УДК 514.132(091)

К ИСТОРИИ ОТКРЫТИЯ ЛОБАЧЕВСКИМ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н. А. Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Показано, что открытие Лобачевского привело к созданию теории относительности и что геометрия Лобачевского вошла в физику высоких энергий в виде ее теоретического фундамента, а также и в качестве необходимого рабочего инструмента. Посвящается 210-летней годовщине со дня рождения Н. И. Лобачевского.

It has been shown that Lobachevsky's discovery leads to the creation of General Relativity theory and that the Lobachevsky geometry came into high energy physics as its theoretical fundament, as well as a necessary working tool. The review is dedicated to the 210th anniversary of Lobachevsky's birthday.

Бессмертное имя Лобачевского стоит в одном ряду наравне с именами Архимеда и Ньютона. Его именем называется открытая им неевклидова геометрия.

1. КРАТКАЯ БИОГРАФИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО (по материалам книг [1] и [2])

Творец неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде 20 ноября (1 декабря) 1792 г. В 1802 г. был зачислен в Казанскую гимназию. В 1805 г. на базе этой гимназии был открыт Императорский Казанский университет. По окончании гимназии Лобачевский был зачислен туда студентом в феврале 1807 г.

Вся деятельность Лобачевского была связана с Казанским университетом. В 1811 г. он был произведен в магистры, через три года — в адъюнкты. В 1816 г. стал профессором. В 1827 г. был избран ректором Казанского университета. На этот пост Лобачевский избирался шесть раз и занимал его девятнадцать лет подряд.

11(23) ноября 1842 г. Лобачевский был избран по представлению Гаусса в члены-корреспонденты Геттингенского королевского общества наук. Гаусс представил кандидатуру Лобачевского к избранию за открытие неевклидовой геометрии, но не счел благоразумным называть эту причину.

В 1855 г. Московский университет праздновал свершившееся столетие своего существования, и в этот год советом университета единогласно был избран и министром просвещения утвержден в звании почетного члена Императорского Московского университета действительный статский советник Николай Иванович Лобачевский [2, с. 565].

Умер Н. И. Лобачевский в Казани 12(24) февраля 1856 г. Похоронен там же, на Арском кладбище.

Его могила (слава Богу!) сохранилась.

2. ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

7(19) февраля 1826 г. профессор Лобачевский представил в Казанский университет для напечатания за казенный счет свое первое сочинение по неевклидовой геометрии.

Через пять дней на заседании Физико-математического отделения Казанского университета Лобачевский сделал доклад об открытии им неевклидовой геометрии.

Следовательно, 12(24) февраля 1826 г. является днем рождения геометрии Лобачевского. Эта дата отмечена в следующем названии сборника [3]:

Collection des mémoires présentés
à la Société Physico-Mathématique de Kasan
à l'occasion de la célébration du centenaire
de la découverte de la Géométrie Non-Euclidienne
par N. I. Lobatcheffsky
(12/24 Février 1826)

Извлечение из вышеуказанного доклада под названием «О началах геометрии» Лобачевский опубликовал в 1829–1830 гг. в «Казанском Вестнике, издаваемом при Императорском Казанском Университете». Теперь это сочинение опубликовано в полном собрании сочинений [4].

Задержка публикации гениального сочинения произошла из-за того, что доклад Лобачевского оказался непонятным его коллегам, что отнюдь не помешало его избранию ректором Казанского университета. Прерогатива же ректора направлять в печать работы сотрудников дала Лобачевскому возможность поступить с «Извлечением» из своего доклада по собственному усмотрению.

Чуть более длительная задержка привела бы к потере Россией приоритета великого открытия.

Своим открытием новой геометрии Лобачевский достойно отозвался на призыв Ломоносова [5] и всему миру доказал,

Что может собственных Платонов
И быстрых разумом Невтонов
Российская земля рождать.

3. О РЕАКЦИИ СОВРЕМЕННИКОВ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ЕГО ОТКРЫТИЕ

В 1893 г. совершилось празднование Императорским Казанским Университетом столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского. По прочтении всех адресов и телеграмм профессор Ф. М. Суворов прочел следующую речь:

Мм. Гг. и Мм. Г-ни!

Уже полвека минуло с тех пор, как в аудиториях нашего Университета Н. И. Лобачевский излагал свои новые начала геометрии. Насколько ново было это учение, можно судить по тому, что ни один из слушателей его, несмотря на то, что среди них немало было людей даровитых, оставивших по себе память в науке, — ни один из них не решился выступить последователем его учения. Они боялись тех же нареканий ученого мира, с которыми безуспешно боролся Лобачевский.

В первый раз Николай Иванович сообщил свое новое учение в 1826 году, в заседании Физико-математического отделения нашего Университета, и с тех пор неустанно старался пропагандировать его. Кроме изложения своего учения на лекциях, пред аудиторией избранных студентов, он много раз печатал свои труды.

Я опасаюсь утомить ваше внимание, Мм. Гг., перечислением всех изданных сочинений Н. И. Лобачевского по геометрии, но чтобы не обвинили его, что он недостаточно озаботился обнародованием своих новых исследований, я скажу только, что он свои исследования, разработанные с различных точек зрения, опубликовал четыре раза на русском языке, два раза на французском и один раз на немецком языке. Но несмотря на все эти старания Лобачевского познакомить с новыми исследованиями современный ему ученый мир, этот последний не принял его нового учения, и даже его труды подвергались осмеянию; по преданию, о геометрических исследованиях Лобачевского говорилось, что гора мышь родила, иначе говоря, эти исследования современниками Лобачевского считались ничтожными пред тем научным авторитетом, которым пользовался Лобачевский за его труды по другим отраслям математики.

Насмешливые критические отзывы, очевидно, были крайне обидны для великого математика, вполне понимавшего значение своих исследований, что и видно из его примечания к одной из страниц его воображаемой геометрии. Других же статей, в которых бы критик выказал понимание нового учения, при жизни Н. И. Лобачевского не появлялось, — он умер в глубоком сознании, что его учение несправедливо осмеяно, и в неизвестности, скоро ли можно ожидать справедливую оценку его трудов.

Между тем едва прошло и десять лет по смерти Лобачевского, как французский геометр Гуэль обратил внимание ученого мира, что в письмах величайшего математика XIX века Гаусса, современника Лобачевского, к Шумахеру, изданных уже по смерти Лобачевского, встречаются указания на новую теорию параллельных линий, как на весьма важную геометрическую теорию, и Гаусс рекомендует Шумахеру познакомиться с этой теорией по сочинению Лобачевского. Какое наслаждение получил бы Лобачевский, если бы Провидению угодно было продлить его жизнь еще на десять лет!

Эта небольшая заметка Гуэля о значении теории Лобачевского, подкрепленная авторитетом Гаусса, вызвала целый ряд исследований и новых открытий, далеко расширивших умственный горизонт геометров [6, с. 81].

Письма Гаусса, относящиеся к неевклидовой геометрии, в переводе на русский язык первым опубликовал А. В. Летников в своем замечательном сообщении [7].

4. ПРИЗНАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Первый в России акт признания геометрии Лобачевского. Сообщение профессора А. В. Летникова «О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского»

Известно, что стремления разных авторов доказать a priori XI аксиому Евклида или так называемый евклидов постулат породили целую литературу quasi-математических исследований, имеющих предметом установить теорию параллельных линий на строго геометрических началах. Большая часть размышлений, представленных авторами, оказались вполне несостоятельными. Другие ученые, прибегая к посторонним соображениям *аналитического свойства, решали вопрос совсем не в том виде, в котором желательно было видеть его решение, и таким образом не достигали главной цели усовершенствования начал евклидовой геометрии.*

Хотя, с одной стороны, вопрос о параллельных линиях, вследствие своей простоты и доступности, вызывал часто ученические труды, зато с другой, по своему глубоко философскому интересу, он привлекал к себе и первостепенных математиков, как напр. Бертрана (из Женевы), Лежандра и В. Я. Буняковского. Труды первых двух геометров имеют теперь больше историческое значение, так как представленные ими соображения держались некоторое время в учебниках и еще до сих пор можно встретить преподавателей геометрии, дающих так называемую «Бертранову теорему» вместо аксиомы Евклида. Академик Буняковский в одном из своих мемуаров о параллельных линиях[1] *представил ряд замечаний, обнаруживающих недостаточность доказательств, данных Бертраном и Лежандром. После того, в нескольких мемуарах и в особом замечательном сочинении о параллельных линиях*[2] *тот же геометр изложил подробно и проследил критически постепенное развитие и современное состояние этой основной теории геометрии. Наконец, в названном выше сочинении и в других статьях г. Буняковский предложил и собственные исследования по этому важному и вместе любопытному вопросу.*

В настоящей статье мы хотели бы обратить внимание наших читателей на весьма замечательные, но мало известные труды о том же предмете другого нашего соотечественника, бывшего профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. Этот ученый, — математические исследования которого начинают цениться по достоинству в западной Европе, — один из всех геометров, писавших о теории параллельных линий, становится при развитии ее начал на в высшей степени оригинальную точку зрения. Из некоторых мест переписки Гаусса с Шумахером, недавно изданной г. Петерсом, видно, что знаменитый германский геометр еще с 1792 года, в течение с лишком пятидесяти лет, возвращался от времени до времени к размышлениям о теории параллельных линий и, что еще замечательнее, Гаусс относился к этому вопросу именно с той самой точки зрения, на которой остановился Лобачевский.

Судьба исследований профессора Лобачевского довольно поучительна для нас, русских. Его первый опыт о началах геометрии появился еще в 1829 году в Казанском Вестнике; потом, в ученых записках Казанского университета, в журнале Крелля, автор печатал целый ряд мемуаров о том же предмете, которые, по-видимому, привлекали мало внимания его соотечественников. Даже теперь, когда труды Н. И. Лобачевского получили санкцию полного одобрения со стороны одного из величайших геометров нашего времени и когда взгляды русского ученого начинают проникать в лучшие немецкие учебники[3], *— у нас, вероятно, найдется немного преподавателей геометрии, которые знакомы с сущностью исследований казанского профессора.*

В 1840 году Лобачевский напечатал брошюру под заглавием: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin. Брошюра эта привлекла внимание Гаусса, из писем которого к Шумахеру от 1831 года, приводимых ниже, можно увидеть, что

[1] Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des paralleles. 1843 (Mémoires de l'Acad. de St.-Petersburg. VI serie, Tome IV).

[2] Параллельные линии, 1853.

[3] См. Rich. Balzer. Elemente rer Mathematik. 2 Aufl.

великий геометр в то время уже более сорока лет имел истинные основания нового учения, которое он называл неевклидовою геометрией и которое в сущности совпадало с теориею Лобачевского, названною этим ученым воображаемою геометрией. Когда Гаусс познакомился с трудами Лобачевского, то он поступил относительно него так же, как прежде относительно Абеля и Якоби, которые достигли в теории эллиптических функций результатов, ему уже известных, но им неизданных: он отказался от принадлежности ему нового учения и ограничился тем, что выразил свое одобрение труду Лобачевского, находя только название «воображаемой геометрии» не довольно удачно выбранным.

Исследования Лобачевского о параллельных линиях отличаются от разысканий других ученых прежде всего своею целию. Автор вовсе не имеет в виду доказать a priori XI аксиому Евклида; совершенно напротив, он начинает с допущения возможности невстречи перпендикуляра и наклонной или, что одно и то же, — предполагает, что через данную точку всегда можно провести бесчисленное множество прямых, лежащих в одной плоскости с данною прямою и ее не встречающих. Таким образом Лобачевский показывает, что не существует никакой причины утверждать a priori, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть менее двух прямых углов и даже утверждает, что, кроме астрономических наблюдений, мы не имеем другого средства удостовериться в справедливости вычислений обыкновенной геометрии. Такие смелые и оригинальные мысли, развиваемые строго и последовательно, в чисто геометрическом духе, — очевидно имеют право на внимание. Ученый переводчик брошюры Лобачевского г. Hoüel полагает, что, не преувеличивая философского значения этого исследования, можно сказать, что оно бросает совершенно новый свет на основные начала геометрии и открывает новый, еще не разработанный путь разысканиям, которые могут привести к неожиданным открытиям. Во всяком случае труды Лобачевского должны оказать влияние на усовершенствование методов преподавания и уничтожить несбыточную надежду доказать аксиому Евклида a priori, надежду однородную с тою, которую питают изобретатели вечного движения, квадратуры круга и проч.

Мы думаем, что читатели Математического Сборника, и в особенности гг. преподаватели геометрии, прочтут не без интереса предлагаемый здесь перевод брошюры Лобачевского.

Малоизвестность этого труда, печатавшегося по-русски в весьма растянутом виде, со многими посторонними развитиями, в издании, всегда имевшем ограниченный круг читателей, а теперь сделавшемся почти редкостью, — оправдывает появление перевода брошюры, в которой автор излагает вкратце сущность своих изысканий, не обративших, по-видимому, большого внимания нашей ученой публики во время их появления. Притом же брошюра Лобачевского в настоящее время читается на западе: недавно она переведена на французский и итальянский языки.

Мы помещаем сначала извлечение из любопытной переписки Гаусса с Шумахером о параллельных линиях, которое определяет отношение исследований Гаусса к теории Лобачевского. Вслед за письмами мы печатаем перевод упомянутого выше сочинения нашего ученого геометра.

Здесь необходимы следующие комментарии:

1) Процитированный обзор подписан сокращенно: *А. Л–въ*. На этом сообщение не кончается. Дальше на страницах 81–88 следует «Извлечение из переписки Гаусса к

Шумахеру». Затем на страницах 88–120 следует сочинение «Геометрические изыскания о теории параллельных линий» Н. И. Лобачевского.

2) Брошюра Буняковского «Параллельные линии» — очень редкая книга [8]. Ее вводная часть процитирована мной в обзоре [9].

В этой части Буняковский пишет:

Перейдем к рассмотрению различных доказательств в теории параллельных линий... Приемы, о которых будем говорить, считались в свое время удовлетворительными со стороны строгости. Мы увидим, что ни один из них не может выдержать основательного разбора.

Судя по этому сочинению, В. Я. Буняковский (в отличие от академика М. В. Остроградского) не был знаком с трудами Лобачевского. Любопытно, что вслед за сообщением Летникова [7] там же на страницах 121–122 напечатаны «Задачи, предложенные академиком В. Я. Буняковским» вниманию любителей геометрии (поступили 5 мая 1868 г.).

3) Брошюра Лобачевского «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» издана в Берлине у G. Finke в 1840 г.

В рассматриваемом сообщении [7] дан ее отличный перевод на русский язык, однако из-за ограниченности места мы вынуждены отказать себе в удовольствии процитировать его. Альтернативный перевод опубликован в книгах [4] и [10].

4) По сходным причинам мы процитируем здесь в переводе А. В. Летникова только два отрывка из писем Гаусса. Первый — извлечение из письма Гаусса к Шумахеру (1846).

Отзыв Гаусса о геометрии Лобачевского

В последнее время я имел случай перечитать небольшое сочинение Лобачевского под заглавием: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Это сочинение содержит в себе основания геометрии, которая должна бы была существовать и строгое развитие которой представляло бы непрерывную цепь, если бы евклидова геометрия не была истинною. Некто Швейкарт[1] *дал этой геометрии имя «geometrie australe», а Лобачевский — геометрии воображаемой.*

Вы знаете, что уже пятьдесят четыре года (с 1792), как я разделяю те же убеждения, не говоря здесь о некоторых развитиях, которые получили мои идеи об этом предмете впоследствии. Следовательно, я собственно не нашел в сочинении Лобачевского ни одного нового для меня факта; но изложение весьма различно от того, какое я предполагал сделать, и автор трактует о предмете как знаток в истинно-геометрическом духе. Я считал себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, чтение которой не преминет Вам доставить живейшее удовольствие.

Геттинген, 28 ноября 1846 г.

Проективная реализация геометрии Лобачевского

А. Кэли (A. Cayley) (16.8.1821, Ричмонд — 26.1.1895, Кембридж)

В работах [11] Артур Кэли установил, что в области проективного пространства, ограниченной произвольно взятой выпуклой коникой, т. е. поверхностью второго по-

[1] Ф. К. Швейкарт (1780–1859) — профессор юриспруденции прежде в Марбурге, потом в Кенигсберге.

рядка, названной им Абсолютом, реализуется геометрия Лобачевского, причем расстояние $s(x, y)$ между точками x и y пространства Лобачевского в этой реализации задается ангармоническим отношением.

Гауссова планиметрия

К. Ф. Гаусс (C. F. Gauss) (30.4.1777, Брауншвейг — 23.2.1855, Геттинген)

В 1827 г. Гаусс опубликовал работу [12], в которой подспудно изложил теорию линейного элемента ds, задаваемого на двумерном многообразии квадратичной формой

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

от дифференциалов du, dv в координатной карте u, v, причем предполагается, что функции E, G и $EG - F^2$ принимают только положительные значения.

Будем называть эту теорию гауссовой планиметрией.

Производными объектами от линейного элемента ds являются элемент площади

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

и скалярное поле $K = K(u,v)$, вычисляемое по формуле

$$4(EG - FF)^2K = EX + FY + GZ - 2(EG - FF)(\partial_{22}E - 2\partial_{12}F + \partial_{11}G),$$

где

$$X = \partial_2 E\partial_2 G - 2\partial_1 F\partial_2 G + \partial_1 G\partial_1 G,$$

$$Y = \partial_1 E\partial_2 G - \partial_2 E\partial_1 G -$$

$$-2\partial_2 E\partial_2 F + 4\partial_1 F\partial_2 F - 2\partial_1 F\partial_1 G,$$

$$Z = \partial_1 E\partial_1 G - 2\partial_1 E\partial_2 F + \partial_2 E\partial_2 E,$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \partial_{11} = \frac{\partial^2}{\partial u\partial u}, \partial_{12} = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}, \partial_{22} = \frac{\partial^2}{\partial v\partial v}.$$

Скалярное поле K называется гауссовой кривизной линейного элемента ds.

Тривиальным примером гауссовой планиметрии является планиметрия Евклида. В этом случае $K = 0$. Нетривиальным примером является планиметрия Лобачевского. В этом случае гауссова кривизна K тоже постоянна, но отрицательна.

В этих двух примерах линейный элемент задан на простом многообразии. И в том, и в другом случае относительно любого центра можно выбрать полярные координаты $u = r,\ v = \varphi$, в которых $ds^2 = dr^2 + p^2d\varphi^2$, $d\sigma = pdrd\varphi$, причем $\partial_2 p = 0$. Следовательно, длина окружности радиуса r равна $2\pi p(r)$, площадь круга радиуса r равна $2\pi T(r)$, где

$$T(r) = \int\limits_0^r p(u)du.$$

Скалярное же поле $K = K(r)$ вычисляется по формуле

$$Kp = -\frac{d^2p}{dr^2}.$$

Гаусс знал, как зависит p от r, о чем свидетельствует (в переводе Летникова на русский, [7, с. 87]) извлечение из письма Гаусса к Шумахеру (1831):

В неевклидовой геометрии полуокружность круга радиуса r имеет величину

$$\frac{1}{2}\pi k\,(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}),$$

где k есть постоянное, которое нам опыт показывает чрезвычайно большим по сравнению ко всему, что может быть нами измеряемо. В евклидовой геометрии это постоянное делается бесконечностью.

Геттинген, 12 июля 1831 г.

Следовательно, во втором примере

$$p(r) = k\sinh\frac{r}{k},\ T(r) = k^2(\cosh\frac{r}{k} - 1),\ K = -1/k^2.$$

Отклонив пятый постулат Евклида, такие же результаты получили независимо Лобачевский и Бойя. Но это письмо Гаусс написал раньше, чем познакомился с трудами Лобачевского, и раньше, чем получил работу Яноша Бойя «Аппендикс» [13] (см. [10, с. 103; 107]).

Заметим, что Лобачевский полагал $k = 1$. Подобно этому, в современной теоретической физике принято полагать $c = 1$, где c — скорость распространения света в вакууме. Ту же константу Я. Бойя обозначил через i (см. [10, с. 83]) (теперь это представляется неудобным, поскольку в современной математике буквой i принято обозначать $\sqrt{-1}$).

Заметим также, что на это письмо (в переводе Гуэля на французский, Paris, Gauthier-Villars, 1866) сослался в работе [14] Бельтрами (см. [10, с. 192]).

Работа Я. Бойя «Аппендикс» (1832)

Я. Бойя (Johannis Bolyai de Bolya)

(15.1802, Марошвашархей — 27.1.1860, Коложвар)

Говоря о работе «Appendix», известный геометр А. П. Норден в статье [15] отметил, что Янош Бойя «пришел к открытию неевклидовой геометрии независимо от Гаусса и Лобачевского в конце 20-х годов прошлого (теперь уже позапрошлого. — *Н. Ч.*) столетия. Работа выдающегося венгерского геометра носит печать яркого своеобразия и написана в блестящем, хотя и предельно сжатом стиле» и что «открытия Лобачевского и Бойя не получили признания при их жизни» (см. [10, с. 16]). Подробнее об этом написано в книге [16].

Гаусс был высокого мнения о работе Я. Бойя, о чем свидетельствует (см. [10, с. 112]) извлечение из письма Гаусса к Герлингу (1832) — отзыв Гаусса о работе Я. Бойя:

На днях я получил из Венгрии небольшую брошюру о неевклидовой геометрии, в которой я нахожу все мои собственные идеи и результаты, которые изложены с большим изяществом, хотя и в такой форме, которая, вследствие своей концентрации, не без труда будет воспринята всяким, кому чужд предмет. Автор — очень юный австрийский офицер, сын друга моей юности, с которым я в 1798 году часто говорил об этом *предмете, хотя в то время мои идеи были значительно дальше от того развития и зрелости, которое они получили в результате собственных размышлений этого молодого человека. Я считаю этого молодого геометра фон Больаи гением первой величины.*

14 февраля 1832 года.

Параметр пространства Лобачевского, или постоянная Лобачевского k

Как мы видели, через отрицание постулата Евклида о параллельных была введена в науку фундаментальная константа. Она называется параметром пространства Лобачевского или постоянной Лобачевского и обозначается через k. Отметим, что в пространстве Лобачевского из-за наличия такого параметра нет подобных фигур. Год введения постоянной Лобачевского — 1826.

Если из начала прямолинейного луча на параллельную ему прямую опустить перпендикуляр, то угол Π, образованный перпендикуляром и лучом, в планиметрии Лобачевского меньше прямого угла и монотонно убывает в зависимости от высоты h, с которой опущен перпендикуляр. Лобачевский установил для зависимости $\Pi = \Pi(p/k)$ следующую формулу:

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Зависимость $\Pi = \Pi(x)$ угла параллельности Π от поделенной на константу k высоты перпендикуляра называется функцией Лобачевского.

Постоянная Ньютона G

Законы движения планет, выведенные Кеплером из наблюдений Тихо Браге за движением Марса, Ньютон закодировал в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M\vec{r}}{r^3},$$

где M — масса Солнца, G — постоянная Ньютона.

Постоянная Лобачевского k столь же высокого рода, что и фундаментальная постоянная Ньютона G.

Постоянная Планка $\hbar$

М. Планк (M. Planck) (23.4.1858, Киль — 4.10.1947, Геттинген)

Такого же рода фундаментальную постоянную ввел в науку Макс Планк в 1900 г.

Изучив распределение энергии в спектре электромагнитного излучения абсолютно твердого тела, Планк установил следующую формулу излучения:

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\frac{\mu}{e^{\mu}-1}, \qquad \mu = \frac{\hbar\nu}{kT}.$$

Вскоре, в первые десятилетия прошлого века, постоянная Планка $\hbar$ была положена в основу квантовой механики.

Подобно тому как приведенные выше формулы геометрии Лобачевского в пределе $k \to \infty$ переходят в формулы

$$p(r) = r,\ T(r) = r^2/2,\ K = 0$$

геометрии Евклида, в пределе $\hbar \to 0$ формула излучения Планка переходит в формулу излучения Рэлея–Джинса

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT,$$

а формулы квантовой механики Шредингера переходят в формулы классической механики Гамильтона.

Скорость света c

О. Ремер (O. Roemer) (25.9.1644, Орхус — 19.9.1710, Копенгаген)

В 1675 г., наблюдая затмения спутников Юпитера, Ремер определил скорость c распространения света между Юпитером и Землей.

В XIX в. установлена электромагнитная природа света и доказано, что скорость c есть не что иное, как скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Она вошла в качестве фундаментального параметра в уравнения Максвелла. Этот параметр, естественно, вошел и в вышеприведенные формулы электромагнитного излучения.

В 1923 г. А. П. Котельников установил, что в теории относительности скорость света c оказывается постоянной Лобачевского в пространстве скоростей.

Пространство скоростей

А. П. Котельников (1862, Казань — 1944, Москва)

Расстоянием в пространстве скоростей Лобачевского служит быстрота s, с которой обычная скорость v материальной точки связана подстановкой $v/c = \tanh(s/c)$, введенной Бельтрами в работе [14].

Следовательно, если прямолинейный отрезок в пространстве скоростей, длина которого равна s, разделен одной из его точек на два отрезка, длины которых равны s_1 и s_2, то быстрота s равна $s = s_1 + s_2$, а скорость v складывается по закону

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2},$$

принятому в теории относительности.

Мы можем видеть теперь, что как в ньютоновской механике, так и в теории относительности импульс частицы единичной массы покоя, движущейся с быстротой s, равен поделенной на 2π длине окружности радиуса s, а поделенная на 2π площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна кинетической энергии этой частицы.

Отметим, что Абсолют Кэли в проективном пространстве скоростей, введенном Котельниковым в работе [17], (при $c < \infty$) представляет собой пространство скоростей частицы с нулевой массой покоя (например, фотона). В пространстве скоростей частицы с нулевой массой покоя действует конформная геометрия, о которой см. книгу [18].

Проективное отображение пространства Лобачевского в пространство Евклида

Э. Бельтрами (E. Beltrami) (16.11.1835, Кремона — 18.2.1900, Рим)

Работу [14] Бельтрами начал с замечательного введения:

В последнее время математический мир стал заниматься новыми идеями, которым, по-видимому, суждено в случае, если они восторжествуют, глубоко изменить все основы *классической геометрии. Идеи эти появились совсем недавно. Великий Гаусс постигал их с первых своих шагов на научном поприще; хотя ни в одном из его сочинений не заключается явного их изложения, но из писем его мы видим, насколько он был им предан, всегда их развивал, и мы можем удостовериться в его полном согласии с учением Лобачевского.*

В этой работе Бельтрами построил отображение плоскости Лобачевского на плоскость Евклида, проектирующее прямые линии плоскости Лобачевского на евклидовы прямые. Такое отображение называется проективным.

В работе [21] Бельтрами построил проективное отображение пространства Лобачевского в пространство Евклида, при котором все плоскости пространства Лобачевского проективно отображаются на евклидовы плоскости.

Празднование столетия неевклидовой геометрии в Казани

Как сообщил сам Котельников, статья [17] «представляет собой доклад, читанный 29 апр. 1923 г. в Москве Мат. Общ. и затем повторенный 16 сент. 1923 г. в Киеве на публичном соединенном заседании научно-исследовательских кафедр, посвященном принципу относительности, и 25 февраля 1926 г. в Казани на публичном заседании Казанского Физ.-мат. Общ. в день празднования столетия неевклидовой геометрии».

В праздновании столетия неевклидовой геометрии в Казани приняли участие ведущие математики, можно сказать, всего мира. В сборник [3] прислали статьи, посвященные геометрии Лобачевского, следующие авторы: Wilhelm Blachke (Hamburg), Elie Cartan (Paris), Friedrich Engel (Giessen), Gino Fano (Tyrin), Д. Граве (Киев), А. П. Котельников (Москва), Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону), Teikichi Nishiuchi (Kyoto), A. Schoenflies (Frankfurt a. M.), J. A. Schouten (Delft), Friedrich Schur (Breslau), В. Смирнов (Ленинград), П. Шпроков (Казань), E. T. Bell (Seatle), С. Бернштейн (Харьков), Maurice Frechet (Strasbourg), И. М. Гюнтер (Ленинград), J. Hadamard (Paris), A. Kopff (Berlin–Dahlem), Н. Крылов (Киев), S. Lefschetz (Princeton, New Jersey, U.S.A.), Beppo Levi (Parme), W. Serpinski (Warsovie).

Несомненно, что сообщение в газетах об этом событии мирового значения не прошло мимо внимания поэта, жившего интересами страны, и откликом на это событие можно считать статью [19], отрывок из которой приводится ниже.

Из статьи «Как делать стихи?»

В. В. Маяковский (7(19).7.1893, Багдади — 14.4.1930, Москва)

Математик — это человек, который создает, дополняет, развивает математические правила, человек, который вносит новое в математическое знание. Человек, впервые формулировавший, что «Дважды два четыре», — великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками. Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо большие вещи, например, паровоз с паровозом, — все эти люди не математики. Это утверждение отнюдь не умаляет труда человека, складывающего паровозы. Его работа в дни транспортной разрухи может быть в сотни раз ценнее голой арифметической истины. Но не надо отчетность по ремонту паровозов посылать в математическое общество и требовать, чтоб она *рассматривалась наряду с геометрией Лобачевского. Это взбесит плановую комиссию, озадачит математиков, поставит в тупик тарификаторов.*

Так, благодаря поэту, многие школьники из тех, кто с неподдельным интересом учился не только поэзии, но и азам геометрии Евклида, узнавали о существовании загадочной для них геометрии Лобачевского.

Выдающаяся (egregium) теорема Гаусса

Но вернемся к планиметрии Гаусса.

Опасаясь «крика беотийцев»[1] и не желая «потревожить осиное гнездо»[2], Гаусс не стал сообщать об открытии им изложенной выше планиметрии. Но в работе [12] он привлек внимание специалистов к внутренней геометрии обыкновенной поверхности

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v)$$

в пространстве Евклида и привел доказательство установленной им теоремы о том, что мера кривизны поверхности равна скалярному полю K, задаваемому на поверхности квадратичной формой

$$E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эта модель планиметрии Гаусса вполне устроила «евклидовские умы»[3].

В частности, в той же мере моделью планиметрии Лобачевского явилась внутренняя геометрия всякой поверхности постоянной отрицательной кривизны.

В связи с этим нам представляется многозначительным сообщение Нордена о том, что после смерти Гаусса среди его бумаг обнаружена заметка, в которой Гаусс приводит уравнение трактрисы, говоря, что это — «кривая, которая своим вращением производит антипод ($Gegenstück$) сферы».

Дальше Норден продолжает: «Эти слова заставляют считать, что псевдосфера уже была известна Гауссу как поверхность постоянной отрицательной кривизны» [15, с. 17].

Из романа «Братья Карамазовы»

Ф. М. Достоевский

(30.10(11.11).1821, Москва — 28.1(9.2).1881, Санкт-Петербург)

Если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он ее по евклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трех измерениях пространства. Между тем находились и находятся даже и теперь геометры и философы, и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная или, еще обширнее — все бытие было создано лишь по евклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две параллельные линии, которые по Евклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть и сошлись бы где-нибудь в

[1] Выражение Гаусса. См. письмо Гаусса к Герлингу от 25 августа 1818 г. [10, с. 103].

[2] Выражение Гаусса. См. письмо Гаусса к Бесселю от 29 января 1829 г. [10, с. 106].

[3] Выражение, употребленное Иваном Карамазовым в беседе с братом Алексеем. См. ниже отрывок из романа Ф. М. Достоевского [20].

бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно сознаюсь, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум евклидовский, земной, а потому, где нам решать о том, что не от мира сего...

Пусть даже параллельные линии сойдутся и я это сам увижу: увижу и скажу, что сошлись, а все-таки не приму. Вот моя суть, Алеша.

К сведению любителей организовывать международные конференции по неевклидовой геометрии. Основатель Лаборатории теоретической физики в Дубне Николай Николаевич Боголюбов говорил, что множество гениев неупорядочиваемо.

Скажите, например, кто, кроме Бога, смог бы, не вызвав возражений, упорядочить известное нам множество гениев, каждый из которых по-своему открыл неевклидову геометрию? Согласитесь, что никто.

А Бог это сделал много лет тому назад: в текущем году исполняется со дня рождения Гаусса 225 лет, Лобачевского — 210 лет, Бойя — 200 лет.

Упорядочивать множество людей по их возрасту — это прерогатива Господа Бога.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Наталье и Льву Шавохиным за многочисленные беседы по вопросам истории Казани в связи с жизнью Лобачевского и его открытием неевклидовой геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобачевский Н. И.* Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.: Наука, 1976.

2. *Модзалевский Л. Б.* Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.

3. In memoriam N. I. Lobatschevskii (V. II). Казань: Главнаука, 1927.

4. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. Т. 1. С. 185.

5. *Ломоносов М. В.* Избр. произведения. Л.: Сов. писатель, 1990. С. 128.

6. Празднование Императорским Казанским Университетом столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского. Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1894.

7. *Летников А. В.* О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского // Математический сборник, издаваемый Московским математ. об-вом. М.: Типография А. И. Мамонтова, 1868. Т. 3, отд. 2. С. 78.

8. *Буняковский В. Я.* Параллельные линии. Напечатано по распоряжению 1-го Отделения Императорской Академии Наук. 9 сентября 1853 года. Непременный секретарь П. Фус. В типографии Императорской Академии Наук. 1853.

9. *Черников Н. А.* // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23, вып. 5. С. 1186.

10. Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956.

11. *Кэли А.* Шестой мемуар о формах (1859). См. [10], с. 222; Note on Lobatchewsky Imaginary Geometry // Phil. Mag. London 1865. V. (4), 29. P. 231–233; Coll. Papers. V. 5. P. 771–472.

12. *Гаусс К. Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях (1827). См. [10, с. 123].

13. *Больаи Я.* Аппендикс. См. [10, с. 71].

14. *Бельтрами Э.* Опыт интерпретации неевклидовой геометрии (1868). См. [10, с. 180].

15. *Норден А. П.* Открытие Лобачевского и его место в истории новой геометрии. См. [10, с. 9].

16. *Васильев А. В.* Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). М.: Наука, 1992. 230 с.

17. *Котельников А. П.* Принцип относительности и геометрия Лобачевского. См. [10, с. 37].

18. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

19. *Маяковский В. В.* Как делать стихи? // Собр. соч. М.: Правда, 1978. Т. 11. С. 237.

20. *Достоевский Ф. М.* Братья Карамазовы // Собр. соч. М.: ГИХЛ, 1958. Т. 9. С. 294.

21. *Бельтрами Э.* Основы теории пространств постоянной кривизны (1868–1869). См. [10, с. 342].

Получено 4 сентября 2002 г.