«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 7А

УДК 539.12.01

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ БЕЗ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ПОЛЕЙ

А.А.Славнов

Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Москва,
E-mail: slavnov@mi.ras.ru

Построена бозонизованная ковариантная формулировка теории Янга–Миллса. Эффективное действие локально, зависит только от коммутирующих полей и обладает симметрией, играющей роль, аналогичную БРСТ-симметрии в обычном формализме.

1. ВВЕДЕНИЕ

В моем докладе будет описана явно лоренц-инвариантная формулировка теории Янга–Миллса, основанная на локальном эффективном действии, включающем только коммутирующие поля. Хорошо известно, что обычная формулировка включает антикоммутирующие скалярные поля (духи Фаддеева–Попова) [1]. Присутствие полей с неправильной связью между спином и статистикой приводит к определенным усложнениям при построении явно ковариантной схемы квантования (БРСТ-квантование) [2]. Поэтому было бы полезно иметь релятивистски-инвариантный формализм, не требующий введения антикоммутирующих скалярных полей.

В этом докладе я покажу, что, пользуясь процедурой бозонизации, развитой нами ранее для описания фермионов в решеточных моделях [3,4], можно построить альтернативное локальное эффективное действие, включающее только коммутирующие поля. Это действие описывает пятимерную систему со связями, которая в физическом секторе эквивалентна обычной теории Янга–Миллса. Наше эффективное бозонное действие обладает симметрией, которая играет роль, аналогичную БРСТ-симметрии [5] в обычном формализме. В частности, эта симметрия генерирует обобщенные тождества Уорда для функций Грина калибровочных полей [6,7].

2. ПОСТРОЕНИЕ БОЗОННОГО ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ

Наш лоренц-ковариантный формализм основан на следующем эффективном действии:

$$S = \int_{-L}^{L} dt \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2L} [-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2] - \\ -(\frac{i}{2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + M^+ M \bar{c})^a c^a + \text{h.c.} + \chi^a (\bar{c}^a + c^a) \Big\}. \tag{1}$$

Здесь $F^a_{\mu\nu}$ — обычный тензор кривизны поля Янга–Миллса и

$$M = \partial_\mu D_\mu, \tag{2}$$

где D_μ — ковариантная производная:

$$D^{ab}_\mu = (\delta^{ab} \partial_\mu - g t^{abc} A^c_\mu). \tag{3}$$

Калибровочные поля $A_\mu(x)$ и множитель Лагранжа χ зависят только от четырех координат x_μ, в то время как скалярные поля $\bar{c}(x,t), c(x,t)$ зависят также от дополнительной переменной t, принимающей значения в интервале $-L \leq t \leq L$. Поля A_μ и χ считаются эрмитовыми, а поля $\bar{c}$ и c сопряжены друг другу. Все поля описываются коммутирующими переменными.

Мы покажем, что в пределе $L \to \infty$ функции Грина полей Янга–Миллса, порождаемые эффективным действием (1), совпадают с соответствующими функциями Грина в стандартном формализме Фаддеева–Попова. Точнее говоря,

$$Z(J_\mu) = \lim_{L \to \infty} \int \exp\{i[S + \int d^4x J^a_\mu(x) A^a_\mu(x)]\} d\bar{c}\, dc\, d\chi\, dA_\mu = \\ = \exp\{i \int d^4x [-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + J^a_\mu A^a_\mu]\} \det M dA_\mu, \tag{4}$$

где $\det M$ — обычный детерминант Фаддеева–Попова. Интегрирование в формуле (4) идет по полям $\bar{c}(x,t), c(x,t)$, удовлетворяющим следующим граничным условиям:

$$c(x,L) = B(x), \quad \bar{c}(x,L) = B^+(x), \tag{5}$$

где $B(x)$ — произвольная, но фиксированная функция, ограниченная в пределе $L \to \infty$. Простейший выбор отвечает $B = 0$. Граничные условия по четырехмерным координатам x_μ имеют обычный вид (см. [8]).

Чтобы доказать равенство (4), мы вычислим интеграл по полям $\bar{c}, c$ явно. Заметим, что оператор $M^+ M$ эрмитов, и мы можем ввести полную систему его собственных функций

$$M^+ M \phi_\alpha = m_\alpha \phi_\alpha. \tag{6}$$

В этом базисе интеграл по $\bar{c}, c$ можно записать в виде

$$Z_c = \lim_{L\to\infty} \int \exp\{i \int_{-L}^{L} dt \sum_{\alpha} -(\frac{i}{2}\frac{\partial \bar{c}^\alpha}{\partial t} + m_\alpha \bar{c}^\alpha) c^\alpha + h.c. + \chi_\alpha(\bar{c}^\alpha + c^\alpha)\} d\bar{c}^\alpha \, dc^\alpha. \tag{7}$$

Делая замену переменных

$$\begin{aligned} \bar{c}^\alpha(t) &\to \exp\{2im_\alpha t\}\bar{c}^\alpha(t), \\ c^\alpha(t) &\to \exp\{-2im_\alpha t\}c^\alpha(t), \end{aligned} \tag{8}$$

мы можем переписать его в виде

$$\begin{aligned} Z_c = \lim_{L\to\infty} \int \exp\{i \int_{-L}^{L} dt \sum_{\alpha} [-\frac{i}{2}(\frac{\partial \bar{c}^\alpha}{\partial t} c^\alpha - \bar{c}^\alpha \frac{\partial c^\alpha}{\partial t}) + \\ + \chi^\alpha(\exp\{-2im_\alpha t\}c^\alpha + \bar{c}^\alpha \exp\{2im_\alpha t\})]\} d\bar{c}\, dc\, d\chi. \end{aligned} \tag{9}$$

Интеграл по $\bar{c}, c$ насыщается решениями классических уравнений

$$\begin{aligned} i\frac{\partial c^\alpha}{\partial t} + \exp\{2im_\alpha t\}\chi^\alpha = 0, \\ -i\frac{\partial \bar{c}^\alpha}{\partial t} + \exp\{-2im_\alpha t\}\chi^\alpha = 0, \\ c^\alpha(L) = B_\alpha \exp\{2im_\alpha L\}; \quad \bar{c}^\alpha(L) = B_\alpha^+ \exp\{-2im_\alpha L\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} c^\alpha = \frac{\chi^\alpha}{2m_\alpha} \exp\{2im_\alpha t\} + A_\alpha, \\ A_\alpha = B_\alpha \exp\{2im_\alpha L\} - \frac{\chi^\alpha}{2m_\alpha} \exp\{2im_\alpha L\}, \\ \bar{c}^\alpha = (c^\alpha)^+. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя эти решения в интеграл (9) и интегрируя по t, получаем

$$Z_c = \lim_{L\to\infty} \int \exp\{i \sum_{\alpha} [\frac{(\chi^\alpha)^2 L}{m_\alpha} + \frac{\chi^\alpha}{m_\alpha} \sin(2m_\alpha L)(A_\alpha + A_\alpha^+)]\} d\chi. \tag{12}$$

Перенормируя поля χ^α, $\quad \chi^\alpha \to L^{-1/2}\chi^\alpha$ и интегрируя по χ^α, имеем

$$Z_c = \prod_\alpha \sqrt{m_\alpha} = \det M. \tag{13}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\det M = \det M^+$. Таким образом, равенство (4) доказано.

3. СИММЕТРИЯ КЛАССИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ ТОЖДЕСТВА УОРДА

В предыдущем разделе мы доказали, что в пределе $L \to \infty$ функции Грина, порождаемые эффективным действием (1), совпадают с обычными функциями поля Янга–Миллса в ковариантной α-калибровке. Следовательно, они должны удовлетворять обобщенным тождествам Уорда [6,7]. Поэтому можно ожидать, что наше эффективное действие обладает симметрией, играющей роль БРСТ-симметрии в обычном формализме. Мы покажем, что такая симметрия действительно существует, причем не только в пределе $L \to \infty$, но и при конечных L. При конечных L преобразования симметрии выглядят достаточно сложно и являются нелокальными по вспомогательной переменной t. В пределе $L \to \infty$ преобразования симметрии существенно упрощаются.

Симметрию действия (1) можно найти методом проб и ошибок. Прежде всего заметим, что преобразование калибровочных полей A_μ должно оставлять инвариантным лагранжиан Янга–Миллса. Поэтому естественно начать со специального калибровочного преобразования полей $A_\mu, \bar{c}, c$:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= (D_\mu \chi)^a \epsilon, \\ \delta_1 \bar{c}^a &= t^{abd} \bar{c}^b \chi^d \epsilon, \\ \delta_1 c^a &= t^{abd} c^b \chi^d \epsilon. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь ϵ — бесконечно малый постоянный параметр. Хотя преобразования (14) являются специальными калибровочными преобразованиями, они, разумеется, представляют глобальную симметрию.

Преобразования (14) меняют фиксирующий калибровку член и квадратичную форму полей $\bar{c}, c$

$$\begin{aligned} \delta_1 S = \int d^4x \partial_\mu \chi^a(x) \int_{-L}^{L} dt\, f_\mu^a(x,t)\epsilon = \\ = \int d^4x \partial_\mu (\chi^a F_\mu^a(x)) - \int d^4x \chi^a \int_{-L}^{L} dt \partial_\mu f_\mu^a(x,t)\epsilon. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь первый член в правой части является полной производной, а второй член можно скомпенсировать подходящей вариацией полей $\bar{c}, c$:

$$\delta_2 \bar{c}^a = \delta_2 c^a = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dt \partial_\mu f_\mu^a(x,t)\epsilon. \tag{16}$$

Функция f_μ имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} f_\mu^a = (2L\alpha)^{-1} (D_\mu (\partial_\nu A_\nu)^a - \\ -2t^{abd}[(D_\mu \bar{c})^b (\partial_\nu D_\nu c)^a + \text{h.c.}]. \end{aligned} \tag{17}$$

Преобразование (16) компенсирует вариацию $\delta_1 S$, но меняет квадратичную форму полей $\bar{c}, c$:

$$\delta_2 S = -\frac{i}{2}\int d^4x \delta_2 c^a \int_{-L}^{L} dt \frac{\partial \bar{c}^a}{\partial t} + h.c. - 2\int d^4x \delta_2 \bar{c}^a M^+ M \int_{-L}^{L} dt\, c^a + \text{h.c.}, \tag{18}$$

где опущена полная производная по x. В этом уравнении первый член является полной производной по t, а второй член пропорционален

$$\int_{-L}^{L} dt(\bar{c}^a(x,t) + c^a(x,t)) \tag{19}$$

и исчезает на поверхности связи. Чтобы обеспечить явную инвариантность действия, нужно сделать следующее преобразование множителя Лагранжа χ:

$$\delta\chi^a = 2MM^+\delta_2\bar{c}^a + \text{h.c.} \tag{20}$$

Объединяя уравнения (15), (16), (20), мы получаем полное преобразование симметрии бозонного эффективного действия (1). Эти преобразования меняют эффективный лагранжиан на полную производную и по теореме Нетер приводят к существованию пятимерного сохраняющегося тока

$$\partial_t j_t + \partial_\mu j_\mu = 0. \tag{21}$$

Явное выражение для этого тока можно написать, пользуясь стандартной техникой. Для конечных L преобразования симметрии довольно сложны. Кроме того, они нелокальны по дополнительной переменной t. Однако для физических приложений представляет интерес предельный случай $L \to \infty$. Можно показать, что в этом пределе все нелокальные члены не дают вклада в наблюдаемые величины, и можно пользоваться асимптотическими преобразованиями симметрии

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= (D_\mu\chi)^a\epsilon,\\
\delta\bar{c}^a &= [t^{abd}\bar{c}^b\chi^d + \frac{1}{2\alpha L}(\partial_\nu D_\nu(\partial_\mu A_\mu))]\epsilon,\\
\delta c^a &= [t^{abd}c^b\chi^d + \frac{1}{2\alpha L}(\partial_\nu D_\nu(\partial_\mu A_\mu))]\epsilon,\\
\delta\chi^a &= \frac{1}{\alpha L}[MM^+M(\partial_\mu A_\mu)]^a\epsilon.
\end{aligned} \tag{22}$$

Асимптотические преобразования (22) не оставляют действие неизменным, а преобразуют его в другое действие, принадлежащее тому же классу эквивалентности: $S_L \to \tilde{S}_L$. Последнее означает, что в пределе $L \to \infty$ значения наблюдаемых, вычисленные с помощью действий L и $\tilde{L}$, совпадают.

В заключение мы покажем, что, пользуясь асимптотической симметрией (22), можно получить обобщенные тождества Уорда. С этой целью рассмотрим следующий производящий функционал:

$$Z(J_\mu, \eta) = \lim_{L\to\infty} \int \exp\{iS + \int d^4x [J^a_\mu(x) A^a_\mu(x) + \eta^a(x)\chi^a(x)]\}\, dA_\mu\, d\bar{c}\, dc\, d\chi. \tag{23}$$

Сделаем замену переменных интегрирования, представляющую собой преобразование асимптотической симметрии (22). Поскольку замена переменных не меняет значение интеграла, можно положить

$$\frac{dZ}{d\epsilon} = 0. \tag{24}$$

Покажем, что это соотношение генерирует обобщенные тождества Уорда. Принимая во внимание, что якобиан этой замены тривиален, получаем, таким образом,

$$\lim_{L\to\infty} \int \exp\{iS + \int d^4x [J^a_\mu(x) A^a_\mu(x) + \eta^a(x)\chi^a(x)]\}\{\int d^4x [J^a_\mu(x)(D_\mu\chi(x))^a +$$

$$+ (\alpha L)^{-1}\eta^a(x)(MM^+M\partial_\mu A_\mu)^a(x)] + O\}\, d\bar{c}\, dc\, d\chi\, dA_\mu = 0. \tag{25}$$

Члены $O = O(1/L)$ возникают из-за неинвариантности квадратичной формы полей $\bar{c}, c$ относительно преобразований асимптотической симметрии (22). Из уравнения (16) видно, что вариация действия при таком преобразовании квадратична по $\bar{c}, c$ и пропорциональна L^{-1}. Возникающие таким образом члены следует сравнить с квадратичной формой, присутствующей в действии (1), которая имеет порядок $O(1)$. Видим, что эти дополнительные члены дают вклад, исчезающий в пределе $L \to \infty$.

Выполняя интегрирование по $\bar{c}, c$ в уравнении (25), получаем

$$\lim_{L\to\infty} \int \exp\{i \int d^4x [-1/4 F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - 1/(2\alpha)(\partial_\mu A_\mu)^2 + J^a_\mu A^a_\mu + \eta^a \chi^a +$$

$$+ \chi^a L (MM^+)^{-1}_{ab} \chi^b]\} \int d^4y \{J^a_\mu(y)(D_\mu\chi(y))^a +$$

$$+ (\alpha L)^{-1}\eta^a(y)[(MM^+M)\partial_\mu A_\mu]^a(y)\} dA_\mu\, d\chi = 0. \tag{26}$$

Дифференцируя это соотношение по η и полагая $\eta = 0$, мы получаем тождество

$$\lim_{L\to\infty} \int \exp\{i[S_{YM} + \int d^4x (J^a_\mu A^a_\mu + \chi^a L (MM^+)^{-1}_{ab} \chi^b)]\}\times$$

$$\times \left[\int d^4 y J^a_\mu(y) (D_\mu \chi(y))^a \chi^b(z) + (\alpha L)^{-1} \left[(MM^+M)(\partial_\mu A_\mu) \right]^b (z) \right] dA_\mu \, d\chi = 0. \tag{27}$$

Интегрируя это тождество по χ и применяя к нему оператор $(MM^+M)^{-1}$, мы приходим к стандартному обобщенному тождеству Уорда в виде [6,8]:

$$\int \exp\{i(S_{YM} + \int d^4 x J^a_\mu A^a_\mu) \det M\} \times$$
$$\times \left[\int d^4 y J^b_\mu(y) (D^z_\mu M^{-1})^{ba}(z,y) + 1/\alpha (\partial_\mu A_\mu)^a(y) \right] = 0. \tag{28}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продемонстрировали, что неабелевы калибровочные теории допускают описание в терминах континуального интеграла от явно лоренц-инвариантного пятимерного эффективного действия, зависящего только от коммутирующих полей. Разумеется, полная формулировка должна включать также процедуру регуляризации и перенормировки. В данной работе мы не будем обсуждать эту проблему. Интересной особенностью данной формулировки является существование симметрии эффективного действия, которая заменяет в нашем подходе БРСТ-симметрию. Интересно исследовать возможность построения на основе этой симметрии явно инвариантного операторного квантования, альтернативного БРСТ-квантованию. Представляет также интерес обобщение этого подхода на суперсимметричные теории.

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00190.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys. Lett., 1967, v.B25, p.30.
2. **Kugo T., Ojima I.** — Suppl. Progr. Theor. Phys., 1979, v.6.
3. **Slavnov A.A.** — Phys. Lett., 1996, v.B388, p.147.
4. **Slavnov A.A.** — Bosonized formulation of lattice QCD, hep-th/9611154.
5. **Becci C., Rouet A., Stora R.** — Comm. Math. Phys., 1975, v.42, p.127.
6. **Славнов А.А.** — ТМФ, 1972, т.10, с.99.
7. **Taylor J.G.** — Nucl. Phys., 1971, v.B33, p.436.
8. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. Второе изд. М.: Наука, 1988.