c_{1-j} + \text{c.c.}\right)$ со спинами $j \in S_G$, где в общем случае S_G — множество G-инвариантов, или казимиров, для трех A-, D- и E-серий: $SU(r+1) - j = 2, \ldots, r_G + 1$ (ср. с (2.17)); $SO(2r) - j = 2, 4, \ldots, 2r-2$ и r; $E_6 - j = 2, 5, 6, 8, 9, 12$; $E_7 - j = 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$; $E_8 - j = 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$ соответственно. Центральный заряд духовой системы в общем случае равен $c_{\text{ghosts}} = \sum\limits_{j\in S_G}[-2(6j^2 - 6j + 1)] = -48\boldsymbol{\rho}^2 - 2r_G$, а центральный заряд полей W-Тоды — $c_{\boldsymbol{\phi}} = r_G + 48\beta_0^2\boldsymbol{\rho}^2$. Из условия $c_{\text{matter}} + c_{\boldsymbol{\phi}} + c_{\text{ghosts}} = 0$ имеем $48(\beta_0^2 - 1)\boldsymbol{\rho}^2 = c_{\text{matter}} - r_G$, а следовательно, для $c_{\text{matter}} = r_G$ получаем $\beta_0 = \pm 1$.

Для построения наблюдаемых в W_G-струнной модели естественное обобщение формализма ДДК приводит к следующему алгоритму:

А) Выберем любое W_G-примарное поле материи $\Psi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \prod\limits_{i=1}^{r_G}(Q_{-\boldsymbol{\alpha}_i})^{(\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\xi})}\Psi_{\boldsymbol{\nu},\mathbf{0}}$, $\Psi_{\boldsymbol{\nu},\mathbf{0}} = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}$, где $\boldsymbol{\nu}$ отвечает представлению $R_{\boldsymbol{\nu}}[G]$ со старшим вектором $\boldsymbol{\nu}$, а $\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{\xi}_R$ — элементу этого представления, при этом конформная размерность $\Delta_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\nu}^2/2$ не зависит от $\boldsymbol{\xi}$.

Б) "Оденем" поле материи W-тодовской экспонентой $\Xi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}) = \Psi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\phi}}$ так, чтобы поле $\Xi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}$ было фиксированной размерности $\Delta^{\{G\}}$. Это дает условие $\Delta_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}^2 - 2\boldsymbol{\beta}_0\beta_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\rho} = \Delta^{\{G\}}$, или, в нашем случае, когда $\Delta_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^2$ и $\beta_0 = 1$,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}} + 2\boldsymbol{\rho})^2 + (\Delta^{\{G\}} - 2\boldsymbol{\rho}^2). \tag{2.61}$$

Безусловно, это единственное (скалярное) уравнение на r_G величин (вектор) $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}$ (при фиксированном $\boldsymbol{\nu}$) имеет много решений, тем не менее существует выделенная ситуация, когда $\Delta^{\{G\}} = 2\boldsymbol{\rho}^2$, а

$$\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\rho}. \tag{2.62}$$

В) Добавим духовый множитель, чтобы образовать из $\Delta^{\{G\}}$ оператор нулевой размерности. В обычной гравитации с $\Delta^{\{SU(2)\}} = 1$ достаточно умножить $\Xi(x, \phi)$ на духовое поле, отвечающее репараметризациям, $c_{-1} \equiv c$:

$$\mathcal{O}_{\nu,\xi}(x, \phi, c) = \Xi_{\nu,\xi}(x, \phi)c_{-1} = \psi_{\nu,\xi}(x)\mathrm{e}^{\beta_\nu\phi}c_{-1}. \tag{2.63}$$

При этом корреляционные функции наблюдаемых вычисляются с дополнительными вставками вида $\prod\limits_{\alpha=1}^{N^{(2)}} \int_{d^2z} b_2\mu_\alpha^{(2)}$, где $\mu_\alpha^{(2)}$ — дифференциалы Бельтрами, а $N^{(2)}$ — размерность пространства модулей. Альтернативным определением

$$\hat{\mathcal{O}}_{\nu,\xi}(x,\phi) = \int\limits_{dz} \Xi_{\nu,\xi}(x,\phi) = \int\limits_{dz} \psi_{\nu,\xi}(x)\mathrm{e}^{\beta_\nu\phi} \tag{2.64}$$

является проинтегрированный бездуховый оператор единичной размерности.

Для $G \neq SU(2)$ ситуация более сложная, так как не существует (по крайней мере, на данный момент) естественного определения вида (2.64) и остается лишь формулировка БРСТ-типа, аналогичная (2.63). Теперь вместо одевания $\Xi(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi})$ единственным духовым полем c_{-1} следует использовать комбинацию духовых полей:

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},c) = \Xi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}) \prod_{j\in S_j} \left(c_{1-j}\partial c_{1-j}\partial^2 c_{1-j}\ldots\partial^{j-2}c_{1-j}\right) =$$

$$= \psi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{\nu}-2\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}}\mathrm{e}^{i\sum(j-1)\varphi_j}. \tag{2.65}$$

В последнем равенстве учтена явная формула (2.62) для $\boldsymbol{\beta_\nu}$ и бозонизация духовых полей, т.е. $b_j = \mathrm{e}^{-i\varphi_j}$, $c_{1-j} = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$. Размерность комбинации $\{c_{1-j}\partial c_{1-j}\partial^2 c_{1-j}\ldots\partial^{j-2}c_{1-j}\} =: (c_{1-j})^{j-1} := \mathrm{e}^{i(j-1)\varphi_j}$ равна $\Delta_j = -j(j-1)/2$, и произведение духовых вкладов в (2.65) приобретает размерность

$$\sum_{j\in S_G}\Delta_j = \frac{1}{24}\sum_{j\in S_G}[-2(6j^2-6j+1)+2] = \frac{1}{24}(c_{\text{ghosts}}+2r_G) = -2\boldsymbol{\rho}^2. \tag{2.66}$$

Таким образом, оператор, отвечающий наблюдаемой, оказывается нулевой размерности, но приобретает при этом большой духовый заряд. Этот духовый заряд при вычислении корреляторов компенсируется вставками $\prod\limits_{j\in S_G}\left(\prod\limits_{\alpha=1}^{N^{(j)}}\int\limits_{d^2z} b_j\mu_\alpha^{(j)}\right)$, которые теперь включают дифференциалы Бельтрами, отвечающие модулям W-структур. Заметим, что операторы наблюдаемых (2.65) в W_G-струнах с $c = r_G$ можно выбирать в качестве представителей классов БРСТ-когомологий (по крайней мере, для случая $G = SU(3)$ [107]). Операторная алгебра в секторе, определяемом моделью группы G, сводится к правилам произведения представлений соответствующей группы, но при этом вычисление структурных констант затруднено из-за отсутствия или громоздкости формул для коэффициентов Клебша — Гордана во всех случаях, кроме $SL(2)$.

2.3. Непертурбативная формулировка квантовой 2D-гравитации: решение условий Вирасоро. По определению непертурбативная статсумма (или производящая функция для физических амплитуд) может быть записана в виде суммы ряда, каждый член в котором представлен поляковским континуальным интегралом на римановой поверхности определенного рода (см. (2.1)):

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sum_{\text{genus}} \lambda^g F_g; \qquad F_g = \int\limits_{\Sigma_p} Dg \exp \gamma \int R\Delta^{-1} R. \tag{2.67}$$

Выше было продемонстрировано, что континуальный интеграл (2.1), (2.67) даже пертурбативно (т.е. каждый член в отдельности) может быть вычислен лишь для некоторых специальных случаев в простейших теориях $2D$-гравитации. Вычисление же *непертурбативных* эффектов или суммирование ряда (2.67) является сложной задачей, которая на сегодняшний день не имеет прямого решения. Вычисление точного ответа может быть сделано лишь косвенными методами, из которых исторически первым появилась формулировка в терминах матричных моделей [22], когда вместо непрерывной теории (2.67) рассматривается ее эффективная дискретизация, являющаяся в некотором смысле точной для простейших струнных моделей, т.е. при специальных требованиях на пространство-время (например, на размерность пространства-времени: эффективные матричные теории известны лишь для пространств малой размерности — в пределе для случая чистой гравитации (2.67)).

Проблемы с непрерывной формулировкой (2.67), как правило, связаны с тем, что она несет "избыточную" информацию, связанную с "внутренней" структурой мирового листа (например, информацию о структуре представлений киральной алгебры $2D$ конформной теории поля), которая не является существенной для формулировки конечной "эффективной" теории уже непосредственно в физическом пространстве-времени. Другими словами, взаимодействие с гравитацией превращает конформные потомки в "калибровочные" степени свободы, которые не несут физической нагрузки, и появляется надежда на возможность эффективной формулировки, "забывающей" про структуры на мировом листе, которая (при удаче) появляется и записывается в терминах интегрируемой системы. В некотором смысле интегрируемость можно рассматривать как дополнительный принцип, позволяющий определить сумму ряда (2.67), а именно, если найдется дифференциальное уравнение, для которого (асимптотический) ряд (2.67) является решением, то его точное решение отвечает непертурбативному режиму.

Сначала мы рассмотрим пример, где эффективная теория дается непрерывным пределом матричных моделей, определенных интегралами типа (1.3), более точно в случае одной матрицы имеющим вид

$$Z_N = \int DM_{N\times N} \exp - \mathrm{Tr} \sum t_k M^k; \qquad DM_{N\times N} \equiv \frac{\prod dM_{ij}}{\mathrm{Vol}\ U(N)}. \tag{2.68}$$

Непрерывный предел, в частности, предполагающий $N \to \infty$, $\log Z \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}$, дает точное *непертурбативное* решение (2.67) для класса $(2, 2k+1)$ моделей [23].

Основным различием между непрерывной (2.67) и эффективной матричной формулировками является то, что первая предполагает некоторый дополнительный набор условий унитарности или факторизации, чтобы связать между собой нормировку различных членов в сумме по топологиям в (2.67), в то время как в матричной формулировке (2.68) эти соотношения возникают *автоматически*. Более того, по крайней мере для известных решений они имеют вид так называемых вирасоровских (в общем случае W) условий *, которые на самом деле можно рассматривать как *определение* непертурбативной теории. В дальнейшем решения иерархий интегрируемых уравнений, удовлетворяющие вирасоровским условиям, будем называть струнными решениями.

Ниже мы определим непертурбативные теории как решения вирасоровских условий. Оказывается, эти условия непосредственно приводят к *интегрируемости* соответствующих эффективных теорий, в частности, решения вирасоровских условий оказываются τ-функциями хорошо известных иерархий интегрируемых уравнений [24–26].

В терминах производящей функции (2.67) это означает, что $\mathcal{F}(T) = \log \tau(T)$, где $T \equiv \{T_k\}$ является набором *времен* интегрируемой иерархии или набором констант связи непертурбативной теории $2D$-гравитации. Именно появление интегрируемой системы является той новой чертой эффективной формулировки, которая позволяет гораздо дальше продвинуться в изучении свойств (2.68), нежели оригинальной формулировки (2.67).

Решение так называемых "дискретных" вирасоровских условий [27]:

$$L_n Z_N(t) = 0, \quad n \geq -1; \qquad L_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{a+b=n} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \tag{2.69}$$

с дополнительным условием (придающим смысл переменной t_0) $\frac{\partial Z_N}{\partial t_0} = -N Z_N$ (где N следует отождествлять с размером матриц в формуле (2.68)) в специальном двойном скейлинговом пределе [23] дает непертурбативную формулировку квантовой $2D$-гравитации как решения дифференциальных уравнений

*Этот эффект ясно указывает на наличие определенной дуальности между мировым листом и пространством-временем, при которой репараметризации мирового листа и преобразования в пространстве констант связи меняются местами.

$$\mathcal{L}_n\tau = 0, \quad n \geq -1,$$

$$\mathcal{L}_n = \sum_{k=0}\left(k+\frac{1}{2}\right)T_{2k+1}\frac{\partial}{\partial T_{2(k+n)+1}} +$$

$$+G\sum_{0\leq k\leq n-1}\frac{\partial^2}{\partial T_{2k+1}\partial T_{2(n-k)-1}} + \frac{\delta_{0,n}}{16} + \frac{\delta_{-1,n}T_1^2}{16G}, \tag{2.70}$$

где τ — τ-функция иерархии КдФ, т.е. помимо (2.70) удовлетворяет еще и бесконечной системе нелинейных дифференциальных уравнений (билинейных соотношений Хироты, см., например, [56]). Окончательная формулировка данного семейства моделей $2D$-гравитации в терминах интегрируемых систем основана на следующих утверждениях.

• Производящая функция матричной модели (2.69) как функция времен является τ-функцией полубесконечной цепочки Тоды. Соответствующая проблема Римана — Гильберта задается скалярным произведением

$$\langle A(\lambda), B(\lambda)\rangle = \oint A(\lambda)B^*(\lambda)\mathrm{e}^{-V(\lambda)}; \qquad V(\lambda) \equiv \sum_{k\geq 0} t_k\lambda^k. \tag{2.71}$$

Это скалярное произведение позволяет ввести набор ортогональных полиномов $P_n(\lambda) = \lambda^n + O(\lambda^{n-1})$, отличающихся нормировкой от стандартных функций Бейкера — Ахиезера $\Psi_n(\lambda) = P_n(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\frac{V(\lambda)}{2}-\frac{\phi_n}{2}}$:

$$\langle P_n(\lambda), P_m(\lambda)\rangle = \mathrm{e}^{\phi_n}\delta_{mn}, \tag{2.72}$$

так что

$$Z_N(t) = \tau_N(t) = \tau_0\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{e}^{\phi_n}, \tag{2.73}$$

а переменные ϕ_n как функции времен $\{t_k\}$ удовлетворяют уравнениям иерархии цепочки Тоды

$$\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t_1^2} = \mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} - \mathrm{e}^{\phi_n-\phi_{n-1}} \equiv R_{n+1} - R_n,$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial t_2} = -\left(\mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} + \left(\frac{\partial\phi_n}{\partial t_1}\right)^2 - \mathrm{e}^{\phi_n-\phi_{n-1}}\right) \equiv -(R_{n+1}+p_n^2-R_n) \tag{2.74}$$

и т.д. В редуцированной модели система (2.74) вырождается в иерархию Вольтерра, первое уравнение которой (в переменных $R_n\{t_{2k}\} \equiv \mathrm{e}^{\phi_n-\phi_{n-1}}\{t_{2k}\}$) имеет вид $\frac{\partial R_n}{\partial t_2} = -R_n(R_{n+1}-R_{n-1})$. Совместность между уравнениями Тоды и вирасоровскими условиями (2.69) дает "струнное уравнение" [27].

• Непрерывный предел определяется как *двойной скейлинговый* предел [23], при котором $N \to \infty$ одновременно с условием, что константы связи достигают своих критических значений так, что струнная константа связи (параметр разложения по родам) фиксирована. "Непрерывные" величины получаются из "дискретных" перенормировкой, являющейся следствием нетривиальной замены времен $\{\boldsymbol{t}\} \to \{\tilde{\boldsymbol{T}}\} \to \{\boldsymbol{T}\}$ и перенормировки производящей функции. Более точно ниже будет введен параметр a такой, что $a \to 0$ в непрерывном пределе, а все дискретные величины являются некоторыми функциями параметра a, например, дискретные времена $t_k \equiv t_k(a, \boldsymbol{T})$, размер матрицы $N \equiv N(a, \boldsymbol{T}) \underset{a\to 0}{\to} \infty$ и т.п. Этот предел нетривиален как для тодовских уравнений*, так и для вирасоровских условий. Простейшим случаем, когда он может быть определен и приводит к семейству $(2, 2k+1)$ моделей $2D$-гравитации, является одноматричная эрмитовская модель с нулевыми нечетными временами [28]. Связь между дискретными и непрерывными теориями на языке свободных скалярных полей, отвечающих "бозонизации" вирасоровских условий (2.69) и (2.70), задается заменой спектрального параметра $u^2 = 1 + az$. При этом непрерывные генераторы алгебры Вирасоро (2.70) являются модами тензора энергии-импульса

$$T(z) = \frac{1}{2} : \partial\Phi^2(z) : - \frac{1}{16z^2} = \sum \frac{\mathcal{L}_n}{z^{n+2}}. \tag{2.75}$$

Подробности процедуры непрерывного предела можно найти в [28, 29].

• Условие совместности уравнений Тоды и вирасоровских условий — дискретное струнное уравнение

$$n + \frac{1}{2} = G_n^{(k)}\{R\} \quad \text{или} \quad 1 = G_{n+1}^{(k)}\{R\} - G_{n-1}^{(k)}\{R\} \tag{2.76}$$

эквивалентно условию экстремума $\frac{\delta S}{\delta \log R_n} = 0$ функционала

$$S = \sum_n \left(\phi_n + \sum_k t_k G_n^{(k)}\{R\} \right). \tag{2.77}$$

Действие (2.77), записанное в терминах оператора Лакса L со стандартной нормировкой матричных элементов $L_{mn} \equiv \frac{\langle m|\lambda|n\rangle}{\sqrt{\langle m|m\rangle\langle n|n\rangle}}$ [27], приобретает вид

$$S = \sum_n \left(\phi_n + \frac{1}{2} \sum_k t_k \,\mathrm{Tr}\; L^{2k} \right). \tag{2.78}$$

---

*Это хорошо известный предел в теории интегрируемых систем, отвечающий "слиянию" двух особых точек (особенностей функции Бейкера — Ахиезера и т.п.) в теории Тоды в одну, отвечающую иерархии КдФ при соответствующем переопределении времен.

Таким образом, явно представлена конструкция, в которой семейство решений интегрируемой системы (являющейся некоторой редукцией иерархии КП или двумерной решетки Тоды), выделяемое условием инвариантности соответствующих τ-функций относительно действия части генераторов алгебры Вирасоро (W-алгебры) $L_n\tau = 0$, $n \geq -1$, формулируется на лагранжевском языке, т.е. в виде уравнений движения $\delta S = 0$. Действие, как обычно, позволяет выйти за рамки уравнений движения: континуальный интеграл вида $\int \mathcal{D}\phi \ \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S\{\phi\}\right)$ при ненулевой постоянной Планка $\hbar \neq 0$, в принципе, позволяет исследовать динамику в конфигурационном пространстве струнной теории поля. В частности, можно надеяться, что, меняя с помощью ренорм-группы значения параметров t в (2.78), можно описывать переходы между различными мультикритическими точками, или между различными точками эффективной теории двумерной гравитации. В построенной формулировке эти деформации действия $S\{\phi\}$ задаются производными по временам T, т.е. (взаимно коммутирующими) потоками интегрируемых иерархий.

2.4. Топологическая 2D-гравитация как явное решение вирасоровских условий. Здесь мы построим решение непрерывных условий Вирасоро вне всякой связи с их дискретными аналогами, т.е. будет предложена совершенно отличная от приведенной выше процедура построения решения непертурбативной двумерной квантовой гравитации как предела из вспомогательной дискретной задачи с более простыми "условиями унитарности". В отличие от дискретных условий Вирасоро, где решение сразу находится в виде конформного коррелятора обычных скалярных полей [108], непрерывный случай оказывается гораздо более сложным. Основная причина заключается в том, что непрерывный случай отличается от дискретного (по явному виду: ср. (2.69) и (2.70)) заменой обычного скалярного поля на скалярное поле с *антипериодическими* граничными условиями — именно в таком сингулярном преобразовании и заключается смысл двойного скейлингового предела. В полях с антипериодическими граничными условиями построить конформное решение гораздо сложнее*, поэтому ниже для решения непрерывной проблемы воспользуемся другим методом.

Оказывается, что непрерывные условия Вирасоро (в специальных переменных Мивы, которые будут подробно обсуждены ниже) могут быть "просуммированы" в определенные *матричные* дифференциальные операторы. Конкретно для $W^{(p)}$-алгебры ($Vir = W^{(2)}$) эти операторы связаны с лапласианами (или казимирами) соответствующих конечномерных алгебр ($SL(n)$ для $W^{(n)}$) и имеют вид

$$\frac{\partial^p}{\partial \Lambda^p} + ..., \tag{2.79}$$

*Одной из причин является отсутствие сильно упрощающего правила отбора по нулевой моде скалярного поля.

где Λ — эрмитова матрица размера $N \times N$ (для случая $SL(N)$). Условия инвариантности относительно действия операторов (2.79) могут быть интерпретированы как тождества Уорда в некоторых эффективных матричных теориях.

Таким образом, ниже будет доказано, что из (системы) уравнений инвариантности функции относительно действия оператора типа (2.79)

$$\mathrm{Tr}\ \epsilon(\Lambda)\left(W\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}}\right) - \Lambda\right)\mathcal{Z}[\Lambda] = 0 \qquad (2.80)$$

(где $W(X)$ — некоторый полином, а $(\Lambda_{\mathrm{tr}})_{ij} \equiv \Lambda_{ji}$), следует (строго говоря, в пределе $N \to \infty$), что эта функция является решением непрерывных вирасоровских (или W) условий. Из формы уравнения (2.80) следует, что оно может быть переписано как тождество Уорда для матричного интеграла, который (при определенной нормировке) дает точное непертурбативное решение $2D$ (топологической)-гравитации. Точная формула для соответствующей производящей функции имеет вид [34] ($W(M) \equiv V'(M)$):

$$Z^{(N)}[V|M] \equiv C^{(N)}[V|M]\,\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\ V(M) - \mathrm{Tr}\ MW(M)} \int DX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\ V(X) + \mathrm{Tr}\ W(M)X}, \qquad (2.81)$$

где интегрирование производится по пространству $N \times N$ "эрмитовых" матриц, а нормировочный множитель может быть записан в виде гауссовского интеграла

$$C^{(N)}[V|M]^{-1} \equiv \int DY\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\ U_2[M,Y]},$$

$$U_2 \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\ [V(M+\epsilon Y) - V(M) - \epsilon Y V'(M)]. \qquad (2.82)$$

Сначала мы обсудим только специальные потенциалы мономиального вида $V_p(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$, приводящие после подстановки в (2.80) к уравнениям типа (2.79) *.

В простейшем случае $p = 2$ имеется квадратичный дифференциальный оператор (лапласиан), и, следовательно, нужно доказать равенство

$$\frac{1}{\mathcal{Z}}\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon \frac{\partial^2}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}^2} - \epsilon\Lambda\right)\mathcal{Z} = \frac{1}{Z}\sum_{n \geq -1} \mathcal{L}_n Z\ \mathrm{Tr}\ (\epsilon \Lambda^{-n-2}) \qquad (2.83)$$

---

*Доказательство инвариантности относительно вирасоровских условий для потенциалов общего вида основано на использовании интегрируемости и будет приведено ниже.

для

$$\mathcal{Z}^{\{2\}}\{\Lambda\} \equiv \int DX \ \exp\left(-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\ X^3 + \mathrm{Tr}\ \Lambda X\right) =$$

$$= C[\sqrt{\Lambda}] \exp\left(\frac{2}{3}\ \mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}\right) Z^{\{2\}}(T_m),$$

$$T_m = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}\ M^{-m} = \frac{1}{m}\ \mathrm{Tr}\ \Lambda^{-m/2}, \quad m - \text{нечет.} \tag{2.84}$$

при

$$C[\sqrt{\Lambda}] = \det\left(\sqrt{\Lambda} \otimes I + I \otimes \sqrt{\Lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.85}$$

и

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k > \delta_{n+1,0} \\ k \ \text{нечет.}}} kT_k \frac{\partial}{\partial T_{k+2n}} +$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{\substack{a+b=2n \\ a,b>0;\ a,b\ \text{нечет.}}} \frac{\partial^2}{\partial T_a \partial T_b} + \delta_{n+1,0}\frac{T_1^2}{4} + \delta_{n,0}\frac{1}{16} - \frac{\partial}{\partial T_{2n+3}}. \tag{2.86}$$

Уравнение (2.83) верно для *любого* размера матриц Λ*, более того, в пределе бесконечно большого размера матрицы Λ ($N \to \infty$) все величины $\mathrm{Tr}\,(\epsilon\Lambda^{-n-2})$, например, $\mathrm{Tr}\,\Lambda^{p-n-2}$ для $\epsilon = \Lambda^p$, становятся алгебраически независимыми, так что из уравнения (2.83) следует, что $\mathcal{L}_n Z\{T\} = 0$, $n \geq -1$. Заметим, что функция $\mathcal{Z}\{\Lambda\}$, которую нужно продифференцировать в формуле (2.84), чтобы доказать выполнение тождеств Вирасоро (2.83), зависит только от собственных значений $\{\lambda_k\}$ матрицы Λ. Поэтому естественно рассмотреть уравнение (2.83) в "диагональной точке" $\Lambda_{ij} = 0$, когда $i \neq j$. Единственный "недиагональный" кусок в формуле (2.83), выживающий после диагонализации, пропорционален

$$\left.\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Lambda_{ij} \partial \Lambda_{ji}}\right|_{\Lambda_{mn}=0,\ m\neq n} = \frac{\delta_{ki} - \delta_{kj}}{\lambda_i - \lambda_j} \ \text{для} \quad i \neq j. \tag{2.87}$$

Формула (2.87) есть не что иное, как хорошо знакомая из курса квантовой механики поправка второго порядка к собственному значению гамильтониана в традиционной квантово-механической теории возмущения. Эта формула может быть легко выведена из вариации детерминанта:

$$\delta \log\left(\det\ \Lambda\right) = \mathrm{Tr}\ \frac{1}{\Lambda}\delta\Lambda - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\Lambda}\delta\Lambda\frac{1}{\Lambda}\delta\Lambda\right) + \ldots. \tag{2.88}$$

*Все, что необходимо потребовать — это то, чтобы матричный дифференциальный оператор действовал на функции переменных T_k (с точностью до нормировки).

Для диагональной $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, но, вообще говоря, недиагональной $\delta\Lambda_{ij}$, уравнение (2.88) дает

$$\sum_k \frac{\delta\lambda_k}{\lambda_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{\delta\Lambda_{ij}\delta\Lambda_{ji}}{\lambda_i\lambda_j} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right)\frac{\delta\Lambda_{ij}\delta\Lambda_{ji}}{\lambda_i - \lambda_j} + \ldots, \qquad (2.89)$$

что и доказывает формулу (2.87).

Поскольку *матрица* ϵ произвольна (а значит, может быть функцией Λ), ее можно выбрать зависящей лишь от собственных значений λ_i. Таким образом, мы реально используем только два условия:

1) конкретную форму нормировочного множителя (2.82);

2) тот факт, что производящая функция $Z[T(\lambda_i)]$ является *сложной* функцией, т.е. ее нужно дифференцировать как зависящую от собственных значений $\{\lambda_i\}$ только через переменные T_k.

После выполнения этих условий формула (2.83) может быть переписана в виде

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}}{C(\sqrt{\Lambda})Z\{T\}}\left[\mathrm{Tr}\ \epsilon\left\{\frac{\partial^2}{\partial\Lambda^2} - \Lambda\right\}\right] C(\sqrt{\Lambda})\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}} Z\{T\} =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{a,b>0} \frac{\partial^2 Z}{\partial T_a \partial T_b}\sum_i \epsilon(\lambda_i)\frac{\partial T_a}{\partial\lambda_i}\frac{\partial T_b}{\partial\lambda_i} +$$

$$+\frac{1}{Z}\sum_{n\geq 0}\frac{\partial Z}{\partial T_n}\left[\sum_{i,j}\epsilon(\lambda_i)\frac{\partial^2 T_n}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}} + 2\sum_i \epsilon(\lambda_i)\frac{\partial T_n}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\log C}{\partial\lambda_i} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_i \epsilon(\lambda_i)\frac{\partial T_n}{\partial\lambda_i}\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\ \mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}\right] +$$

$$+\left[\sum_i \epsilon(\lambda_i)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}\right)^2 - \sum_i \lambda_i\epsilon(\lambda_i) + \right.$$

$$+\sum_{i,j}\epsilon(\lambda_i)\left(\frac{\partial^2}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}}\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}\right) +$$

$$\left. + 2\sum_i \epsilon(\lambda_i)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\partial\ \mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\log C}{\partial\lambda_i} + \frac{1}{C}\sum_{i,j}\epsilon(\lambda_i)\frac{\partial^2 C}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}}\right], \qquad (2.90)$$

где $\mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2} = \sum_k \lambda_k^{3/2}$, а $C = \prod_{i,j}(\sqrt{\lambda}_i + \sqrt{\lambda}_j)^{-\frac{1}{2}}$. Теперь вычисление всех величин в формуле (2.90) сводится к упражнению по дифференцированию с использованием формулы (2.87). Явное вычисление показывает, что после дифференцирования возникающие члены содержат лишь *отрицательные* степени $\sqrt{\lambda_i}$ и могут быть "поглощены", т.е. переписаны через времена T_k. В результате имеем

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}}{C(\sqrt{\Lambda})Z\{T\}}\left[\mathrm{Tr}\,\epsilon\left\{\frac{\partial^2}{\partial\Lambda^2}-\Lambda\right\}\right]C(\sqrt{\Lambda})\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}Z\{T\}=$$

$$=\frac{1}{Z}\sum_{n\geq -1}\mathrm{Tr}\,(\epsilon_p\Lambda^{-n-2})\left(\frac{1}{2}\sum_{k>\delta_{n+1,0}}kT_k\frac{\partial}{\partial T_{2n+k}}+\frac{1}{4}\sum_{\substack{a+b=2n\\ a>0,b>0}}\frac{\partial^2}{\partial T_a\partial T_b}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\delta_{n,0}+\frac{1}{4}\delta_{n+1,0}T_1^2-\frac{\partial}{\partial T_{2n+3}}\right)Z(T)=0, \qquad (2.91)$$

а именно "башню" непрерывных условий Вирасоро для случая $p=2$.

Для произвольного значения p вывод полностью аналогичен и содержит следующие этапы.

• Представим $\mathcal{Z}[\Lambda]$ в виде $\mathcal{Z}^{\{p\}}[\Lambda]=g_p[\Lambda]Z^{\{p\}}(T_n)$, где

$$g_p[\Lambda]=\frac{\Delta(M)}{\Delta(\Lambda)}\prod_i\left[V''(\mu_i)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{(\mu_iV'(\mu_i)-V(\mu_i))}\right]=$$

$$=\frac{\Delta(\Lambda^{1/p})}{\Delta(\Lambda)}\prod_i\left[\lambda_i^{-\frac{p-1}{2p}}\mathrm{e}^{\frac{p}{p+1}\lambda_i^{1+1/p}}\right], \qquad (2.92)$$

т.е. явно отделим нормировочный префактор от функции времен.

• Подставим выражение $\mathcal{Z}^{\{p\}}[\Lambda]$ в уравнение (2.80), которое в случае мономиального потенциала $V_p(X)=\dfrac{X^{p+1}}{p+1}$ имеет вид

$$\left\{\mathrm{Tr}\ \ \epsilon(\Lambda)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}\right)^p-\Lambda\right]\right\}g_p[\Lambda]Z^{\{p\}}(T_n)=0. \qquad (2.93)$$

Старшие производные $\dfrac{\partial^i Z}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}^i}$ вычисляются с помощью соотношений типа (2.87).

• Сдвинем переменные

$$T_n\to\hat{T}_n=T_n-\frac{p}{n}\delta_{n,p+1} \qquad (2.94)$$

(эта процедура не меняет производных).

• После всех подстановок левая часть равенства (2.93) принимает форму бесконечного ряда, в котором каждый член представляет собой произведение

$\mathrm{Tr}\,[\tilde{\epsilon}(M)M^{-k}]$ на линейную комбинацию генераторов W_p-алгебры, действующих на $Z^{\{p\}}(T_n)$. Например, если $p=3$, полученное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{27}\mathrm{Tr}\left[\tilde{\epsilon}(M)M^{-3}\left(\sum M^{-3n}\mathcal{W}^{(3)}_{3n}+9\sum M^{-3n-1/3}\times\right.\right.$$
$$\times\left(\sum(3k-2)\hat{T}_{3k-2}\mathcal{W}^{(2)}_{3n+3k}+\sum\frac{\partial}{\partial T_{3a+1}}\mathcal{W}^{(2)}_{3b-3}\right)+9\sum M^{-3n-2/3}\times$$
$$\left.\left.\times\left(\sum(3k-2)\hat{T}_{3k-2}\mathcal{W}^{(2)}_{3n+3k}+\sum\frac{\partial}{\partial T_{3a+1}}\mathcal{W}^{(2)}_{3b-3}\right)\right)\right]Z^{\{3\}}=0. \qquad (2.95)$$

• В пределе $N\to\infty$ все выражения $\mathrm{Tr}\,\tilde{\epsilon}(M)M^{-k}$ с фиксированным k и произвольным $\tilde{\epsilon}(M)$ становятся независимыми, и уравнение (2.93) дает ”башню” условий инвариантности относительно действия W-генераторов. Точное доказательство для случая $p=3$ предложенным здесь методом было получено А.Михайловым [109]. Ниже в разд. 3 будет представлено другое доказательство существования вирасоровских условий, использующее интегрируемость топологических струнных теорий, которое существует для любого p.

Наконец, обсудим, какое значение имеет сдвиг (2.94). В предыдущем разделе рассматривалась сложная процедура получения точных непертурбативных решений квантовой $2D$-гравитации как решений непрерывных условий Вирасоро; для этих решений не получили явных представлений. В данном разделе мы доказали, что у непрерывных условий Вирасоро существуют явные решения, по крайней мере, имеющие явное интегральное представление. Для случая $p=2$ это представление дает решение чистой *топологической* гравитации и называется моделью Концевича [40]. Таким образом, мы доказали, что производящие функции двумерной квантовой и топологической гравитации удовлетворяют одним и тем же вирасоровским условиям и, в этом смысле, *эквивалентны*. Тем не менее при более детальном рассмотрении оказывается, что пертурбативные разложения для топологической и квантовой гравитации происходят в совершенно разных точках (см. ниже) и сдвиг времен (2.94) отвечает именно топологической гравитации.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУННЫХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Интегрируемость топологических струнных моделей. В данном разделе будет доказано, что рассмотренные выше вирасоровские условия (2.70), (2.86) и (2.95), определяющие непертурбативные струнные решения, задают вполне конкретное решение интегрируемой иерархии КП, а именно:

— статсумма $Z_N^V[M]$ (2.81) как функция времени [57]:

$$T_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\ M^{-k}, \quad k \geq 1, \tag{3.1}$$

является (при любом N) τ-функцией иерархии КП при *любом* потенциале $V[X]$;

— если потенциал $V[X]$ оказывается однородным полиномом степени $p+1$, то статсумма $Z_N^{\{V\}}[M] = Z_N^{\{p\}}[M]$ на самом деле является τ-функцией p-редуцированной иерархии КП, или, что то же самое, иерархии p-го уравнения КдФ [59] *.

Для доказательства мы сначала перепишем равенство (2.81) в виде детерминантной формулы

$$Z_N^{\{V\}}[M] = \frac{\det_{(ij)} \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)}, \quad i,j = 1, ..., N, \tag{3.2}$$

а затем покажем, что эта форма в некотором смысле является определением *любой* τ-функции иерархии КП, записанной в переменных Мивы **.

Главной особенностью, выделяющей именно струнные решения иерархий интегрируемых уравнений типа КП, является специальный вид функций $\{\phi_i(\mu)\}$ в (3.2), которые отнюдь не произвольны. Более того, в рассматриваемом случае весь *бесконечный* набор функций в (3.2) выражается через единственную функцию — потенциал $V[X]$ (т.е. вместо произвольной *матрицы* A_{ij}, определяющей $\phi_i(\mu) = \sum A_{ij}\mu^j$, в общем случае решения, отвечающие непертурбативному режиму, в (топологических) теориях струн параметризуются *вектором* V_i или функцией $V[\mu] = \sum V_i\mu^i$). Эта выделенность определяется наличием дополнительных $\mathcal{L}_{-1}$- и других $\mathcal{W}$-условий (которые в контексте интегрируемых иерархий типа КП могут рассматриваться как следствие $\mathcal{L}_{-1}$). Все эти условия, в частности, являются следствием тождеств Уорда (2.80).

Для доказательства сначала сведем представление в виде матричного интеграла

$$\mathcal{Z}_N^{\{V\}}[\Lambda] \equiv \int DX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\ [V(X) - Tr\,\Lambda X]}, \tag{3.3}$$

*Более того, в данном случае равенство $\dfrac{\partial Z^{\{p\}}}{\partial T_{np}} = 0$ выполняется буквально.

**В качестве проверки можно достаточно легко убедиться (см. [34]), что детерминантная формула (3.2) с *любым* набором функций $\{\phi_i(\mu)\}$ удовлетворяет билинейным соотношениям Хироты.

где по "угловым" $U(N)$-матрицам можно легко проинтегрировать [110], к N-кратному интегралу по собственным значениям матриц X и Λ (обозначенным как $\{x_i\}$ и $\{\lambda_i\}$ соответственно). Интеграл (3.3) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta(\Lambda)}\left(\prod_{i=1}^{N}\int dx_i \mathrm{e}^{-V(x_i)+\lambda_i x_i}\right)\Delta(X), \tag{3.4}$$

где $\Delta(X)$ и $\Delta(\Lambda)$ — детерминанты Вандермонда, например: $\Delta(X) = \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$.

Теперь формула (3.4) может быть переписана в виде

$$\Delta^{-1}(\Lambda)\Delta\left(\frac{\partial}{\partial\Lambda}\right)\prod_i\int dx_i \mathrm{e}^{-V(x_i)+\lambda_i x_i} = \Delta^{-1}(\Lambda)\,\det{}_{(ij)}F_i(\lambda_j) \tag{3.5}$$

с матричными элементами

$$F_{i+1}(\lambda) \equiv \int dx\ x^i \mathrm{e}^{-V(x)+\lambda x} = (\frac{\partial}{\partial\lambda})^i F_1(\lambda). \tag{3.6}$$

Отметим, что $F_1(\lambda) = \mathcal{Z}_{N=1}^{\{V\}}[\lambda]$. Вспоминая, что $\Lambda = V'(M)$, и переходя к собственным значениям матрицы M — $\{\mu_i\}$, получаем

$$\mathcal{Z}_N^{\{V\}}[V'(M)] = \frac{\det\ \tilde{\Phi}_i(\mu_j)}{\prod\limits_{i>j}(V'(\mu_i) - V'(\mu_j))}, \tag{3.7}$$

где

$$\tilde{\Phi}_i(\mu) = F_i(V'(\mu)). \tag{3.8}$$

Перейдем теперь к нормировке (2.82), задаваемой гауссовским интегралом:

$$C^{(N)}[V|M]^{-1} \equiv \int DX\ \mathrm{e}^{-U_2(M,X)}. \tag{3.9}$$

Используя $U(N)$-инвариантность меры Хаара dX, можно легко диагонализовать M. После этого гауссовский интеграл (3.9) легко вычисляется:

$$\int DX\ \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i,j}^{N} U_{ij}X_{ij}X_{ji}} \sim \prod_{i,j}^{N} U_{ij}^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

и остается подставить явный вид $U_{ij}(M)$. Если потенциал представляется в виде формального ряда $V(X) = \sum \frac{v_n}{n}X^n$, то

$$U_2(M,X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1}\left(\sum_{a+b=n-1}\mathrm{Tr}\ M^a X M^b X\right),$$

$$U_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \left(\sum_{a+b=n-1} \mu_i^a \mu_j^b \right) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \frac{\mu_i^n - \mu_j^n}{\mu_i - \mu_j} = \frac{V'(\mu_i) - V'(\mu_j)}{\mu_i - \mu_j}. \tag{3.11}$$

Возвращаясь к (2.81), получаем

$$Z_N^{\{V\}}[M] = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\ [V(M) - MV'(M)]} C^{(N)}[V|M] \mathcal{Z}_N[V'(M)] \sim$$

$$\sim [\det\ \tilde{\Phi}_i(\mu_j)] \prod_{i>j}^{N} \frac{U_{ij}}{(V'(\mu_i) - V'(\mu_j))} \prod_{i=1} s(\mu_i) = \frac{[\det\ \tilde{\Phi}_i(\mu_j)]}{\Delta(M)} \prod_{i=1}^{N} s(\mu_i), \tag{3.12}$$

$$s(\mu) = [V''(\mu)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{V(\mu) - \mu V'(\mu)}. \tag{3.13}$$

Произведение s-факторов в правой части (3.12) может быть включено в определение $\tilde{\Phi}$-функций:

$$Z_N^{\{V\}}[M] = \frac{\det \Phi_i(\mu_j)}{\Delta(M)}, \tag{3.14}$$

где

$$\Phi_i(\mu) = s(\mu) \tilde{\Phi}_i(\mu) \underset{\mu \to \infty}{\longrightarrow} \mu^{i-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu} \right) \right), \tag{3.15}$$

и асимптотика существенна для того, чтобы детерминант (3.14) давал решение иерархии КП в смысле [58, 59].

Из уравнений (3.8), (3.13) и (3.15) следует, что $\Phi_i(\mu)$ могут быть получены из основной функции $\Phi_1(\mu)$ с помощью следующего соотношения:

$$\Phi_i(\mu) = [V''(\mu)]^{\frac{1}{2}} \int x^{i-1} \mathrm{e}^{-V(x) + xV'(\mu)} dx = A_{\{V\}}^{i-1}(\mu) \Phi_1(\mu)\ , \tag{3.16}$$

где $A_{\{V\}}(\mu)$ — дифференциальный оператор первого порядка:

$$A_{\{V\}}(\mu) = s \frac{\partial}{\partial \lambda} s^{-1} = \frac{\mathrm{e}^{V(\mu) - \mu V'(m)}}{[V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\mathrm{e}^{-V(\mu) + \mu V'(\mu)}}{[V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{V''(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu - \frac{V'''(\mu)}{2[V''(\mu)]^2}. \tag{3.17}$$

В частном случае $V(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ оператор $A_{\{p\}}(\mu) = \frac{1}{p\mu^{p-1}} \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu - \frac{p-1}{2p\mu^p}$ совпадает (с точностью до масштабного преобразования μ и $A_{\{p\}}(\mu)$) с оператором, выделяющим конечномерное подпространство в бесконечномерном грассманиане [63]. Следует особо отметить, что именно соотношение $\Phi_{i+1}(\mu) = A_{\{V\}}(\mu)\Phi_i(\mu)$ ($F_{i+1}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} F_i(\lambda)$) ответственно за выделение статсуммы топологической (W)-гравитации – GKM среди решений (и τ-функций) общего вида, записанных в переменных Мивы

$$\tau_N^{\{\phi_i\}}[M] = \frac{[\det \phi_i(\mu_j)]}{\Delta(M)} \tag{3.18}$$

с произвольным набором функций $\phi_i(\mu)$. Ниже будет показано, что выражение (3.18) в точности является τ-функцией иерархии КП в представлении Мивы.

Наиболее известно представление (общей) τ-функции иерархии КП в виде фермионного коррелятора $\tau^G\{T_n\} = \langle 0| : \mathrm{e}^{\sum T_n J_n} : G|0\rangle$ [56], где

$$J(z) = \tilde{\psi}(z)\psi(z), \qquad G = :\exp\, \mathcal{G}_{mn}\tilde{\psi}_m\psi_n : \tag{3.19}$$

в (двумерной) теории свободных фермионных полей $\psi(z)$, $\tilde{\psi}(z)$ с (голоморфным) действием $\int \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi$. Вакуумные состояния определяются условиями $\psi_n|0\rangle = 0$, $n < 0$ и $\tilde{\psi}_n|0\rangle = 0$, $n \geq 0$, где $\psi(z) = \sum\limits_{\boldsymbol{Z}} \psi_n z^n\ dz^{\frac{1}{2}}$, $\tilde{\psi}(z) = \sum\limits_{\boldsymbol{Z}} \tilde{\psi}_n z^{-n-1}\ dz^{\frac{1}{2}}$. Существенным ограничением на вид коррелятора со вставками (3.19) является тот факт, что оператор $: \mathrm{e}^{\sum T_n J_n} : G$ гауссовский, и его вставка может рассматриваться как модификация квадратичного действия и фермионного пропагатора $\langle\tilde{\psi}\psi\rangle$, так что по-прежнему применима теорема Вика, а именно: корреляторы $\langle 0|\prod_i \tilde{\psi}(\mu_i)\psi(\lambda_i)G|0\rangle$ для *любого* подходящего оператора G выражаются через парные

$$\langle 0|\prod_i \tilde{\psi}(\mu_i)\psi(\lambda_i)G|0\rangle = \det{}_{(ij)}\langle 0|\tilde{\psi}(\mu_i)\psi(\lambda_j)G|0\rangle. \tag{3.20}$$

Для того чтобы понять, что происходит с оператором $\mathrm{e}^{\sum T_n J_n}$ после преобразования Мивы (3.1), проще всего перейти к представлению с помощью свободных бозонных (скалярных) полей тока $J(z) = \partial\varphi(z)$. Тогда

$$\sum T_n J_n = \sum_i \left(\sum_n \frac{1}{n\cdot\mu_i^n}\varphi_n \right) = \sum_i \varphi(\mu_i)$$

и

$$: \mathrm{e}^{\sum\limits_i \varphi(\mu_i)} := \frac{1}{\prod\limits_{i<j}(\mu_i - \mu_j)} \prod_i : \mathrm{e}^{\varphi(\mu_i)} : \ . \tag{3.21}$$

В фермионном представлении лучше начать с

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_i (\frac{1}{\mu_i^n} - \frac{1}{\tilde{\mu}_i^n}) \tag{3.22}$$

вместо (3.1). Тогда

$$: \mathrm{e}^{\sum T_n J_n} := \frac{\prod\limits_{i,j}^{N}(\tilde{\mu}_i - \mu_j)}{\prod\limits_{i>j}(\mu_i - \mu_j)\prod\limits_{i>j}(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_j)}\prod_i \tilde{\psi}(\tilde{\mu}_i)\psi(\mu_i), \tag{3.23}$$

а для восстановления формы замены (3.1) необходимо путем предельного перехода загнать все $\tilde{\mu}_i$ в бесконечность. На другом языке это означает, что левый вакуум заменяется на

$$\langle N| \sim \langle 0|\tilde{\psi}(\infty)\tilde{\psi}'(\infty)...\tilde{\psi}^{(N-1)}(\infty). \tag{3.24}$$

Теперь τ-функция может быть представлена в форме:

$$\tau_N^G[M] = \langle 0| : \mathrm{e}^{\sum T_n J_n} : G|0\rangle = \Delta(M)^{-1}\langle N|\prod_i : \mathrm{e}^{\varphi(\mu_i)} : G|0\rangle =$$

$$= \lim_{\tilde{\mu}_j \to \infty} \frac{\prod\limits_{i,j}(\tilde{\mu}_i - \mu_j)}{\prod\limits_{i>j}(\mu_i - \mu_j)\prod\limits_{i>j}(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_j)}\langle 0|\prod_i \tilde{\psi}(\tilde{\mu}_i)\psi(\mu_i)G|0\rangle, \tag{3.25}$$

где, применяя теорему Вика (3.20) и переходя к пределу $\tilde{\mu}_i \to \infty$, получаем

$$\tau_N^G[M] = \frac{\det\, \phi_i(\mu_j)}{\Delta(M)} \tag{3.26}$$

с элементами матрицы — функциями

$$\phi_i(\mu) \sim \langle 0|\tilde{\psi}^{(i-1)}(\infty)\psi(\mu)G|0\rangle \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{i-1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \tag{3.27}$$

Таким образом, мы доказали, что τ-функция иерархии КП в переменных Мивы (3.1) принимает детерминантную форму (3.2), или, что то же самое, (3.2) является τ-функцией иерархии КП. Теперь мы сформулируем, как от общей точки грассманиана, описываемой (бесконечной) матрицей $G = \exp\sum A_{ij}\tilde{\psi}_i\psi_j$ с двумя индексами (∞^2), перейти к специальным решениям, определяемым, в частности, единственной (∞) (или двумя) функциями одного переменного ($2\times\infty$).

Вернемся к вопросу о выделении струнных решений среди всех решений иерархии КП — т.е., в некотором смысле, заданию дополнительных условий. Используя интегрируемость, достаточно доказать лишь одно из бесконечного набора дополнительных условий, так называемое струнное уравнение или действие $\mathcal{L}_{-1}$-го генератора алгебры Вирасоро, вся остальная "башня" вирасоровских условий следует из этих двух свойств по индукции [25, 111].

Действие $\mathcal{L}_{-1}$-го генератора Вирасоро (дифференцирование по спектральному параметру) связано с оператором

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}} = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{V''(M)}\frac{\partial}{\partial M_t r}, \tag{3.28}$$

поэтому естественно сначала ответить на вопрос, как оператор (3.28) действует на статсумму

$$Z^{\{V\}}[M] = \frac{\det\tilde{\Phi}_i(\mu_j)}{\Delta(M)}\prod_i s(\mu_i),$$

$$s(\mu) = (V''(\mu))^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)},$$

$$\tilde{\Phi}_i(\mu) = F_i(\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{i-1} F_1(\lambda),\ \ \lambda = V'(\mu). \tag{3.29}$$

Во-первых, если рассматривать $Z^{\{V\}}$ как функцию времен T, то

$$\frac{1}{Z^{\{V\}}}\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{tr}}Z^{\{V\}} = -\sum_{n\geq 1}\mathrm{Tr}\ \left[\frac{1}{V''(M)M^{n+1}}\right]\frac{\partial\log Z^{\{V\}}}{\partial T_n}. \tag{3.30}$$

С другой стороны, применяя непосредственно (3.28) к явной формуле (3.29), получаем

$$\frac{1}{Z^{\{V\}}}\mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}Z^{\{V\}} =$$

$$= -\mathrm{Tr}\ M + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{V''(\mu_i)V''(\mu_j)}\frac{V''(\mu_i)-V''(\mu_j)}{\mu_i-\mu_j} +$$

$$+\mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial\Lambda_{tr}}\log\ \det\ F_i(\lambda_j). \tag{3.31}$$

Ниже будет показано, что формула

$$\frac{1}{Z^{\{V\}}}\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}Z^{\{V\}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial T_1}\log\ Z^{\{V\}} + \mathrm{Tr}\,M - \mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}\log\ \det\ F_i(\lambda_j) \tag{3.32}$$

может быть использована для определения универсального оператора $\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}$. Это определение имеет вид

$$\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}} = \sum_{n\geq 1} \mathrm{Tr}\ \left[\frac{1}{V''(M)M^{n+1}}\right]\frac{\partial}{\partial T_n}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{V''(\mu_i)V''(\mu_j)}\frac{V''(\mu_i)-V''(\mu_j)}{\mu_i-\mu_j}-\frac{\partial}{\partial T_1}, \tag{3.33}$$

и это выражение превращается в уже известное для мономиальных потенциалов $V(X)=\frac{X^{p+1}}{(p+1)}$ (отметим, что члены с $i=j$ включены в суммирование в правой части (3.33)).

Таким образом, для доказательства $\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}$-условия остается показать, что правая часть (3.32) равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial T_1}\log\ Z_N^{\{V\}} = \mathrm{Tr}\ M - \mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial \Lambda_{tr}}\log\ \det\ F_i(\lambda_j). \tag{3.34}$$

Для того чтобы доказать это, очень существенно, что статсумма является τ-функцией: $Z_N^{\{V\}} = \tau_N^{\{V\}}$. При этом левая часть равенства может быть представлена в виде вычета отношения τ-функций

$$\mathrm{res}_\mu \frac{\tau_N^{\{V\}}(T_n+\mu^{-n}/n)}{\tau_N^{\{V\}}(T_n)} = \frac{\partial}{\partial T_1}\log\ \tau_N^{\{V\}}(T_n). \tag{3.35}$$

Теперь, если перейти к переменным Мивы, τ-функция в числителе выражается той же самой формулой, что и в знаменателе, но с дополнительным параметром μ, т.е. она равна $\tau_{N+1}^{\{V\}}$. Этого наблюдения почти достаточно, чтобы вывести (3.34). Для простейшего случая $N=1$ имеем ($\lambda = V'(\mu)$):

$$\tau_1^{\{V\}}(T_n) = \tau_1^{\{V\}}[\mu_1] = \mathrm{e}^{V(\mu_1)-\mu_1V'(\mu_1)}[V''(\mu_1)]^{\frac{1}{2}}F(\lambda_1), \tag{3.36}$$

$$\tau_1^{\{V\}}(T_n+\mu^{-n}/n) = \tau_2^{\{V\}}[\mu_1,\mu] =$$

$$= \mathrm{e}^{V(\mu_1)-\mu_1V'(\mu_1)}\mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}\frac{[V''(\mu_1)V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}}{\mu-\mu_1}\left[F(\lambda_1)\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda}-F(\lambda)\frac{\partial F(\lambda_1)}{\partial\lambda_1}\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}[V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}F(\lambda)}{\mu-\mu_1}\tau_1^{\{V\}}[\mu_1]\left[-\frac{\partial\log F(\lambda_1)}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial\log F(\lambda)}{\partial\lambda}\right]. \tag{3.37}$$

Функция F имеет следующую асимптотику:

$$F(\lambda) = \int dx\ \mathrm{e}^{-V(x)+\lambda x} \sim \mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}[V''(\mu)]^{-\frac{1}{2}}\left\{1+O\left(\frac{V''''}{V''V''}\right)\right\}. \tag{3.38}$$

Если $V(\mu)$ растет на бесконечности $\mu \to \infty$ как μ^n, то $\frac{V''''}{(V'')^2} \sim \mu^{-n}$, и для дальнейшего достаточно, чтобы $n = p + 1 > 1$, так что в скобках в правой части (3.38) асимптотика имеет вид $\{1 + o(\frac{1}{\mu})\}$, где $\mu \cdot o(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Числитель правой части (3.37) устроен как $\sim 1 + o(1/\mu)$, в то время как второй член в квадратных скобках ведет себя как $\frac{\partial \log F(\lambda)}{\partial \lambda} \sim \mu(1 + o(\frac{1}{\mu}))$. Собирая все вместе, получаем

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \log\ \tau_1^{\{V\}} = \mathrm{res}_\mu \left(\frac{1 + o(\frac{1}{\mu})}{\mu - \mu_1} \left(-\frac{\partial \log F(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} + \mu \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\right)\right) =$$

$$= \mu_1 - \frac{\partial \log F(\lambda_1)}{\partial \lambda_1}, \tag{3.39}$$

т.е. мы доказали (3.34) для частного случая $N = 1$.

Для произвольного N доказательство практически не меняется: после простого, но длинного вычисления получим

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \log \tau_N^{\{V\}} = \mathrm{res}_\mu \left(\frac{1 + o(1/\mu)}{\prod_{j=1}(\mu - \mu_j)} \mu^N \left([1 + o(1/\mu)] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\mu} \left[\mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}} \log\ \det\ F_i(\lambda_j) \right] \cdot [1 + \mathcal{O}(1/\mu)] \right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mu_j - \mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}} \log\ \det\ F_i(\lambda_j), \tag{3.40}$$

что завершает доказательство уравнения (3.34) и вывод формы универсального дополнительного условия – $\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}$-оператора.

В частном случае мономиального потенциала $V \equiv V_p = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ общая формула (3.33) обретает более привычный вид [25, 26]:

$$\mathcal{L}_{-1}^{\{p\}} = \frac{1}{p} \sum_{n \geq 1} (n + p) T_{n+p} \frac{\partial}{\partial T_n} + \frac{1}{2p} \sum_{\substack{a+b=p \\ a,b \geq 0}} a T_a b T_b - \frac{\partial}{\partial T_1}. \tag{3.41}$$

3.2. Точные решения топологических $(p, 1)$-моделей и их деформации в теории типа Гинзбурга — Ландау. Для разных потенциалов $V(X)$ модель (2.81) формально воспроизводит различные теории (p, q)-серии следующим образом: потенциал $V(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ задает целую серию (p, q) струнных моделей с фиксированным p и всеми возможными q. Для того чтобы зафиксировать q, необходимо специальным образом зафиксировать времена T: положить все $T_k = 0$, кроме T_1 и T_{p+q} (заметим, что эта процедура нарушает симметрию между p и q, присущую конформной теории).

Рассмотрим для иллюстрации два простых примера. Сначала положим $p=2$, т.е. начнем со случая КдФ-редукции иерархии КП. В этом случае струнное уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{\tau_{\rm KdV}}\mathcal{L}_{-1}\tau_{\rm KdV}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k>1\\ k\ \rm odd}}kT_k\frac{\partial}{\partial T_{k-2}}\log\tau_{\rm KdV}+\frac{T_1^2}{4}=0, \tag{3.42}$$

или, дифференцируя еще раз по T_1, получим

$$\sum_{\substack{k>1\\ k\ \rm odd}}kT_k\frac{\partial^2}{\partial T_{k-2}\partial T_1}\log\tau_{\rm KdV}+T_1=0. \tag{3.43}$$

Используя определение полиномов Гельфанда — Дикого

$$\frac{\partial^2}{\partial T_{k-2}\partial T_1}\log\tau_{\rm KdV}=\left[L^{2m-1}\right]_{-1}\equiv\mathcal{R}_m[u], \tag{3.44}$$

имеем

$$\sum_{m\ge 0}(2m+1)T_{2m+1}\mathcal{R}_m[u]=0. \tag{3.45}$$

Теперь уже можно использовать "правила" выделения (p,q) критических точек [25] для $p=2$ и $q=2m-1$, т.е. $(2,2m-1)$ решений из (3.43), (3.45). Самый простой случай: $m=1$, когда $3T_3\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\log\tau_{\rm KdV}+T_1=0$. Используя $u\sim\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\log\tau_{\rm KdV}$, находим решение уравнения КдФ $u\sim\frac{T_1}{T_3}$, или, фиксируя T_3, получаем $F=\log\tau\sim T_1^3$, что совпадает с результатами второго раздела (2.10) для $c=-2$ теории, взаимодействующей с $2D$-гравитацией, в которой $\langle P^3\rangle=1$, где P — единичный оператор (2.9), $P=c\bar{c}e^{\phi}$. Этот пример — наиболее известный случай чистой *топологической* гравитации.

Менее тривиальный пример — $(2,3)$-теория с $m=2$, в которой (3.45) и явное выражение $\mathcal{R}_2\sim u^2+u''$ приводят к появлению первого уравнения Пенлеве $u^2+u''=T_1$. Данный пример отвечает теории чистой (физической) гравитации, где решение, как видно, уже гораздо менее тривиально, чем в предыдущем случае.

С рассмотренной точки зрения наличие всех (p,q) критических точек в модели (2.81) является чисто формальным утверждением. Для потенциала $V(X)=\frac{X^{p+1}}{p+1}$ статсумма $Z[V|T_k]=\tau_V[T_k]\equiv\tau_p[T_k]$ удовлетворяет следующему струнному уравнению:

$$\sum_{k=1}^{p-1}k(p-k)T_kT_{p-k}+\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)\left(T_{p+k}-\frac{p}{p+1}\delta_{k,1}\right)\frac{\partial}{\partial T_k}\log\ \tau_p[T]=0, \tag{3.46}$$

т.е. τ-функция определена как разложение по (малым) временам Мивы (3.1) в окрестности нулевых значений всех времен, кроме T_{p+1}, которое сдвинуто на некоторый конечный фактор $(\frac{p}{p+1})$, что отвечает в силу приведенных выше аргументов $(p,1)$-модели. Таким образом, мы видим, что матричное интегральное представление типа Концевича отвечает решению $(p,1)$ струнных моделей, которые описывают взаимодействие (A_n-) топологической материи с топологической гравитацией или топологическую W-гравитацию.

Теперь перейдем к рассмотрению деформаций чистой $(p,1)$-теории [64, 112], связанной с деформацией потенциала и так называемыми p- или уиземовскими временами, которые непосредственно связаны с деформацией *модулей* решений. На самом деле существует *a priori* другая интегрируемая структура в модели (2.81), где потоки описываются временами, связанными с нетривиальными коэффициентами потенциала V. В результате теории с мономиальным потенциалом $V_p(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ и произвольным полиномом степени $(p+1)$ оказываются тесно связанными друг с другом.

Для того чтобы убедиться в этом, вернемся к вопросу о вычислении производных Z_{GKM} по временам T_k. Эти производные определяют непертурбативные корреляционные функции в струнной теории и представляют определенный интерес с "внутренней" точки зрения в интегрируемой системе. Производные по временам T_k с $k \geq p+1$ (отвечающие корреляторам иррелевантных операторов) вычисляются достаточно сложно, напротив, для времен T_k при $1 \leq k \leq p$ ситуация гораздо проще. Используя очевидное определение "среднего", такое, что статсумма (2.81) $Z_{GKM} = \langle 1 \rangle$, имеем

$$\left.\frac{\partial Z_{GKM}}{\partial T_k}\right|_V = \langle \operatorname{Tr} M^k - \operatorname{Tr} X^k \rangle, \quad 1 \leq k \leq p. \tag{3.47}$$

При этом подразумевается, что производная в левой части вычисляется при *фиксированном* потенциале $V(x) = \sum^{p+1} \frac{v_k}{k} X^k$.

Правая часть равенства (3.47) может быть также представлена в виде

$$\left.\frac{\partial Z_{GKM}}{\partial T_k}\right|_V = \left\langle \operatorname{Tr} \frac{\partial V(M)}{\partial v_k} - \operatorname{Tr} \frac{\partial V(X)}{\partial v_k} \right\rangle, \qquad 1 \leq k \leq p, \tag{3.48}$$

что уже очень похоже, но на самом деле не совпадает с выражением $-\frac{\partial}{\partial v_k} Z_{GKM}$, которое отличается от (3.48) на некоторые поправочные факторы. Проблема заключается в том, что в выражении $\frac{\partial}{\partial v_k} Z_{GKM}$ есть вклады не только от дифференцирования $V(X) - V(M)$ из экспоненты (2.81), но и вклад от члена $V'(M)(X-M) \equiv W(M)(X-M)$, а также производная нормировочного множителя (2.82). Эти поправки можно разделить на две части:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial}{\partial v_k} W\right) + \text{"квантовые поправки"}. \tag{3.49}$$

Первую часть можно убрать, если ввести новый "спектральный параметр" $W(M) = \tilde{M}^p$, в результате чего естественным образом возникают новые времена $\tilde{T}_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\ \tilde{M}^{-k}$. Глядя на формулу (3.49), становится ясно, что не сами $\{v_k\}$ являются "правильными" переменными для произвольного потенциала. Легко убедиться, что гораздо удобнее работать с их линейными комбинациями $\{t_k\}$, определенными следующим образом [36]:

$$t_k = -\frac{p}{k(p-k)}\mathrm{res}\ W^{1-k/p}(\mu)d\mu. \tag{3.50}$$

Используя (3.50), легко получить

$$\mu = \frac{1}{p}\sum_{-\infty}^{p+1} kt_k\tilde{\mu}^{k-p}, \qquad V(\mu) - \mu V'(\mu) = -\sum_{-\infty}^{p+1} t_k\tilde{\mu}^k. \tag{3.51}$$

Выражение (3.51) говорит о том, что экспоненциальный множитель в формуле (2.81) есть не что иное, как стандартная существенная особенность функции Бейкера — Ахиезера для иерархии, где интегрируемые потоки параметризуются p-временами.

Наконец, прямым вычислением получаем

$$Z[V|T_k] = \tau_V[T_k] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum A_{ij}(t)(t_i+\tilde{T}_i)(t_j+\tilde{T}_j)\right)\tau_p[t_k+\tilde{T}_k], \tag{3.52}$$

где $A_{ij} = \mathrm{res}_\mu W^{i/p}dW_+^{j/p}$, а $f(\mu)_+$ обозначает неотрицательную часть ряда Лорана $f(\mu) = \Sigma\ f_i\mu^i$: $f(\mu)_+ = \Sigma_{i\geq 0}\ f_i\mu^i$. Теперь уже легко убедиться, что $\tau_p[T] \equiv \tau_{V_p}[T]$ является τ-функцией p-редукции иерархии КП (иерархии p-го уравнения КдФ).

Смысл формулы (3.52) заключается в том, что "сдвинутая" потоками p-времен (3.50) τ-функция достаточно просто выражается через τ-функцию p-редукции, зависящей уже только от суммы времен $\tilde{T}_k$ и t_k. Замена спектрального параметра $M \to \tilde{M} = f(M) = W^{1/p}(M)$ (и соответствующая замена времен $T_k \to \tilde{T}_k$) является естественной операцией при построении эквивалентных иерархий [113].

Действительно, связь между τ-функциями эквивалентных иерархий может быть получена из следующего тождественного преобразования:

$$\tau(T) = \frac{\Delta(\tilde{\mu})}{\Delta(\mu)}\prod_i [f'(\mu_i)]^{\frac{1}{2}}\tilde{\tau}(\tilde{T}), \tag{3.53}$$

где детерминантное представление $\tilde{\tau}(\tilde{T})$ как функции времен $\tilde{T}$ (3.2) строится из базисных векторов $\tilde{\phi}(\tilde{\mu}) = [f'(\mu(\tilde{\mu}))]^{\frac{1}{2}}\phi_i(\mu(\tilde{\mu}))$. Прямым вычислением можно убедиться, что множитель перед τ-функцией в правой части формулы (3.53) переписывается в виде

$$\frac{\Delta(\tilde{\mu})}{\Delta(\mu)}\prod_i [f'(\mu_i)]^{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j\right), \tag{3.54}$$

где $A_{ij} = \operatorname{res} f^i(\lambda)d_\lambda f_+^j(\lambda)$. Из (3.53) следует, что

$$\tau(T(\tilde{T})) = \tilde{\tau}(\tilde{T})\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j\right). \tag{3.55}$$

Введем τ-функцию $\hat{\tau}(\tilde{T})$ p-редуцированной иерархии КП, определенную как

$$\tilde{\tau}(\tilde{T}) \equiv \frac{\hat{\tau}(\tilde{T})}{\tau_0(t)}\exp\left(\sum_j jt_{-j}\tilde{T}_j\right), \qquad \tau_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum A_{ij}t_it_j\right), \tag{3.56}$$

для которой вместо

$$\tau_V[T] = \frac{\det\ \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)} \tag{3.57}$$

имеем

$$\frac{\tau_p[t+\tilde{T}]}{\tau_p[t]} = \frac{\det\hat{\phi}_i(\tilde{\mu}_j)}{\Delta(\tilde{\mu})}, \tag{3.58}$$

а соответствующие (3.57) и (3.58) точки грассманиана определяются базисными векторами

$$\phi_i(\mu) = [W'(\mu)]^{\frac{1}{2}}\exp\left(V(\mu) - \mu W(\mu)\right)\int x^{i-1}\exp\left(-V(x) + xW(\mu)\right)dx \tag{3.59}$$

и

$$\hat{\phi}_i(\tilde{\mu}) = [p\tilde{\mu}^{p-1}]^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\sum_{j=1}^{p+1} t_j\tilde{\mu}_j\right)\int x^{i-1}\exp\left(-V(x) + x\tilde{\mu}^p\right)dx. \tag{3.60}$$

При этом легко показать, что $\hat{\tau}_p(T)$ удовлетворяет струнному уравнению (L_{-1}-условию) со следующим образом сдвинутыми КП-временами:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k(p-k)(t_k+\tilde{T}_k)(t_{p-k}+\tilde{T}_{p-k}) + \sum_{k=1}^{\infty}(p+k)(t_{p+k}+\tilde{T}_{p+k})\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_k}\log\hat{\tau}_p\,[t+\tilde{T}] = 0, \tag{3.61}$$

причем t_i, определенные в (3.50), *тождественно* равны нулю при $i \geq p+2$.

Из формул (3.52), (3.61) можно извлечь как минимум два различных следствия. Во-первых, производящая функция в случае деформации мономиального потенциала ($\equiv$ полинома той же степени) выражается через τ-функцию эквивалентной (в смысле [113]) p-редуцированной иерархии КП; во-вторых, в деформированном случае не только t_{p+1}, а все t_k с номерами $k \leq p+1$ отличны от нуля. Подобные теории будем называть *топологически деформированными* $(p,1)$-моделями (чтобы не путать с *собственно* $(p,1)$-моделями, задаваемыми мономиальными потенциалами $V_p(X)$), так как деформация является топологической в том смысле, что сохраняет все свойства топологических моделей. С точки зрения полевых теорий эти модели отвечают двумерным $N=2$ твистованным теориям Гинзбурга — Ландау, взаимодействующим с топологической гравитацией. В сферическом пределе полученное выше соотношение было воспроизведено другим способом в [35].

3.3. Нетопологические решения и *pq*-дуальность. Приведенная выше схема построения топологических решений имеет ясную интерпретацию на языке канонического квантования. В самом деле, точные непертурбативные решения топологических $(p,1)$-теорий описываются производящей функцией (2.81), которую можно рассматривать в определенном смысле как представление функционального интеграла для уравнений [24] $[\hat{P},\hat{Q}]=1$, т.е. просто алгебры Гейзенберга в реализации, где $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ – дифференциальные операторы конечного порядка (p и q соответственно), причем p-й порядок оператора $\hat{P}$ задает p-редукцию, в то время как q отвечает за q-ю критическую точку. Квазиклассически коммутатор превращается в скобку Пуассона [36, 114] $\{P,Q\}=1$, где уже $P(x)$ и $Q(x)$ — определенные функции (полиномы). Легко видеть, что рассмотренный выше случай отвечает ситуации, когда $Q(x)\equiv x$ является полиномом первого порядка, а полином степени p — $P(x)$ следует отождествить* с $W(x)\equiv V'(x)$. При этом выражение, стоящее в экспоненте в формулах (2.81), (3.59) и (3.60), приобретает естественный смысл функционала действия

$$S_{p,1}(x,\mu) = -V(x) + xW(\mu) = -\int_0^x dy\; W(y)Q'(y) + Q(x)W(\mu),$$

*Например: $W(\mu)=\mu^2+t_1$, $Q(\mu)=\mu$, тогда

$$\{W,Q\} = \frac{\partial W}{\partial t_1}\frac{\partial Q}{\partial \mu} - \frac{\partial Q}{\partial t_1}\frac{\partial W}{\partial \mu} = 1.$$

$$W(x) = V'(x) = x^p + \sum_{k=1}^{p} v_k x^{k-1}, \qquad Q(x) = x^q, \tag{3.62}$$

и, естественным образом, его обобщение на случай произвольных (p,q) моделей имеет вид

$$S_{W,Q} = -\int\limits_0^x dy\ W(y)Q'(y) + Q(x)W(\mu),$$

$$W(x) = V'(x) = x^p + \sum_{k=1}^{p} v_k x^{k-1}, \qquad Q(x) = x^q + \sum_{k=1}^{q} \bar{v}_k x^{k-1}. \tag{3.63}$$

Вариация действия (3.63) по-прежнему дает $W(x) = W(\mu)$ с одним из решений $x = \mu$, а значение действия на экстремали $x = \mu$ имеет вид

$$S_{W,Q}|_{x=\mu} = \int\limits_0^\mu dy\ W'(y)Q(y) = \sum_{k=-\infty}^{p+q} t_k \tilde{\mu}^k, \tag{3.64}$$

где $\tilde{\mu}^p = W(\mu)$, а

$$t_k \equiv t_k^{(W,Q)} = -\frac{p}{k(p-k)} \operatorname{res} W^{1-k/p} dQ. \tag{3.65}$$

Необходимо заметить, что значение действия (3.63) на экстремали, записанное в форме (3.64), определяет квазиклассический (или бездисперсионный) предел p-редуцированной иерархии КП [36, 114] с $p+q-1$ независимыми потоками. Выше было показано, что в случае топологически деформированной $(p,1)$-модели квазиклассическая иерархия является *точной* в следующем смысле: решения иерархии, где потоки определяются p-временами, являются также решениями *полных* уравнений иерархии КП ($t+T$-формула (3.52)), а первый из набора базисных векторов является в точности функцией Бейкера — Ахиезера, ограниченной на ”малое” фазовое пространство. Это, безусловно, не так для общего случая (p,q)-моделей: здесь квазиклассика уже не точна, и для того, чтобы найти явный вид базисных векторов, необходимо решить ”полную” задачу — найти точные решения полной иерархии (редуцированного) КП вдоль первых $p+q-1$ потоков. Тем не менее наличие ”квазиклассической компоненты” в полной интегрируемой структуре данных моделей может дать, в принципе, некоторую полезную информацию: например, можно предположить, что коэффициенты асимптотических разложений базисных векторов выражаются только через производные квазиклассической τ-функции.

Возвращаясь к уравнению (3.65), сразу заметим, что теперь только для $k \geq p+q+1$ p-времена тождественно равны нулю, а для $k = p+q$-го значения времени имеем

$$t_{p+q} \equiv t_{p+q}^{(W,Q)} = \frac{p}{p+q}, \tag{3.66}$$

и корректное критическое поведение получается при "подкрутке" всех времен $\{t_k\}$ с $k < p+q$, так что они становятся равными нулю. Точная формула для векторов базиса в грассманиане для общего случая (p,q)-моделей принимает вид

$$\phi_i(\mu) = [W'(\mu)]^{\frac{1}{2}} \exp\left(- S_{W,Q}|_{x=\mu}\right) \int d\mathcal{M}_Q(x) f_i(x) \exp\ S_{W,Q}(x,\mu), \tag{3.67}$$

где $d\mathcal{M}_Q(x)$ — мера интегрирования. Как будет видно в дальнейшем, для общего случая (p,q)-моделей мера определяется *двумя* полиномами W и Q и имеет следующий вид:

$$d\mathcal{M}_Q(z) = [Q'(z)]^{\frac{1}{2}} dz, \tag{3.68}$$

что следует из струнного уравнения. При выборе меры в виде (3.68), для того чтобы обеспечить правильное асимптотическое поведение базисных векторов $\phi_i(\mu)$, следует выбрать функции $f_i(x)$ (не обязательно мономы или полиномы!), удовлетворяющие такому же асимптотическому условию: $f_i(x) \sim$ $\sim x^{i-1}(1 + O(1/x))$. Наконец, для того, чтобы базисные векторы удовлетворяли струнному уравнению, необходимо выполнить два условия: условие редукции

$$W(\mu)\phi_i(\mu) = \sum_j C_{ij}\phi_j(\mu) \tag{3.69}$$

и инвариантность относительно действия оператора Каца — Шварца (3.17)

$$A^{(W,Q)}\phi_i(\mu) = \sum A_{ij}\phi_j(\mu), \tag{3.70}$$

где

$$A^{(W,Q)} \equiv N^{(W,Q)}(\mu)\frac{1}{W'(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}[N^{(W,Q)}(\mu)]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{W'(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{W''(\mu)}{W'(\mu)^2} + Q(\mu),$$

$$N^{(W,Q)}(\mu) \equiv [W'(\mu)]^{\frac{1}{2}} \exp\left(- S_{W,Q}|_{x=\mu}\right). \tag{3.71}$$

Струнное уравнение является следствием (3.69), (3.70). Немедленно структура действия приводит к тому, что

$$A^{(W,Q)}\phi_i(\mu) = N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)Q(z)f_i(z)\exp\ S_{W,Q}(z,\mu), \tag{3.72}$$

и условие (3.70) может быть переформулировано как свойство Q-редукции (дуального) базиса $\{f_i(z)\}$:

$$Q(z)f_i(z) = \sum A_{ij}f_i(z). \tag{3.73}$$

Теперь вернемся к условию W-редукции. Умножая $\phi_i(\mu)$ на $W(\mu)$ и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{gathered} W(\mu)\phi_i(\mu) = N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)f_i(z)\frac{1}{Q'(z)}\frac{\partial}{\partial z}[\exp\ Q(z)W(\mu)]\times \\ \times\exp\left[-\int\limits_0^z dy\ W(y)Q'(y)\right] = -N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)\exp\left[S_{W,Q}(z,\mu)\right]\times \\ \times\left(\frac{1}{Q'(z)}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{Q''(z)}{Q'(z)^2} - W(z)\right)f_i(z) \equiv \\ \equiv -N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)\exp\left[S_{W,Q}(z,\mu)\right]A^{(Q,W)}f_i(z). \end{gathered} \tag{3.74}$$

Таким образом, для дуального базиса $\{f_i(z)\}$ условие (3.69) превращается в

$$A^{(Q,W)}f_i(z) = -\sum C_{ij}f_j(z), \tag{3.75}$$

где мы ввели обозначение $A^{(Q,W)}$ ($\neq A^{(W,Q)}$) для дуального оператора Каца — Шварца:

$$A^{(Q,W)} = \frac{1}{Q'(z)}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{Q''(z)}{Q'(z)^2} - W(z). \tag{3.76}$$

Формулы (3.67), (3.68) представляют собой точные интегральные выражения для базисных векторов, являющихся решениями (p,q) струнных моделей [112]. Смысл этих формул заключается в явном виде интегрального преобразования, связывающего дуальные (p,q) и (q,p) непертурбативные точные струнные решения. Мы будем называть это преобразование — преобразованием pq-дуальности (в общем случае $W-Q$-дуальности) для точных непертурбативных производящих функций (см. также [115]). В качестве основного следствия из приведенных выше формул можно заключить, что *общее решение* $c \leq 1$ $2D$ непертурбативной струнной теории формулируется с помощью *двух* (полиномиальных) функций: $W(x)$ и $Q(x)$.

3.4. Струнная теория поля и предел $c \to 1$. Наконец, перейдем к обсуждению вопроса, почему предложенная выше схема единого описания непертурбативного режима в некотором классе струнных моделей может рассматриваться как попытка построения *струнной теории поля* или эффективной формулировки теории струн, в которой мировая поверхность струны уже не присутствует явно. С самого начала необходимо заметить, что под струнной теорией поля будет пониматься нечто большее, чем ее традиционное определение как полевой теории функционалов, определенных на струнных петлях; ниже под струнной теорией поля будет пониматься некоторая эффективная теория, позволяющая с единой точки зрения рассматривать струнные вакуумы (решения классических уравнений движения струнной теории поля — $2D$ конформные теории поля, взаимодействующие с $2D$-гравитацией) и предлагающая ответ для эффективного действия — некоторой функции, имеющей (пертурбативные) разложения вокруг данных струнных вакуумов. Такая теория, в частности, должна уметь описывать переходы между различными струнными вакуумами и другие непертурбативные эффекты.

Рассмотренная выше схема может претендовать на то, чтобы называться *струнной* теорией поля, так как в основе ее лежит двумерная геометрия мировой поверхности, приводящая к тому, что корреляторы (в топологическом секторе) можно выразить через интегралы от дифференциальных форм на пространстве модулей [40]. Это основное отличие от обычной теории поля, где нет ограничений, налагаемых двумерной геометрией: общий вид представленной выше конструкции связан с клеточным разбиением пространства модулей [40, 116].

Таким образом, на данный момент мы имеем дело с теорией, описывающей различные (p,q)-модели, взаимодействующие с $2D$-гравитацией, вне рамок теории возмущения и технически основанной на (дифференциальных) уравнениях в пространстве констант связи, налагаемых на производящую функцию физических корреляторов. Основным утверждением является отождествление производящей функции с τ-функцией интегрируемой иерархии типа КП/Тоды, которая не определяется как *глобальная* функция в пространстве констант связи, а имеет некоторое фиксированное разложение вокруг каждой критической точки, воспроизводящее ряд теории возмущений оригинальной первично-квантованной теории (2.67). Однако при не строгих переходах в пространстве констант связи от одного решения к другому появляются препятствия, связанные с плохой сходимостью пертурбативных разложений, т.е. возникает необходимость нетривиального аналитического продолжения, при которой и появляются собственно непертурбативные вклады. Для простейших топологических $(p,1)$-теорий эту схему можно описать на языке эффективного интегрального представления, которое сводится к интегралу по эрмитовым матрицам (2.81), точные интегральные формулы для общего случая устроены гораздо более сложным образом.

Эта схема, в принципе, применима и к "граничному" $c = 1$ случаю. Однако $c = 1$ теория общего вида является гораздо более "насыщенной", чем $c < 1$ топологические модели, поэтому наивный предел из $c < 1$ эффективных матричных моделей приводит лишь к формулировке сильно вырожденных $c = 1$ теорий.

Все эти случаи более или менее основаны на обобщениях модели Пеннера, вычисляющей эйлеровские характеристики пространств модулей комплексных кривых. В самом деле, детерминантное представление статсуммы модели Пеннера [116] уже само по себе предполагает, что (при фиксированных временах) эта статсумма является τ-функцией решетки Тоды. Наличие интегрального представления модели Пеннера говорит о том, что эта теория является в определенном смысле аналогом обобщенной модели Концевича. Действительно, решение модели Пеннера

$$\mathcal{Z} \sim \det\ \mathcal{H}_{ij}^{(\alpha)} \tag{3.77}$$

с $\mathcal{H}_{ij}^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha + i + j - 1)$ является частным случаем топологических теорий, которые были рассмотрены выше.

Для того чтобы продемонстрировать это, сначала заметим, что для любого решения иерархии КП существует явное соотношение между детерминантным представлением в τ-функции переменных Мивы

$$\tau_{KP}[T_k] = \frac{\det_{ij} \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)} \tag{3.78}$$

и детерминантным представлением τ-функции, характерным для решений решетки Тоды

$$\tau_N[T_{-k}, T_k] = \det_{ij} H_{i+N,j+N}[T_{-k}, T_k], \tag{3.79}$$

где

$$\Delta(\mu) = \prod_{i>j}(\mu_i - \mu_j), \quad \phi_i(\mu) = \mu^{i-1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right), \quad T_k = \frac{1}{k}\sum_i \mu_i^{-k}, \quad k > 0 \tag{3.80}$$

и

$$\partial H_{ij}/\partial T_k = H_{i,j-k}, \quad j > k > 0, \quad \partial H_{ij}/\partial T_{-k} = H_{i-k,j}, \quad i > k > 0. \tag{3.81}$$

Соотношение между представлениями (3.78) и (3.79) проще всего формулируется с помощью полиномов Шура, определяемых следующей формулой:

$$\mathcal{P}[z|T_k] \equiv \exp\left\{\sum_{k>0} T_k z^k\right\} = \sum z^k P_k[T], \tag{3.82}$$

в частности, $P_{-n} = 0$ при любых $n > 0$; $P_0[T] = 1$; $P_1[T] = T_1$; $P_2[T] = T_2 + \frac{1}{2}T_1^2$; $P_3[T] = T_3 + T_2T_1 + \frac{1}{6}T_1^3$ и т.д. Важным свойством полиномов Шура является равенство $\frac{\partial P_k}{\partial T_n} = P_{k-n}$, следующее из того, что $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T_k} = z^k\mathcal{P}$. Это свойство позволяет выразить зависимость от времен матрицы $H_{ij}[T]$, удовлетворяющей уравнениям (3.81), через полиномы Шура:

$$H_{ij}[T_{-p}, T_p] = \sum_{\substack{k\le i\\ l\ge -j}} P_{i-k}[T_{-p}]H_{kl}P_{l+j}[T_p], \tag{3.83}$$

где $H_{kl} \equiv H_{kl}[0,0]$ уже является матрицей, не зависящей от времен T.

Рассмотрим сначала случай нулевых отрицательных времен и нулевого времени $N = T_{-k} = 0$, а затем разрешим нулевому времени принимать любые (целые положительные) * значения $N > 0$ и введем отрицательные времена T_{-k}.

Для заданной системы базисных векторов $\phi_i(\mu)$ при $i > 0$ введем по определению

$$H_{ij}[T_{-k} = 0, T_k] = \oint_{z\hookrightarrow 0} \phi_i(z)z^{-j}\mathcal{P}[z|T_k]dz, \quad i > 0. \tag{3.84}$$

Контур интегрирования, проходящий вокруг нуля, может быть деформирован к бесконечно удаленной точке, при этом интеграл также будет определяться особенностями функции $\mathcal{P}[z]$, если они имеются. Подставив определение (3.82) функции $\mathcal{P}[z]$ в (3.84), получим формулу (3.83), в которой $P_{k-i}[T_{-m} = 0] = \delta_{ki}$, а также

$$H_{kl} = \oint_{z\hookrightarrow 0} \phi_k(z)z^l dz. \tag{3.85}$$

Чтобы доказать равенство выражений (3.78) и (3.79), перейдем в формуле (3.82) к переменным Мивы (3.80)

$$\mathcal{P}[z|T_k] = \frac{\det\ M}{\det(M - Iz)} = \prod_i \frac{\mu_i}{(\mu_i - z)} = \left[\prod_i \mu_i\right] \sum_k \frac{(-)^k}{(z-\mu_k)}\frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta(\mu)}, \tag{3.86}$$

где $\Delta_k(\mu) \equiv \prod\limits_{i>j;i,j\ne k} (\mu_i - \mu_j)$. Теперь вклад в интеграл (3.84) дается только полюсами функции $\mathcal{P}[z|T_k]$ в точках μ_k:

$$H_{ij}[T_{-k} = 0, T_k] = \oint_{z\hookrightarrow 0} \phi_i(z)z^{-j}\mathcal{P}[z|T_k]dz = \frac{\prod\limits_i \mu_i}{\Delta(\mu)} \sum_k (-)^k \phi_i(\mu_k)\frac{\Delta_k(\mu)}{\mu_k^j}. \tag{3.87}$$

*Обсуждение случая $N < 0$ см. в [117].

Сумма в правой части (3.87) имеет вид произведения матриц, следовательно,

$$\det\ H_{ij} = \det\ \phi_i(\mu_k) \prod_k \left[\frac{\prod\limits_i \mu_i}{\Delta(\mu)} (-)^k \Delta_k(\mu) \right] \det\ \frac{1}{\mu_k^j}. \tag{3.88}$$

Последний детерминант в правой части (3.88) равен $\Delta(1/\mu) \sim \sim \Delta(\mu) \left[\prod\limits_k \mu_k^N \right]^{-1}$, заметим также, что $\prod\limits_k \left[\dfrac{\Delta_k(\mu)}{\Delta(\mu)} \right] = \Delta(\mu)^{-2}$, и, собирая все вместе, убедимся в существовании равенства $\det\ H_{ij} = \frac{\det\ \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)}$, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к введению нулевого и отрицательных времен. Нулевое время n возникает просто как одновременный сдвиг индексов i и j матрицы H_{ij}: $H_{ij} \to H_{i+N,j+N}$. Поэтому можно написать

$$H_{i+N,j+N}[0, T_k] = \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_i^{\{N\}}(z) z^{-j} \mathcal{P}[z] dz \tag{3.89}$$

с векторами $\phi_i^{\{N\}}(z) = z^{-N} \phi_{i+N}(z)$. Это полностью решает проблему нулевого времени N при положительных целых значениях N.

Что касается отрицательных времен, как только определена матрица H_{kl}, они могут быть введены с помощью соотношения (3.83), так что

$$H_{i+N,j+N}[T_{-k}, T_k] \equiv \sum_{k \le i} P_{i-k}[T_{-p}] H_{k+N,j+N}[0, T_l] =$$

$$= \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_i^{\{T_{-k},N\}}(z) z^{-j} \mathcal{P}\left[\frac{1}{z}|T_{-k}\right] \mathcal{P}[z|T_k] dz \tag{3.90}$$

с базисными векторами

$$\phi_i^{\{T_{-k},N\}}(z) \equiv \left(\mathcal{P}\left[\frac{1}{z}|T_{-k}\right] \right)^{-1} \sum P_{i-k}[T_{-l}] \phi_k^{[N]} =$$

$$= z^{-N} \exp\left(-\sum_{k>0} T_{-k} z^{-k} \right) \sum P_k[T_{-l}] \phi_{i+N-k}(z). \tag{3.91}$$

В определение базисных векторов (3.91) введен дополнительный экспоненциальный множитель, чтобы обеспечить правильное асимптотическое поведение $\phi_i^{\{T_{-k},N\}}(z) = z^{i-1}\{1 + \mathcal{O}(\frac{1}{z})\}$.

Важным частным случаем иерархии решетки Тоды является ее редукция к цепочке Тоды (см., например, [98]). Редукция к цепочке Тоды может быть легко описана в терминах задающего точку грассманиана фермионного оператора G, удовлетворяющего условию $[G, J_k + J_{-k}] = 0$, а также на детерминантном языке. В последнем случае налагается условие симметрии

$$[H\ ,\ \Lambda + \Lambda^{-1}] = 0, \tag{3.92}$$

где Λ — матрица сдвига $\Lambda_{ij} \equiv \delta_{i,j-1}$. Выполнение этого условия приводит к появлению τ-функции иерархии цепочки Тоды, которая уже зависит лишь от суммы положительных и отрицательных времен $t_k = \frac{1}{2}(T_k + T_{-k})$, и не зависит от их разности (можно рассматривать это как определяющее свойство цепочки Тоды). Заметим, что решением условия (3.92) является $H_{i,j} = \mathcal{H}_{i-j}$.

Теперь уже легко восстановить зависимость от отрицательных и нулевого времени в интегральных формулах для струнных решений иерархии КП, так что статсумма эффективной теории превратится в τ-функцию иерархии решетки Тоды. Соответствующий набор функций — базисных векторов в точке грассманиане, отвечающей обобщенной модели Концевича, задается интегральными формулами

$$\phi_i^{\{V\}}(\mu) = \mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}\sqrt{V''(\mu)}\int dx\ x^{i-1}\mathrm{e}^{-V(x)+xV'(\mu)} \equiv$$

$$\equiv s(\mu)\int dx\ x^{i-1}\mathrm{e}^{-V(x)+xV'(\mu)} \equiv \left\langle x^{i-1}\right\rangle_\mu . \tag{3.93}$$

Зависимость от N и T_{-k} вводится по следующему правилу *:

$$\phi_i^{\{V,N,T_{-k}\}}(\mu) \equiv \left\langle x^{i-1}\left[\frac{x}{\mu}\right]^N \exp\left(\sum_{l>0} T_{-l}(x^{-l}-\mu^{-l})\right)\right\rangle_\mu =$$

$$= \frac{\sqrt{V''(\mu)}\exp\left(V(\mu)-\mu V'(\mu)\right)}{\mu^N}\times$$

$$\times\int dx\ x^{N+i-1}\exp\left(-V(x)+xV'(\mu)\right)\exp\left(\sum_{l>0} T_{-l}(x^{-l}-\mu^{-l})\right) =$$

$$= \exp\left(\hat{V}(\mu)-\mu V'(\mu)\right)\sqrt{V''(\mu)}\int dx\ x^{i-1}\exp\left(-\hat{V}(x)+xV'(\mu)\right), \tag{3.94}$$

---

*Заметим, что экспонента от отрицательных степеней в нормировке не оказывает существенного влияния на τ-функцию иерархии КП, так как этот фактор сводится к экспоненте от тривиальной билинейной формы по временам и отвечает свободе в ее определении. Действительно, $\tau \sim \det\left(\exp\left[\sum_k a_k z_j^{-k}\right]\phi_i(z_j)\right) \sim \prod_l \exp\left[\sum a_k z_l^{-k}\right]\det\phi_i(z_j) \sim \exp\left[\sum k a_k T_k\right]\det\phi_i(z_j)$.

где $\hat V(X) \equiv V(X) - N\log X - \sum\limits_{k>0} t_{-k}X^{-k}$. Начальный потенциал V отождествляется с $\hat V_+$. Из формулы (3.94) немедленно следует, что статсумма обобщенной модели Концевича с учтенной зависимостью от нулевого и отрицательных времен (автоматически являющаяся τ-функцией иерархии решетки Тоды) есть

$$\hat Z_{\{\hat V\}}[M] = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,\hat V(M) - \mathrm{Tr}\,M\hat V'_+(M)} \frac{\int DX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\,\hat V(X) + \mathrm{Tr}\,\hat V'_+(M)X}}{\int dX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\,\hat U_{+,2}(X,M)}}. \tag{3.95}$$

Теперь уже легко ввести зависимость от положительных и отрицательных времен в модели Пеннера (3.77) и восстановить $\Phi_k^{\{V\}}(z)$ из (3.91). Действительно,

$$h_{ij}^{(\alpha)} = \mathcal{H}_{ij}^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha - 1 + i + j) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\,\mathrm{e}^{-y} y^{\alpha-1+i+j} = \oint \phi_i^{(\alpha)}(z) z^j \tag{3.96}$$

сразу дает

$$\phi_i^{(\alpha)}(z) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\,\mathrm{e}^{zy-y} y^{\alpha-1+i}, \tag{3.97}$$

что является уже представлением в духе топологических моделей, изучавшихся выше. Существенная разница с рассмотренными выше $c < 1$ примерами заключается в определении контура интегрирования в формуле (3.97), а также в том, что зависимость от параметра z тривиальна, так как интеграл легко вычисляется, приводя к результату

$$\phi_i^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{(z-1)^{\alpha+i}} \equiv \phi_{\alpha+i}(z)\ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j \phi_i^{(\alpha)}(z) = (-)^j \phi_{i+j}^{(\alpha)}(z) = (-)^j \frac{\Gamma(\alpha+i+j)}{(z-1)^{\alpha+i+j}}. \tag{3.98}$$

Вводя отрицательные времена, получаем [118]

$$\phi_i^{(\alpha)}(z|T_{-p}) = z^{-\alpha} \exp\left(-\sum_{p>0} T_{-p} z^{-p}\right) \sum_k P_k[T_{-p}] \phi_{i-k}^{(\alpha)}(z) \tag{3.99}$$

или

$$Z_{c=1} \sim \int DY \exp \mathrm{Tr}\, ZY + \alpha\,\mathrm{Tr}\,\log Y + \sum_{k>0} T_{-k}\,\mathrm{Tr}\,Y^{-k} \tag{3.100}$$

с положительными временами $T_{+k} = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\, Z^k$. Следует заметить, что формула (3.100) была независимо получена путем сравнения с результатами вычисления "тахионных" амплитуд в $c = 1$ теории [119].

Наконец, сделаем еще несколько замечаний по поводу $c = 1$ теорий. Вообще говоря, в этом случае мы ожидали получить наиболее общую (нередуцированную) τ-функцию иерархии КП или решетки Тоды, удовлетворяющую некоторому (опять же нередуцированному) струнному уравнению. Такая ситуация отвечала бы скорее взятию "прямой суммы" различных (p,q)-теорий, а не пределу из области $c < 1$. Однако в некоторых вырожденных случаях рассмотренный выше прямой предел $c \to 1$ также имеет смысл. Эти вырожденные случаи оказываются, по сути дела, $c = 1$ аналогами (p,q) струнных моделей и отвечают топологическому сектору $c = 1$ теории.

Действительно, легко видеть, что в специальном случае, когда $p = \pm q$, уравнения (3.69) и (3.70) сильно упрощаются и система вырождается в единственное уравнение. Безусловно, этот случай не отвечает минимальной серии, где пара (p,q) должна быть взаимно простыми числами. Тем не менее можно по-прежнему удовлетворить обоим условиям: редукции и инвариантности относительно действия оператора Каца — Шварца; полученные же решения, если посмотреть на формулу для центрального заряда материи, формально отвечают $c = 1$ для $p = q$ и $c = 25$ для $p = -q$.

Простейший пример опять возникает при $q = 1$. В этом случае $c = 1$ теория оказывается эквивалентной вспомогательной дискретной матричной модели [117], в то время как $c = 25$ буквально отвечает тому, что ожидается из развития подхода Пеннера [118, 119]. Действительно, если взять в общем случае (неполиномиальные) функции $W(x) = x^{-\beta}$ и $Q(x) = x^{\beta}$, действие приобретает логарифмический член $S_{-\beta,\beta} = -\beta\log x + \frac{x^{\beta}}{\mu^{\beta}}$, а уравнения (3.69) и (3.70) приводят к простым рациональным решениям. Легко видеть, что $\beta = 1$ сразу дает модель Пеннера во внешнем поле, что, как мы видели, скорее отвечает "дуальной" к $c = 1$ теории с центральным зарядом материи $c_{\mathrm{matter}} = 25$ и сильно неунитарной реализацией конформной материи *.

4. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В 4D N=2 СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ: КОМПЛЕКСНЫЕ КРИВЫЕ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

В предыдущих разделах были рассмотрены непертурбативные решения топологических струнных моделей, для которых существуют *явные* точные

---

*Эта дуальность между моделями с $c = 1$ и $c = 25$, вполне вероятно, связана с известным фактом, что решение $c = 1$ матричной модели Гросса и Клебанова связано [120] с решением модели Пеннера [116] преобразованием Лежандра.

формулы, описывающие производящие функции *всех* корреляторов. Эта связано, в первую очередь, с тем, что эти решения можно рассматривать как деформацию тривиальных конечнозонных решений, для которых спектральная кривая Σ является комплексной сферой, и, в частности, поэтому существенны лишь параметры, связанные с вычетами в отмеченных точках (3.65), а собственные значения операторов, определяющих производящий дифференциал, — полиномиальные функции (3.63) на сфере CP^1. При этом препотенциал — логарифм квазиклассической τ-функции — является простой полиномиальной функцией времен $\mathcal{F} = \frac{t_1^3}{6} + \ldots$, а топологические корреляционные функции — коэффициенты разложения препотенциала, как было видно, это числа, отвечающие индексам пересечений на пространстве модулей комплексных структур. Соответствующая теория называется *топологической* гравитацией [31, 32, 34, 40].

В случае *физической* ($c < 1$ или pq) гравитации известно гораздо меньше явных формул, эти теории отвечают уже нетривиальным спектральным кривым * $\Sigma_{g=\frac{(p-1)(q-1)}{2}}$ [121]. Формально $2D$ топологические теории с нетривиальными спектральными кривыми, отвечающими пространству-времени, были построены в [36, 37].

В данном разделе (см. также [90]) будет подробно рассмотрен более интересный пример непертурбативных решений, связанный с появлением нетривиальных комплексных кривых старшего рода — в эффективных решениях Виттена — Зайберга [41, 42] $4D$ $\mathcal{N} \geq 2$ суперсимметричных калибровочных теориях поля с затравочным лагранжианом

$$\mathcal{L} = \int d^4\vartheta F(\Phi_i) = \ldots \frac{1}{g^2} \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{F}^2_{\mu\nu} + i\theta\, \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} + \ldots \tag{4.1}$$

(где суперполе $\Phi_i = \varphi^i + \vartheta\sigma_{\mu\nu}\tilde{\vartheta} G^i_{\mu\nu} + \ldots$), для которого непертурбативное точное решение формально определено как отображение

$$G, \tau, h_k \to a_i,\ a_i^D,\ a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \tag{4.2}$$

(G — калибровочная группа, τ — ультрафиолетовая константа связи, $h_k = \frac{1}{k}\langle \mathrm{Tr}\, \Phi^k \rangle$ — вакуумные значения поля Хиггса), и существует его элегантное описание в терминах кривой $\Sigma_{g=\mathrm{rank}\, G}$, у которой h_k параметризует некоторые (чаще всего гиперэллиптические) модули комплексной структуры. Периоды

$$a_i = \oint_{A_i} dS, \qquad a_i^D = \oint_{B_i} dS \tag{4.3}$$

*В этом случае явно известно лишь преобразование *дуальности*, связывающее производящие функции дуальных теорий и имеющее вид преобразования Фурье с экспонентой $S = \int^\lambda dS$ (3.63).

производящего мероморфного 1-дифференциала

$$dS = \lambda d \log w = \mathrm{Tr}\ \mathcal{L} d\ \log T, \tag{4.4}$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial dS}{\partial h_k} \cong d\omega_k, \tag{4.5}$$

где $d\omega_k$ — голоморфные дифференциалы на Σ, определяют спектр массивных БПС-состояний

$$M \sim |\boldsymbol{n}a + \boldsymbol{m}a^D|, \tag{4.6}$$

а формула $a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a^i}$ — препотенциал $\mathcal{F}$, определяющий низкоэнергетическое действие (см. разд. 1 по поводу более подробного пояснения основных понятий) и, тем самым, набор эффективных констант связи

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial a_i^D}{\partial a_j}. \tag{4.7}$$

В данном разделе показано, что возникающие в решениях Виттена — Зайберга кривые являются спектральными кривыми конечнозонных решений периодической цепочки Тоды и ее естественных деформаций в эллиптическую модель Калоджеро — Мозера и (классические) спиновые цепочки.

4.1. N=2 суперсимметричная глюодинамика и периодическая цепочка Тоды. Начнем анализ с простейшего случая периодической цепочки Тоды, отвечающей непертурбативному решению $4D$ $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамики. Периодическая задача в цепочке Тоды может быть сформулирована *двумя* различными способами, которые естественным образом "деформируются" в двух различных направлениях. С физической точки зрения различные деформации цепочки Тоды отвечают включению взаимодействия $4D$ $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории двух типов: с материей в присоединенном и фундаментальном представлениях калибровочной группы.

Цепочка Тоды задается уравнениями движения

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = p_i\ , \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \mathrm{e}^{\phi_{i+1}-\phi_i} - \mathrm{e}^{\phi_i - \phi_{i-1}}, \tag{4.8}$$

где для периодической задачи (с периодом N_c по "номеру" частицы) накладываются условия $\phi_{i+N_c} = \phi_i$ и $p_{i+N_c} = p_i$. Цепочка Тоды является вполне интегрируемой системой с N_c взаимно коммутирующими (относительно скобки Пуассона) гамильтонианами, $h_1^{\mathrm{TC}} = \sum p_i$, $h_2^{\mathrm{TC}} = \sum \left(\frac{1}{2}p_i^2 + \mathrm{e}^{\phi_i - \phi_{i-1}}\right)$ и т.д. Как любое конечнозонное решение, периодическая задача в цепочке Тоды может быть описана в терминах (собственных значений и собственных функций) двух операторов: оператора Лакса $\mathcal{L}$ (или вспомогательной линейной задачи для (4.8))

$$\lambda\psi_n^{\pm} = \sum_k \mathcal{L}_{nk}\psi_k^{\pm} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_{n+1}-\phi_n)}\psi_{n+1}^{\pm} + p_n\psi_n^{\pm} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_n-\phi_{n-1})}\psi_{n-1}^{\pm} \; (= \pm\frac{\partial}{\partial t}\psi_n^{\pm}) \tag{4.9}$$

и оператора *монодромии* (или граничных условий) — в данном случае просто сдвига по дискретной переменной "номера" частицы $T\phi_n = \phi_{n+N_c}$, $Tp_n = p_{n+N_c}$, $T\psi_n = \psi_{n+N_c}$. Условие совместного спектра этих двух операторов

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi \;, \quad T\psi = w\psi \;, \quad [\mathcal{L}, T] = 0 \tag{4.10}$$

означает, что между ними существует соотношение $\mathcal{P}(\mathcal{L}, T) = 0$, которое может быть строго сформулировано в терминах спектральной кривой Σ: $\mathcal{P}(\lambda, w) = 0$ [50, 53]. Производящая функция интегралов движения может быть выписана в терминах $\mathcal{L}$- и T-операторов, и для цепочки Тоды существуют две различные формулировки такого типа.

В первом варианте (который можно рассматривать как предельный случай систем Хитчина [96]) оператор Лакса (4.9) записывается в базисе собственных функций T-оператора. Для цепочки длиной N_c он становится при этом матрицей с размером $N_c \times N_c$:

$$\mathcal{L}^{TC}(w) = \begin{pmatrix} p_1 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)} & 0 & & w\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_1-\phi_{N_c})} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)} & p_2 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_3-\phi_2)} & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_3-\phi_2)} & p_3 & & 0 \\ & & \dots & & \\ \frac{1}{w}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_1-\phi_{N_c})} & 0 & 0 & & p_{N_c} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

определенной на цилиндре. Скобки Пуассона $\{p_i, \phi_j\} = \delta_{ij}$ эквивалентны пуассоновскому соотношению на оператор Лакса $\left\{\mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w) \overset{\otimes}{,} \mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w')\right\} = \left[\mathcal{R}(w,w'), \mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w)\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w')\right]$ с числовой тригонометрической $\mathcal{R}$-матрицей

$$\mathcal{R}(w,w') = \frac{w\sum(\delta_{i,i+1}\otimes\delta_{i+1,i}) + (w'\sum\delta_{i+1,i}\otimes\delta_{i,i+1})}{w-w'}, \tag{4.12}$$

а собственные числа оператора Лакса, определяемые спектральным уравнением

$$\mathcal{P}(\lambda, w) = \det_{N_c\times N_c}\left(\mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w) - \lambda\right) = 0, \tag{4.13}$$

коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона. Подставляя явное выражение (4.11) в (4.13), получаем [122]

$$w + \frac{1}{w} = 2P_{N_c}(\lambda) \tag{4.14}$$

или

$$y^2 = P_{N_c}^2(\lambda) - 1, \qquad 2y = w - \frac{1}{w}, \tag{4.15}$$

где $P_{N_c}(\lambda)$ — полином степени N_c, коэффициенты которого — полиномы Шура $S_j(h)$ от гамильтонианов $h_k = \sum\limits_{i=1}^{N_c} p_i^k + \ldots$:

$$P_{N_c}(\lambda) = \sum_{k=0}^{N_c} S_{N_c-k}(h)\lambda^k = \left(\lambda^{N_c} + h_1\lambda^{N_c-1} + \frac{1}{2}(h_2 - h_1^2)\lambda^{N_c-2} + \ldots\right). \tag{4.16}$$

Спектральное уравнение зависит только от взаимно коммутирующих комбинаций динамических переменных — гамильтонианов или переменных действия, параметризующих подпространство в пространстве модулей комплексных структур гиперэллиптических кривых Σ^{TC} рода $N_c - 1 = \mathrm{rank}\ SU(N_c)$.

Альтернативное описание той же системы возникает, если явно *решить* вспомогательную линейную задачу (4.9), являющуюся разностным уравнением второго порядка, решить которое можно, просто переписав его в виде $\tilde\psi_{i+1} = L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda)\tilde\psi_i$, т.е. с помощью цепочки "матриц Лакса" 2×2 [54], имеющих (после простого "калибровочного преобразования") вид

$$L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda) = \begin{pmatrix} p_i + \lambda & \mathrm{e}^{\phi_i} \\ \mathrm{e}^{-\phi_i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, N_c. \tag{4.17}$$

Эти матрицы удовлетворяют *квадратичному* пуассоновскому соотношению r-матричного типа [55]:

$$\left\{L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda) \overset{\otimes}{,} L_j^{\mathrm{TC}}(\lambda')\right\} = \delta_{ij}\left[r(\lambda-\lambda'), L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda)\otimes L_j^{\mathrm{TC}}(\lambda')\right] \tag{4.18}$$

с (не зависящей от номера i!) числовой рациональной r-матрицей, удовлетворяющей классическому уравнению Янга — Бакстера $r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{a=1}^{3}\sigma_a\otimes\sigma^a$. Как следствие, матрица монодромии (обычно определяемая для неоднородной решетки с неоднородностями λ_i)

$$T_{N_c}(\lambda) = \prod_{N_c \ge i \ge 1} L_i(\lambda - \lambda_i) \tag{4.19}$$

удовлетворяет тому же соотношению:

$$\left\{T_{N_c}(\lambda) \overset{\otimes}{,} T_{N_c}(\lambda')\right\} = \left[r(\lambda-\lambda'), T_{N_c}(\lambda)\otimes T_{N_c}(\lambda')\right], \tag{4.20}$$

а интегралы движения цепочки Тоды генерируются спектральным уравнением в другой форме:

$$\det_{2\times 2}\left(T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) - w\right) = w^2 - w\,\mathrm{Tr}\,T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) + \det T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) = w^2 - w\,\mathrm{Tr}\,T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) + 1 = 0 \tag{4.21}$$

или

$$\mathcal{P}(\lambda, w) = w + \frac{1}{w} - \operatorname{Tr} T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda) = w + \frac{1}{w} - 2P_{N_c}(\lambda) = 0. \tag{4.22}$$

(Здесь использовано, что $\det_{2\times 2} L^{\mathrm{TC}}(\lambda) = 1$ приводит к $\det_{2\times 2} T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda) = 1$.) Правая часть (4.22) представляет собой полином по λ степени N_c, коэффициенты которого — интегралы движения, т.к.

$$\begin{aligned} \{\operatorname{Tr} T_{N_c}(\lambda), \operatorname{Tr} T_{N_c}(\lambda')\} &= \operatorname{Tr}\, \{T_{N_c}(\lambda) \overset{\otimes}{,} T_{N_c}(\lambda')\} = \\ &= \operatorname{Tr}\, [r(\lambda - \lambda'), T_{N_c}(\lambda) \otimes T_{N_c}(\lambda')] = 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Для частного случая L-матриц (4.17) неоднородности цепочки λ_i сводятся к тривиальному сдвигу импульсов $p_i \to p_i - \lambda_i$.

Ниже мы рассмотрим возможные эллиптические деформации двух различных представлений Лакса цепочки Тоды. Деформация представления $N_c \times N_c$ приводит к модели Калоджеро — Мозера, в то время как деформация представления 2×2 — к XYZ-модели и алгебре Склянина.

В дополнение к уравнению спектральной кривой (4.13), (4.14), (4.15) и (4.22), чтобы определить цепочку Тоды, минимальный набор данных дается производящим 1-дифференциалом dS^{TC}. Свойства этого дифференциала будут подробно изучены в [90], заметим сейчас только, что $dS^{\mathrm{TC}} = \lambda \frac{dw}{w}$ в случае цепочки Тоды имеет, буквально, вид (4.4), где λ является гиперэллиптической координатой в представлениях (4.14) и (4.15). Периоды этого дифференциала

$$\boldsymbol{a} = \oint_{\boldsymbol{A}} dS^{\mathrm{TC}} = \oint_{\boldsymbol{A}} \lambda \frac{dw}{w}, \qquad \boldsymbol{a}_D = \oint_{\boldsymbol{B}} dS^{\mathrm{TC}} = \oint_{\boldsymbol{B}} \lambda \frac{dw}{w} \tag{4.24}$$

задают массивный БПС-спектр (4.6) и определяют препотенциал и эффективные константы связи (4.7) в низкоэнергетическом пределе $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамики — эффективной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории с (абелевой) калибровочной группой $U(1)^{\operatorname{rank} G}$.

4.2. Эллиптическая деформация представления $N_c \times N_c$: модель Калоджеро — Мозера и взаимодействие с присоединенной материей. $N_c \times N_c$ матричный оператор Лакса для $GL(N_c)$-системы Калоджеро, явно зависящий от спектрального параметра, имеет вид [123]

$$\mathcal{L}^{\mathrm{Cal}}(\xi) = \left(\boldsymbol{p}H + \sum_{\boldsymbol{\alpha}} F(\boldsymbol{q\alpha}|\xi) E_{\boldsymbol{\alpha}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 & F(q_1 - q_2|\xi) & \dots & F(q_1 - q_{N_c}|\xi) \\ F(q_2 - q_1|\xi) & p_2 & \dots & F(q_2 - q_{N_c}|\xi) \\ & & \dots & \\ F(q_{N_c} - q_1|\xi) & F(q_{N_c} - q_2|\xi) & \dots & p_{N_c} \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Его матричные элементы $F(q|\xi) = \frac{g}{\omega}\frac{\sigma(q+\xi)}{\sigma(q)\sigma(\xi)}\,\mathrm{e}^{\zeta(q)\xi}$ выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса, т.е. оператор Лакса $\mathcal{L}(\xi)$ определен на эллиптической кривой $E(\tau)$ (комплексном торе с периодами ω, ω' и модулем $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$). Константа взаимодействия в системе Калоджеро $\frac{g^2}{\omega^2} \sim m^2$, с точки зрения $4D$-интерпретации выражается через массу m присоединенного $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплета, нарушающего $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию до $\mathcal{N} = 2$ [69].

Из (4.25) сразу следует, что спектральная кривая Σ^{Cal} для $GL(N_c)$ системы Калоджеро имеет вид

$$\det_{N_c\times N_c}\left(\mathcal{L}^{\mathrm{Cal}}(\xi) - \lambda\right) = 0, \tag{4.26}$$

а массы БПС-состояний (4.6) ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_D$) задаются периодами производящего 1-дифференциала

$$dS^{\mathrm{Cal}} \cong \lambda d\xi \tag{4.27}$$

по нестягиваемым контурам на Σ^{Cal}. Интегрируемость модели Калоджеро — Мозера может быть описана на языке пуассоновской структуры

$$\left\{\mathcal{L}(\xi) \overset{\otimes}{,} \mathcal{L}(\xi')\right\} = \left[\mathcal{R}^{\mathrm{Cal}}_{12}(\xi,\xi'),\ \mathcal{L}(\xi)\otimes\mathbf{1}\right] - \left[\mathcal{R}^{\mathrm{Cal}}_{21}(\xi,\xi'),\ \mathbf{1}\otimes\mathcal{L}(\xi')\right], \tag{4.28}$$

определяемой *динамической* эллиптической $\mathcal{R}$-матрицей [124], обеспечивающей инволюцию собственных значений матрицы $\mathcal{L}$.

Периодическая цепочка Тоды получается из эллиптической модели Калоджеро в специальном двойном скейлинговом пределе [125], когда $g \sim m \to \infty$, $-i\tau \to \infty$, а $q_i - q_j = \frac{1}{2}\left[(i-j)\log g + (\phi_i - \phi_j)\right]$, так что безразмерная константа связи τ переходит в размерный параметр $\Lambda^{N_c} \sim m^{N_c}\mathrm{e}^{i\pi\tau}$. В этом пределе эллиптическая кривая $E(\tau)$ вырождается в цилиндр с координатой $w = \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{e}^{i\pi\tau}$, а производящий 1-дифференциал $dS^{\mathrm{Cal}} \to dS^{\mathrm{TC}} \cong \lambda\frac{dw}{w}$ в производящий дифференциал цепочки Тоды. Оператор Лакса системы Калоджеро переходит в оператор Лакса (4.11): $\mathcal{L}^{\mathrm{Cal}}(\xi)d\xi \to \mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w)\frac{dw}{w}$, а спектральная кривая приобретает форму (4.13). В отличие от цепочки Тоды, формула (4.26) *не может* быть переписана в виде (4.14), т.е. специфическая зависимость от w спектрального уравнения (4.13) не сохраняется при вложении цепочки Тоды в систему частиц Калоджеро — Мозера. Однако форма (4.14) естественным образом сохраняется при интерпретации цепочки Тоды как частного случая спиновых моделей.

Для описания другой "эллиптической деформации" ниже будет использована нестандартная нормировка $\wp$-функции Вейерштрасса:

$$\wp(\xi|\tau) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi+m+n\tau)^2} - {\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}}'\frac{1}{(m+n\tau)^2}, \tag{4.29}$$

двоякопериодической по ξ функции с периодами 1 и $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ (это отличается от стандартного определения фактором ω^{-2} и переопределением $\xi \to \omega\xi$). Согласно (4.29) значения $\wp(\xi|\tau)$ в полупериодах, $e_a = e_a(\tau)$, $a = 1,2,3$, являются функциями только модулярного параметра τ, также отличаясь множителем ω^{-2} от стандартного определения. Комплексный тор $E(\tau)$ может быть представлен как фактор $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{Z} \oplus \tau\boldsymbol{Z}$ с "плоской" координатой ξ, определенной по модулю $(1,\tau)$. Кроме того, тор (с отмеченной точкой) может быть задан эллиптической кривой

$$y^2 = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3), \quad x = \wp(\xi), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi), \quad d\xi = \frac{dx}{2y}. \tag{4.30}$$

Существуют три интересных вырождения эллиптической картины.

Рациональный предел: оба периода $\omega, \omega' \to \infty$, ξ переопределяется как $\xi = \omega^{-1}\zeta$ при конечном $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ и ζ. Тогда

$$x = \wp(\xi) = \frac{\omega^2}{\zeta^2}(1 + o(\omega^{-1})), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi) = -\frac{\omega^3}{\zeta^3}(1 + o(\omega^{-1})). \tag{4.31}$$

В двух других пределах $\tau \to +i\infty$, т.е. $q = \mathrm{e}^{i\pi\tau} \to 0$.

Тригонометрический предел: ξ конечно при $q \to 0$,

$$x = \wp(\xi) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sin^2 \pi\xi} + o(q), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi) = -\pi\frac{\cos\pi\xi}{\sin^3 \pi\xi} + o(q). \tag{4.32}$$

Двойной скейлинговый предел: $\xi = \log{(qw)}$, точки ветвления

$$e_{1,2} \to -\frac{1}{3} \pm 8q + o(q^2), \qquad e_3 \to +\frac{2}{3} + o(q^2), \tag{4.33}$$

кроме того,

$$x = \wp(\xi) = -\frac{1}{3} + 4q(w + w^{-1}) + o(q^2), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi) = 4q(w - w^{-1}) + o(q^2), \tag{4.34}$$

так что $d\xi = \frac{dw}{w}(1 + \mathcal{O}(q))$. В простейшем примере $N_c = 2$ у кривой Σ^{Cal} род 2. Действительно, в этом частном случае (4.26) превращается в выражение

$$\mathcal{P}(\lambda, x) = \lambda^2 - h_2 + \frac{g^2}{\omega^2}x = \lambda^2 - h_2 + \frac{g^2}{\omega^2}\wp(\xi) = 0, \tag{4.35}$$

устанавливающее, что каждому значению x отвечают две точки на кривой Σ^{Cal}, $\lambda = \pm\sqrt{h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}x}$, т.е. задает Σ^{cal} как двойное накрытие эллиптической кривой $E(\tau)$ с точками ветвления $x = \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2$ и $x = \infty$. На самом деле, так как сама координата x является эллиптической на $E(\tau)$ (когда эллиптическая кривая рассматривается как двойное накрытие сферы CP^1), $x = \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2$ отвечает *паре* точек на $E(\tau)$, различаемых знаком y. Это было бы верно и для $x = \infty$, но $x = \infty$ — одна из точек ветвления в параметризации (4.30) кривой $E(\tau)$. Таким образом, *два* разреза между $x = \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2$ и $x = \infty$ на каждом из листов $E(\tau)$ эффективно сливаются в *единственный* между точками $\left(\left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2, +\right)$ и $\left(\left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2, -\right)$. Поэтому кривую Σ^{Cal} можно рассматривать как два тора $E(\tau)$, склеенные вдоль одного разреза, т.е. $\Sigma^{\mathrm{Cal}}_{N_c=2}$ является кривой рода 2.

Аналитически кривая Σ^{Cal} для $N_c = 2$ задается системой уравнений (4.30), (4.35), и, случайно, эта кривая опять оказывается гиперэллиптической (только для $N_c = 2!$), после подстановки x из (4.35) в (4.30).

В качестве двух голоморфных 1-дифференциалов на Σ^{Cal} можно выбрать

$$v = \frac{dx}{y} \sim \frac{\lambda d\lambda}{y}, \qquad V = \frac{dx}{y\lambda} \sim \frac{d\lambda}{y}, \tag{4.36}$$

так что

$$dS \cong \lambda d\xi = \sqrt{h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}\wp(\xi)}\, d\xi = \frac{dx}{y}\sqrt{h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}\, x}. \tag{4.37}$$

Легко проверить, что $\frac{\partial dS}{\partial h_2} \cong \frac{1}{2}\frac{dx}{y\lambda}$. Наличие лишь одного из двух голоморфных дифференциалов (4.36) в правой части связано с их различной четностью относительно $\boldsymbol{Z}_2 \otimes \boldsymbol{Z}_2$ симметрии Σ^{Cal}: $y \to -y$ и $\lambda \to -\lambda$. Так как dS имеет определенную четность, его периоды вдоль двух из четырех элементарных циклов на Σ^{Cal} автоматически равны нулю, оставляя лишь два нетривиальных периода a и a_D, что в точности отвечает двум независимым переменным в четырехмерной интерпретации. Более того, два ненулевых периода могут быть определены в терминах "редуцированной" кривой рода 1: $Y^2 = (y\lambda)^2 = \left(h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}x\right)\prod_{a=1}^{3}(x - e_a)$, на которой $dS \cong \left(h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}x\right)\frac{dx}{Y}$. Так как для нее $x = \infty$ уже не является точкой ветвления, dS имеет простые полюса в $x = \infty$ (на двух разных листах $\Sigma^{\mathrm{Cal}}_{\mathrm{reduced}}$) с вычетами $\pm\frac{g}{\omega} \sim \pm m$.

В "противоположном" пределе системы Калоджеро — Мозера $g^2 \sim m^2 \to 0$, что отвечает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга — Миллса с тождественно нулевой β-функцией. Соответствующая интегрируемая система представляет собой систему *свободных* частиц, а производящий 1-дифференциал $dS \cong \sqrt{h_2} \cdot d\xi$ является просто *голоморфным* дифференциалом на (N_c копиях) $E(\tau)$.

4.3. От Тоды к спиновым цепочкам и суперсимметричной КХД: случай $N_f < 2N_c$ и XXX-спиновые модели. Перейдем теперь к другой деформации цепочки Тоды, отвечающей включению взаимодействия с $\mathcal{N}=2$ гипермультиплетами материи в фундаментальном представлении калибровочной группы — $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной КХД. Согласно [42, 76], спектральные кривые для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной КХД при $N_f<2N_c$ имеют ту же структуру, что и (4.10) с менее тривиальной матрицей монодромии, удовлетворяющей условиям

$$\mathrm{Tr}\ T_{N_c}(\lambda)=2P_{N_c}(\lambda)+R_{N_c-1}(\lambda),\qquad \det T_{N_c}(\lambda)=Q_{N_f}(\lambda), \tag{4.38}$$

где $Q_{N_f}(\lambda)$ и $R_{N_c-1}(\lambda)$ — некоторые *не зависящие от* h полиномы по λ (напомним, что для цепочки Тоды с матрицей Лакса (4.17) $\det_{2\times2}T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda)=$ $=\prod\limits_{i=1}^{N_c}\det_{2\times2}L^{\mathrm{TC}}_i(\lambda-\lambda_i)=1$ и $\mathrm{Tr}\ T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda)=P_{N_c}(\lambda)$). Две формулировки (4.13) и (4.21) эквивалентны для цепочки Тоды, но их *деформации* уже различны: представление в виде "цепочки" 2×2 матриц (4.21), (4.22) естественным образом обобщается на случай семейства XYZ спиновых моделей [54, 55].

Общая идея деформации представления матрицами 2×2 заключается в модификации уравнений (4.18) — (4.23) при сохранении скобок Пуассона

$$\left\{L(\lambda)\overset{\otimes}{,}L(\lambda')\right\}=\left[r(\lambda-\lambda'),\ L(\lambda)\otimes L(\lambda')\right],$$

$$\left\{T_{N_c}(\lambda)\overset{\otimes}{,}T_{N_c}(\lambda')\right\}=\left[r(\lambda-\lambda'),\ T_{N_c}(\lambda)\otimes T_{N_c}(\lambda')\right], \tag{4.39}$$

и, тем самым, возможности построения матрицы монодромии $T(\lambda)$ путем перемножения матриц $L_i(\lambda)$ по всем узлам. Уравнение спектральной кривой для периодической неоднородной спиновой цепочки приобретает вид

$$\det\left(T_{N_c}(\lambda)-w\right)=0 \tag{4.40}$$

с T-матрицей $T_{N_c}(\lambda)=\prod\limits_{i=N_c}^{1}L_i(\lambda-\lambda_i)$, по-прежнему удовлетворяющей (4.39). Для $sl(2)$-цепочек спектральные уравнения выписываются более явно:

$$w+\frac{\det_{2\times2}T_{N_c}(\lambda)}{w}=\mathrm{Tr}_{\,2\times2}\,T_{N_c}(\lambda), \tag{4.41}$$

или

$$W+\frac{1}{W}=\frac{\mathrm{Tr}_{\,2\times2}T_{N_c}(\lambda)}{\sqrt{\det_{2\times2}\ T_{N_c}(\lambda)}}, \tag{4.42}$$

а производящий 1-дифференциал теперь $dS=\lambda\frac{dW}{W},\ W=\frac{w}{\sqrt{\det T_{N_c}(\lambda)}}$. Как и ранее, уравнения содержат динамические переменные спиновой системы только в виде специальных комбинаций — интегралов движения и инвариантов. Именно специальная форма этих уравнений (квадратичная зависимость от параметров w и W) [74] позволяет идентифицировать периодические спиновые цепочки с решениями задачи Виттена — Зайберга с фундаментальной материей.

Матрица Лакса 2×2 для $sl(2)$ XXX-цепочки имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda \cdot \mathbf{1} + \sum_{a=1}^{3} S_a \cdot \sigma^a. \tag{4.43}$$

Скобки Пуассона динамических переменных S_a, $a = 1, 2, 3$ (принимающих значения в алгебре функций) следуют из соотношения (4.39) с рациональной r-матрицей

$$r(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{a=1}^{3} \sigma^a \otimes \sigma^a \tag{4.44}$$

и (в случае $sl(2)$) превращаются в

$$\{S_a, S_b\} = i\epsilon_{abc} S_c, \tag{4.45}$$

т.е. $\{S_a\}$ имеют смысл момента количества движения ("или классического спина"). В алгебре (4.45) имеются операторы Казимира (т.е. инвариантные и имеющие нулевую скобку Пуассона со всеми генераторами S_a) $K^2 = \boldsymbol{S}^2 = \sum_{a=1}^{3} S_a S_a$, так что

$$\det_{2\times 2} L(\lambda) = \lambda^2 - K^2, \ \det_{2\times 2} T_{N_c}(\lambda) = \prod_{i=1}^{N_c} \det_{2\times 2} L_i(\lambda - \lambda_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N_c} \left((\lambda - \lambda_i)^2 - K_i^2 \right) = \prod_{i=1}^{N_c} (\lambda + m_i^+)(\lambda + m_i^-) = Q_{2N_c}(\lambda), \tag{4.46}$$

где имеется в виду, что значения спина K могут отличаться в различных узлах цепочки и*

$$m_i^{\pm} = -\lambda_i \mp K_i. \tag{4.47}$$

В то время как детерминант (4.46) зависит лишь от инвариантов Казимира K_i пуассоновской алгебры, след матрицы монодромии $\mathcal{T}_{N_c}(\lambda) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\,2\times 2}\, T_{N_c}(\lambda)$ не является инвариантом, а, как обычно в интегрируемых системах, зависит от переменных $S_a^{(i)}$ только через интегралы движения, которые, в отличие от казимиров, коммутируют только друг с другом.

---

*Формула (4.47) демонстрирует, что в пределе нулевых масс $m_i^{\pm} = 0$ цепочка становится *однородной* (все $\lambda_i = 0$) и с нулевыми спинами в каждом узле (все $K_i = 0$).

Для того чтобы получить ясное представление о гамильтонианах, ниже будут разобраны явные примеры матриц монодромии для $N_c = 2$ и $N_c = 3$. Интегралы движения нетривиально зависят от неоднородностей цепочки λ_i, а коэффициенты спектрального уравнения (4.40) зависят только от интегралов движения и симметрических функций массовых параметров m (4.47). Это свойство существенно для отождествления параметров m с массами гипермультиплетов материи в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД. Явные примеры $N_c = 2, 3$ были разобраны в [77].

4.4. $\mathbf{N}_f$ = $\mathbf{2N}_c$: спиновые цепочки общего вида и алгебра Склянина. Приведенная выше конструкция не может быть, однако, законченной без изучения наименее исследованного “эллиптического” случая $N_f = 2N_c$, когда $4D$-теория является ультрафиолетово-конечной (по крайней мере, при определенных значениях модулей) и обладает дополнительным *безразмерным* параметром — UV неабелевой константой связи $\tau = \frac{8\pi i}{\mathrm{e}^2} + \frac{\theta}{\pi}$.

Наиболее общая теория такого вида известна — это XYZ спиновая цепочка, в которой элементарная L-матрица определена на эллиптической кривой $E(\tau)$ и имеет вид [54, 55, 126]:

$$L^{\mathrm{Skl}}(\xi) = S^0\mathbf{1} + i\sum_{a=1}^{3} W_a(\xi) S^a \sigma_a, \tag{4.48}$$

где

$$W_a(\xi) = \sqrt{e_a - \wp\,(\xi|\tau)} = i\,\frac{\theta_{11}'(0)\theta_{a+1}\,(\xi)}{\theta_{a+1}(0)\theta_{11}\,(\xi)}. \tag{4.49}$$

Матрица Лакса (4.48) удовлетворяет скобке Пуассона (4.18) с числовой *эллиптической* r-матрицей

$$r(\xi) = i\frac{g}{\omega}\sum_{a=1}^{3} W_a(\xi)\sigma_a \otimes \sigma_a,$$

откуда следует, что S^0, S^a образуют (классическую) алгебру Склянина [55, 126]:

$$\left\{S^a, S^0\right\} = 2i\left(e_b - e_c\right)S^b S^c, \qquad \left\{S^a, S^b\right\} = 2iS^0 S^c \tag{4.50}$$

с естественным обозначением: abc является тройкой 123 или ее циклической перестановкой.

Соответственно с рассмотренными выше предельными случаями (вырождениями) эллиптической кривой (4.31) — (4.34) можно рассматривать три интересных вырождения алгебры Склянина.

Рациональный предел. Оба периода $\omega, \omega' \to \infty$, тогда (4.50) превращается в

$$\{S^a, S^0\} = 0, \qquad \{S^a, S^b\} = 2i\epsilon^{abc} S^0 S^c, \tag{4.51}$$

т.е. генератор S^0 превращается в оператор Казимира (константу, например, $\frac{1}{2}$), а остальные S^a образуют алгебру классических спинов (4.45). Соответствующая матрица Лакса (4.43) $L \equiv \lambda L_{XXX} = \lambda \mathbf{1} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ описывает XXX спиновую модель с рациональной r-матрицей (4.44).

Тригонометрический предел. При $\tau \to +i\infty$, а $q \to 0$, алгебра Склянина (4.50) переходит в

$$\begin{aligned}
\{\hat{S}^3, \hat{S}^0\} &= 32iq\hat{S}^1\hat{S}^2 + \mathcal{O}(q) \to 0, & \{\hat{S}^1, \hat{S}^0\} &= -2i\hat{S}^2\hat{S}^3 + \mathcal{O}(q),\\
\{\hat{S}^2, \hat{S}^0\} &= 2i\hat{S}^3\hat{S}^1 + \mathcal{O}(q), & \{\hat{S}^1, \hat{S}^2\} &= 2i\hat{S}^0\hat{S}^3 + \mathcal{O}(q),\\
\{\hat{S}^1, \hat{S}^3\} &= -2i\hat{S}^0\hat{S}^2 + \mathcal{O}(q), & \{\hat{S}^2, \hat{S}^3\} &= 2i\hat{S}^0\hat{S}^1 + \mathcal{O}(q).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Соответствующая матрица Лакса есть

$$L_{XXZ} = \hat{S}^0\mathbf{1} - \frac{1}{\sin\pi\xi}\left(\hat{S}^1\sigma_1 + \hat{S}^2\sigma_2 + \cos\pi\xi\hat{S}^3\sigma_3\right), \tag{4.53}$$

а r-матрица

$$r(\xi) = \frac{i}{\sin\pi\xi}\left(\sigma_1\otimes\sigma_1 + \sigma_2\otimes\sigma_2 + \cos\pi\xi\sigma_3\otimes\sigma_3\right). \tag{4.54}$$

Двойной скейлинговый предел. Используя (4.33) и (4.34), находим

$$\sqrt{e_{1,2} - \wp(\xi)} = 2\sqrt{q}\left(\sqrt{w} \pm \frac{1}{\sqrt{w}}\right) + \mathcal{O}(q), \quad \sqrt{e_3 - \wp(\xi)} = 1 + \mathcal{O}(q), \tag{4.55}$$

поэтому алгебра Склянина (4.50), после переопределения $\hat{S}^{1,2} = \frac{1}{4\sqrt{q}}\bar{S}^{1,2}$, принимает вид

$$\begin{aligned}
\{\bar{S}^2, \bar{S}^3\} &= 2i\bar{S}^0\bar{S}^1 + \mathcal{O}(q), & \{\bar{S}^1, \bar{S}^0\} &= -2i\bar{S}^2\bar{S}^3 + \mathcal{O}(q),\\
\{\bar{S}^2, \bar{S}^0\} &= 2i\bar{S}^3\bar{S}^1 + \mathcal{O}(q), & \{\bar{S}^1, \bar{S}^2\} &= 32iq\bar{S}^0\bar{S}^3 + \mathcal{O}(q) \to 0,\\
\{\bar{S}^1, \bar{S}^3\} &= -2i\bar{S}^0\bar{S}^2 + \mathcal{O}(q), & \{\bar{S}^3, \bar{S}^0\} &= 2i\bar{S}^1\bar{S}^2,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

с матрицей Лакса

$$L_{ds} = \bar{S}^0\mathbf{1} + i\bar{S}^3\sigma_3 + \frac{i}{2}\left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)\bar{S}^1\sigma_1 + \frac{i}{2}\left(\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}\right)\bar{S}^2\sigma_2. \tag{4.57}$$

Легко заметить, что (4.53) и (4.57) практически совпадают. В частности, матрица Лакса (4.57) удовлетворяет квадратичным пуассоновским соотношениям (4.18) с тригонометрической r-матрицей (4.54). Действительно, эти две матрицы Лакса связаны простым преобразованием $L_{ds} = -\sin(\pi\xi\sigma_2)\, L_{XXZ}$, где w отождествляется с $\mathrm{e}^{2i\xi}$, а $\bar{S}^0$, $\bar{S}^1$, $\bar{S}^2$, $\bar{S}^3$ с $\hat{S}^2$, $\hat{S}^3$, $\hat{S}^0$, $\hat{S}^1$ соответственно. Заметим также, что матрица (4.57) является L-матрицей решеточной модели синус-Гордона.

Детерминант

$$\det_{2\times 2} \hat{L}(\xi) = \hat{S}_0^2 + \sum_{a=1}^{3} e_a \hat{S}_a^2 - \wp(\xi) \sum_{a=1}^{3} \hat{S}_a^2 = K - M^2 \wp(\xi) = K - M^2 x, \quad (4.58)$$

где

$$K = \hat{S}_0^2 + \sum_{a=1}^{3} e_a(\tau) \hat{S}_a^2, \qquad M^2 = \sum_{a=1}^{3} \hat{S}_a^2 \quad (4.59)$$

— операторы Казимира алгебры Склянина (пуассоново-коммутирующие со всеми генераторами $\hat{S}^0$, $\hat{S}^1$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}^3$). Детерминант матрицы монодромии (4.19), в свою очередь, равен

$$Q(\xi) = \det_{2\times 2} T_{N_c}(\xi) = \prod_{i=1}^{N_c} \det_{2\times 2} \hat{L}(\xi - \xi_i) = \prod_{i=1}^{N_c} \left(K_i - M_i^2 \wp(\xi - \xi_i) \right), \quad (4.60)$$

а ее след $P(\xi) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi)$ генерирует интегралы движения, так как по-прежнему

$$\{\mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi),\ \mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi')\} = 0. \quad (4.61)$$

Например, в случае *однородной* цепочки (все $\xi_i = 0$ в (4.60)) $\mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi)$ является комбинацией полиномов $P(\xi) = \mathrm{Pol}^{(1)}_{\left[\frac{N_c}{2}\right]}(x) + y\mathrm{Pol}^{(2)}_{\left[\frac{N_c-3}{2}\right]}(x)$, где $\left[\frac{N_c}{2}\right]$ — целая часть $\frac{N_c}{2}$, а коэффициенты $\mathrm{Pol}^{(1)}$ и $\mathrm{Pol}^{(2)}$ — интегралы движения XYZ-модели *. В результате спектральное уравнение (4.42) для XYZ-цепочки принимает вид

$$w + \frac{Q(\xi)}{w} = 2P(\xi), \quad (4.62)$$

где для однородной цепочки P и Q — полиномы по $x = \wp(\xi)$ и $y = \frac{1}{2}\wp'(\xi)$. Уравнение (4.62) описывает двойное накрытие эллиптической кривой $E(\tau)$:

---

*Для неоднородной цепочки явное выражение для следа устроено более сложно, его можно упростить с помощью формул типа

$$\wp(\xi - \xi_i) = \left(\frac{\wp'(\xi) + \wp'(\xi_i)}{\wp(\xi) - \wp(\xi_i)} \right)^2 - \wp(\xi) - \wp(\xi_i) = 4 \left(\frac{y + y_i}{x - x_i} \right)^2 - x - x_i.$$

каждой точке общего положения $\xi \in E(\tau)$ соответствуют две точки на Σ^{XYZ}, отвечающие двум корням $w_\pm$ уравнения (4.62). Точками ветвления являются $w_+ = w_- = \pm\sqrt{Q}$ или $Y = \frac{1}{2}\left(w - \frac{Q}{w}\right) = \sqrt{P^2 - Q} = 0$.

Кривая (4.62) похожа на спектральную кривую $N_c = 2$ модели Калоджеро — Мозера (4.35), однако существенное различие заключается в том, что теперь $x = \infty$ уже *не* является точкой ветвления, поэтому полное число разрезов на обеих копиях $E(\tau)$ — N_c, а род спектральной кривой — $N_c + 1$.

Аналитически Σ^{XYZ} можно описать системой уравнений

$$y^2 = \prod_{a=1}^{3}(x - e_a), \qquad Y^2 = P^2 - Q, \tag{4.63}$$

а набор голоморфных 1-дифференциалов на Σ^{XYZ} можно выбрать в виде

$$v = \frac{dx}{y}, \quad V_\alpha = \frac{x^\alpha dx}{yY}, \quad \alpha = 0, \ldots, \left[\frac{N_c}{2}\right],$$

$$\tilde{V}_\beta = \frac{x^\beta dx}{Y}, \quad \beta = 0, \ldots, \left[\frac{N_c - 3}{2}\right]. \tag{4.64}$$

Полное число этих дифференциалов $1 + \left(\left[\frac{N_c}{2}\right] + 1\right) + \left(\left[\frac{N_c-3}{2}\right] + 1\right) = N_c + 1$ равно роду Σ^{XYZ}.

Наконец, имея спектральную кривую, можно попытаться написать производящий 1-дифференциал dS, обладающий определяющим свойством (4.5). Для цепочки Тоды существуют два возможных выбора:

$$d\Sigma^{\mathrm{TC}} \cong d\lambda \log w, \qquad dS^{\mathrm{TC}} \cong \lambda \frac{dw}{w}, \qquad d\Sigma^{\mathrm{TC}} = -dS^{\mathrm{TC}} + df^{\mathrm{TC}}. \tag{4.65}$$

Оба дифференциала $d\Sigma^{\mathrm{TC}}$ и dS^{TC} удовлетворяют условию (4.5), а функция f^{TC} определена так, что ее вариация $\delta f^{\mathrm{TC}} = \lambda \frac{\delta w}{w}$ является (мероморфной) однозначной функцией на Σ^{TC}.

В случае XXX-модели свойства производящего дифференциала по сравнению с (4.65) практически не меняются:

$$d\Sigma^{XXX} \cong d\lambda \log W, \qquad dS^{XXX} \cong \lambda \frac{dW}{W}, \qquad d\Sigma^{XXX} = -dS^{XXX} + df^{XXX}. \tag{4.66}$$

Для XYZ-модели (4.62) производящий(е) дифференциал(ы) dS^{XYZ} можно определить как

$$d\Sigma^{XYZ} \cong d\xi \log W, \qquad dS^{XYZ} \cong \xi \frac{dW}{W} = -d\Sigma^{XYZ} + d(\xi \log W). \tag{4.67}$$

Теперь при вариации по модулям (которые все содержатся в P)

$$\delta(d\Sigma^{XYZ}) \cong \frac{\delta W}{W} d\xi = \frac{\delta P(\xi)}{\sqrt{P(\xi)^2 - Q(\xi)}}\, d\xi = \frac{dx}{yY} \delta P, \tag{4.68}$$

и, согласно (4.4), правая часть является *голоморфным* 1-дифференциалом на спектральной кривой (4.62).

Особенности $d\Sigma^{XYZ}$ расположены в точках $W = 0$ или $W = \infty$, т.е. в нулях $Q(\xi)$ или полюсах $P(\xi)$. В окрестности особых точек $d\Sigma^{XYZ}$ неоднозначен, т.е. при обходе вокруг особой точки приобретает добавку $2\pi i d\xi$. Разность между $d\Sigma$ и dS опять является полной производной, но ее вариация $\delta f^{XYZ} = \xi \frac{\delta W}{W}$ уже неоднозначна на кривой. В отличие от $d\Sigma^{XYZ}$, dS^{XYZ} имеет простые полюсы в $W = 0, \infty$ с вычетами $\xi|_{w=0,\infty}$, определенными по модулю $1, \tau$. Более того, сам дифференциал dS^{XYZ} неоднозначен: меняется на $(1, \tau) \times \frac{dW}{W}$ при обходе по нестягиваемым контурам на $E(\tau)$.

Таким образом, ни $d\Sigma^{XYZ}$, ни dS^{XYZ} не являются в буквальном смысле 1-формами Виттена — Зайберга, которые должны иметь хорошо определенные вычеты, отвечающие массам гипермультиплетов [42].

В простейшем примере $N_c = 2$ второе уравнение (4.63) имеет вид

$$Y^2 = P^2 - Q = (H_0 - H_2 x)^2 - (K_1 - M_1^2 x)(K_2 - M_2^2 x) \equiv A(x - x_1)(x - x_2) \tag{4.69}$$

и представляет собой кривую рода $N_c + 1 = 3$, полученную склеиванием двух копий $E(\tau)$ вдоль двух разрезов: между $x = x_1$ и $x = x_2$ на каждом из листов $E(\tau)$. В формуле (4.69)

$$H_0 = \hat{S}_1^0 \hat{S}_2^0 + \sum_{a=1}^{3} e_a \hat{S}_1^a \hat{S}_2^a, \qquad H_2 = \sum_{a=1}^{3} \hat{S}_1^a \hat{S}_2^a \tag{4.70}$$

и, сравнивая с (4.59), естественно считать, что $H_2 = M_1 M_2 \cos h$. Такое разделение зависимости от казимиров (M) и модулей (h) основано на рассмотрении различных пределов: конформного — все $M_i \to 0$ и "размерной трансмутации", когда $M_i \to \infty$ при $\tau \to +i\infty$.

Когда $\tau \to +i\infty$ или $q = \mathrm{e}^{i\pi\tau} \to 0$, точки ветвления e_1 и e_2 стремятся друг к другу: $e_1 - e_2 = 16q + \mathcal{O}(q^3)$ и правильными координатами на Σ^{XYZ} становятся $x = -\frac{1}{3} + q\check{x}$, $y = q\check{y}$. Тогда уравнение (4.30) для $E(\tau)$ превращается в $\check{y}^2 = \check{x}^2 - 1$ и описывает двойное накрытие CP^1, являющееся опять CP^1. Каноническая голоморфная 1-форма $d\xi = 2\frac{dx}{y}$ переходит в мероморфный дифференциал на CP^1 $2\frac{d\check{x}}{\check{y}} = 2\frac{d\check{x}}{\sqrt{\check{x}^2 - 1}} = 2\frac{dz}{z}$, где $\check{x} = z + z^{-1}$.

Двойной скейлинговый предел предполагает, что точки ветвления x_1 и x_2 также ведут себя специальным образом при $q \to 0$. Пусть $x_i = -\frac{1}{3} + q\check{x}_i$, тогда, переопределяя $Y = q\check{Y}$, для Σ^{XYZ} в двойном скейлинговом пределе получим $\check{y}^2 = \check{x}^2 - 1$, $\check{Y}^2 = A(\check{x} - \check{x}_1)(\check{x} - \check{x}_2)$. Эти уравнения описывают две копии CP^1, склеенные вдоль двух разрезов (между $\check{x} = \check{A}_1$ и $\check{x} = \check{A}_2$ на каждом из листов), т.е. эллиптическую кривую рода 1. Производящий 1-дифференциал

$$d\Sigma^{XYZ} \cong d\xi log W \to d\Sigma^{\text{TC}} \cong \frac{dz}{z} \log W. \tag{4.71}$$

Для старших N_c мультискейлинговый предел может быть определен аналогично, т.е. считая, что спектральная кривая рода $N_c + 1$ — двойное накрытие $E(\tau)$ — вырождается в двойное накрытие CP^1 рода $N_c - 1$, ассоциируемое с цепочкой Тоды. Производящие дифференциалы $d\Sigma^{XYZ}$ и dS^{XYZ} также переходят в соответствующие 1-формы (4.65).

Таким образом, естественно предположить, что XYZ-цепочка, являющаяся эллиптическим обобщением XXX-цепочки, описывающей $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную КХД с $N_f < 2N_c$, может быть связана со случаем $N_f = 2N_c$ (см., например, [127], где эта теория рассмотрена более подробно в контексте многомерных обобщений решений Виттена — Зайберга).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном обзоре была сделана попытка объяснить, как интегрируемые системы типа иерархии КП или цепочки Тоды возникают при описании точных непертурбативных эффектов в теории струн (простейших моделях) и суперсимметричной калибровочной теории поля. Мы продемонстрировали, что подобно моделям непертурбативной двумерной квантовой и топологической гравитации в четырехмерной расширенно-суперсимметричной неабелевой калибровочной теории эффективное действие легких полей может быть задано (логарифмом) тау-функции хорошо известных интегрируемых систем уиземовского типа, связанных с цепочками Тоды.

Более конкретно БПС-спектр и низкоэнергетическое эффективное действие определяются в терминах вспомогательной римановой поверхности — спектральной поверхности интегрируемой системы (в случае двумерных моделей, рассмотренных подробно в первых двух разделах обзора, соответствующая спектральная поверхность является просто римановой комплексной сферой с отмеченными точками) и производящей 1-формы. Мы подробно рассмотрели римановы поверхности, возникающие при описании непертурбативного поведения в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамике, а также в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД и теории с материей в присоединенном представлении — нарушенной до $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией полей Янга — Миллса, и связанные с этими поверхностями интегрируемые системы.

В работе [90] обсуждаются более тонкие вопросы формулировки суперсимметричных калибровочных теорий в терминах интегрируемых систем. Именно эти вопросы: свойства производящего дифференциала, явные уравнения (ассоциативности), которым удовлетворяет эффективное действие в случае "старших" калибровочных групп, а также связь точных решений Виттена — Зайберга и соответствующих им интегрируемых систем с общими идеями современной непертурбативной теории струн (М-теории), представляют наибольший интерес с точки зрения современной теории элементарных частиц.

Автор благодарен своему учителю В.Я.Файнбергу и своим соавторам А.А.Герасимову, А.С.Горскому, А.В.Забродину, И.М.Кричеверу, А.М.Левину, Ю.М.Макеенко, А.Д.Миронову, А.Ю.Морозову, М.А.Ольшанецкому, А.Ю.Орлову, В.Н.Рубцову и С.М.Харчеву, результаты работы с которыми легли в основу данного обзора, а также Я.Амбьорну, И.А.Баталину, Д.В.Булатову, А.И.Вайнштейну, Б.Л.Воронову, К.Вафе, А.В.Гуревичу, Б.А.Дубровину, Д.Р.Лебедеву, А.С.Лосеву, В.В.Лосякову, Н.А.Некрасову, С.П.Новикову, С.З.Пакуляку, И.В.Полюбину, А.А.Рослому, А.Саньотти, Н.А.Славнову, А.В.Смилге, М.А.Соловьеву, И.В.Тютину, Л.Д.Фаддееву, В.В.Фоку, Д.Фонгу, С.М.Хорошкину, Дж.Шварцу, Й.Шниттгеру, А.И.Юнгу за полезные обсуждения. Автор хотел бы особо поблагодарить А.П.Исаева за интересные обсуждения и предложение написать данный обзор.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №98-01-00344 и INTAS, 96-482.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поляков А.** — Калибровочные поля и струны. М., ИТФ им.Л.Д.Ландау, 1995.
2. **Polyakov A.** — Phys.Lett., 1975, v.B59 p.79;
   Белавин А., Поляков А. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.22, с.503.
3. **Belavin A., Polyakov A., Schwarz A., Tyupkin Yu.** — Phys.Lett. 1975, v.B59, p.85;
   t'Hooft G. — Phys.Rev., 1976, v.D14, p.3432;
   Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu. — Phys.Lett., 1978, v.A65, p.185.
4. **Jackiw R., Rebbi C.** — Phys.Rev.Lett., 1976, v.37, p.172;
   Callan C., Dashen R., Gross D. — Phys.Rev., 1979, v.D19, p.1826.
5. **Вайнштейн А., Захаров В., Новиков В., Шифман М.** — УФН, 1982, т.136, с.553; ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.472.
6. **Atiyah M., Ward R.** — Comm.Math.Phys., 1977, v.55, p.117;
   Atiyah M., Hitchin N., Singer I. — Proc.R.Soc.Lond., 1978, v.A362, p.425.
7. **Славнов А., Фаддеев Л.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
8. **Гольфанд Ю., Лихтман Е.** — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452;
   Волков Д., Акулов В. — Phys.Lett., 1973, v.46B, p.109;

Wess J., Zumino B. — Nucl.Phys., 1974, v.B70, p.39;
Огиевецкий В., Мезинческу Л. — УФН, 1975, т.117, с.637;
Ferrara S., Freedman D., van Nieuwenhuizen P. — Phys.Rev., 1976, v.D13, p.3214;
Deser S., Zumino B. -– Phys.Lett., 1976, v.62B, p.335.

9. **Шерк Дж.** — В сб.: Геометрические идеи в физике. М.: Мир, 1983.
10. **Veneziano G.** — Nuovo Cim., 1968, v.57A, p.190;
Nambu Y. — Proc.Int.Conf. on Symmetries and Quark Models. Wayne State Univ., Gordon and Beach, 1970, p.269;
Goto T. — Progr.Theor.Phys., 1971, v.46, p.1560.
11. **Sherk J., Schwarz J.** — Nucl.Phys., 1974, v.B81, p.118.
12. **Polyakov A.** — Phys.Lett., 1981, v.B103, p.207; 211.
13. **Белавин А. Книжник В.** — ЖЭТФ, 1986, т.91, с.364;
Книжник В. — УФН, 1989, т.32, с.401.
14. **Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.** — Теория суперструн, М.: Мир, 1990, т.1,2.
15. **Cremmer E., Ferrara S., Sherk J.** — Phys.Lett., 1978, v.74B, p.48.
16. **Font A., Ibañez L., Lust D., Quevedo F.** — Phys.Lett., 1990, v.249, p.35.
17. **Schwarz J.** — Lectures on Superstring and M Theory Dualities. hepth/9607201 and references therein.
18. **Dixon L.** — In: Proc.of the 1987 ICTP Summer Workshop in High Enegry Physics and Cosmology, World Scientific, 1988;
Lerche W., Vafa C., Warner N. — Nucl.Phys., 1989, v.B324, p.427.
19. **Polyakov A.** — Mod.Phys.Lett., 1987, v.A2, p.893;
Knizhnik V., Polyakov A., Zamolodchikov A. — Mod.Phys.Lett., 1988, v.A3, p.819.
20. **David F.** — Mod.Phys.Lett., 1988, v.A3, p.1651;
Distler J., Kawai H. — Nucl.Phys., 1989, v.B231, p.509.
21. **Alekseev A., Shatashvili S.** — Nucl.Phys., 1989, v.B323, p.719.
22. **Ambjørn J., Durhuus B., Frolich J.** — Nucl.Phys., 1985, v.B257[FS14], p.433;
David F. -– Nucl.Phys., 1985, v.B257[FS14], p.45;
Kazakov V. — Phys.Lett., 1985, v.150B, p.282;
Kazakov V., Kostov I., Migdal A. — Phys.Lett., 1985, v.157B, p.295.
23. **Kazakov V.** — Mod.Phys.Lett., 1989, v.A4, p.2125;
Brezin E., Kazakov V. — Phys.Lett., 1990, v.B236, p.144;
Douglas M., Shenker S. — Nucl.Phys., 1990, v.B335, p.635;
Gross D., Migdal A. — Phys.Rev.Lett., 1990, v.64, p.127.
24. **Douglas M.** — Phys.Lett., 1990, v.B238, p.176.
25. **Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.** — Int.J.Mod.Phys., 1991, v.A6, p.1385.
26. **Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E.** — Nucl.Phys., 1991, v.B348, p.435.
27. **Gerasimov A., Marshakov A., Mironov A. et al.** — Nucl.Phys., 1991, v.B357, p.565.
28. **Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Nucl.Phys., 1991, v.B356, p.574.
29. **Миронов А.** — Част. сооб. (готовится к печати).
30. **Ward J.** — Phys.Rev., 1950, v.77, p.2931;
Фрадкин Е. — ЖЭТФ, 1955, т.29, с.288;
Takahashi Y. — Nuovo Cim., 1957, v.6, p.370;
Славнов А. — Теор. и мат.физ., 1972, т.10, с.99; 1972, т.13, с.174;
Taylor J. — Nucl.Phys., 1971, v.B33, p.436.

31. **Witten E.** — Surv.Diff.Geom., 1991, v.1, p.243;
Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. — Nucl.Phys., 1991, v.B352, p.59.
32. **Witten E.** — Nucl.Phys., 1990, v.340, p.281;
Dijkgraaf R., Witten E. — Nucl.Phys., 1990, v.342, p.486.
33. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1992, v.B274, p.280.
34. **Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al.** — Nucl. Phys., 1992, v.B380, p.181.
35. **Лосев А.** — ТМФ, 1993, т.95, с.307;
Losev A., Polyubin I. — Int.J.Mod.Phys., 1995, v.A10, p.4161.
36. **Кричевер И.** — Функ. ан. и прилож., 1988, т.22, с.37; Comm.Math.Phys., 1991, v.143, p.415; Comm.Pure Appl.Math., 1994, v.47, p.437; hep-th/9205110.
37. **Dubrovin B.** — hepth/9407018.
38. **Becchi C., Rouet A., Stora R.** — Comm.Math.Phys., 1975, v.42, p.127;
Тютин И. — Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке, Препринт ФИАН №39, 1975.
39. **Batalin I., Vilkovysky G.** — Phys.Rev., 1983, v.D28, p.2567.
40. **Концевич М.** — Функ. ан. и прилож., 1991, т.25, с.50; Comm. Math.Phys. 1992, v.147, p.1.
41. **Seiberg N., Witten E.** — Nucl.Phys., 1994, v.B426, p.19.
42. **Seiberg N., Witten E.** — Nucl.Phys., 1994, v.B431, p.484.
43. **Gorsky A., Krichever I., Marshakov A. et al.** — Phys.Lett., 1995, v.B355, p.466.
44. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1996, v.B389, p.43.
45. **Marshakov A.** — hepth/9608161; Int.J.Mod.Phys., 1997, v.A12, p.1607.
46. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — hepth/9701123.
47. **Kachru S., Vafa C.** — hepth/9505105;
Ferrara S., Harvey J., Strominger A., Vafa C. — hepth/9505162;
Klemm A., Lerche W., Mayr P. et al. — hepth/9604034.
48. **Lipatov L.** — Pomeron in Quantum Chromodynamics, in Perturbative QCD, World Scientific, 1989, p.411; Phys.Lett., 1990, v.B251, p.284; 1993, v.B309, p.394; Письма в ЖЭТФ, 1994, т.59, с.596;
Faddeev L., Korchemsky G. — Phys.Lett., 1994, v.B342, p.311;
Korchemsky G. — Nucl.Phys., 1995, v.B443, p.255.
49. **Turaev V., Viro O.** — Topology, 1992, v.31, p.865.
50. **Кричевер И.** — Функ.ан. и прилож., 1977, т.11, с.15; УМН, 1977, т.32, с.180.
51. **Новиков С., Манаков С., Питаевский Л., Захаров В.** — Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
52. **Дубровин Б.** — УМН, 1981, т.36, №2, 12.
53. **Дубровин Б., Кричевер И., Новиков С.** — Современные проблемы математики (ВИНИТИ), Динамические системы - 4, 1985, с.179.
54. **Тахтаджян Л., Фаддеев Л.** — Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
55. **Sklyanin E.** — J.Sov.Math., 1989, v.47, p.2473.
56. **Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.** — Preprint RIMS-358, 1981.
57. **Miwa T.** — In: Proc. of Japan Academy, 1982, v.A58, p.9.

58. **Sato M.** — RIMS Kokyuroku, 1981, v.439, p.30;
Sato M., Sato Y. — Lect.Not.Num.Appl.Anal., 1982, v.5, p.259.

59. **Segal G., Wilson G.** — Publ.I.H.E.S., 1985, v.61, p.1;
Прессли Э., Сигал Г. — Группы петель. М.: Мир, 1990.

60. **Orlov A., Schulman E.** — Lett.Math.Phys., 1986, v.12, p.171;
Grinevich P., Orlov A. — Cornell University Preprint, September, 1988;
Orlov A. — In: Proc. of Kiev International Workshop, 1987, World Scientific, 1988, p.116.

61. **Гуревич А., Питаевский Л.** — ЖЭТФ, 1973, т.65, с.590; Письма в ЖЭТФ, 1973, т.17, с.268; см. также [51].

62. **Дубровин Б., Новиков С.** — УМН, 1989, т.44, №6, с.29.

63. **Kac V., Schwarz A.** — Phys.Lett., 1991, v.B257, p.329;
Schwarz A. — Mod.Phys.Lett., 1991, v.A6, p.611; 1991, v.A6, p.2713.

64. **Маршаков А., Миронов А., Морозов А., Харчев С.** — ТМФ, 1993, т.95, с.280.

65. **Vafa C., Witten E.** — Nucl.Phys., 1994, v.B431, p.3.

66. **Smirnov F.** — Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory, Adv.Series in Math.Phys., 1992, v.14, World Scientific;
Its A., Izergin A., Korepin V., Slavnov N. — Phys.Rev.Lett., 1993, v.70, p.1704 and references therein;
Jimbo M., Miwa T. — Regional Conf.Series in Math., 1995, v.85;
Khoroshkin S., Lebedev D., Pakuliak S. — q-alg/9602030 and references therein.

67. **Fradkin E., Tseytlin A.** — Nucl.Phys., 1985, v.261, p.1.

68. **Klemm A., Lerche W., Theisen S., Yankielowicz S.** — Phys.Lett., 1995, v.344B, p.169;
Argyres P., Faraggi A. — Phys.Rev.Lett., 1995, v.73, p.3931.

69. **Donagi R., Witten E.** — hepth/9510101.

70. **Martinec E.** — hepth/9510204.

71. **Gorsky A., Marshakov A.** — Phys.Lett., 1996, v.B375, p.127.

72. **Martinec E., Warner N.** — hepth/9511052.

73. **Itoyama H., Morozov A.** — hepth/9511126/9512161/9601168.

74. **Marshakov A.** — Mod.Phys.Lett., 1996, v.A11, p.1169.

75. **Ann C., Nam S.** — hepth/9603028.

76. **Hanany A., Oz Y.** — hepth/9505075.

77. **Gorsky A., Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys. Lett., 1996, v.B380, p.75.

78. **Krichever I., Phong D.** — hepth/9604199.

79. **Gell-Mann M., Low F.** — Phys.Rev., 1954, v.95, p.1300;
Боголюбов Н., Ширков Д. — ДАН, 1955, т.103 с.203, 391; Nuovo Cim. 1956, v.3, p.845;
Овсянников Л. — ДАН, 1956, т.109, с.112;
Callan C. — Phys.Rev., 1970, v.D2, p.1542;
Symanzik H. — Comm.Math.Phys., 1970, v.18, p.227;
Боголюбов Н., Ширков Д. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984;
Владимиров А., Ширков Д. — УФН, 1979, т.129, с.407.

80. **Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A.** — Nucl.Phys., 1984, v.B241, p.333.

81. **Кац В.** — Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.

82. **Knizhnik V., Zamolodchikov A.** — Nucl.Phys., 1984, v.247, p.83.

83. **Friedan D., Martinec E., Shenker S.** — Nucl.Phys., 1986, v.B271, p.93.

84. **Фейгин Б., Фукс Д.** — Функ.ан. и прилож., 1982, т.16, с.47.

85. **Dotsenko Vl., Fateev V.** — Nucl.Phys., 1984, v.B240, p.312; 1985, v.251, p.691.

86. **Verlinde E., Verlinde H.** — Phys.Lett., 1987, v.B192, p.95.

87. **Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A. et al.** — Int. J. Mod. Phys., 1990, v.A5, p.2495.

88. **Distler J.** — Nucl.Phys, 1990, v.B342, p.523.

89. **Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1990, v.B242, p.345.

90. **Marshakov A.** — Seiberg — Witten Theory and Integrable Systems. World Scientific, 1999, 260pp.

91. **Fay J.** — Theta-Functions on Riemann Surfaces. Lect. Notes Math., Springer, N.Y., 1973, v.352.

92. **Мамфорд Д.** — Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.

93. **Замолодчиков А.** — Теор.и мат.физ., 1985, т.63, с.347;
Fateev V., Zamolodchikov A. — Nucl.Phys., 1987, v.B280[FS18], p.644.

94. **Fateev V., Lukyanov S.** — Int.J.Mod.Phys., 1988, v.A3, p.507; Препринты ИТФ АН УССР, ИТФ-88-74Р–76Р, Киев, 1988.

95. **Дринфельд В., Соколов В,** — Современные проблемы математики (ВИНИТИ), 1984, т.24.

96. **Hitchin N.** — Duke.Math.Journ., 1987, v.54, p.91;
Hitchin N. — Comm.Math.Phys., 1990, v.131, p.347.

97. **Lebedev D., Manin Yu.** — Preprint ITEP, 1976.

98. **Ueno K., Takasaki K.** — Adv.Studies in Pure Math., 1984, v.4, p.1.

99. **Маршаков А., Морозов А.** — ЖЭТФ, 1990, т.97, с.721.

100. **Lian B., Zuckerman G.** — Phys.Lett., 1991, v.B254, p.417; 1991, v.B266, p.21;
Bouwknegt P., McCarthy J., Pilch K. — Preprint CERN-TH-6196/91.

101. **Klebanov I., Polyakov A.** — Mod.Phys.Lett., 1991, v.A6, p.3273;
Witten E. — Nucl.Phys., 1992, v.373, p.187.

102. **Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.** — Comm.Math.Phys., 1988, v.115, p.649;
Ginsparg P. — Nucl.Phys., 1988, v.B295[FS21], p.153.

103. **Morozov A., Olshanetsky M.** — Nucl.Phys., 1988, v,B299, p.389.

104. **Морозов А., Рослый А.** — ЯФ, 1989, т.49, с.256;
Cardy J. — Nucl.Phys., 1989, v.B324, p.581;
Sagnotti A. — Preprint ROM2F-91/11 and references therein.

105. **Kac V.** — Lect.Notes in Physics, 1979, v.94, p.441; см.также [81]

106. **Желобенко Д.П., Штерн А.И.** — Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.

107. **Thierry-Mieg J.** — Phys.Lett., 1987, v.B197, p.368.

108. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1991, v.B265, p.99;
Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al. — Nucl.Phys., 1993, v.B404, p.717.

109. **Mikhailov A.** — Int.J.Mod.Phys., 1994, v.A9, p.873.

110. **Itzyzson C., Zuber J.-B.** — J.Math.Phys., 1980, v.21, p.411;
Mehta M. — Commun.Math.Phys., 1981, v.79, p.327.

111. **Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.** — Comm.Math.Phys., 1992, v.143, p.371.

112. **Kharchev S., Marshakov A.** — In: String Theory, Quantum Gravity and the Unification of Fundamental Interactions. World Scientific, 1993, p.331; Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10, p.1219.

113. **Shiota T.** — Invent.Math., 1986, v.83, p.333; см. также [92];
Takebe T. — Preprint RIMS-779, 1991.

114. **Takasaki K., Takebe T.** — Preprint RIMS-814, 1991; Preprint KUCP-0050/92.

115. **Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.** — Comm.Math.Phys., 1992, v.148, p.101.

116. **Harer J., Zagier D.** — Invent.Math., 1986, v.85, p.457;
Penner R. — Comm.Math.Phys., 1987, v.113, p.299; J.Diff.Geom., 1988, v.27, p.35;
Distler J., Vafa C. — Mod.Phys.Lett., 1991, v.A6, p.259.

117. **Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Nucl.Phys., 1993, v.B397, p.339.

118. **Marshakov A.** — In: Pathways to Fundamental Theories. World Scientific, 1993, p.251.

119. **Dijkgraaf R., Moore G., Plessner R.** — Preprint IASSNS-HEP-92/48, 1992.

120. **Gross D., Klebanov I.** — Nucl.Phys., 1990, v.B344, p.475.

121. **Krichever I.** — On Heisenberg Relations for the Ordinary Linear Differential Operators, Preprint ETH, 1990;
Новиков С. — Функ.ан. и прилож., 1990, т.24, с.43;
Moore G. — Comm.Math.Phys., 1990, v.133, p.261;
Schimmrigk R. — Phys.Rev.Lett., 1990, v.65, p.2483.

122. **Кричевер И.** — См. [52], приложение.

123. **Кричевер И.** — Функ.ан. и прилож., 1980, т.14, с.282.

124. **Sklyanin E.** — Alg.Anal., 1994, v.6, p.227;
Braden H., Suzuki T. — Lett.Math.Phys., 1994, v.30, p.147;
Enriquez B., Rubtsov V. — alg-geom/9503010;
Nekrasov N. — hepth/9503157;
Arutyunov G., Medvedev P. — hepth/9511070.

125. **Inozemtsev V.** — Comm.Math.Phys., 1989, v.121, p.629.

126. **Склянин Е.** — Функ.ан. и прилож., 1982, т.16, с.27; Функ.ан. и прилож., 1983, т.17, с.34.

127. **Marshakov A., Mironov A.** — Nucl. Phys., 1998, v.B518, p.59.