УДК 530.12; 531.51

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Н.А.Черников

В первой части работы рассмотрены четыре модели гравитационного поля покоящейся звезды вместе с уравнениями движения ее спутницы — планеты. Первая модель построена Ньютоном. Вторая модель построена Лобачевским. Построение третьей модели начато Эйнштейном, продолжено Шварцшильдом и завершено Фоком. Четвертая модель построена автором данной работы. Геометрия Лобачевского вводится как в пространство скоростей, так и в пространство положений материальной точки. В первой и третьей моделях гравитационное поле звезды подчиняется уравнениям Эйнштейна. Во второй и четвертой моделях гравитационное поле звезды подчиняется новым уравнениям, предложенным автором. Во второй части работы дано простое определение симметричной аффинной связности, доказан ряд теорем и приведено точное решение новых уравнений в теории тяготения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

The Theory of Gravity from the Viewpoint of Lobachevsky Geometry

N.A.Chernikov

In the first part of this paper four models are being discussed, concerning the gravitational field of a star at rest and the equations of motion of the companion planet. The first model has been created by Newton and the second — by Lobachevsky. The third model has been initiated by Einstein, further developed by Schwarzschild and completed by Fock. The fourth model has been created by the author of this paper. The Lobachevsky geometry is introduced in the velocity space and in the usual space as well. In the first and in the third models the gravitational field of the star obeys the Einstein equations. In the second and in the fourth models the gravitational field of the star obeys new equations, proposed by the author. In the second part of the paper a simple definition of a symmetric affine connection is given, also several theorems have been proven and an exact solution of the new equations in the theory of gravity has been given.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

1. ВВЕДЕНИЕ

Здесь рассмотрены четыре модели гравитационного поля покоящейся звезды вместе с уравнениями движения ее спутницы — планеты. Рассмотренные модели различаются значениями $(k,\ c)$ пар констант k и c. Константа k является характерной мерой длины в пространстве положений материальной точки. Константа c является характерной мерой быстроты в пространстве скоростей материальной точки. Каждая из них либо равна, либо меньше бесконечности. Если $k = \infty$, то в пространстве положений действует геометрия Евклида; если $k < \infty$, то в нем действует геометрия Лобачевского. Если $c = \infty$, в пространстве скоростей действует геометрия Евклида; если $c < \infty$, то в нем действует геометрия Лобачевского.

В моделях $(k = \infty,\ c = \infty)$ и $(k = \infty,\ c < \infty)$ гравитационное поле удовлетворяет уравнениям Эйнштейна $R_{mn} = 0$.

В моделях $(k < \infty,\ c = \infty)$ и $(k < \infty,\ c < \infty)$ гравитационное поле удовлетворяет новым уравнениям, предложенным автором.

Модель $(k = \infty,\ c = \infty)$ построена Ньютоном.

Модель $(k < \infty,\ c = \infty)$ построена Лобачевским.

Модель $(k = \infty,\ c < \infty)$ построена Эйнштейном, положившим в ее основу уравнения $R_{mn} = 0$, Шварцшильдом, решившим эти уравнения, и Фоком, настоявшим на выполнении условия гармоничности.

Модель $(k < \infty,\ c < \infty)$ построена автором. Она содержит всю информацию об остальных трех моделях. Если в этой модели положить $c = \infty$, то получится модель Лобачевского, если в ней положить $c = \infty,\ k = \infty$, то получится модель Ньютона. Если же в ней положить $k = \infty$, то получится модель Эйнштейна—Шварцшильда—Фока.

Интересно, что в модели $(k < \infty,\ c < \infty)$ из уравнений гравитационного поля следует равенство нулю вектора ангармоничности, которое в пределе $k \to \infty$ переходит в условие гармоничности для модели $(k = \infty,\ c < \infty)$.

Вообще, можно многое понять, рассматривая теорию тяготения с точки зрения геометрии Лобачевского. Например, можно понять, почему в релятивистской теории тяготения при всех ее успехах находят недостатки. Удается даже понять, как устранять такие недостатки.

Как известно, все успехи релятивистской теории тяготения заложил Эйнштейн, заменив в модели Ньютона гравитационный потенциал U на гравитационную метрику $g_{mn}dx^m dx^n$, а нерелятивистскую гравитационную связность, задаваемую через символ $grad\,U$, — на релятивистскую гравитационную связность, задаваемую символом Кристоффеля для тензора g_{mn}.

Правда, вследствие этого плотность энергии гравитационного поля из-за случившейся по дороге потери фоновой связности оказалась зависящей от выбора координатной карты. Но, не заметив потери, гравитационисты вообразили, что энергия гравитационного поля *нелокализуема*, чем нанесли релятивистской теории гравитации еще больший урон. Отсюда пошли недостатки в теории гравитации.

Казалось бы, потеря была сделана при смягчающих обстоятельствах, поскольку в модели Ньютона фоновая связность примитивна. Однако здесь-то и таилась опасность: в некоторых координатных картах все компоненты примитивной связности равняются нулю, в других же координатных картах ее компоненты нулю не равняются. Надежнее иметь дело с непримитивной связностью: совокупность ее компонент ни в одной координатной карте в нуль не обращается.

Восстановить потерянную в теории тяготения Эйнштейна фоновую связность нам помогает знание модели Лобачевского [1],[2]. Фоновая связность в модели Лобачевского непримитивна и, следовательно, находится за пределами теории Эйнштейна, но можно вернуться в эти пределы, не потеряв при этом восстановленную фоновую связность. Для этого надо устремить к бесконечности характерную для геометрии Лобачевского меру длины, обозначаемую (по предложению Гаусса) через константу k. В этом пределе модель Лобачевского перейдет в модель Ньютона, а восстановленная фоновая связность станет примитивной.

Благодаря введению в фоновую связность геометрии Лобачевского многие трудные вопросы теории гравитации в последние годы прояснились. Например, положительно решился вопрос о выборе гармонических координат. Ситуация здесь оказалась аналогичной той, которую в задачах статистической механики разрешил Боголюбов [3] методом квазисредних. Только роль, которую в методе квазисредних играет магнитное поле, здесь переходит к мере длины k.

В результате трудоемкой работы я предложил следующий рецепт восстановления фоновой связности [4].

Обозначим через Γ^a_{mn} гравитационную связность, а через $\breve{\Gamma}^a_{mn}$ — фоновую связность. Их разность $P^a_{mn} = \breve{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn}$ назовем тензором аффинной деформации.

Затем обозначим через R_{mn} тензор Риччи гравитационной связности, а через $\breve{R}_{mn}$ — тензор Риччи фоновой связности. Их разность обозначим через $S_{mn} = \breve{R}_{mn} - R_{mn}$.

Согласно предложенному мною рецепту, на том месте, где (в псевдоскаляре лагранжиана и в псевдотензоре энергии-импульса гравитационного поля) стоит геометрический объект с компонентами $(-\Gamma^a_{mn})$, называемый по Манову [5] ковариантной аффинной связностью, надо поставить тензор P^a_{mn}, а на том месте, где в уравнениях Эйнштейна стоит тензор $(-R_{mn})$, надо, изменив уравнения Эйнштейна, поставить тензор S_{mn}.

В получающихся таким образом новых уравнениях тяготения

$$S_{mn} - \frac{1}{2}\, S\, g_{mn} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\, M_{mn}\ , \qquad S = g^{mn} S_{mn}\ ,$$

фоновая связность считается заданной, а гравитационная связность — искомой. Предполагаем также, что источник M_{mn} не зависит от выбора фоновой связности, так что сохраняется условие

$$\nabla_s\, g^{sm} M_{mn} = 0\ .$$

В той области, где нет материи, уравнения тяготения принимают вид $S_{mn} = 0$, то есть

$$R_{mn} = \breve{R}_{mn}\ .$$

Тривиальное решение $\Gamma^a_{mn} = \breve{\Gamma}^a_{mn}$ относится к случаю, когда нет гравитационного поля, так что фоновая связность является частным случаем связности гравитационной.

Фоновая связность определяется уравнениями *движения* свободной материальной точки.

Гравитационная же связность определяется уравнениями *падения* материальной точки в гравитационном поле сил (в отсутствие каких-либо других сил).

Условие гармоничности фоновой связности относительно гравитационной метрики записывается в виде $\Phi^a = 0$, где

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn} \ .$$

В своих прежних работах я показал [6], что всякая физическая теория опирается на понятие пространства скоростей, а в этом пространстве возможна только либо геометрия Евклида, либо геометрия Лобачевского. В первом случае теорию называют нерелятивистской, а во втором — релятивистской. Странно, конечно, и даже нелепо, но так называют.

В первом случае нет характерной меры скоростей. Во втором такая мера существует. Она равна скорости света c. Константа c играет такую же роль в пространстве скоростей, какую константа k играет в видимом нами пространстве положений материальной точки.

Нерелятивистский случай будем обозначать через $c = \infty$, а релятивистский — через $c < \infty$.

Гравитационная метрика приводится к виду

$$g_{mn} dx^m dx^n = f^1 f^1 + f^2 f^2 + f^3 f^3 - c^2 \ f^4 f^4,$$

где f^m — линейные дифференциальные формы. В отсутствие гравитационного поля в релятивистском случае полагаем

$$g_{mn} dx^m dx^n = \breve{g}_{mn} dx^m dx^n = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - c^2 \ dt dt \ ,$$

где $h_{\mu\nu}$ не зависят от $x^4 = t$.

Предполагаем, что квадратичная форма $h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ является либо метрикой пространства Евклида (случай $k = \infty$), либо метрикой пространства Лобачевского (случай $k < \infty$).

Компоненты связности Кристоффеля для метрики $h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ обозначим через $h^\alpha_{\mu\nu}$.

Тензор Риччи $r_{\mu\nu}$ для связности $h^\alpha_{\mu\nu}$ равен $r_{\mu\nu} = -k^{-2} \ h_{\mu\nu}$ в случае $k < 0$ и равен нулю ($r_{\mu\nu} = 0$) в случае $k = \infty$.

Интересно, что фоновая связность $\breve{\Gamma}^a_{mn}$ не зависит от скорости света c, то есть относится к Абсолютной геометрии Бойяи в пространстве скоростей. Действительно, геодезические с метрикой $h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - c^2 \ dt dt$ можно записать в виде

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + h^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \ , \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \ .$$

Но в таком же виде можно записать и уравнения движения материальной точки с лагранжианом

$$\frac{1}{2} \ h_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \ .$$

Следовательно, как в релятивистском случае, так и в случае нерелятивистском

$$\breve{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = h^\alpha_{\mu\nu} \ , \breve{\Gamma}^\alpha_{\mu 4} = 0 \ , \breve{\Gamma}^\alpha_{4\nu} = 0 \ , \breve{\Gamma}^\alpha_{44} = 0 \ , \breve{\Gamma}^4_{mn} = 0 \ .$$

Соответственно, и фоновый тензор Риччи как в релятивистском случае, так и в случае нерелятивистском равен

$$\breve{R}_{\mu\nu} = r_{\mu\nu} \ , \ \breve{R}_{4n} = 0 \ , \ \breve{R}_{m4} = 0 \ .$$

Дальше мы ограничимся рассмотрением покоящейся звезды, вокруг которой движется ее единственная спутница — планета. Уравнения движения планеты всегда можно привести к виду, рассмотренному ниже в разделе 9, разумеется, если на нее действуют только гравитационные силы. В качестве координат x^1, x^2 и x^3 выберем расстояние ρ от звезды, полярный угол θ и азимутальный угол ϕ на сфере $\rho = const$; обозначение $x^4 = t$ сохраним. При таком ограничении нам требуется решить уравнения $S_{mn} = 0$.

2. МОДЕЛЬ НЬЮТОНА: СЛУЧАЙ $(k = \infty, \ c = \infty)$

Согласно Ньютону, уравнения движения планеты (то есть ее свободного падения на звезду) таковы:

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} - \rho\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \rho\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + \frac{\gamma M}{\rho^2}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} - 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \ , \qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \ .$$

Здесь γ — постоянная Ньютона, M — масса звезды.

Отсюда непосредственно находится гравитационная связность Γ^a_{mn} в случае Ньютона. При $M = 0$ она совпадает с фоновой связностью. Легко видеть, что в данном случае все компоненты тензора аффинной деформации равны нулю, кроме компоненты

$$P^1_{44} = -\ \frac{\gamma M}{\rho^2} \ ,$$

равной силе, с которой звезда притягивает единичную массу планеты.

Замечательно, что при любом значении константы γM гравитационная связность Ньютона (в точности!) удовлетворяет уравнению $R_{mn} = 0$. Это значит, что важнейшее решение знаменитого уравнения Эйнштейна было предусмотрено и приготовлено Ньютоном. Здесь уместна цитата:

"В наше время берутся расшифровывать сложнейшие коды, не обучившись грамоте. Среди тех, кто любит порассуждать об ошеломляющих трудах Эйнштейна, мало кто представляет себе суть законов Ньютона" [7].

3. МОДЕЛЬ ЛОБАЧЕВСКОГО: СЛУЧАЙ $(k < \infty, \ c = \infty)$

В геометрии Лобачевского длина окружности радиуса ρ равна $2\pi r$, а площадь сферы такого же радиуса равна $4\pi r^2$, где $r = k\sinh\frac{\rho}{k}$. Основываясь на этом, Лобачевский указал [1, с. 159], что в воображаемой Геометрии сила, с которой звезда притягивает единичную массу планеты, должна равняться

$$P^1_{44} = -\,\frac{\gamma M}{r^2}\ .$$

Остальные компоненты тензора аффинной деформации, как и в модели Ньютона, полагаем равными нулю, поскольку сила притяжения направлена к центру звезды.

Чтобы найти фоновую связность в модели Лобачевского, надо составить уравнения движения материальной точки с функцией Лагранжа, равной

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}\,r^2\,\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{dt}\frac{d\phi}{dt}\ .$$

Из этих уравнений будет видно, что все компоненты фоновой связности в рассматриваемых координатах равны нулю, кроме следующих компонент:

$$\begin{array}{ll}
\breve\Gamma^1_{22} = -k\sinh\frac{\rho}{k}\,\cosh\frac{\rho}{k}, & \breve\Gamma^1_{33} = \breve\Gamma^1_{22}\sin^2\theta,\\
\breve\Gamma^2_{12} = k^{-1}\coth\frac{\rho}{k} = \breve\Gamma^2_{21}, & \breve\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
\breve\Gamma^3_{13} = k^{-1}\coth\frac{\rho}{k} = \breve\Gamma^3_{31}, & \breve\Gamma^3_{23} = \cot\theta = \breve\Gamma^3_{32}.
\end{array}$$

Фоновый тензор Риччи в рассматриваемых координатах диагонален. Его диагональные элементы равны

$$\breve R_{11} = -2k^{-2},\ \breve R_{22} = -2k^{-2}r^2,\ \breve R_{33} = -2k^{-2}r^2\sin^2\theta,\ \breve R_{44} = 0.$$

Гравитационная связность Лобачевского при любом значении константы γM удовлетворяет уравнению $R_{mn} = \breve R_{mn}$.

Как и в модели Ньютона, сила притяжения в модели Лобачевского потенциальная. Ее потенциал U равен [2]

$$U = \frac{\gamma M}{k}\Big(1 - \coth\frac{\rho}{k}\Big).$$

Он находится из условий

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{\gamma M}{r^2}\ ,$$

$\lim U = 0$ при $\rho \to \infty$.

4. МОДЕЛЬ ЭЙНШТЕЙНА–ШВАРЦШИЛЬДА–ФОКА: СЛУЧАЙ $(k = \infty,\ c < \infty)$

Создание этой модели начато Эйнштейном, продолжено Шварцшильдом и завершено Фоком, настоявшим на выполнении условия гармоничности. Гравитационная метрика в этой модели равна

$$\Big(\frac{\rho+\alpha}{\rho-\alpha}\Big)d\rho^2 + (\rho+\alpha)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) - \Big(\frac{\rho-\alpha}{\rho+\alpha}\Big)c^2dt^2\ ,$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}$$

есть гравитационный радиус массы M. Она удовлетворяет уравнению Эйнштейна $R_{mn} = 0$. Вывод изложен в [8, с.263].

Интересно, что в случае статической сферически симметричной метрики общего вида

$$g_{mn}dx^m dx^n = F^2 d\rho^2 + H^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - V^2 dt^2$$

следующие компоненты вектора ангармоничности равны нулю:

$$\Phi^2 = 0\ , \quad \Phi^3 = 0\ , \quad \Phi^4 = 0\ .$$

Что до радиальной компоненты Φ^1, то она зависит от фоновой метрики. В рассматриваемом случае она равна

$$\Phi^1 = \frac{1}{VFH^2}\,[\frac{d}{d\rho}(F^{-1}VH^2) - 2FV\rho]\ .$$

В силу условия гармоничности

$$\frac{d}{d\rho}(F^{-1}VH^2) - 2FV\rho = 0\ ,$$

на котором настоял Фок [8, с. 256] и которое отнюдь не следует из уравнений Эйнштейна, радиальная компонента вектора ангармоничности обращается в нуль.

5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ $(k < \infty,\ c < \infty)$

Общий случай был рассмотрен мною к двухсотлетию со дня рождения Н.И.Лобачевского в работе [4]. В ней я сообщил полученное мною решение новых уравнений тяготения

$$R_{11} = -\frac{2}{k^2}\,,\ R_{22} = -2\sinh^2\frac{\rho}{k}\,,\ R_{33} = -2\sinh^2\frac{\rho}{k}\sin^2\theta\,,\ R_{44} = 0\,,$$

$$R_{mn} = 0\,, \qquad m \neq n\,.$$

Согласно [4] в случае $(k < \infty,\ c < \infty)$ гравитационная метрика равна

$$k^2 e^{-2\beta}[\Xi^{-1}d\xi^2 + \sinh^2(\xi+\beta)(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)] - c^2 e^{2\beta}\Xi dt^2\ ,$$

где

$$\Xi = \frac{\sinh(\xi-\beta)}{\sinh(\xi+\beta)}\ , \quad \xi = \frac{\rho}{k}\ , \quad \frac{1}{2}\sinh 2\beta = \frac{\gamma M}{kc^2}\ .$$

Подробный вывод этой метрики см. в разделе 12.

Интересно, что в данном случае вектор ангармоничности Φ^a безусловно равен нулю. Действительно, как и в предыдущем случае, $\Phi^2 = 0\ , \quad \Phi^3 = 0\ , \quad \Phi^4 = 0$. Но в данном случае

$$\Phi^1 = \frac{1}{VFH^2}\,[\frac{d}{d\rho}(F^{-1}VH^2) - FVk\sinh\frac{2\rho}{k}]\ ,$$

а из новых уравнений тяготения в разделе 6 выведено следующее равенство:

$$\Phi^m \breve{R}_{mn} + \frac{1}{2}\, g^{am}(\breve{\nabla}_a \breve{R}_{mn} + \breve{\nabla}_m \breve{R}_{an} - \breve{\nabla}_n \breve{R}_{am}) = 0\ .$$

Согласно этому равенству в данном случае

$$\Phi^1 \breve{R}_{11} = -2k^{-2}\Phi^1 = 0\ ,$$

что при $k < \infty$ эквивалентно равенству $\Phi^1 = 0$, или

$$\frac{d}{d\rho}(F^{-1}VH^2) - FVk\sinh\frac{2\rho}{k} = 0\ .$$

При $k \to \infty$ последнее равенство переходит в условие гармоничности Фока.

6. ТЕОРЕМА О ДВУХ ТЕНЗОРАХ РИЧЧИ И ВЕКТОРЕ АНГАРМОНИЧНОСТИ

Суть этой теоремы состоит в следующем тождестве:

$$\nabla_a g^{am}(S_{mn} - \frac{1}{2}\, S\, g_{mn}) = \tag{1}$$

$$= \Phi^m \breve{R}_{mn} + \frac{1}{2}\, g^{am}(\breve{\nabla}_a \breve{R}_{mn} + \breve{\nabla}_m \breve{R}_{an} - \breve{\nabla}_n \breve{R}_{am})\ .$$

Докажем его.

В силу тождества Эйнштейна

$$\nabla_a g^{am}(R_{mn} - \frac{1}{2}\, R\, g_{mn}) = 0 \tag{2}$$

имеем

$$\nabla_a g^{am}(S_{mn} - \frac{1}{2}\, S g_{mn}) = \nabla_a g^{am} \breve{R}_{mn} - \frac{1}{2}\, \nabla_n g^{bm} \breve{R}_{bm}\ . \tag{3}$$

Перейдем здесь от производных ∇_a к производным $\breve{\nabla}_a$:

$$\nabla_a g^{am} \breve{R}_{mn} = (\breve{\nabla}_a - P_a) g^{am} \breve{R}_{mn} + g^{am} \breve{R}_{ms} P^s_{an}\ ,$$

$$\nabla_n \breve{R}_{bm} = \breve{\nabla}_n \breve{R}_{bm} + P^s_{nb} \breve{R}_{sm} + P^s_{nm} \breve{R}_{bs}\ ,$$

$$\nabla_n g^{bm} \breve{R}_{bm} = g^{bm} \nabla_n \breve{R}_{bm} = g^{bm} \breve{\nabla}_n \breve{R}_{bm} + 2 g^{am} \breve{R}_{ms} P^s_{an}\ .$$

В результате получим

$$\nabla_a g^{am} \breve{R}_{mn} - \frac{1}{2}\, \nabla_n g^{bm} \breve{R}_{bm} = (\breve{\nabla}_a - P_a) g^{am} \breve{R}_{mn} - \frac{1}{2}\, g^{bm} \breve{\nabla}_n \breve{R}_{bm} =$$

$$= \Phi^m \breve{R}_{mn} + \frac{1}{2}\, g^{am}(\breve{\nabla}_a \breve{R}_{mn} + \breve{\nabla}_m \breve{R}_{an} - \breve{\nabla}_n \breve{R}_{am})\ . \tag{4}$$

Сопоставив (3) с (4), получим (1). Тем самым теорема доказана.

7. ТЕОРЕМА О ВЕКТОРЕ АНГАРМОНИЧНОСТИ В СЛУЧАЕ $(k < \infty,\ c < \infty)$

В случае $c < \infty$ новые уравнения тяготения имеют вид

$$S_{mn} - \frac{1}{2}\, S\, g_{mn} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\, M_{mn}\ , \qquad S = g^{mn} S_{mn}\ , \tag{5}$$

причем предполагается, что

$$\nabla_a\, g^{am} M_{mn} = 0\ . \tag{6}$$

Из доказанной выше теоремы следует, что для всякого решения уравнения (5) выполняется равенство

$$\Phi^m \breve{R}_{mn} + \frac{1}{2}\, g^{am} (\breve{\nabla}_a \breve{R}_{mn} + \breve{\nabla}_m \breve{R}_{an} - \breve{\nabla}_n \breve{R}_{am})\ . \tag{7}$$

В случае $k < \infty$ имеем

$$\breve{R}_{\mu\nu} = -k^{-2} h_{\mu\nu}\ , \quad \breve{R}_{\mu 4} = 0\ , \quad \breve{R}_{4\nu} = 0\ , \quad \breve{R}_{44} = 0\ , \tag{8}$$

так что

$$\breve{\nabla}_a \breve{R}_{mn} = 0\ . \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9) следует, что для всякого решения уравнений (5) в случае $(k < \infty,\ c < \infty)$ пространственные компоненты вектора ангармоничности равны нулю:

$$\Phi^1 = 0\ , \quad \Phi^2 = 0\ , \quad \Phi^3 = 0\ . \tag{10}$$

Что до компоненты Φ^4, то в общем случае она равна

$$\Phi^4 = -g^{mn} \Gamma^4_{mn} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{-g} g^{m4})\ , \tag{11}$$

так как $\breve{\Gamma}^4_{mn} = 0$.

8. СКАЛЯРНЫЙ ЛАГРАНЖИАН И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Псевдоскалярный лагранжиан заменяем на скалярный

$$L = g^{mn} (P^a_{mb} P^b_{an} - P^a_{as} P^s_{mn})\ . \tag{12}$$

Псевдотензор энергии-импульса заменяем на тензор

$$E^a_b = \Phi^{mn}_b (P^a_{mn} - P_m \delta^a_n) - L \delta^a_b\ , \tag{13}$$

где

$$P_m = P^n_{mn}\ , \tag{14}$$

$$\Phi^{mn}_b = g^{ms} P^n_{sb} + g^{ns} P^m_{sb} - g^{mn} P_b\ . \tag{15}$$

Ковектор (14) назовем ковектором аффинной деформации. Тензор (15) назовем тензором ангармоничности, так как его свертка равна вектору ангармоничности:

$$\Phi_n^{mn} = \Phi^m \ . \tag{16}$$

Скаляр (12) можно привести к виду

$$L = S + \nabla_a(\Phi^a - P^a) \ , \tag{17}$$

где

$$P^a = g^{am} P_m \ . \tag{18}$$

Тензор энергии-импульса в сумме с удвоенным тензором, входящим в левую часть уравнений (5), составляет следующую дивергенцию:

$$E_b^a + g^{an}(2S_{nb} - Sg_{nb}) = (\breve{\nabla}_n - P_n)(\Phi^{na} - \Phi^a \delta_b^n + U_b^{na}) \ , \tag{19}$$

где

$$U_b^{na} = g^{as} P_{sb}^n - g^{ns} P_{sb}^a + (\Phi^a - P^a)\delta_b^n - (\Phi^n - P^n)\delta_b^a \ . \tag{20}$$

Заметим, что обыкновенно в теории тяготения Эйнштейна злополучный псевдотензор энергии-импульса сворачивают с векторным полем и получают, конечно же, не векторное, а псевдовекторное поле. Нимало не сомневаясь, к получающемуся полю применяют теорему Гаусса, рассчитанную на векторное поле, а такое, незаконное, применение теоремы Гаусса приводит к интегралам, зависящим от нашего произвола в выборе координат, что несовместимо с их предназначением представлять энергию и импульс. Переход же к тензору энергии-импульса страхует нас от такой ошибки.

9. ПРОСТОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \Gamma_{mn}^a \frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = 0 \ , \quad a = 1, ..., N \ , \tag{21}$$

в которой компоненты $\Gamma_{mn}^a = \Gamma_{nm}^a$ зависят от $x^1, ..., x^N$ как угодно, но совсем не зависят от τ. Сразу же заметим, что система (21) инвариантна относительно замены τ на $\hat{\tau} = A\tau + B$, где A и B— константы, удовлетворяющие единственному условию $A \neq 0$.

Можно считать, что переменные $x^1, ..., x^N$ составляют координатную карту x многообразия M, размерность которого равна N Считая так, назовем упорядоченную по правилу (21) совокупность компонент $\Gamma_{mn}^a = \Gamma_{nm}^a$ проекцией из M симметричной аффинной связности на карту x.

Перейдем в системе (21) от переменных $x^1, ..., x^N$ к таким новым переменным $\hat{x}^1, ..., \hat{x}^2$, для которых якобиан перехода не равняется нулю. Для новых переменных получится система уравнений такого же вида, что и (21), а именно:

$$\frac{d^2\hat{x}^a}{d\tau^2} + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \hat{\Gamma}_{mn}^a \frac{d\hat{x}^m}{d\tau}\frac{d\hat{x}^n}{d\tau} = 0 \ , \quad a = 1, ..., N \ , \tag{22}$$

где

$$\hat{\Gamma}^a_{mn} = \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \left(\frac{\partial^2 x^b}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} S^p_m S^q_n \, \Gamma^b_{pq} \right) , \tag{23}$$

$$\hat{S}^a_b = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b} , \quad S^p_m = \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^m} . \tag{24}$$

Действительно, имеем

$$\frac{d\hat{x}^a}{d\tau} = \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \, \frac{dx^b}{d\tau} , \quad \frac{dx^p}{d\tau} = \sum_{m=1}^{N} S^p_m \, \frac{d\hat{x}^m}{d\tau} .$$

Следовательно,

$$\frac{d^2\hat{x}^a}{d\tau^2} = \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \, \frac{d^2 x^b}{d\tau^2} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial^2 \hat{x}^a}{\partial x^p \partial x^q} \frac{dx^p}{d\tau} \frac{dx^q}{d\tau} .$$

Подставляя сюда из (21) значение

$$\frac{d^2 x^b}{d\tau^2} = - \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \Gamma^b_{pq} \frac{dx^p}{d\tau} \frac{dx^q}{d\tau} ,$$

получаем

$$\frac{d^2\hat{x}^a}{d\tau^2} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 \hat{x}^a}{\partial x^p \partial x^q} - \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \, \Gamma^b_{pq} \right) \frac{dx^p}{d\tau} \frac{dx^q}{d\tau} ,$$

то есть

$$\frac{d^2\hat{x}^a}{d\tau^2} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 \hat{x}^a}{\partial x^p \partial x^q} - \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \, \Gamma^b_{pq} \right) \right] S^p_m S^q_n \frac{d\hat{x}^m}{d\tau} \frac{d\hat{x}^n}{d\tau} ,$$

Далее, имеем

$$\sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b S^b_m = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial \hat{x}^m} = \delta^a_m .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n} \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b S^b_m = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial^2 \hat{x}^a}{\partial x^p \partial x^q} S^p_m S^q_n + \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \frac{\partial^2 x^b}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} = 0 ,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial^2 \hat{x}^a}{\partial x^p \partial x^q} S^p_m S^q_n = - \sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \frac{\partial^2 x^b}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n}.$$

Отсюда следуют формулы (22) и (23).

Можно считать, что переменные $\hat{x}^1, ..., \hat{x}^N$ составляют новую координатную карту $\hat{x}$ многообразия M. Упорядоченную по правилу (22) совокупность $\hat{\Gamma}^a_{mn} = \hat{\Gamma}^a_{nm}$ компонент назовем проекцией из многообразия M на карту $\hat{x}$ той же самой связности, которую мы проектировали выше из M на карту x.

Связностью Γ^a_{mn} задается ее тензор кривизны

$$R^a_{mnb} = \frac{\partial}{\partial x^m}\Gamma^a_{nb} - \frac{\partial}{\partial x^n}\Gamma^a_{mb} + \sum_{s=1}^{N}\left(\Gamma^a_{ms}\Gamma^s_{nb} - \Gamma^a_{ns}\Gamma^s_{mb}\right)$$

и свернутый тензор кривизны

$$R_{nb} = R^a_{anb} \ ,$$

называемый тензором Риччи.

10. ПРИМИТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ

Простейшим частным случаем системы (21) является следующая система уравнений:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = 0 \ , \quad a = 1, ..., N \ . \tag{25}$$

Последняя определяет примитивную связность. В карте x компоненты примитивной связности равны нулю. В карте $\hat{x}$ согласно (23) ее компоненты равны

$$\sum_{b=1}^{N} \hat{S}^a_b \ \frac{\partial^2 x^b}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} \ . \tag{26}$$

Тензор кривизны примитивной связности равен нулю.

Наоборот, если тензор кривизны симметричной аффинной связности равен нулю, то эта связность примитивна.

11. ВЕКТОР АНГАРМОНИЧНОСТИ В СЛУЧАЕ ПРИМИТИВНОЙ ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Если в некоторой карте y все компоненты фоновой связности равны нулю, то в соответствии с (26) тензор аффинной деформации равен

$$P^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial y^b} \ \frac{\partial^2 y^b}{\partial x^m \partial x^m} \ - \Gamma^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial y^b} \ \nabla_m \nabla_n y^b \ . \tag{27}$$

Следовательно, вектор ангармоничности в данном случае равен

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial y^b} \ \Box y^b \ , \tag{28}$$

где

$$\Box y^b = g^{mn} \nabla_m \nabla_n y^b \ . \tag{29}$$

При этом надо заметить, что всякая координата на многообразии является скалярной функцией, так что $\nabla_n y^b = \partial_n y^b$, а $\Box y^b$ является дифференциальным параметром Бельтрами второго рода. Он равен

$$\Box y^b = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sqrt{-g} g^{mn} \frac{\partial y^b}{\partial x^n}\right) . \tag{30}$$

так как

$$g^{mn} \Gamma^b_{mn} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sqrt{-g} g^{mb}\right) . \tag{31}$$

Согласно (28), если координаты y^b гармонические, то вектор ангармоничности равен нулю. Наоборот, согласно (28) имеем

$$\Box y^b = \frac{\partial y^b}{\partial x^a} \Phi^a . \tag{32}$$

Поэтому если вектор ангармоничности равен нулю, то координаты y^b гармонические.

12. РЕШЕНИЕ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ (В СЛУЧАЕ $(k < \infty,\ c < \infty)$)

Новые уравнения тяготения, а именно:

$$R_{11} = -\frac{2}{k^2} , \quad R_{22} = -2 \sinh^2 \frac{\rho}{k} ,$$
$$R_{33} = -2 \sinh^2 \frac{\rho}{k} \sin^2 \theta , \quad R_{44} = 0 , \tag{33}$$
$$R_{mn} = 0 , \qquad m \neq n ,$$

будем решать, полагая, что

$$g_{ab}\, dx^a dx^b = F^2 d\rho^2 + H^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - V^2 dt^2 , \tag{34}$$

где функции F, H, V зависят только от ρ.

Так как в случае (34) все недиагональные компоненты тензора R_{mn} равны нулю, а диагональные удовлетворяют условию

$$R_{33} = R_{22}\ \sin^2 \theta , \tag{35}$$

то из всех уравнений (33) нам остается удовлетворить следуюшим трем уравнениям:

$$R_{44} = 0 , \quad R_{11} = -\frac{2}{k^2} , \quad R_{22} = -2 \sinh^2 \frac{\rho}{k} . \tag{36}$$

Далее, в случае (34) имеем

$$R_{44} = \frac{V}{FH^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{H^2}{F} \frac{dV}{d\rho} \right) ,$$

$$\frac{H}{2}\left(R_{11}+V^{-2}F^{2}R_{44}\right)=\frac{dH}{d\rho}\frac{1}{FV}\frac{d(FV)}{d\rho}-\frac{d^{2}H}{d\rho^{2}}\ , \tag{37}$$

$$R_{22}=1-\frac{1}{FV}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{VH}{F}\frac{dH}{d\rho}\right)\ .$$

Согласно (36) и (37) задача свелась к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{H^{2}}{F}\frac{dV}{d\rho}\right)=0\ , \tag{38}$$

$$\frac{d^{2}H}{d\rho^{2}}-\frac{H}{k^{2}}=\frac{dH}{d\rho}\frac{1}{FV}\frac{d(FV)}{d\rho}\ , \tag{39}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{VH}{F}\frac{dH}{d\rho}\right)=FV\cosh\frac{2\rho}{k}\ . \tag{40}$$

Хорошим упражнением для студента является доказать, что для всякого решения системы уравнений (38), (39), (40) выполняется следующее равенство:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{VH^{2}}{F}\right)=FV\sinh\frac{2\rho}{k}\ . \tag{41}$$

Мы будем решать здесь эту систему при условии

$$FV=C=const\ . \tag{42}$$

При этом условии система упрощается и приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{d\rho}\left(H^{2}\,\frac{dV^{2}}{d\rho}\right)=0\ , \tag{43}$$

$$\frac{d^{2}H}{d\rho^{2}}-\frac{H}{k^{2}}=0\ , \tag{44}$$

$$\frac{d^{2}}{d\rho^{2}}\left(V^{2}\,H^{2}\right)=2\,C^{2}\cosh\frac{2\rho}{k}\ . \tag{45}$$

Из (43) и (44) находим, что

$$\frac{dV^{2}}{d\rho}=\frac{B^{2}}{H^{2}}\ , \tag{46}$$

$$H=Pk\sinh\frac{\rho+\hat{\rho}}{k}\ , \tag{47}$$

где B^2, P и $\hat{\rho}$ —- константы интегрирования. Следовательно,

$$V^{2}=N-\frac{B^{2}}{kP^{2}}\coth\frac{\rho+\hat{\rho}}{k}\ , \tag{48}$$

где N — еще одна константа интегрирования.

Из (47) и (48) следует, что

$$V^2\ H^2 = \Big(NP^2 k \sinh\frac{\rho+\hat\rho}{k} - B^2\cosh\frac{\rho+\hat\rho}{k}\Big) k\sinh\frac{\rho+\hat\rho}{k}\ . \tag{49}$$

Дифференцируя эту функцию, находим

$$\frac{d}{d\rho}\Big(V^2\ H^2\Big) = NP^2 k\sinh 2(\xi+\hat\xi) - B^2\cosh 2(\xi+\hat\xi)\ ,$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\Big(V^2\ H^2\Big) = 2NP^2\cosh 2(\xi+\hat\xi) - 2\frac{B^2}{k}\sinh 2(\xi+\hat\xi)\ ,$$

где

$$\xi = \frac{\rho}{k}\ , \quad \hat\xi = \frac{\hat\rho}{k}\ . \tag{50}$$

Сравнивая полученный результат с уравнением (45), заключаем, что константы интегрирования должны удовлетворять следующим условиям:

$$NP^2\cosh 2\hat\xi - \frac{B^2}{k}\sinh 2\hat\xi = C^2\ ,$$

$$NP^2\sinh 2\hat\xi - \frac{B^2}{k}\cosh 2\hat\xi = 0\ .$$

Отсюда находим

$$B^2 = C^2 k\sinh 2\hat\xi\ , \quad NP^2 = C^2\cosh 2\hat\xi\ . \tag{51}$$

Подставляя эти значения в (49), находим

$$V^2\ H^2 = C^2 k^2 \sinh(\xi+\hat\xi)\sinh(\xi-\hat\xi)\ . \tag{52}$$

Теперь, учитывая (42) и (47), находим гравитационную метрику в виде

$$\begin{aligned} &g_{ab}\, dx^a dx^b = \\ &= F^2 d\rho^2 + H^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - V^2 dt^2 = \\ &= P^2 k^2\Big[\Xi^{-1} d\xi^2 + \sinh^2(\xi+\hat\xi)(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\Big] - C^2 P^{-2}\,\Xi dt^2\ , \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$\Xi = \frac{\sinh(\xi-\hat\xi)}{\sinh(\xi+\hat\xi)}\ . \tag{54}$$

На больших расстояниях от источника, то есть при больших значениях ξ, гравитационная метрика (53) должна асимптотически приближаться к фоновой метрике, а именно, к метрике

$$k^2 d\xi^2 + k^2\sinh^2\xi\ (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - c^2 dt^2\ . \tag{55}$$

Отсюда следует, что

$$C = c\ , \quad P = \exp(-\hat\xi)\ . \tag{56}$$

Рассматривая нерелятивистский предел, получаем

$$\sinh 2\hat{\xi} = 2\,\frac{\gamma M}{kc^2}\;. \tag{57}$$

Заметим, что фоновую метрику (55) можно рассматривать как нулевое приближение к гравитационной метрике (53). Первым приближением к метрике (53) является метрика

$$k^2 d\xi^2 + k^2 \sinh^2\xi\;(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (c^2 + 2U)dt^2\;, \tag{58}$$

где

$$U = \frac{\gamma M}{k}\Big(1 - \coth\frac{\rho}{k}\Big)\;. \tag{59}$$

Вторым приближением к метрике (53) является метрика

$$k^2 d\xi^2 + k^2 \sinh^2\xi\;(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - c^2 dt^2 -$$

$$-\frac{2U}{c^2}\Big[k^2 d\xi^2 + k^2 \sinh^2\xi\;(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + c^2 dt^2\Big]\;. \tag{60}$$

Литература

1. Лобачевский Н.И. — Новые начала геометрии с полной теорией параллельных (1835–1838). Полное собрание сочинений. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, т.2, с.159.
2. Черников Н.А. — ЭЧАЯ, 1992, т.23. вып.5. с.1155.
3. Боголюбов Н.Н. — Квазисредние в задачах статистической механики (1961). Избранные труды в трех томах. Киев: Наукова думка, 1971, т.3, с.174.
4. Черников Н.А. — Математика. Изв. вузов, 1994, т.2 (381), с.60.
5. Манов С. — ЭЧАЯ, 1999, т.30, вып.5, с.1211.
6. Черников Н.А. — ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.3, с.772.
7. Честертон Г.К. — Век без психологии. Из сборника «Заметки со стороны о новом Лондоне и еще более новом Нью-Йорке». В кн.: Писатель в газете. М.: Прогресс, 1984, с.254.
8. Фок В.А. — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.

Рукопись поступила 25 февраля 2000 года.