ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 1

УДК 539.12.01

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ СВЯЗЯМИ

Б. М. Барбашов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 1

УДК 539.12.01

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ СВЯЗЯМИ

Б. М. Барбашов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Развивается и применяется к ряду лагранжевых систем с заданными, зависящими от скоростей связями предложенный Ф. А. Березиным метод построения канонического формализма. Метод применим как для невырожденных, так и для вырожденных лагранжианов и базируется на введении обобщенной лагранжевой функции, включающей с множителями Лагранжа уравнения связей, и построении с ее помощью обобщенных импульсов. Основная идея метода состоит в разрешении совместной системы уравнений для обобщенных импульсов и связей, из которой все скорости выражаются через эти импульсы и координаты. Вырожденность или невырожденность такой системы определяется не первоначальным лагранжианом, а возможностью однозначного разрешения этой связи относительно скоростей. Непосредственно эта процедура, несмотря на разрешение лагранжевых связей, не ведет к редуцированию фазового пространства, а первичные гамильтоновы связи возникают здесь как результат алгоритмически ясного перехода от обобщенных импульсов к каноническим. Этим методом строится канонический формализм для невырожденной механической системы с голономной связью, для лагранжевой функции, линейной по скоростям, а также для материальной релятивистской частицы в калибровке собственного времени, релятивистской струны с лагранжевыми связями, зависящими от скоростей. Для векторного массивного поля и электромагнитного поля с условием Лоренца метод приводит к известным результатам, но алгоритмически единообразным приемом.

The conventional canonical treatment of constrained systems deals with the constraints which follow only from the initial singular Lagrangian. However, there are problems where the Lagrange constraints are introduced «by hand» in addition to the Lagrangian or when, from the very beginning of the Hamiltonization procedure, some of the constraints, that follow from the Lagrangian, are taken into account manifestly. For example, the Lorentz gauge in electrodynamics cannot be canonically implemented. The purpose of the review is to show that such noncanonical constraints can be treated by the Berezin method. The method provides a unified consideration of the singular and nonsingular Lagrangians with constraints that depend on velocities and time. The approach is applied to concrete examples: a special Lagrangian linear in velocities, relativistic particle in proper time gauge, a relativistic string in orthonormal gauge, vector massive and Maxwell fields in Lorentz gauge.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод Дирака [1] построения гамильтонова формализма для вырожденных лагранжевых систем в физике частиц и полей освещен в обширной литературе (см., например, [2–5]), в которой, несмотря на громоздкую процедуру классификации гамильтоновых связей на первичные, вторичные, первого и второго рода, а также технически сложное построение скобок Дирака, он рассматривается как единственно возможный. Тем не менее оказывается, что в случае лагранжевых систем со связями, зависящими от скоростей, как, например, в электродинамике с условием Лоренца, когда из-за вырожденности лагранжиана не все скорости, входящие в уравнения связи, могут быть выражены через импульсы, такие связи вообще не могут быть перенесены в гамильтонов формализм и получили название «неканонических» [6]. За последнее время сделан существенный шаг в развитии альтернативного подхода к этой проблеме, в частности, в работе Фаддеева и Джакива [7] был предложен и в настоящее время активно развивается [8] метод построения канонического формализма, основанный на современном аппарате дифференциальных форм и симплектической геометрии [9].

В настоящем обзоре излагается другой метод построения канонического формализма, предложенный в 1974 г. Ф. А. Березиным [10] и примененный им для двух лагранжевых механических систем, рассмотрению которых посвящены п. 2.1 и 2.2. В разд. 2 излагается сам метод с модификацией, касающейся перехода от обобщенных импульсов к каноническим и возникающих при этом первичных гамильтоновых связей. Строится гамильтонов формализм для ряда вырожденных лагранжевых систем со связями в релятивистской физике, таких как массивная релятивистская частица, релятивистская струна, векторное массивное и электромагнитное поле с условием Лоренца. Все лагранжевы связи в этих примерах относятся к «неканоническим», так как зависят от скоростей и каноническим путем не могут быть перенесены в гамильтонов формализм. Предлагаемый же метод явно использует эти связи при построении обобщенного лагранжиана и обобщенных импульсов.

Другой особенностью этого метода является то, что вырожденность или невырожденность лагранжевой системы определяется не исходным лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$, для которого преобразование Лежандра

$$p_k = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}, \quad q = (q_1, q_2, ..., q_n), \quad \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}, \tag{1.1}$$

может и не быть разрешимым относительно скоростей $\dot{q}_k$, а возможностью однозначного решения другой системы уравнений, включающей в себя в том числе и уравнения связей. Поэтому требование невырожденности исходного лагранжиана

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0 \tag{1.2}$$

в этом методе является излишним. Во всех рассмотренных далее примерах, вне зависимости от выполнения условия (1.2), строится функция Гамильтона и уравнения движения в фазовом пространстве.

Алгоритм построения гамильтоновой системы для лагранжианов с «неканоническими» связями рассмотрен в разд. 2. Последующие разделы посвящены указанным выше примерам и содержат обсуждение полученных результатов, которые в случае релятивистской материальной точки и струны отличаются от полученных ранее в стандартном подходе, где гамильтонианы для этих систем оказывались тождественно равными нулю, в предлагаемом методе они принимают нулевое значение только на первичных гамильтоновых связях. Для массивного векторного и электромагнитного полей с калибровочным условием Лоренца построенный таким путем канонический формализм (разд. 5) совпадает с общепринятым [6, 11, 12].

Вопросы построения квантовой теории для полученных гамильтоновых систем не обсуждаются, поскольку проблема придания смысла нелинейным гамильтонианам с некоммутирующими операторами здесь встает во всей своей сложности.

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД БЕРЕЗИНА

Рассмотрим систему с функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ и некоторым набором связей

$$\varphi_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad q = (q_1, q_2, ..., q_n), \quad i = 1, 2, ..., m, \quad m \leq n. \tag{2.1}$$

Все связи будем считать зависящими от скоростей. Если среди них есть уравнения $\varphi(q, t) = 0$, то заменяем их соотношениями, получающимися дифференцированием этих связей по времени:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(q, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \varphi(q, t)}{\partial t} = 0. \tag{2.2}$$

Согласно общему методу Лагранжа [13] минимум действия при условии, что траектории системы удовлетворяют уравнениям связей, реализуется на траекториях, удовлетворяющих принципу наименьшего действия без связей, но с обобщенной функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \varphi_i(q, \dot{q}, t), \tag{2.3}$$

где $\lambda_i(t)$ — множители Лагранжа, подлежащие определению из условий задачи. Новым в подходе к такой вариационной задаче является предложение Березина ввести здесь гамильтоновы переменные $\tilde{p}_k, q_k$

$$\tilde{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{2.4}$$

Мы будем называть $\tilde{p}_k$ обобщенными импульсами. Очевидно, что $\tilde{p}_k$ будут совпадать с каноническими импульсами (1.1) только при $\lambda_i(t) = 0$. Согласно общей схеме перехода к гамильтонову описанию динамических систем в случае невырожденности теперь уже обобщенного лагранжиана (2.3) переменные $\tilde{p}_k, q_k$ удовлетворяют гамильтоновым уравнениям

$$\frac{d\tilde{p}_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{2.5}$$

с функцией Гамильтона, построенной с помощью импульсов (2.4),

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \tag{2.6}$$

Однако кроме уравнений движения (2.5) должны также удовлетворяться уравнения связей (2.1), поэтому метод Березина состоит в том, чтобы рассматривать n уравнений (2.4) и m уравнений связей (2.1) как систему из $n+m$ уравнений относительно $n+m$ переменных $\dot{q}_k$ и λ_i. Если эта система невырожденна, то она однозначно определяет $\dot{q}_k$ и λ_i как функции от $\tilde{p}_i, q_i, t$. В этом случае переход в фазовое пространство (т. е. от лагранжевых переменных $q, \dot{q}$ к гамильтоновым $q, \tilde{p}$) можно осуществить независимо от того, является ли исходный лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ вырожденным или нет. В фазовом пространстве исходная система описывается гамильтоновыми уравнениями (2.5) и их число равно $2n$. На этом этапе никаких связей в фазовом пространстве не возникает, так как исходные лагранжевы связи (2.1) использовались для нахождения $\dot{q}_k = \dot{q}_k(\tilde{p}, q, t)$ и $\lambda_i = \lambda_i(\tilde{p}, q, t)$ и подстановка в (2.1) величин $\dot{q}_k(\tilde{p}, q, t)$ обращает их в тождество. Таким образом, хотя связи нами учтены, уменьшения числа степеней свободы системы не происходит, однако, как было замечено еще Березиным [10], полученная таким путем гамильтонова система (2.5) должна иметь интегралы движения или инвариантные соотношения, регулярный способ нахождения которых им не был дан.

Здесь мы покажем, что такой набор m сохраняющихся величин может быть получен, если приравнять нулю множители Лагранжа, выраженные как функции канонических импульсов p_k, координат q и времени. Как уже отмечалось при определении обобщенных импульсов $\tilde{p_k}$ в (2.4), они будут совпадать с каноническими при $\lambda_i = 0$, поэтому переход от первых ко вторым выражается требованием

$$\lambda_i(\tilde{p}, q, t)_{/\tilde{p}=p} = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.7}$$

Именно эти равенства, как будет видно из дальнейших примеров, и дают первичные гамильтоновы связи в фазовом пространстве.

Предлагаемый алгоритм построения гамильтонова описания систем со связями находит свое обоснование в рамках канонического подхода Дирака, когда множители λ_i в обобщенном лагранжиане (2.3) трактуются как дополнительные координаты, для которых сопряженные импульсы тождественно равны нулю:

$$\tilde{p}_{\lambda_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0\,. \tag{2.8}$$

Далее, по Дираку, необходимо потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\frac{d\tilde{p}_{\lambda_i}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.9}$$

Эти уравнения очевидно дают лагранжевы связи (2.1), а гамильтоновы уравнения для λ_i имеют вид

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_{\lambda_i}} = 0\,,$$

так как гамильтониан (2.6) не зависит от $\tilde{p_{\lambda_i}}$ в силу (2.8).

Первичные связи (2.8) являются связями первого рода, поэтому в рассматриваемом подходе имеется функциональный произвол [1], устранить который мы можем, выбрав m калибровочных условий, задаваемых уравнениями (2.7). Эти уравнения действительно можно трактовать как калибровочные условия, поскольку скобки Пуассона λ_j и p_{λ_i} не равны нулю, а сами условия (2.7) согласованы с уравнениями движения в силу гамильтоновых уравнений для λ_i.

Как будет видно из дальнейших примеров, условия (2.7) дают первичные гамильтоновы связи в фазовом пространстве.

Итак, из изложенного следует, что в предлагаемом алгоритме построения гамильтонова формализма требование невырожденности исходного лагранжиана (2.1) оказывается излишним. Вместо него возникает требование однозначной разрешимости совместной системы уравнений связей (2.1) и уравнений (2.4), определяющих обобщенные импульсы $\tilde{p_k}$, относительно $\dot{q}_k$ и λ_i.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

2.1. Невырожденный лагранжиан с голономной связью*. Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве массивную нерелятивистскую частицу, находящуюся в потенциальном поле $V(q)$ на гиперповерхности $\varphi(q) = \mathrm{const}$:

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 - V(q), \quad \varphi(q) = c, \quad q = (q_1, q_2, ..., q_n). \tag{2.10}$$

*Как показано в работе [14], для лагранжевых систем с неголономными связями необходима классификация, учитывающая «степень неголономности», в частности, «абсолютная неголономность» возникает при неинволютивности даже линейных связей.

Стандартный путь ведет к гамильтониану

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = m\dot{q}_i\,, \quad H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + V(q)\,, \quad \varphi(q) = c\,, \tag{2.11}$$

где функция $\varphi(q)$ оказывается первым интегралом этой системы, поскольку скобка Пуассона

$$\{\varphi, H\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(q)}{\partial q_i}\,\dot{q}_i$$

с учетом

$$\frac{d\varphi(q)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i = 0 \tag{2.12}$$

равна нулю.

Последуем предлагаемому алгоритму и, взяв согласно (2.2) связь в продифференцированном виде, построим обобщенный лагранжиан (2.3)

$$\mathcal{L} = L + \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\dot{q}_i$$

и соответствующие ему обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} = m\dot{q}_k + \lambda\,\partial_k\varphi, \text{ где } \partial_k\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}. \tag{2.13}$$

Присоединяя к (2.13) уравнение связи (2.12), находим λ и $\dot{q}_k$ как функции $\tilde{p}_k$ и q_k. Для этого, проектируя (2.13) на вектор $\boldsymbol{\partial}\varphi$, имеем

$$(\tilde{p}\partial\varphi) = \lambda(\partial\varphi)^2 \Longrightarrow \lambda = \frac{(\tilde{p}\,\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}, \tag{2.14}$$

а зная λ, из (2.13) находим

$$\dot{q}_k = \frac{1}{m}\left[\tilde{p}_k - \frac{(\tilde{p}\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}\partial_k\varphi\right]. \tag{2.15}$$

Это выражение, как и должно быть, тождественно удовлетворяет уравнению связи (2.12), поскольку найдено из системы, включавшей уравнение (2.12).

Теперь строим гамильтониан с учетом того, что связи разрешены и на них выполняется равенство $\mathcal{L} = L$:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{n}\tilde{p}_k\dot{q}_k - L = \frac{1}{2m}\left[\tilde{p}^2 - \frac{(\tilde{p}\partial\varphi)^2}{(\partial\varphi)^2}\right] + V(q). \tag{2.16}$$

Теперь мы можем потребовать выполнения условий (2.7) и тем самым перейти от обобщенных импульсов (2.13) к каноническим (2.11). В результате из (2.14) возникает первичная гамильтонова связь

$$\lambda(\tilde{p}, q)_{/\tilde{p}=p} = 0 \Longrightarrow (p\,\partial\varphi) = 0. \tag{2.17}$$

Согласно общепринятой процедуре Дирака [1] необходимо нахождение всех связей в системе (2.11), (2.17), однако в рассматриваемом примере Березиным [10] был сразу использован первый интеграл системы (2.10), который также является первым интегралом и нашей системы (2.16), (2.17):

$$\Big\{\varphi(q), \mathcal{H}\Big\} = \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{p}_i}\,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\right) = \sum_{n=1}^{n}\partial_i\varphi\left[\tilde{p}_i - \frac{(\tilde{p}\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}\partial_i\varphi\right] \equiv 0.$$

Знание первого интеграла позволяет понизить порядок гамильтоновой системы [13], и для данной системы это может быть достигнуто однородным каноническим преобразованием, специальным случаем которого является следующее преобразование координат:

$$\xi_1 = \varphi(q_1, q_2, ..., q_n), \quad \xi_i = \xi_i(q_1, q_2, ..., q_n), \quad i = 2, 3, ..., n. \tag{2.18}$$

В этом случае сопряженные к ξ_i импульсы $\pi_i = \pi_i(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)$ определяются из дифференциального тождества

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i = \sum_{j=1}^{n}\pi_j\, d\xi_j, \tag{2.19}$$

справедливого для однородных канонических преобразований. Подставляя в правую часть (2.19) $d\xi_i$ из (2.18) с учетом $d\xi_1 = d\varphi = 0$ и приравнивая в обеих частях коэффициенты при независимых дифференциалах dq_i, получаем

$$p_i = \sum_{j=2}^{n}\pi_j\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i}.$$

Таким образом на подмногообразии $\varphi(q_1, ..., q_n) = c$ вводятся локальные координаты ξ_i и сопряженные им импульсы π_i, число тех и других равно $n-1$. В этих переменных имеем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=2}^{n}\pi_j\pi_k\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i}\,\frac{\partial\xi_k}{\partial q_i} = \sum_{j,k=2}^{n} g_{jk}\pi_j\pi_k,$$

где

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial q_i}.$$

Очевидно, что g_{ik} — это компоненты метрического тензора на гиперповерхности $\varphi(q) = c$. В новых переменных гамильтониан (2.16) принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \sum_{j,k=2}^{n} g_{jk}\pi_j\pi_k + V(\xi_1 = c, \xi_2, ..., \xi_n). \tag{2.20}$$

Существенно, что теперь число пар сопряженных переменных ξ_k, π_k ($k = 2, ..., n$) на единицу меньше, чем в исходной формулировке, что и означает редукцию системы.

Отметим еще одну особенность рассматриваемого метода, которая будет проявляться и в дальнейших примерах. Полученный гамильтониан (2.16) вырожден (сингулярен), поскольку гессиан

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_j} = m\left[\delta_{ij} - \frac{\partial_i\varphi\partial_j\varphi}{(\partial\varphi)^2}\right]$$

имеет собственный вектор $\partial_i\varphi$ с нулевым собственным значением. Такой гамильтониан не может быть получен преобразованием Лежандра ни из какой функции Лагранжа, в то время как функция Гамильтона (2.20) невырожденна и получается преобразованием Лежандра из функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\sum_{j,k=2}^{n} g^{jk}\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k - V(c, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n), \quad g^{jk} = \sum_{i=1} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}.$$

Метод Березина, как отмечалось, не сводится только к преобразованию Лежандра (2.13), вырожденность системы в этом подходе определяется невозможностью разрешения системы уравнений (2.12), (2.13). Поэтому он позволяет от вырожденной гамильтоновой системы (2.16), (2.17) вернуться к лагранжевой системе (2.10) (инволютивность метода). Для этого опять строится обобщенный (полный) гамильтониан, включающий с множителем Лагранжа μ связь (2.17):

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{2m}\left[p^2 - \frac{(p\partial\varphi)^2}{(\partial\varphi)^2}\right] + V(q) + \mu(p\partial\varphi),$$

и из системы уравнений

$$\tilde{\dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_k} = \frac{1}{m}\left[p_k - \frac{(p\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}\right] + \mu\partial_k\varphi,$$

$$(p\,\partial\varphi) = 0$$

($\tilde{\dot{q}}_k$ будем называть обобщенной скоростью) множитель Лагранжа μ и импульсы p_k выражаются через q_k и $\tilde{\dot{q}}_k$:

$$\mu = \frac{(\tilde{\dot{q}}\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}, \quad p_k = m\left[\tilde{\dot{q}}_k - \frac{(\tilde{\dot{q}}\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}\,\partial_k\varphi\right].$$

В результате лагранжиан в терминах обобщенных скоростей имеет вид

$$\mathcal{L} = (p\tilde{q}) - \mathcal{H}_T = \frac{m}{2}\left[\tilde{\dot{q}}^2 - \frac{(\tilde{\dot{q}}\partial\varphi)}{(\partial\varphi)^2}\right] - V(q).$$

Далее, переходя от $\tilde{\dot{q}}_k$ к q_k и используя условие

$$\mu_{/\tilde{\dot{q}}=\dot{q}} = 0,$$

получаем продифференцированную лагранжеву связь $(\dot{q}\partial\varphi) = 0$.

В заключение отметим, что к гамильтониану (2.16) можно прийти каноническим путем, рассматривая обобщенный лагранжиан как изначально данный, в котором $\lambda(t)$ является наряду с $q_k(t)$ динамической переменной, сопряженный импульс которой (2.8) равен нулю. Тогда имеем импульсы (2.13), а выражение для скоростей будет теперь содержать переменную $\lambda(t)$ (ср. (2.15)):

$$\dot{q}_k = \frac{1}{m}\left[\tilde{p}_k - \lambda\partial_k\varphi\right],$$

она же войдет и в функцию Гамильтона:

$$H = \frac{1}{m}\left[\tilde{p}^2 - 2\lambda(\tilde{p}\partial\varphi) + \lambda^2(\partial\varphi)^2\right] + V(q). \tag{2.21}$$

Согласование с условием (2.8) требует, чтобы

$$\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial\lambda} = \frac{1}{m}\left[(\tilde{p}\,\partial\varphi) - \lambda(\partial\varphi)^2\right] = 0,$$

откуда определяем λ, полностью совпадающее с выражением (2.14), а подставляя его в (2.21), приходим к гамильтоновской функции (2.16). Условие (2.17) не противоречит вытекающему из (2.21) уравнению Гамильтона

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = 0.$$

2.2. Лагранжиан, линейный по скоростям. Алгоритм Березина эффективен и при построении гамильтоновой системы для линейного по скоростям (следовательно, вырожденного) лагранжиана [7, 15]

$$L = \sum_{i=1}^{n} f_i(q)\dot{q}_i - V(q), \quad q = (q_1, q_2, ..., q_n). \tag{2.22}$$

Уравнения движения, следующие из такого лагранжиана, оказываются уравнениями первого порядка по времени:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0\,, \tag{2.23}$$

поэтому они должны рассматриваться как лагранжевы связи [4]. Для однозначного разрешения (2.23) относительно скоростей примем, что матрица

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \quad \det ||f_{ik}|| \neq 0$$

невырожденна, тогда лагранжевы связи (2.23) можно записать в виде

$$\dot{q}_i = -\sum_{k=1}^{n} f_{ik}^{-1}(q)\, \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, f_{jk}^{-1} = \delta_{ik}. \tag{2.24}$$

В противном случае система (2.23) не может быть отнесена к типу систем Коши–Ковалевской [15] и в таких задачах возникают дополнительные усложнения, связанные, например, с существованием у вырожденной матрицы f_{ik} собственных векторов u_i с нулевыми собственными значениями, ведущих, как это видно из (2.23), к условию на потенциал

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0\,,$$

анализ этого случая дан в работе [15].

Система (2.22) рассматривалась также в работе [7], где был предложен новый подход к построению гамильтонова формализма для линейных по скоростям лагранжианов, здесь же мы последуем методу Березина, который приводит к функции Гамильтона, совпадающей с полученной каноническим путем только на связях, но уравнения движения для обоих гамильтонианов оказываются одними и теми же.

Итак, рассматривая уравнения (2.23) как лагранжевы связи, строим обобщенный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} f_i(q)\, \dot{q}_i - V(q) + \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_k \left(f_{ki}\, \dot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) \tag{2.25}$$

и обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = f_i(q) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f_{ki}. \tag{2.26}$$

Благодаря существованию f_{ik}^{-1} мы можем из (2.26) определить множители Лагранжа

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{p}_i - f_i)\, f_{ik}^{-1}. \tag{2.27}$$

Далее, с помощью уравнений связей в форме (2.24) и лагранжиана (2.25), взятого на связях,

$$\mathcal{L} = -\sum_{i,j=1}^{n} f_i\, f_{ij}^{-1}\,\frac{\partial V}{\partial q_k} - V(q)$$

строим функцию Гамильтона, выраженную через обобщенные импульсы:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n} (f_i - \tilde{p}_i)\, f_{ij}^{-1}\,\frac{\partial V}{\partial q_j} + V(q). \qquad (2.28)$$

Теперь, как предписывает метод, можно потребовать выполнения условия (2.7) и тем самым перейти от обобщенных импульсов (2.26) к каноническим:

$$\lambda_{k/\tilde{p}=p} = 0 \Longrightarrow p_i = f_i(q), \qquad (2.29)$$

что приводит к первичным гамильтоновым связям. На них (2.28) совпадает с канонически построенным гамильтонианом

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i(q), \quad H = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - L = V(q),$$

для которого, следуя работе [16], необходимо строить скобки Дирака, поскольку обычные скобки Пуассона

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = 0$$

приводят к неверному результату (ср. (2.24)). В рассматриваемом же методе из (2.28) имеем

$$\dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = -\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{-1}\,\frac{\partial V}{\partial q_j}, \qquad (2.30)$$

что совпадает с (2.24) (в связи с этим см. также [7]). Равенства (2.29) теперь должны рассматриваться как определение инвариантного многообразия для гамильтоновой системы (2.28), что следует из гамильтонова уравнения

$$\begin{aligned}\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} &= \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_k} f_{ij}^{-1}\frac{\partial V}{\partial q_j} + (f_i - p_k)\frac{\partial}{\partial q_k}\left(f_{ij}^{-1}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\right] - \frac{\partial V}{\partial q_k}, \qquad (2.31)\end{aligned}$$

которое с учетом (2.29), (2.30), а также представления последнего члена в правой части в виде

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ki}\, f_{ij}^{-1}\, \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

записывается как производная по времени от равенства (2.29):

$$\dot{p}_k = -\sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_k} + f_{ki} \right] f_{ij}^{-1}\, \frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\, \dot{q}_i = \frac{d f_k(q)}{dt},$$

что и означает коммутацию связей с гамильтонианом (2.28):

$$\{p_k - f_k(q), \mathcal{H}\}_{/p_k = f_k} = 0.$$

Продемонстрируем на этом примере свойство инволютивности для нашего алгоритма, т. е. по гамильтоновой системе (2.28), (2.29), несмотря на вырожденность гамильтониана (линеен по импульсам), можно построить соответствующую лагранжеву систему (2.22). Для этого запишем с помощью множителей Лагранжа μ_i обобщенный (полный, по терминологии Дирака) гамильтониан

$$\mathcal{H}_T = \sum_{i,j=1}^{n} (f_i - p_j)\, f_{ij}^{-1}\, \frac{\partial V}{\partial q_j} + V(q) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, (f_i - p_i)$$

и для обобщенных скоростей получаем (ср. (2.24))

$$\tilde{\dot{q}}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = -\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{-1}\, \frac{\partial V}{\partial q_j} - \mu_i,$$

откуда определяются μ_i. Далее, используя связь (2.29), на которой $\mathcal{H}_T = V(q)$, строим лагранжиан, выраженный через обобщенные скорости:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \tilde{\dot{q}}_i - \mathcal{H}_T = \sum_{i=1}^{n} f_i(q)\, \tilde{\dot{q}}_i - V(q),$$

а переходя от $\tilde{\dot{q}}_i$ к $\dot{q}_i$ с помощью условия $\mu_{i/\tilde{q}=q} = 0$, получаем лагранжеву связь (2.24).

2.3. Вырожденный репараметризационно-инвариантный лагранжиан. Для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\left[\dot{q}^2\, q^2 - (\dot{q} q)^2\right], \quad q = (q_1, q_2, ..., q_n), \tag{2.32}$$

рассматриваемый алгоритм перехода к гамильтонову формализму из-за специальной формы лагранжевой связи $L = 0$ оказывается эквивалентным стандартному методу [4, 17].

Вырожденность лагранжиана (2.32) следует из вида матрицы

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_j} = q^2 \delta_{ij} - q_i\, q_j,$$

имеющей один собственный вектор q_i с нулевым собственным значением. Из уравнений движения

$$q^2\, \ddot{q}_i - (q\ddot{q})\, q_i + 2(q\dot{q})\, \dot{q}_i - 2\dot{q}^2\, q_i = 0$$

путем проекции на вектор q_i получаем уже упоминавшуюся лагранжеву связь

$$2\left[(q\dot{q})^2 - \dot{q}^2\, q^2\right] = -4L = 0,$$

особенность которой состоит в том, что она выражается через исходный лагранжиан. Поэтому построенный по предлагаемому рецепту обобщенный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1+\lambda}{2}\left[\dot{q}^2\, q^2 - (\dot{q}q)^2\right] = (1+\lambda)L \tag{2.33}$$

отличается от исходного только множителем, не зависящим от переменных q_i и $\dot{q}_i$, следовательно, и обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = (1+\lambda)\left[\dot{q}_i\, q^2 - (\dot{q}q) q_i\right]$$

отличаются от канонических этим же множителем, имея ту же функциональную зависимость от q_i и $\dot{q}_i$.

Как известно [4, 17], в каноническом подходе у этой системы существует одна первичная гамильтонова связь

$$(\tilde{p}\, q) = (1+\lambda)\left[q^2(\dot{q}q) - q^2(\dot{q}q)\right] \equiv 0$$

и одна вторичная

$$\tilde{p}^2 = q^2\left[q^2\, \dot{q}^2 - (\dot{q}q)^2\right](1+\lambda)^2 = 0,$$

из которых множитель Лагранжа λ как функция $\tilde{p}$ и q определен быть не может. Таким образом, для данного примера предлагаемый метод оказывается неприменимым. Стандартный прием построения гамильтонова формализма для лагранжиана (2.32) был приведен в [17].

3. ТОЧЕЧНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА

При рассмотрении лагранжианов релятивистских систем в четырехмерном мире Минковского мы будем использовать следующие обозначения: метрический тензор $g_{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $(+,-,-,-)$, контравариантный вектор $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, ковариантный вектор $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\mathbf{x})$, операторы дифференцирования

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right), \ \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right), \ \Box = \partial_\mu\, \partial^\mu, \ \triangle = \partial_i^2,$$

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование:

$$x_\mu\, y^\mu = g^{\mu\nu}x_\mu y_\nu = (x\, y), \quad x_\mu x^\mu = x^2, \quad x_i y_i = (\mathbf{x}\mathbf{y}).$$

Для кривых $x^\mu(\tau)$ или поверхностей $x^\mu(\tau, \sigma)$, заданных параметрически, как обычно, вводятся обозначения частных производных по параметрам:

$$\dot{x}^\mu(\tau) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}, \quad \dot{x}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial x^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \tau}, \quad x^{'\mu}(\tau, \sigma) = \frac{\partial x^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma}.$$

3.1. Релятивистская частица с массой в калибровке собственного времени. Репараметризационно-инвариантный лагранжиан

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^2(\tau)} \tag{3.1}$$

дополняем условием

$$\dot{x}^2(\tau) = c^2, \tag{3.2}$$

где c — положительная константа.

Лагранжиан вырожден, поскольку матрица

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = -\frac{m}{(\dot{x}^2)^{3/2}}\left[g_{\mu\nu}\, \dot{x}^2 - \dot{x}_\mu\, \dot{x}_\nu\right]$$

имеет один собственный вектор $\dot{x}_\mu$ с нулевым собственным значением.

Выбранная лагранжева связь не может быть обычным путем перенесена в канонический формализм, так как из-за вырожденности лагранжиана не все скорости $\dot{x}^\mu$ выражаются через импульсы. Действительно, уравнения

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m\, \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \tag{3.3}$$

не независимы, так как из них следует первичная гамильтонова связь

$$p^2 = m^2. \tag{3.4}$$

Следовательно, лагранжева связь (3.2) должна быть отнесена к «неканоническим», для нее применим наш метод построения гамильтониана. Строим обобщенный лагранжиан

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{\dot{x}^2(\tau)} - \lambda(\tau)\,\frac{m}{2}\,\left[\dot{x}^2(\tau) - c^2\right] \tag{3.5}$$

и обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = m\left[\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu^2}} + \lambda\,\dot{x}_\mu\right], \tag{3.6}$$

откуда с учетом уравнения связи находим λ как функцию импульсов:

$$\tilde{p}^2 = m^2(1+\lambda c)^2, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\tilde{p}^2} - m}{c\,m}, \tag{3.7}$$

выбрав положительный знак корня ввиду условия (3.10). Подставляя это выражение для λ в (3.6), находим скорости

$$\dot{x}_\mu = c\,\frac{\tilde{p}_\mu}{\sqrt{p^2}} \Longrightarrow \dot{x}^2 = c^2. \tag{3.8}$$

В результате получаем гамильтониан, выраженный через обобщенные импульсы:

$$\mathcal{H} = -\tilde{p}^\mu\,\dot{x}_\mu - \mathcal{L} = c(m - \sqrt{\tilde{p}^2}) \tag{3.9}$$

(здесь учтено, что на поверхности связи $\mathcal{L} = -mc$). Накладывая условия (2.7), получаем первичную гамильтонову связь:

$$\lambda_{/\tilde{p}=p} = 0 \Longrightarrow \sqrt{p^2} = m, \tag{3.10}$$

эквивалентную канонической (3.4). Отметим, что гамильтониан, построенный по импульсам (3.3), тождественно равен нулю:

$$H = -p^\mu\dot{x}_\mu - L = -m\sqrt{\dot{x}^2} + m\sqrt{\dot{x}^2} = 0,$$

в то время как построенный нами гамильтониан (3.9) равен нулю только на поверхности связи (3.10). Гамильтоновы уравнения

$$\dot{x}_\mu = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^\mu} = c\frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}} = c\frac{p_\mu}{m}, \quad \dot{p}_\mu = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^\mu} = 0 \Longrightarrow \ddot{x}_\mu = 0$$

полностью эквивалентны лагранжевым уравнениям, следующим из (3.1) и (3.2):

$$\ddot{x}_\mu \, \dot{x}^2 - \dot{x}_\mu (\ddot{x}\dot{x}) = c^2 \, \ddot{x}_\mu = 0.$$

Опять отметим, что гамильтониан (3.9) может быть получен из обобщенного лагранжиана (3.5), если там $\lambda(\tau)$ рассматривать как независимую динамическую переменную, сопряженный импульс к которой равен нулю:

$$p_\lambda = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = 0, \tag{3.11}$$

а остальные импульсы, теперь зависящие от λ, определяются уравнением (3.6), из которого находим

$$\sqrt{\dot{x}^2} = \frac{\sqrt{p^2} - m}{\lambda m},$$

и далее, выражая $\dot{x}_\mu$ через p_μ и λ, строим $\mathcal{L}$ как функцию координаты λ и импульса:

$$\dot{x}_\mu = \frac{p_\mu}{m} \, \frac{\sqrt{p^2} - m}{\lambda \sqrt{p^{\,2}}}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\frac{p^2 - m^2}{\lambda m} - \lambda m c^2 \right],$$

что позволяет найти гамильтониан

$$\mathcal{H}_t = -p^\mu \, \dot{x}_\mu - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\frac{(\sqrt{p^{\,2}} - m)^2}{\lambda m} + \lambda m c^2 \right]. \tag{3.12}$$

Для непротиворечивости с (3.11) потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sqrt{p^{\,2}} - m)^2}{\lambda^2 m} - m c^2 \right] = 0,$$

откуда находим

$$\lambda^2 = \frac{(\sqrt{p^2} - m)^2}{m^2 c^2},$$

что при выборе положительного корня совпадает с (3.7), а подстановка этой величины в (3.12) приводит к гамильтониану (3.9).

В заключение еще раз покажем инволютивность этой процедуры, т. е. от вырожденной гамильтоновой системы (3.9), (3.10) перейдем к исходной лагранжевой (3.1). Имеем полный гамильтониан

$$\mathcal{H}_t = c(m - \sqrt{p^{\,2}}) + \mu(m - \sqrt{p^{\,2}}),$$

где μ — множитель Лагранжа. Далее, гамильтоново уравнение для обобщенной скорости и уравнение связи (3.10)

$$\dot{\tilde{x}}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial p^\mu} = (c+\mu)\,\frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}}\,, \quad \sqrt{p^2} = m$$

позволяют выразить μ и p_μ через $\dot{\tilde{x}}_\mu$:

$$\mu = \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2} - c, \quad p_\mu = m\,\frac{\dot{\tilde{x}}_\mu}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2}}. \tag{3.13}$$

Учитывая, что на поверхности связи $\mathcal{H}_t = 0$, получаем

$$\mathcal{L} = -p^\mu\,\dot{\tilde{x}}_\mu - \mathcal{H}_t = \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2}\,,$$

а полагая в (3.13) $\mu_{/\tilde{x}=\dot{x}} = 0$, приходим к исходной лагранжевой связи (3.2).

3.2. Релятивистская частица с дополнительным условием, фиксирующим τ как координатное время. Рассмотрим пример, когда лагранжева связь не содержит скоростей, а следовательно, является «канонической»:

$$L = -m\,\sqrt{\dot{x}^2(\tau)}, \quad x^0(\tau) = \frac{\mathcal{P}}{m}\,\tau, \quad \frac{\mathcal{P}}{m} = \mathrm{const}. \tag{3.14}$$

В лоренц-нековариантном подходе функцию Лагранжа благодаря дополнительному условию, определяющему $\dot{x}^0 = \mathcal{P}/m$, записывают как функцию только пространственных переменных:

$$L = -m\,\sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}}{m}\right)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2(\tau)},$$

в таком виде она является невырожденной, так как матрица

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} = \frac{m}{\left[\left(\frac{\mathcal{P}}{m}\right)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2\right]^{3/2}}\left[\left(\frac{\mathcal{P}^2}{m^2} - \dot{\mathbf{x}}^2\right)\delta_{ij} - \dot{x}_i\dot{x}_j\right]$$

имеет детерминант, не равный нулю. Входящие сюда пространственные скорости однозначно выражаются через канонические импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{m x_i}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}}{m}\right)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}}, \quad \dot{x}_i = \frac{\mathcal{P}}{m}\,\frac{p_i}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \tag{3.15}$$

и строится функция Гамильтона как функция пространственных импульсов:

$$H = \frac{\mathcal{P}}{m}\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{3.16}$$

Лоренц-ковариантное построение гамильтонова формализма в терминах четырехвекторов для такой системы проводилось в рамках метода Дирака и с применением канонической замены переменных в работах [4, 18], в результате функция Гамильтона имела опять вид (3.16) и не зависела от временной компоненты импульса p_0.

Применим наш метод к системе (3.14), предварительно продифференцировав согласно (2.2) связь по τ, поскольку она не зависит от скоростей. Имеем обобщенный лагранжиан

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{\dot{x}^2} - \lambda m\left(\dot{x}^0 - \frac{\mathcal{P}}{m}\right), \tag{3.17}$$

из которого следуют обобщенная временная компонента импульса $\tilde{p}_0$ и канонические пространственные компоненты p_i (3.15)

$$\tilde{p}_0 = m\left(\frac{\dot{x}_0}{\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}} + \lambda\right), \quad p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}},$$

включая в эту систему еще связь $\dot{x}^0 = \mathcal{P}/m$, получаем для импульсов

$$\tilde{p}_0 = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}}{m}\right)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}} + m\lambda, \quad p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}}{m}\right)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}},$$

откуда можем определить λ и $\dot{x}_i$ как функции $\tilde{p}_0$ и p_i:

$$\lambda = \frac{\tilde{p}_0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{m}, \quad \dot{x}_i = \frac{\mathcal{P}}{m}\frac{p_i}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}. \tag{3.18}$$

Теперь функция Гамильтона, зависящая от всех четырех компонент вектора $(\tilde{p}_0, \mathbf{p})$, имеет вид

$$\mathcal{H} = -\tilde{p}_0\dot{x}^0 + (\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}) - \mathcal{L} = \frac{\mathcal{P}}{m}\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - \tilde{p}_0\right). \tag{3.19}$$

Далее, переходя к каноническому импульсу p_0, полагаем $\lambda_{/\tilde{p}_0 = p_0} = 0$ и из выражения для λ в (3.18) получаем гамильтонову связь

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{3.20}$$

Гамильтоновы уравнения для координат имеют вид

$$\dot{x}^0(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_0} = \frac{\mathcal{P}}{m}, \quad \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathcal{P}}{m}\frac{\mathbf{p}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}},$$

первое из них совпадает с уравнением лагранжевой связи, а второе с учетом этой связи записывается, как обычно, через координатное время x^0:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dx^0} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \Longrightarrow \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}\,.$$

Гамильтонова связь (3.20), выраженная через трехмерную скорость $\mathbf{v}$, дает энергию как функцию скорости и массы покоя частицы:

$$p_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}},$$

а уравнения для импульсов приводят к значению $\mathbf{v} = \mathrm{const}$:

$$\dot{p}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}^0} = 0, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0.$$

Как и в предыдущих примерах, инволютивность метода позволяет от гамильтоновой системы (3.19), (3.20) вернуться к исходной лагранжевой (3.17). Исходя из полного гамильтониана

$$\mathcal{H}_t = \left(\frac{\mathcal{P}}{m} + \mu(\tau)\right)\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - p_0\right),$$

имеем обобщенные скорости $\dot{\tilde{x}}_\mu$

$$\dot{\tilde{x}}^0 = -\frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial p_0} = \frac{\mathcal{P}}{m} + \mu, \quad \dot{\tilde{x}}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial p_i} = \left(\frac{\mathcal{P}}{m} + \mu\right)\frac{p_i}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}},$$

откуда с учетом связи (3.20) находим

$$\mu = \dot{\tilde{x}}^0 - \frac{\mathcal{P}}{m}, \quad p_i = \frac{m\dot{\tilde{x}}_i}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2}}, \quad p_0 = \frac{m\dot{\tilde{x}}^0}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2}}. \tag{3.21}$$

Функция Лагранжа с учетом того, что на связи (3.20) $\mathcal{H}_t = 0$, имеет вид

$$\mathcal{L} = -p_0\,\dot{\tilde{x}}^0 + (\mathbf{p}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}) = -\frac{m(\dot{\tilde{x}}^0)^2}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2}} + \frac{m\dot{\tilde{x}}^2}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2}} = -m\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2},$$

и, полагая $\mu_{/\dot{\tilde{x}}=\dot{x}} = 0$, получаем из (3.21) продифференцированную лагранжеву связь

$$\dot{x}^0 = \frac{\mathcal{P}}{m}.$$

4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА

Динамика релятивистской струны определяется вырожденным лагранжианом

$$L = -\gamma \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}\, d\sigma, \quad \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} \right\| = 0. \tag{4.1}$$

Из определения канонических импульсов струны

$$p_\mu(\tau,\sigma) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \gamma \frac{(\dot{x}x')x'_\mu - x'^2 \dot{x}_\mu}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} \tag{4.2}$$

следуют две первичные гамильтоновы связи [19]

$$\varphi_1 = px' = 0, \quad \varphi_2 = p^2 + \gamma^2\, {x'}^2 = 0 \tag{4.3}$$

и тождественно равный нулю гамильтониан

$$H = -\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} (p\,\dot{x}) d\sigma - L = 0. \tag{4.4}$$

В общепринятом подходе к такой системе следуют алгоритму Дирака [1] и с помощью множителей Лагранжа $\mu_i(\tau,\sigma)$ строят полный гамильтониан, который имеет вид линейной комбинации гамильтоновых связей:

$$H_T = \int \left[\mu_1(\tau,\sigma)\varphi_1(\tau,\sigma) + \frac{1}{2\gamma}\, \mu_2(\tau,\sigma)\varphi_2(\tau,\sigma) \right] d\sigma, \tag{4.5}$$

а поскольку связи (4.3) находятся в инволюции [19]:

$$\begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma)\,\varphi_1(\sigma')\} &= [\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')]\, \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{\varphi_2(\sigma)\,\varphi_2(\sigma')\} &= [\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')]\, \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{\varphi_1(\sigma)\,\varphi_2(\sigma')\} &= [\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')]\, \delta'(\sigma - \sigma'), \end{aligned}$$

динамика в фазовом пространстве, определяемая гамильтонианом (4.5), имеет функциональный произвол, связанный с неопределенными множителями Лагранжа, входящими в уравнения движения

$$\dot{x}_\nu + \frac{\mu_2}{\gamma}\, p_\nu + \mu_1\, x'_\nu = 0, \quad \dot{p}_\nu + \gamma(\mu_2 x'_\nu)' + (\mu_1 p_\nu)' = 0\,. \tag{4.6}$$

В лагранжевом формализме произвол, обусловленный репараметризационной инвариантностью действия струны

$$S = -\gamma \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \, \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \; \tau \to \tilde{\tau} = f_1(\tau, \sigma), \; \sigma \to \tilde{\sigma} = f_2(\tau, \sigma),$$

частично фиксируется введением дополнительных условий (ортонормальная калибровка [19, 20])

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad (\dot{x}x') = 0, \tag{4.7}$$

благодаря которым лагранжевы уравнения, следующие из (4.1), сводятся к линейным уравнениям Д'Аламбера

$$\ddot{x}_\mu(\tau, \sigma) - x''_\mu(\tau, \sigma) = 0, \tag{4.8}$$

а сами условия (4.7) трактуются как инвариантные соотношения [19, 21] для уравнений (4.8), т. е. такие соотношения, которые, будучи удовлетворены начальными данными, выполняются и в последующие моменты времени для решений уравнения (4.8). В гамильтоновом формализме (4.5) условиям (4.7) соответствует фиксация множителей: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -1$, при которой из гамильтоновых уравнений (4.6) следуют уравнения (4.8) на координаты струны.

Применим наш метод построения канонического формализма для лагранжиана (4.1) с «неканоническими» связями (4.7).

4.1. Гамильтониан и гамильтоновы связи для релятивистской струны в ортонормальной калибровке. Обобщенный лагранжиан, включающий связи (4.7), имеет вид

$$\mathcal{L} = -\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \, \left[\gamma\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} + \lambda_1 \frac{\dot{x}^2 + x'^2}{2} + \lambda_2 (\dot{x}x') \right].$$

Из него получаем выражение для обобщенных импульсов (ср. (4.2))

$$\tilde{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = \gamma \, \frac{(\dot{x}x')x'_\mu - x'^2 \dot{x}_\mu}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} + \lambda_1 \dot{x}_\mu + \lambda_2 x'_\mu. \tag{4.9}$$

Привлекая сюда уравнения связей (4.7), легко преобразуем его в линейные уравнения относительно $\dot{x}_\mu$ и x'_μ:

$$\tilde{p}_\mu = (\gamma + \lambda_1) \, \dot{x}_\mu + \lambda_2 x'_\mu, \tag{4.10}$$

откуда выражаем λ_i, $\dot{x}_\mu$ через $\tilde{p}_\mu$, x'_μ. Это достигается путем проекции (4.10) на вектор x'^{μ} с учетом связей

$$(\tilde{p}x') = \lambda_2 x'^2 \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{(\tilde{p}x')}{x'^2}, \tag{4.11}$$

а затем, подставляя (4.11) в (4.10) и возводя в квадрат, получаем уравнение для определения λ_1

$$\tilde{p}^2 = (\gamma + \lambda_1)^2(-x'^2) + \frac{(\tilde{p}x')}{x'^2}.$$

Выбирая положительный корень этого квадратного уравнения, находим

$$\gamma + \lambda_1 = \frac{\sqrt{(\tilde{p}x')^2 - x'^2\tilde{p}^2}}{-x'^2}, \quad x'^2 < 0 \tag{4.12}$$

(при выборе отрицательного корня и устремлении λ_1 к нулю придем к противоречию с $\gamma > 0$). Теперь, определив λ_1 и λ_2, из (4.10) выражаем $\dot{x}_\mu$ через обобщенные импульсы и производные по σ от координат струны:

$$\dot{x}_\mu = \frac{(\tilde{p}x')x'_\mu - x'^2\tilde{p}_\mu}{\sqrt{(\tilde{p}x')^2 - x'^2\tilde{p}^2}}. \tag{4.13}$$

Легко проверить, что правая часть этого равенства тождественно удовлетворяет исходным лагранжевым связям (4.7), поскольку связи входили в решенную нами систему уравнений (4.7), (4.10).

Подставляя (4.13) в функцию Лагранжа, получаем ее значение на связях

$$\mathcal{L} = \gamma \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} x'^2(\tau, \sigma)\, d\sigma$$

и строим функцию Гамильтона с обобщенными импульсами

$$\mathcal{H} = -\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \tilde{p}^\mu\, \dot{x}_\mu\, d\sigma - \mathcal{L} = -\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[\sqrt{(\tilde{p}x')^2 - x'^2\tilde{p}^2} + \gamma x'^2\right] d\sigma, \tag{4.14}$$

которая в отличие от канонической (4.4) не равна тождественно нулю и, как и в случае гамильтониана для релятивистской частицы (3.9), принимает нулевое значение на гамильтоновых связях, возникающих здесь при переходе от обобщенных импульсов (4.9) к каноническим (4.2).

Из (4.11), (4.12) получаем первичные гамильтоновы связи

$$\begin{aligned}
\lambda_{2/\tilde{p}=p} &= \frac{(px')}{x'^2} = 0 \Longrightarrow (px') = 0, \\
\lambda_{1/\tilde{p}=p} &= \gamma + \frac{\sqrt{-x'^2 p^2}}{-x'^2} = 0 \Longrightarrow p^2 + \gamma^2 x'^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

полностью совпадающие с (4.3) в каноническом подходе. На этих связях наш гамильтониан (4.14) обращается в нуль, так как может быть представлен с помощью выражения (4.12) в виде

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \lambda_1 x'^2(\tau, \sigma)\, d\sigma.$$

Гамильтоновы уравнения движения, первое из которых

$$\dot{x}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^\mu} = \frac{(px')x'_\mu - x'^2 p_\mu}{\sqrt{(px')^2 - p^2 x'^2}}$$

совпадает с (4.13), а второе является уравнением второго порядка по σ:

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{(px')p_\mu + p^2 x'_\mu}{\sqrt{(px')^2 - p^2 x'^2}} + 2\gamma x'_\mu\right],$$

с использованием связей (4.15) сводятся к линейным уравнениям релятивистской струны (4.8) в ортонормальной калибровке

$$\dot{x}_\mu = \frac{1}{\gamma} p_\mu, \quad \dot{p}_\mu = \gamma x''_\mu. \tag{4.16}$$

Таким образом, полученные этим методом гамильтониан и первичные связи ведут к хорошо известным уравнениям движения релятивистской струны, не содержат в отличие от (4.5) функционального произвола, а связи коммутируют в слабом смысле с гамильтонианом (4.14), что проще всего доказать, дифференцируя (4.15) по временному параметру и используя гамильтоновы уравнения (4.16):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \tau}(px') = (\dot{p}x') + (p\dot{x}') = \gamma(x''x') + \frac{1}{\gamma}(pp') = \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\gamma^2 {x'}^2 + p^2\right] = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\gamma^2 x'^2 + p^2\right] = 2(p\dot{p}) + 2\gamma^2(\dot{x}'x') = 2\gamma^2\left[(\dot{x}x'') + (\dot{x}x')\right] = \\
&\qquad = 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{x}x') = 2\gamma \frac{\partial}{\partial \sigma}(px') = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда также следует, что (4.15) являются инвариантными соотношениями для гамильтоновых уравнений (4.16), т. е. если они выполняются в начальный момент, то будут на решениях выполняться всегда.

Отметим еще, что полученный этим приемом гамильтониан (4.14) вырожден, поскольку матрица из элементов

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p^\mu \partial p^\nu} = \frac{x'^2}{[(px')^2 - p^2 x'^2]^{3/2}} \times$$
$$\times \left\{ x'^2 [p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\nu p_\mu] + (px') \left[p_\mu x'_\nu + p_\nu x'_\mu - (px')\delta_{\mu\nu} \right] - p^2 x'_\mu x'_\nu \right\}$$

имеет два собственных вектора p^μ, x'^μ с нулевыми собственными значениями. Однако, как уже отмечалось в предыдущих примерах, предлагаемый алгоритм позволяет от гамильтоновой системы (4.14), (4.15) вернуться к исходной лагранжевой.

Для этого опять строится полный гамильтониан

$$\mathcal{H}_T = -\sqrt{(px')^2 - p^2 x'^2} - \gamma x'^2 - \frac{\mu_1}{2\gamma}(p^2 + \gamma^2 x'^2) - \mu_2 (px')$$

и вводятся обобщенные скорости, которые с учетом связей линейно выражаются через импульсы и координаты:

$$\tilde{\dot{x}}_\mu = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p^\mu} = -\frac{1+\mu_1}{\gamma} p_\mu + \mu_2 x'_\mu. \tag{4.17}$$

Далее находятся множители μ_i:

$$(\dot{\tilde{x}} x') = \mu_2 x'^2, \quad \mu_2 = \frac{(\dot{\tilde{x}} x')^2}{x'^2},$$
$$\dot{\tilde{x}}^2 = \left(\frac{1+\mu_1}{\gamma} \right)^2 (-\gamma^2 x'^2) + \frac{(\dot{\tilde{x}} x')^2}{x'^2}, \quad 1 + \mu_1 = \frac{\sqrt{(\dot{\tilde{x}} x')^2 - \dot{\tilde{x}}^2 x'^2}}{-x'^2}, \tag{4.18}$$

а затем импульсы выражаются через $\tilde{\dot{x}}_\mu$ и x'_μ (ср. (4.2)):

$$p_\mu = \gamma \frac{(\dot{\tilde{x}} x') x'_\mu - x'^2 \dot{\tilde{x}}_\mu}{\sqrt{(\dot{\tilde{x}} x')^2 - \dot{\tilde{x}}^2 x'^2}}.$$

Функция Лагранжа с учетом того, что на связях $\mathcal{H} = 0$, совпадает с изначальной (4.1):

$$\mathcal{L} = -\int p_\mu \dot{\tilde{x}}^\mu - \mathcal{H} = -\gamma \sqrt{(\dot{\tilde{x}} x')^2 - \dot{\tilde{x}}^2 x'^2}\, d\sigma,$$

переход от обобщенных скоростей $\tilde{\dot{x}}_\mu$ к $\dot{x}_\mu$ выражается в требовании, чтобы $\mu_{i\,/\tilde{\dot{x}}=\dot{x}} = 0$, тогда из (4.18) получаем лагранжевы связи

$$(\dot{x}x') = 0, \quad \dot{x}^2 + x'^2 = 0$$

и тем самым полностью воспроизводим исходную лагранжеву систему.

4.2. Релятивистская струна в светоподобной калибровке. Уже отмечалось, что ортонормальная калибровка (4.7) полностью не фиксирует параметрическое задание координат струны $x_\mu(\tau, \sigma)$, остается произвол в выборе параметров τ, σ, определяемый преобразованиями

$$\tau \pm \sigma = f_\pm \, (\bar{\tau} \pm \bar{\sigma}),$$

тем самым возможны дополнительные калибровочные условия, фиксирующие функции $f_\pm$. Одним из таких условий может быть широко используемая в теории релятивистской струны $[19, 20]$ светоподобная калибровка, когда координаты струны подчинены условию

$$(nx) = \frac{(n\mathcal{P})}{\pi\gamma}\,\tau + Q, \tag{4.19}$$

где n^μ — светоподобный (изотропный) постоянный вектор $n^2 = 0$; $\mathcal{P}^\mu$ — полный импульс струны; Q — константа.

Построим для этой системы обобщенный лагранжиан, продифференцировав, как того требует метод (2.2), связь (4.19) по τ, поскольку она не зависит от скоростей и, следовательно, не дает вклада в обобщенный импульс. Имеем следующий обобщенный лагранжиан:

$$\mathcal{L} = -\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Bigg\{ \gamma\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} + \frac{\lambda_1}{2}(\dot{x}^2 + x'^2) + \\ + \lambda_2\,(\dot{x}x') + \lambda_3\left[(n\dot{x}) - \frac{(n\mathcal{P})}{\pi\gamma}\right]\Bigg\} d\sigma \tag{4.20}$$

и обобщенные импульсы с учетом связей (4.7) (ср. (4.10)):

$$\tilde{p}_\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu_{/cb}} = (\gamma + \lambda_1)\dot{x}_\mu + \lambda_2 x'_\mu + \lambda_3 n_\mu. \tag{4.21}$$

Проектируя эти равенства на x'_μ и учитывая опять связи (4.7), а также следующее из (4.19) равенство $(nx') = 0$, получаем, как и в предыдущем случае (4.11), выражение для λ_2

$$(\tilde{p}x') = \lambda_2\, x'^2 \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{(\tilde{p}x')}{x'^2}, \tag{4.22}$$

проекция (4.21) на вектор n^μ с учетом $n^2 = 0$, $(n\dot{x}) = (n\mathcal{P})/\pi\gamma$ приводит к определению λ_1:

$$(n\tilde{p}) = (\gamma + \lambda_1)(n\dot{x}) = (\gamma + \lambda_1)\frac{(n\mathcal{P})}{\pi\gamma} \Longrightarrow \gamma + \lambda_1 = \pi\gamma\frac{(n\tilde{p})}{(n\mathcal{P})}. \tag{4.23}$$

Далее, из (4.21)–(4.23) и связей (4.7) получаем

$$\tilde{p}^2 = (\gamma + \lambda_1)^2\,\dot{x}^2 + 2(\gamma + \lambda_1)\lambda_3(n\dot{x}) = \\ = -\pi^2\gamma^2\,\frac{(n\tilde{p})^2}{(n\mathcal{P})^2}\,x'^2 + \frac{(\tilde{p}x')^2}{x'^2} + 2\lambda_3\,(n\tilde{p})\,,$$

откуда находим

$$\lambda_3 = \frac{1}{2(n\tilde{p})}\left[\tilde{p}^2 - \frac{(\tilde{p}x')^2}{x'^2} + \pi^2\gamma^2\frac{(n\tilde{p})^2}{(n\mathcal{P})^2}x'^2\right]. \tag{4.24}$$

Определив все λ_i, из (4.21) выражаем $\dot{x}_\mu$ через обобщенные импульсы и координаты:

$$\dot{x}_\mu = \frac{\tilde{p}_\mu - \lambda_2 {x'}_\mu - \lambda_3 n_\mu}{\gamma + \lambda_1}\,.$$

Легко проверить, что это выражение тождественно удовлетворяет всем уравнениям связи, так как оно было определено из системы уравнений (4.21) с использованием этих связей.

Теперь построим функцию Гамильтона, учитывая, что на связях лагранжиан, как и ранее, становится равным

$$\mathcal{L} = \gamma\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} x'^2(\tau,\sigma)d\sigma,$$

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}(\tilde{p}\dot{x})\,d\sigma - \mathcal{L} = \\ = -\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left\{\frac{(n\mathcal{P})}{\pi\gamma(n\tilde{p})}\left[\tilde{p}^2 - \frac{(\tilde{p}x')^2}{x'^2}\right] + \gamma\left[2 - \pi\frac{(n\tilde{p})}{(n\mathcal{P})}\right]x'^2\right\}d\sigma. \tag{4.25}$$

Таким образом, в рассматриваемой калибровке гамильтониан по своей структуре отличается от характерных для теории струны выражений с радикалами, однако он по-прежнему является вырожденным, так как матрица из элементов

$$- \frac{\pi\gamma(np)}{(n\mathcal{P})} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial\tilde{p}^\mu \partial\tilde{p}_\nu} = \frac{n_\mu n_\nu}{(n\tilde{p})} \left[\tilde{p}^2 - \frac{(\tilde{p}x')^2}{x'^2} \right] - \frac{n_\mu}{(n\tilde{p})} \left[p_\nu - \frac{(\tilde{p}x')}{x'^2} x'_{nu} \right] - \\ - \frac{n_\nu}{(n\tilde{p})} \left[p_\mu - \frac{(\tilde{p}x')}{x'^2} x'_\mu \right] + \delta_{\mu\nu} - \frac{x'_\mu x'_\nu}{x'^2}$$

имеет три собственных вектора $n^\mu, \tilde{p}^\mu, x'^\mu$ с нулевыми собственными значениями. Этому соответствует наличие трех дополнительных условий, возникающих в нашем методе благодаря способу перехода $\lambda_{i/\tilde{p}=p} = 0$ от обобщенных импульсов (4.21) к каноническим. Действительно, из (4.22)–(4.24) имеем (ср. (4.15))

$$\varphi_1 = (px') = 0, \quad \varphi_2 = p^2 + \gamma^2 x'^2 = 0, \quad \varphi_3 = (np) - \frac{(n\mathcal{P})}{\pi} = 0. \qquad (4.26)$$

На этих связях гамильтониан (4.25) обращается в нуль, как это было и в предыдущих примерах, сами же связи (4.26) теперь не находятся в инволюции [19], что следует из скобок Пуассона, содержащих связь φ_3:

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_3(\sigma')\} = \frac{(n\mathcal{P})}{\pi} \delta'(\sigma - \sigma') \neq 0,$$
$$\{\varphi_2(\sigma), \varphi_3(\sigma')\} = 2\gamma^2 (nx') \delta'(\sigma - \sigma') = 0.$$

Далее, к полученным связям (4.26) присоединим еще начальную (непродифференцированную) лагранжеву связь (4.19), не зависящую от скоростей, а потому являющуюся «канонической», переходящую без изменений в гамильтонов формализм. Было показано [19], что φ_4 находится в инволюции с φ_3 благодаря изотропности вектора n^μ:

$$\{\varphi_3(\sigma), \varphi_4(\sigma')\} = n^2 \delta'(\sigma - \sigma') = 0,$$

следовательно, φ_3, φ_4 должны рассматриваться как калибровочные условия при связях φ_1, φ_2 [4]. Уравнение движения в фазовом пространстве, следующее из (4.25), для координат

$$\dot{x}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^\mu} = -\frac{n_\mu}{2} \frac{(n\mathcal{P})}{\pi\gamma(np)^2} \left[p^2 - \frac{(px')^2}{x'^2} \right] + \\ + \frac{(n\mathcal{P})}{\pi\gamma(np)} \left[p_\mu - \frac{(px')}{x'^2} x'_\mu \right] - \frac{n_\mu}{2} \frac{\pi\gamma}{(n\mathcal{P})} x'^2 \qquad (4.27)$$

полностью совпадает с ранее полученным для $\dot{x}_\mu$, что подтверждает непротиворечивость метода, а использование связей (4.26) позволяет перевести (4.27) в линейное уравнение (4.16)

$$\dot{x}_\mu = \frac{1}{\gamma} p_\mu \,.$$

Уравнение для импульсов имеет вид

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'^\mu}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\frac{(n\mathcal{P})}{2\pi\gamma(np)}\left[\frac{(px')^2}{(x'^2)^2}x'_\mu - \frac{(px')}{x'^2}p_\mu\right] + \gamma\left[2 - \pi\frac{(np)}{(n\mathcal{P})}\right]x'_\mu\right\},$$

на связях (4.28) оно переходит опять в линейное уравнение

$$\dot{p}_\mu = \gamma x''_\mu.$$

В результате получаем уравнение Д'Аламбера для координат релятивистской струны с дополнительными условиями светоподобной калибровки (4.19), (4.26).

В работе [4] была найдена каноническая замена переменных в системе координат, в которой $n^\mu = (1, 1, 0, 0)$, позволяющая редуцировать фазовое пространство гамильтоновой системы (4.19), (4.25), (4.26) и получить гамильтониан для независимых (поперечных) координат $\mathbf{x}_\perp = (0, 0, x_2, x_3)$; $\mathbf{p}_\perp = (0, 0, p_2, p_3)$

$$H = \frac{1}{2\gamma}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\mathbf{p}_\perp^2 + \gamma^2 \mathbf{x}'^2_\perp\right) d\sigma.$$

4.3. Релятивистская струна в калибровке Рорлиха. В этой калибровке [22] за постоянный вектор n^μ в (4.19) выбирается четырехвектор полного импульса струны $\mathcal{P}^\mu$, $\mathcal{P}^2 > 0$. Как и в предыдущем примере, замена продифференцированного по τ условия

$$(\mathcal{P}x) = \frac{\mathcal{P}^2}{\pi\gamma}\,\tau + Q \tag{4.28}$$

ведет к обобщенному лагранжиану (ср. (4.20))

$$\mathcal{L} = -\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left\{\gamma\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} + \frac{\lambda_1}{2}(\dot{x}^2 + x'^2) + \right.$$

$$\left. + \lambda_2\,(\dot{x}x') + \lambda_3\left[(\mathcal{P}\dot{x}) - \frac{\mathcal{P}^2}{\pi\gamma}\right]\right\} d\sigma,$$

из которого следует с учетом связей обобщенный импульс

$$\tilde{p}_\mu = (\gamma + \lambda_1)\, \dot{x}_\mu + \lambda_2 x'_\mu + \lambda_3 \mathcal{P}_\mu, \tag{4.29}$$

и так же, как в (4.22), (4.23), находим равенства

$$(\tilde{p}x') = \lambda_2 x'^2, \quad (\tilde{p}\mathcal{P}) = \mathcal{P}^2 \left[\frac{\gamma + \lambda_1}{\pi\gamma} + \lambda_3\right], \tag{4.30}$$

$$\tilde{p}^2 = -(\gamma + \lambda_1)^2 x'^2 + 2\lambda_3 \frac{\gamma + \lambda_1}{\pi\gamma}\mathcal{P}^2 + \frac{(px')^2}{x'^2} + \lambda_3^2 \mathcal{P}^2, \tag{4.31}$$

позволяющие найти λ_i:

$$\begin{gathered} \gamma + \lambda_1 = \pi\gamma \sqrt{\frac{(\tilde{p}x')^2}{x'^2} - \tilde{p}^2 + \frac{(\tilde{p}\mathcal{P})^2}{\mathcal{P}^2}} \Big/ \sqrt{\mathcal{P}^2 + \pi^2\gamma^2 x'^2}, \\ \lambda_2 = \frac{(\tilde{p}x')}{x'^2}, \quad \lambda_3 = \frac{\tilde{p}\mathcal{P}}{\mathcal{P}^2} - \frac{\gamma + \lambda_1}{\pi\gamma}, \end{gathered} \tag{4.32}$$

знание которых дает возможность из (4.29) выразить скорости через импульсы и координаты:

$$\dot{x}_\mu = \frac{\tilde{p}_\mu - \lambda_2 x'_\mu - \lambda_3 \mathcal{P}_\mu}{\gamma + \lambda_1}\,.$$

Строим гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Bigg\{ & \sqrt{\frac{(\tilde{p}x')^2}{x'^2} - \tilde{p}^2 + \frac{(\tilde{p}\mathcal{P})^2}{\mathcal{P}^2}} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\mathcal{P}^2}{\pi^2} + \gamma^2 x'^2} - \frac{(p\mathcal{P})}{\pi} - \gamma^2 x'^2 \Bigg\} d\sigma \end{aligned} \tag{4.33}$$

и переходим к каноническим импульсам, требуя, чтобы $\lambda_{i/\tilde{p}=p} = 0$, тогда выражения (4.32) приводят к гамильтоновым связям (ср. (4.26))

$$\varphi_1 = (p\, x') = 0\,, \quad \varphi_2 = p^2 + \gamma^2\, x'^2 = 0, \quad \varphi_3 = (p\mathcal{P}) - \frac{\mathcal{P}^2}{\pi} = 0\,. \tag{4.34}$$

Выберем теперь систему «центра масс» струны, где ее полный импульс равен $\mathcal{P}^\mu = (\mathcal{P}^0, 0, 0, 0)$, тогда из (4.28) для временной координаты имеем

$$x_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{\pi\gamma}\,\tau + Q/\mathcal{P}_0, \quad x'_0 = 0, \tag{4.35}$$

а из (4.34) с учетом (4.35) следуют связи для пространственных компонент и определение временной компоненты импульса

$$(\mathbf{p}\mathbf{x}') = 0, \quad \mathbf{p}^2 + \gamma^2 \mathbf{x}'^2 = \frac{\mathcal{P}_0^2}{\pi^2}, \quad p_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{\pi}. \tag{4.36}$$

Эта фиксация временных компонент у координаты и импульса приводит гамильтониан (4.33) к виду

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \sqrt{\mathbf{p}^2 - \frac{(\mathbf{p}\mathbf{x}')^2}{\mathbf{x}'^2}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_0^2}{\pi^2} - \gamma^2 \mathbf{x}'^2} - \frac{\mathcal{P}_0^2}{\pi^2} + \gamma^2 \mathbf{x}'^2 \right\} d\sigma,$$

который на связях для пространственных компонент (4.36) опять принимает нулевое значение и ведет к линейным уравнениям в фазовом пространстве [23]

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{p_i - x_i (\mathbf{p}\mathbf{x}')^2/\mathbf{x}'^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}\mathbf{x}')^2/\mathbf{x}'^2}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_0^2}{\pi^2} - \gamma^2 \mathbf{x}'^2} \right\} = \frac{1}{\gamma}\, p_i,$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ -\gamma^2 x_i' \sqrt{\left(\mathbf{p}^2 - \frac{(\mathbf{p}\mathbf{x}')^2}{\mathbf{x}'^2} \right) \Big/ \left(\frac{\mathcal{P}_0^2}{\pi^2} - \gamma^2 \mathbf{x}'^2 \right)} + 2\gamma^2 x_i' \right\} = \gamma x_i''.$$

5. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО МАССИВНОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ С УСЛОВИЕМ ЛОРЕНЦА

Как уже отмечалось, в каноническом методе построения гамильтоновых систем по заданным лагранжевым системам со связями последние не должны содержать производных по времени от координат, которые не могут быть выражены через сопряженные импульсы. Например, в электродинамике калибровочное условие Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Longrightarrow \dot{A}^0 = -\operatorname{div} \mathbf{A} \tag{5.1}$$

не может быть непосредственно перенесено в гамильтонов формализм [6], поскольку лагранжиан электромагнитного поля

$$L = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\, d^3x, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \tag{5.2}$$

не содержит производной по времени от компоненты A^0 и, следовательно, сопряженный к ней импульс равен нулю. Такое же затруднение возникает и для лагранжиана векторного массивного поля в форме Прока [24]. При построении канонического формализма этих полей с условием Лоренца во многих исследованиях, начиная с пионерских работ Дирака, Фока, Подольского [12], а также следующей их методу монографии [25], прибегают к модификации исходной лагранжевой функции, которая, не меняя уравнений движения для этих полей, позволяет обойти затруднение, связанное с обращением в нуль временной компоненты канонического импульса поля (введение в лагранжиан члена, фиксирующего калибровку [26]). Как было видно из предыдущих примеров, метод Березина как раз и состоит в том, чтобы вместо исходного лагранжиана рассматривать обобщенный лагранжиан и обобщенные импульсы, которые все не равны нулю, а затем после построения функции Гамильтона переходить к каноническим импульсам.

Рассмотрим построение этим методом гамильтониана для векторного массивного поля с лагранжианом Прока.

5.1. Массивное векторное поле. Функция Лагранжа свободного векторного поля $U^\mu(x,t)$ с массой [25]

$$L = -\frac{1}{4}\, f_{\mu\nu}\, f^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\, U_\mu^2, \quad f^\mu = \partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu, \tag{5.3}$$

записывается в компонентах четырехвектора $U^\mu = (U_0, \mathbf{U})$ следующим образом:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i>j}^{3}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\left(U_0^2 - \mathbf{U}^2\right),$$

откуда видно, что она не содержит производной по времени от U_0, поэтому сопряженный к U_0 импульс π_0 будет равен нулю. С другой стороны, из уравнений движения

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} + m^2 U^\nu = 0 \tag{5.4}$$

при дифференцировании их по ∂_ν и суммировании по ν с учетом антисимметричности $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ вытекает дополнительное условие (условие Лоренца)

$$\partial_\nu U^\nu = 0 \Longrightarrow \dot{U}^0 = -(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}), \tag{5.5}$$

которое рассматривается как лагранжева связь, приводящая уравнения (5.4) к виду уравнения Клейна–Гордона для каждой компоненты поля

$$(\Box + m^2)\, U^\nu = 0, \quad \Box = \partial_\nu \partial^\nu. \tag{5.6}$$

Продемонстрируем наш алгоритм построения гамильтонова формализма для лагранжевой системы (5.3), (5.5), обобщенная функция Лагранжа которой будет иметь вид

$$\mathcal{L} = L - \lambda(\partial_\mu U^\mu)\,. \tag{5.7}$$

Находим обобщенные импульсы

$$\tilde{\pi}_0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}^0} = \lambda, \quad \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}_i} = \dot{U}_i + \frac{\partial U_0}{\partial x_i}, \tag{5.8}$$

среди которых пространственный импульс $\tilde{\pi}_i$ совпадает с каноническим π_i, а временная компонента обобщенного импульса оказывается равной множителю Лагранжа. Присоединяя теперь к системе (5.8) дополнительное условие (5.5), можем все временные производные от компонент поля выразить через импульсы и пространственные производные поля

$$\dot{U}_0 = -(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}), \quad \dot{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\nabla} U_0. \tag{5.9}$$

Далее, вычисляя функцию Лагранжа (5.7) с использованием (5.9), получаем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{2}\left|\mathrm{rot}\,\mathbf{U}\right|^2 + \frac{m^2}{2}\left(U_0^2 - \mathbf{U}^2\right),$$

где

$$|\mathrm{rot}\,\mathbf{U}|^2 = \sum_{i>j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2,$$

и находим функцию Гамильтона

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\tilde{\pi}^0 \dot{U}_0 + (\boldsymbol{\pi}\dot{\mathbf{U}}) - \mathcal{L} = \\ &= \pi_0(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 - (\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\nabla}U_0) + \frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{U}|^2 + \frac{m^2}{2}\left(\mathbf{U}^2 - U_0^2\right),\end{aligned} \tag{5.10}$$

из которой следуют уравнения движения

$$\begin{gathered}\dot{U}_0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\pi}_0} = -(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}), \qquad \dot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\nabla}U_0, \\ \dot{\tilde{\pi}}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_0} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial U_0/\partial x_i)} = -m^2 U_0 + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}), \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial \mathbf{U}/\partial x_i)} = -m^2\mathbf{U} + (\boldsymbol{\nabla}\tilde{\pi}_0) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Как обычно [25], дифференцируя по времени и исключая из первых двух уравнений импульс $\boldsymbol{\pi}$, получаем для компонент поля уравнения Клейна–Гордона с правой частью, зависящей от $\tilde{\pi}_0$:

$$\ddot{U}_0 - \triangle U_0 + m^2 U_0 = -\dot{\tilde{\pi}}_0, \quad \ddot{\mathbf{U}} - \triangle \mathbf{U} + m^2 \mathbf{U} = -\boldsymbol{\nabla}\tilde{\pi}_0. \tag{5.12}$$

Из второй пары уравнений (5.11) таким же путем, используя равенство

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}) - \triangle\mathbf{U},$$

получаем для пространственного импульса свободное уравнение Клейна–Гордона

$$\ddot{\boldsymbol{\pi}} - \triangle\boldsymbol{\pi} + m^2\boldsymbol{\pi} = 0, \tag{5.13}$$

а для временной компоненты обобщенного импульса уравнение Д'Аламбера

$$\ddot{\tilde{\pi}}_0 - \triangle\tilde{\pi}_0 = 0. \tag{5.14}$$

Теперь, как того требует метод при переходе к каноническому импульсу π_0, полагаем

$$\lambda_{/\tilde{\pi}_0=\pi_0} = \pi_0 = 0, \tag{5.15}$$

тогда из (5.12), (5.13) получаем

$$(\Box + m^2)U_0 = 0, \quad (\Box + m^2)\mathbf{U} = 0, \tag{5.16}$$

а из третьего уравнения (5.11) возникает связь, определяющая временную компоненту поля через дивергенцию пространственного импульса

$$m^2 U_0 = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}), \tag{5.17}$$

которая не противоречит уравнениям (5.13), (5.16) и при дифференцировании по времени с учетом условия Лоренца приводит к равенству

$$-m^2(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}) = (\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{\pi}}),$$

также следующему при $\pi_0 = 0$ из последнего уравнения (5.11). Поэтому (5.17) позволяет непротиворечивым образом исключить U_0 и представить интегральную функцию Гамильтона (используя интегрирование по частям члена $-\int(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\nabla}U_0)d^3x = \int U_0(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi})d^3x$) как положительно определенную величину, выраженную только через пространственные компоненты поля и импульса:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{m^2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi})^2 + |\operatorname{rot}\mathbf{U}|^2 + m^2\mathbf{U}^2\right].$$

Это хорошо известный результат, приведенный, например, в [25] и повторенный на современном уровне с применением метода Дирака с нахождением всех связей в гамильтоновом формализме в [5].

Отметим еще, что уравнения поля (5.12), содержащие в правых частях обобщенный импульс, и уравнение (5.14) для этого импульса непротиворечивы относительно выполнения условия Лоренца (5.5). Действительно, записывая их в четырехмерной форме

$$(\Box + m^2)U^\mu = -\partial^\mu \tilde{\pi}^0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\pi}_0 = 0, \tag{5.18}$$

замечаем, что действие оператора ∂_μ на первое уравнение (5.18) обращает в нуль его левую часть благодаря условию (5.5), а правую — благодаря второму уравнению (5.18).

На роли, которую играет временная компонента обобщенного импульса в гамильтоновом формализме для электромагнитного поля, остановимся в следующем подразделе.

5.2. Электромагнитное поле с внешним током в калибровке Лоренца. Для этой системы имеем обобщенный лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu - \lambda(\partial_\mu A^\mu),$$

где $f^{\mu\nu} = \partial_\mu A^\mu - \partial_\nu A^\mu$; j^μ — внешний сохраняющийся ток $\partial_\mu j^\mu = 0$, вектор-потенциал A^μ подчиняется условию Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Временная компонента обобщенного импульса, как и в предыдущем случае, определяет множитель Лагранжа:

$$\tilde{\pi}_0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = \lambda, \tag{5.19}$$

а пространственные компоненты обобщенного импульса совпадают с каноническими:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\nabla} A_0. \tag{5.20}$$

Из условия Лоренца, а также из (5.19) и (5.20) выражаем все временные производные и λ через импульсы и пространственные производные поля:

$$\dot{A}_0 = -(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}), \quad \lambda = \tilde{\pi}_0, \quad \dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\nabla} A_0.$$

Строим гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \int d^3x \left[-\pi_0 \dot{A}^0 + (\boldsymbol{\pi}\dot{\mathbf{A}}) - \mathcal{L} \right] = \\ = \int d^3x \left[\pi_0(\nabla\mathbf{A}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{A}|^2 + A_0(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}) + j_\mu A^\mu \right], \end{aligned} \tag{5.21}$$

который приводит к уравнениям движения

$$\begin{aligned}
&\dot{A}_0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\pi}_0} = -(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}), \qquad \dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\nabla} A_0,\\
&\dot{\tilde{\pi}}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_0} = j_0 + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}),\\
&\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{A}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial \mathbf{A}/\partial x_i)} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{\nabla}\tilde{\pi}_0 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Из этих уравнений следуют уравнения Д'Аламбера для A^μ и пространственного импульса $\boldsymbol{\pi}$

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}\ddot{A}_0 &= \triangle A_0 + j_0 - \dot{\tilde{\pi}}_0\\ \ddot{\mathbf{A}} &= \triangle \mathbf{A} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{\nabla}\tilde{\pi}_0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Box A^\mu = j^\mu - \partial^\mu \tilde{\pi}_0,\\
&\Box \boldsymbol{\pi} = \dot{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{\nabla} j_0,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

а для $\tilde{\pi}_0$ свободное уравнение Д'Аламбера

$$\Box \tilde{\pi}_0 = 0. \tag{5.24}$$

До выполнения перехода к каноническому временному импульсу, который согласно (5.19) здесь тоже оказывается равным нулю:

$$\lambda_{/\tilde{\pi}_0 = \pi_0} = \pi_0 = 0 \tag{5.25}$$

(при этом все уравнения (5.22), (5.23) переходят в правильные уравнения электродинамики с внешним током и калибровкой Лоренца), опять, как и в случае векторного поля, замечаем, что (5.23), (5.24), содержащие $\tilde{\pi}_0$, представляют непротиворечивую относительно условия Лоренца систему уравнений, поскольку действие оператора ∂_μ на уравнение (5.23)

$$\Box(\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu j^{\,\mu} - \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\pi}_0 = 0$$

обращает в нуль обе его части.

Сравним гамильтониан (5.21), содержащий $\tilde{\pi}_0$ в качестве множителя Лагранжа, с гамильтонианом, полученным в работе Дирака, Фока, Подольского [12], в которой использовался исходный (обобщенный) лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2, \tag{5.26}$$

тогда временная компонента импульса оказывается равной (ср. (5.19))

$$\pi_0 = \partial_\mu A^\mu, \tag{5.27}$$

а гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left[\pi_0(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{2}\pi_0^2 + \frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{A}|^2 + A_0(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}) \right],$$

отличающийся от нашего (5.21) отрицательным вкладом квадрата временной компоненты импульса. Однако здесь благодаря требованию выполнения условия Лоренца из (5.27) следует $\pi_0 = 0$, что эквивалентно нашему условию перехода к каноническому импульсу (5.25). В результате гамильтонианы совпадают, как и уравнения движения, из них следующие. Таким образом, можем заключить, что $\tilde{\pi}_0$ играет согласно (5.19) роль множителя Лагранжа, но при этом подчиняется свободному уравнению (5.24), что не противоречит требованию положить его равным нулю в окончательном результате.

В заключение в качестве иллюстрации роли $\tilde{\pi}_0$ в квантовой теории рассмотрим функцию действия для нашего гамильтониана (5.21)

$$S = \int d^4x \left[(\boldsymbol{\pi}\dot{\mathbf{A}}) - \tilde{\pi}^0 \dot{A}_0 - \tilde{\pi}^0(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}) - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\pi}^2 + |\mathrm{rot}\,\mathbf{A}|^2\right) + (\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\nabla}A_0) - j_\mu A^\mu \right],$$

с помощью которой построим континуальный интеграл для производящего функционала в квантовой теории электромагнитного поля [27]

$$Z(j) = N^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi_\mu \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\boldsymbol{\pi}(\dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\nabla}A_0) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \tilde{\pi}^0(A_0 + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A})) - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\pi}^2 + |\mathrm{rot}\,\mathbf{A}|^2\right) - j_\mu A^\mu \right]\right\},$$

где N — нормирующий множитель.

В показатель экспоненты π_0 входит линейно, и по нему легко выполняется интегрирование, что приводит к функциональной δ-функции

$$\prod_{x,t} \delta(\dot{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}).$$

Интеграл по пространственным импульсам $\boldsymbol{\pi}$ после замены переменных

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\nabla}A_0$$

и интегрирования квадратичного по $\mathbf{p}$ выражения в показателе экспоненты приводит лишь к изменению нормировочного множителя N. В результате получаем хорошо известное выражение для производящего функционала в квантовой электродинамике

$$Z(j) = N_1^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \prod_{x,t} \delta(\partial_\mu A^\mu) \times$$
$$\times \exp\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu) A^\nu - j_\mu A^\mu \right] \right\}.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из стимулов, подтолкнувших автора к написанию этой статьи, являлся приведенный в книге [28] призыв Галуа: «Когда конкуренция, т. е. эгоизм, перестанет процветать в науке, когда вместо того, чтобы посылать в академии запечатанные пакеты, ученые начнут работать сообща, тогда каждый будет стараться опубликовать самые незначительные сведения только потому, что они новы, и говорить — остального я не знаю». Действительно, здесь с эвристической целью, без достаточной математической обоснованности излагается и на большом числе примеров иллюстрируется модифицированный метод Березина построения канонического формализма для лагранжевых систем с заданными, зависящими от скоростей связями. На этих примерах можно было убедиться, что метод, основанный на едином алгоритмическом приеме, приводит к хорошо известным для таких систем гамильтоновым уравнениям движения и первичным гамильтоновым связям. При этом остается открытым вопрос о причине появления в ряде примеров вырожденных гамильтонианов, равных нулю только на поверхности связей, в то время как в каноническом подходе они оказываются равными тождественно нулю по построению. Поэтому требуется более глубокое выяснение связи изложенного подхода с общепринятым методом Дирака, хотя последний, как отмечалось уже во введении, «отказывается работать» для «неканонических» лагранжевых связей, содержащих скорости, таких, например, как условие Лоренца в электродинамике.

На все эти вопросы автор, к сожалению, пока может ответить только словами заключительной фразы приведенного выше призыва Галуа.

Выражаю искреннюю благодарность Л. Д. Фаддееву и В. В. Нестеренко за критическое обсуждение затронутых здесь проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P.* Lectures on Quantum Mechanics. N. Y.: Yeshiva Press, 1964;
Дирак П. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.

2. *Hanson A., Regge T., Teitelboim C.* Constrained Hamiltonian Systems. Rome: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

3. *Фаддеев Л. Д.* Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // ТМФ. 1969. Т. 1, № 1. С. 3–18.

4. *Нестеренко В. В., Червяков А. М.* Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Препринт ОИЯИ Р2-86-323. Дубна, 1986.

5. *Гитман Д. М., Тютин И. В.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1988.

6. *Yaffe L.* Canonical Treatment of «Noncanonical» Gauges for Constrained Hamiltonian Systems // Lett. Nuovo Cim. 1977. V. 18, No. 18. P. 561–564.

7. *Faddeev L. D., Jackiw R.* Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60, No. 17. P. 1692–1694.

8. *Shirzad A., Mojiri M.* Constraint Structure in Modified Faddeev–Jackiw Method. hep-th/011023.

9. *Арнольд В. А.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979;
Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986.

10. *Березин Ф. А.* Гамильтонов формализм в общей задаче Лагранжа // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 3(177). С. 183–184;
Barbashov B. M. On the Canonical Treatment of Lagrangian Constraints. JINR Preprint E2-2001-243. Dubna, 2001; hep-th/0111164.

11. *Вентцель Г.* Введение в квантовую теорию волновых полей. М.: ОГИЗ, 1947;
Бьеркен Д., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. Т. 2.

12. *Dirac P., Fock V., Podolsky B.* On Quantum Electrodynamics // Sov. Phys. 1932. V. 2. P. 468.

13. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. М.: Иностр. лит-ра, 1951;
Гольдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.

14. *Вершик А. М., Фаддеев Л. Д.* Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 3. С. 555–557.

15. *Newman E., Bergman G.* Lagrangians Linear in the «Velocities» // Phys. Rev. 1955. V. 99, No. 2. P. 587–592.

16. *Costa M., Girotti H.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60, No. 17. P. 1771.

17. *Haag R.* Der kanonische Formalismus in entarteten Fällen, Zeitschrift für Angewan // Math. and Mechanik. 1952. Band 32, Heft 7. P. 197–202.

18. *Ogielski A., Townsend P. K.* A Note on the Relativistic Point Particle // Lett. Nuovo Cim. 1979. V. 25, No. 2. P. 43–46.

19. *Barbashov B. M., Nesterenko V. V.* Introduction to the Relativistic String Theory. Singapore: World Scientific, 1990.

20. *Green M., Schwarz J., Witten E.* Superstring Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. V. 1.

21. *Барбашов Б. М., Черников Н. А.* Классическая динамика релятивистской струны. Препринт ОИЯИ Р2-7852. Дубна, 1974.

22. *Rörlich F.* // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 842; Nucl. Phys. B. 1976. V. 112. P. 847.

23. *Барбашов Б. М., Первушин В. Н.* // ТМФ. 2001. Т. 127, № 1. С. 90.

24. *Proca V.* // Journal de Physique. 1936. V. 7. P. 347.

25. *Вентцель Г.* Введение в квантовую теорию волновых полей. М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.

26. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

27. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.

28. *Дальма А.* Эварист Галуа — революционер и математик. М.: Наука, 1984.