

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

А. П. ИСАЕВ

*Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ, Дубна;
физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

В. А. РУБАКОВ

*Институт ядерных исследований РАН, Москва;
физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ
Представления групп Ли и алгебр Ли
Приложения

Дубна 2019

В оформлении обложки использована гравюра
М. К. Эшера «Рисующие руки», созданная им в 1948 г.

Исаев А. П., Рубаков В. А.

Теория групп и симметрий. Представления групп Ли и алгебр Ли. Приложения. — Дубна: ОИЯИ, 2019. — 482 с.

Излагаются основы теории представлений групп Ли и алгебр Ли. Дана классификация конечномерных комплексных представлений простых алгебр Ли на основе теории весов. Подробно рассматривается теория конечномерных представлений групп и алгебр Ли классических серий. Обсуждаются спинорные представления ортогональных алгебр Ли и спинорных групп Ли.

Книга написана при поддержке Российского научного фонда, грант 19-12-00393 (главы 1–3) и грант 19-11-00131 (главы 4–7).

Оглавление

Предисловие	7
1 Обозначения Дирака	9
1.1 Бра и кет вектора. Координатное и импульсное представление	9
1.2 Представление Фока. Голоморфное и антиголоморфное представления	14
1.3 Алгебра Клиффорда и алгебра свободных фермионов	20
1.3.1 Алгебра Клиффорда	20
1.3.2 Представление Фока для алгебры свободных фермионов	24
1.3.3 Алгебра Грассмана	27
2 Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$ и групп Ли $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$	33
2.1 Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$	33
2.2 Дифференциальная реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и представления со старшим весом	39
2.2.1 Реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ с помощью дифференциальных операторов	39
2.2.2 Построение представлений со старшим весом для дифференциальных реализаций $sl(2, \mathbb{C})$	44
2.2.3 Когерентные состояния для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$	48
2.3 Конечномерные представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$	53
2.3.1 Параметризации группы $SU(2)$	53
2.3.2 Конечномерные представления групп $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C})$ и $SO(3)$. Тензорные представления. Функции Вигнера	56
2.3.3 Сферические функции на $S^2 = SU(2)/U(1)$. Операторы Лапласа на $SU(2)$ и $SU(2)/U(1)$	64
2.4 Тензорное произведение представлений группы $SU(2)$ и ряд Клебша - Гордана	71
2.4.1 Разложение Клебша-Гордана	71
2.4.2 Выделение неприводимых представлений со старшим весом в прямом произведении представлений	75
2.4.3 Спиновая цепочка Гейзенберга	82
2.4.4 Метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана	85
2.4.5 Свойства коэффициентов Клебша-Гордана и 3-j символов	90
2.5 Тензорные операторы и 3n-j символы	94
2.5.1 Тензорные операторы и теорема Вигнера-Эккарта	94
2.5.2 Коэффициенты Рака и 3n-j символы	97
2.5.3 6-j символы и ассоциативность произведения представлений	103

2.5.4	Вычисление 6-j символов. Метод Швингера	113
3	Представления простых алгебр Ли. Теория весов	121
3.1	Корневые системы простых алгебр Ли	121
3.1.1	Корневые системы алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$	121
3.1.2	Корневые системы исключительных алгебр Ли	128
3.1.3	Группа Вейля. Дуальные корневые системы	132
3.2	Представления и веса	137
3.3	Решетки весов	147
3.4	Классификация неприводимых конечномерных представлений	152
3.4.1	Представления со старшим весом	152
3.4.2	Фундаментальные веса и классификация представлений алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$	159
3.4.3	Квадратичный оператор Казимира	175
3.5	Формула Вейля для характеров представлений компактных простых групп Ли	178
3.5.1	Знаменатель Вейля и формула Вейля для характеров	178
3.5.2	Приложения. Явные формулы для характеров и размерностей представлений групп $SU(r+1)$, $SO(n)$ и $USp(2r)$	187
4	Конечномерные представления алгебр $sl(N, \mathbb{C})$ и $su(N)$ и групп $SU(N)$ и $SL(N, \mathbb{C})$	195
4.1	Предварительные замечания	195
4.2	Действие группы S_r в пространстве тензорного произведения определяющих представлений	199
4.3	Представления группы перестановок I. Симметризаторы Юнга	206
4.3.1	Таблицы Юнга. Конструкция симметризаторов Юнга	206
4.3.2	Симметризаторы Юнга и идемпотенты. Неприводимые представления группы S_r и их размерности	215
4.4	Конечномерные неприводимые представления групп SU и SL	224
4.4.1	Конечномерные неприводимые представления $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$ в пространствах симметризованных тензоров	224
4.4.2	Размерности неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$	231
4.4.3	Ко-определяющее и присоединенное представления групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$	236
4.4.4	Кварки, $SU(3)$ -симметрия и ее нарушение	239
4.5	Представления группы перестановок II. Теория Юнга–Фробениуса	253
4.5.1	Идемпотенты и неприводимые представления ассоциативных алгебр. Разложения Пирса	255
4.5.2	Взаимная ортогональность и полнота симметризаторов Юнга	267
4.5.3	Дуальность Шура–Вейля	276
4.6	Представления группы перестановок III. Подход Вершика–Окунькова	278
4.6.1	Элементы Юциса–Мёрфи и сплетающие операторы в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$	279
4.6.2	Идемпотенты и спектр операторов Юциса–Мёрфи	283
4.6.3	Раскрашенный граф Юнга и правило ветвления представлений	295

4.6.4	Граф Юнга и индуктивное построение идемпотентов e_α	300
4.6.5	Проекционные операторы и характеры для неприводимых представлений $U(N)$. Симметрические функции	305
4.7	Заключительные замечания. Базис Гельфанда–Цетлина	315
5	Конечномерные представления групп SO, Sp и алгебр Ли so, sp	319
5.1	Тензорные представления групп $O(N, \mathbb{C})$, $SO(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $O(p, q)$, $SO(p, q)$	319
5.1.1	Псевдоортогональная группа $O(p, q)$ и алгебра Ли $so(p, q)$	320
5.1.2	Тензоры. Тензорные представления групп $O(p, q)$	323
5.1.3	Выделение неприводимых представлений групп $O(p, q)$ и $SO(p, q)$ из представления $T^{\otimes r}$	326
5.1.4	Неприводимые тензорные представления ортогональных групп. Осциллирующие таблицы Юнга	334
5.2	Алгебра Брауэра $\mathcal{B}r_n$ и ее представления	339
5.2.1	Алгебра Брауэра $\mathcal{B}r_n$. Элементы Юциса–Мёрфи для алгебры $\mathcal{B}r_n$	339
5.2.2	Сплетающие элементы и идемпотенты в алгебре $\mathcal{B}r_n$. Спектр операторов Юциса–Мёрфи	344
5.2.3	Осциллирующие таблицы Юнга и их вектора содержаний	347
5.2.4	Осциллирующий граф Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_n$	349
5.2.5	Примитивные идемпотенты для алгебры Брауэра	351
5.3	Тензорные представления группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ и ее подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, r - p)$	354
5.4	Спинорные представления алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$	360
5.4.1	Спинорные представления алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$	360
5.4.2	Спинорные представления алгебр Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$	364
6	Группы $Spin(p, q)$ и их представления	367
6.1	Алгебры Клиффорда и их представления	367
6.1.1	Вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$	367
6.1.2	Матричные представления комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ и их вещественных форм $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$	372
6.1.3	Вейлевские представления алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ и $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$	382
6.2	Спинорные группы $Pin(p, q)$ и $Spin(p, q)$	386
6.2.1	Определения спинорных групп $Pin(p, q)$ и $Spin(p, q)$	386
6.2.2	Представления алгебр Клиффорда, алгебр $spin(p, q)$ и групп $Spin(p, q)$	398
6.3	Матрицы сопряжения	400
6.3.1	Матрицы сопряжения \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} для представлений алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и свойства этих матриц	400
6.3.2	Матрицы сопряжения \mathbf{D} , \mathbf{C} , \mathbf{B} и структура групп $Spin(p, q)$	411
6.4	Дираковские, вейлевские и майорановские спиноры в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$	418
6.4.1	Спиноры в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ и тензорные произведения спиноров	418
6.4.2	Зарядовое сопряжение спиноров в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$	424
6.4.3	Алгебра $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$ и спинорная группа $Spin(1, N - 1)$. Спиноры в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$	429

6.4.4	Тождества Фирца для многомерных спиноров	432
7	Решения некоторых задач	441
7.1	Задача 11 раздела 1.3.3	441
7.2	Задача 12 раздела 1.3.3	441
7.3	Задача 27 раздела 2.2.3	442
7.4	Задача 32 раздела 2.3.2	444
7.5	Задача 34 раздела 2.3.3	444
7.6	Задача 35 раздела 2.3.3	445
7.7	Задача 39 раздела 2.3.3	446
7.8	Задача 60 раздела 2.5.2	449
7.9	Задача 71 раздела 2.5.4	450
7.10	Задача 78 раздела 3.3	451
7.11	Задача 84 раздела 3.4.2	454
7.12	Задачи 97, 98 раздела 4.3.1	455
7.13	Задача 105 раздела 4.3.2	457
7.14	Задача 106 раздела 4.3.2	458
7.15	Задача 130 раздела 4.5.1	460
7.16	Задача 142 раздела 4.6.5	460
7.17	Задача 145 раздела 4.6.5	461
7.18	Задача 149 раздела 4.6.5	463
7.19	Задача 152 раздела 5.1.3	464
7.20	Задача 154 раздела 5.1.3	466
7.21	Задача 178 раздела 6.2.1	468
7.22	Задача 180 раздела 6.3.1	469
7.23	Задача 190 раздела 6.3.1	469
7.24	Задача 194 раздела 6.3.2	470
7.25	Задача 198 раздела 6.4.1	470
	Монографии и обзоры общего характера	472
	Литература	475
	Предметный указатель	479

Предисловие

Эта книга является продолжением монографии [1] тех же авторов “Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли”, и в этом смысле она является второй частью монографии. Ссылки на разделы и формулы из первой части [1] помечены латинской цифрой I, например, раздел **I-3.2.3**, формула (I-6.2.37).

Вторая часть в основном посвящена теории представлений групп и алгебр Ли, а также приложениям. Изложение начинается с введения обозначений Дирака, удобство которых продемонстрировано при обсуждении в первой главе алгебр бозонных и фермионных осцилляторов, а также алгебр Грассмана. Во второй главе мы детально рассматриваем представления групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $SU(2)$ и их алгебр Ли. В Главе 3 мы обсуждаем общую теорию конечномерных неприводимых представлений простых алгебр Ли на основе построения представлений со старшим весом. В этой Главе дана классификация всех конечномерных неприводимых представлений алгебр Ли классических серий $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$. После этого в Главе 4 подробно рассматриваются представления линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$ и их компактных вещественных форм $SU(N)$. Конечномерные неприводимые представления групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$ строятся на основе дуальности Шура–Вейля. В рамках этого подхода инвариантные подпространства неприводимых представлений выделяются в тензорном произведении $\mathcal{V}^{\otimes r}$ пространств \mathcal{V} определяющих представлений с помощью действия на $\mathcal{V}^{\otimes r}$ образов специальных элементов (идемпотентов) групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ группы перестановок S_r . При этом особую роль играет теория представлений алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ (теория Шура–Фробениуса, подход Вершика–Окунькова), основанная на комбинаторике диаграмм и таблиц Юнга.

Далее особое внимание уделено многомерным псевдоортогональным группам $O(p, q)$ и $SO(p, q)$, в том числе многомерным группам Лоренца $O(1, N-1)$ и $SO(1, N-1)$, и их алгебрам Ли. Детально обсуждаются накрывающие группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ для псевдоортогональных групп $SO^\uparrow(p, q)$. Группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ называются спинорными группами и в настоящее время активно используются в квантовой теории поля. Построение спинорных групп $\mathbf{Spin}(p, q)$ требует введения алгебр Клиффорда, ассоциированных с пространствами $\mathbb{R}^{p,q}$, и обсуждения представлений этих алгебр.

Во второй части книги, как и в первой части, мы старались доказать, или по крайней мере пояснить, все сделанные утверждения. Подчеркнем однако, что (так же как и в первой части) уровень строгости некоторых доказательств не рассчитан на математически ориентированного читателя. При изложении материала мы прежде всего стремимся достичь его понимания, а не строгого математического обоснования. Разделы, выделенные мелким шрифтом, при первом чтении можно опустить. По ходу изложения мы приводим ссылки на литературу, где тот или иной вопрос освещен более подробно.

В основу книги положены лекции, которые читались на кафедрах теоретической и ядерной физики Международного университета г. Дубны и на кафедрах квантовой теории и физики высоких энергий, квантовой статистики и теории поля, физики частиц и космологии физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Мы благодарны М.А. Васильеву, А.А. Владимирову, С.Э. Деркачеву, Е.А. Иванову, С.О. Кривоносу, С.К. Ландо, С.А. Миронову, А.И. Молеву, О.В. Огиевскому, Г.И. Ольшанскому, А.В. Силантьеву, В.П. Спиридонову, А.О. Сутулину, В.О. Тарасову, С.В. Троицкому, Н.А. Тюрину и С.А. Федоруку, а также многим другим нашим коллегам

из Отдела теоретической физики ИЯИ РАН (Москва) и Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ (Дубна) за многочисленные полезные обсуждения материала, изложенного в этой книге.

Глава 1

Обозначения Дирака

В этой Главе мы введем удобные обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении всей книги для описания базисных векторов и матричных элементов операторов в пространствах представлений групп и алгебр Ли. Эти обозначения были введены П. Дираком [29] и применяются в квантовой механике (например, для описания состояний квантовых систем). Частично мы уже использовали такие обозначения в первой части книги. Здесь мы представим эти обозначения и сформулируем правила работы с ними с общей точки зрения. Преимущества работы с такими обозначениями мы продемонстрируем на примере построения когерентных состояний для алгебры квантовых осцилляторов и алгебры свободных фермионов.

1.1 Бра и кет вектора. Координатное и импульсное представление

Рассмотрим комплексное векторное (конечномерное или бесконечномерное) пространство \mathcal{V} . Вектора в \mathcal{V} будем обозначать как $|\Psi\rangle$, где в качестве Ψ мы можем, вообще говоря, использовать несколько символов, индексов, чисел и так далее, характеризующих данный вектор^{1.1}. Рассмотрим также дуальное к \mathcal{V} комплексное векторное пространство \mathcal{V}^* линейных функционалов на \mathcal{V} . Будем обозначать вектора из \mathcal{V}^* как $\langle\Phi|$. По определению каждому $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^*$ соответствует функция: $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$, которую мы обозначим как

$$\langle\Phi|\Psi\rangle \in \mathbb{C}, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{V}. \quad (1.1.1)$$

Выражение $\langle\Phi|\Psi\rangle$ мы будем называть сверткой двух векторов $|\Psi\rangle$ и $\langle\Phi|$. Свертку (1.1.1) можно рассматривать с дуальной точки зрения, а именно, вектора $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ определяют линейные функционалы на \mathcal{V}^* .

Пусть в \mathcal{V} задан базис $|\alpha\rangle$, где индекс α , нумерующий базисные вектора, обозначает в общем случае набор индексов (мульти-индекс). Индексы, входящие в мульти-индекс α , могут принимать как непрерывные, так и дискретные значения. Базис векторов $\langle\beta|$ в \mathcal{V}^* называется дуальным к базису $|\alpha\rangle \in \mathcal{V}$, если β обозначает тот же

^{1.1}В дальнейшем мы опускаем тонкости, имеющиеся в случае бесконечномерных пространств и связанные, в частности, со сходимостью встречающихся интегралов и рядов; см., впрочем, Определение 1.1.1 и обсуждение около него.

тип мульти-индекса, что и α , и выполняется условие ортонормированности

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (1.1.2)$$

Здесь $\delta_{\alpha, \beta}$ — произведение символов Кронекера и дельта-функций от индексов, входящих в α и β , в зависимости от того, принимают ли эти индексы дискретные или непрерывные значения. Согласно (1.1.2) любые вектора $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ и $\langle \Phi| \in \mathcal{V}^*$ разлагаются по соответствующим базисным векторам следующим образом

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha | \Psi \rangle, \quad \langle \Phi| = \sum_{\alpha} \langle \Phi | \alpha \rangle \langle \alpha|, \quad (1.1.3)$$

где \sum_{α} обозначает многократный интеграл и многократную сумму по непрерывным и дискретным индексам, входящим в мульти-индекс α .

Для любого линейного оператора T в \mathcal{V} мы можем определить оператор T' , который действует в \mathcal{V}^* (и обратно — по оператору в \mathcal{V}^* можно определить оператор в \mathcal{V}), согласно правилу

$$\langle \Phi| (T \cdot |\Psi\rangle) = (\langle \Phi| \cdot T') |\Psi\rangle, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{V}, \quad \forall \langle \Phi| \in \mathcal{V}^*, \quad (1.1.4)$$

при этом удобно считать, что оператор T действует на \mathcal{V} слева, а T' на \mathcal{V}^* справа. В дальнейшем для упрощения формул мы будем использовать одинаковые обозначения для T и T' , и вместо (1.1.4) писать просто $\langle \Phi| T |\Psi\rangle$. Из соотношений (1.1.3) следует, что единичный оператор I , действующий в пространствах \mathcal{V} и \mathcal{V}^* , разлагается по полной системе базисных векторов:

$$I = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha|, \quad (1.1.5)$$

а свертка $\langle \Phi | \Psi \rangle$ представляется в виде

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{\alpha} \langle \Phi | \alpha \rangle \langle \alpha | \Psi \rangle. \quad (1.1.6)$$

Пользуясь формулой (1.1.5) для единичного оператора I , запишем действие линейных операторов T на базисные вектора $|\beta\rangle \in \mathcal{V}$ и на функции $\Psi(\alpha) \equiv \langle \alpha | \Psi \rangle$ следующим образом:

$$T |\beta\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha | T |\beta\rangle, \quad \langle \beta | T |\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle \beta | T |\alpha\rangle \langle \alpha | \Psi \rangle. \quad (1.1.7)$$

Отсюда следует, что матрицы операторов T в базисе $\{|\beta\rangle\}$ составлены из матричных элементов $\langle \beta | T |\alpha\rangle$. Функции $\Psi(\alpha)$ в соответствии с (1.1.3) и (1.1.7) можно рассматривать в качестве координат вектора $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$, причем индекс α — ”нумерует” эти координаты.

Установим взаимнооднозначное соответствие между векторами пространств \mathcal{V} и \mathcal{V}^* , потребовав выполнения следующего свойства для свертки

$$(\langle \Phi | \Psi \rangle)^* = \langle \Psi | \Phi \rangle, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{V}, \quad \forall \langle \Phi| \in \mathcal{V}^*, \quad (1.1.8)$$

где $*$ обозначает комплексное сопряжение. Тогда координаты векторов $\langle \Phi|$ и $|\Phi\rangle$ сопряжены друг другу:

$$(\langle \alpha | \Phi \rangle)^* = \langle \Phi | \alpha \rangle, \quad (1.1.9)$$

а свертка (1.1.6) записывается в виде

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{\alpha} (\langle \alpha | \Phi \rangle)^* \langle \alpha | \Psi \rangle = \sum_{\alpha} \Phi(\alpha)^* \Psi(\alpha). \quad (1.1.10)$$

Из соотношений (1.1.3) и (1.1.9) следует, что вектор $\langle \Phi | \in \mathcal{V}^*$ равен эрмитово сопряженному вектору к $|\Phi\rangle \in \mathcal{V}$, то есть $(|\Phi\rangle)^\dagger = \langle \Phi |$, а свертка

$$\langle \Phi | \Psi \rangle \equiv (|\Phi\rangle)^\dagger |\Psi\rangle \quad (1.1.11)$$

в этом случае интерпретируется как эрмитово скалярное произведение в комплексном пространстве \mathcal{V} (см. определение **I-1.2.9**). Для того, чтобы правая часть (1.1.10) имела смысл, необходимо потребовать квадратичной интегрируемости и суммируемости для функций $\Phi(\alpha) = \langle \alpha | \Phi \rangle$ по переменным α . В пространстве \mathcal{V} с заданным эрмитовым скалярным произведением (1.1.10) естественным образом определяется норма векторов $\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$.

Определение 1.1.1. Если комплексное векторное пространство \mathcal{V} с эрмитовой формой (1.1.10) и нормой $\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$ является полным (то есть, любая последовательность Коши^{1,2} в \mathcal{V} сходится по норме $\|\Psi\|$ к элементу из \mathcal{V}), то пространство \mathcal{V} называется гильбертовым.

В общем случае квадратичная интегрируемость и суммируемость в (1.1.10) понимается в классе обобщенных функций, а пространство \mathcal{V} не обязано быть гильбертовым.

Наконец, пользуясь (1.1.4) и (1.1.11), определим оператор H^\dagger , эрмитово сопряженный к H , следующим образом

$$\langle \Psi | H^\dagger | \Phi \rangle = (\langle \Phi | H | \Psi \rangle)^* \Rightarrow \langle \Phi | \cdot H^\dagger = (H \cdot | \Phi \rangle)^\dagger.$$

Оператор H , для которого выполняются равенства

$$H^\dagger = H \Leftrightarrow \langle \alpha | H | \beta \rangle = (\langle \beta | H | \alpha \rangle)^*,$$

называется эрмитовым.

В квантовой механике состояниям квантовой системы соответствуют вектора из гильбертова пространства \mathcal{V} и связанного с ним эрмитовым сопряжением дуального пространства \mathcal{V}^* , а динамическим наблюдаемым данной системы, таким как координата, импульс, энергия, орбитальный момент и т.д., соответствуют эрмитовы операторы, действующие в \mathcal{V} . Обозначения $\langle \Phi |$ и $|\Psi\rangle$ для векторов из пространств \mathcal{V}^* и \mathcal{V} были введены П. Дираком [29], который назвал их бра- и кет- векторами, соответственно. Названия бра- и кет- происходят от частей "bra" и "ket" английского слова "bracket" (скобка).

В квантовой механике часто бывает удобным выбирать базис в \mathcal{V} специальным образом. А именно, выделим из множества всех наблюдаемых кватомеханической системы полный набор коммутирующих наблюдаемых $H_i = H_i^\dagger$ ($i = 1, 2, \dots$):

^{1,2}Последовательность векторов $\{\Psi_k\}_{k=1}^\infty$ в нормированном пространстве \mathcal{V} называется последовательностью Коши (или фундаментальной последовательностью), если она удовлетворяет условию Коши: для любого сколь угодно малого ϵ существует номер N_ϵ такой, что $\|\Psi_i - \Psi_k\| < \epsilon$ для всех $i, k > N_\epsilon$.

$[H_i, H_j] = 0$. Собственные значения операторов H_i обозначим как α_i , а их собственные вектора как $|\alpha\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \dots\rangle$:

$$H_i |\alpha\rangle = \alpha_i |\alpha\rangle. \quad (1.1.12)$$

- *Задача 1. Доказать, что собственные значения α_i эрмитовых операторов H_i вещественны и $\langle \alpha' | \alpha \rangle \propto \delta_{\alpha', \alpha}$.*

Набор собственных векторов $|\alpha\rangle$ и образует специальный базис (который зависит, конечно, от того, как именно выбран полный набор коммутирующих операторов H_i). Нормировку векторов $|\alpha\rangle$ можно подобрать так, чтобы они удовлетворяли двум условиям: условию ортонормируемости (1.1.2) и условию полноты (1.1.5).

Пример. Координатное и импульсное представление.

Состояния квантовомеханической частицы в \mathbb{R}^d описываются векторами $|\Psi\rangle$ в бесконечномерном комплексном векторном пространстве \mathcal{V} с заданным эрмитовым скалярным произведением (1.1.8). Динамическим переменным частицы соответствуют операторы в \mathcal{V} . Например, координатам частицы в d -мерном пространстве соответствуют эрмитовы операторы \hat{x}_k ($k = 1, \dots, d$), а компонентам ее импульса – эрмитовы операторы \hat{p}_k с коммутационными соотношениями

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_j] = 0 = [\hat{p}_k, \hat{p}_j], \quad [\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i I \delta_{kj}, \quad (1.1.13)$$

где I — единичный оператор в \mathcal{V} . Алгебра с $2d$ образующими $\{\hat{x}_k, \hat{p}_k\}$ и определяющими соотношениями (1.1.13) называется d -мерной алгеброй Гейзенберга. Собственные вектора операторов \hat{x}_k и \hat{p}_k в \mathcal{V} обозначим как $|\vec{x}\rangle$ и $|\vec{p}\rangle$:

$$\hat{x}_k |\vec{x}\rangle = x_k |\vec{x}\rangle, \quad \hat{p}_k |\vec{p}\rangle = p_k |\vec{p}\rangle, \quad (1.1.14)$$

где $x_k, p_k \in \mathbb{R}$ — соответствующие собственные значения. Состояния частицы, которые даются векторами $|\vec{x}\rangle$ и $|\vec{p}\rangle$, называются состояниями с определенными координатами и определенными импульсами, соответственно. Пусть $|\vec{y}\rangle \in \mathcal{V}$ — также собственный вектор всех операторов \hat{x}_k с собственными значениями y_k . Тогда, пользуясь коммутационными соотношениями (1.1.13), мы получаем

$$\hat{x}_k \cdot e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle = (x_k e^{-i x_k \hat{p}_k} + e^{-i x_k \hat{p}_k} \cdot \hat{x}_k) |\vec{y}\rangle = (x_k + y_k) e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle.$$

Таким образом, вектор $e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle$ — собственный вектор операторов \hat{x}_k с собственными значениями $(x_k + y_k)$:

$$|\vec{x} + \vec{y}\rangle = e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle. \quad (1.1.15)$$

Дифференцируя обе части формулы (1.1.15) по x_k и полагая в ней $\vec{y} = \vec{0}$, мы получаем

$$i \partial_k |\vec{x}\rangle = i \partial_k e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{0}\rangle = \hat{p}_k |\vec{x}\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{x} | \hat{p}_k = -i \partial_k \langle \vec{x} |. \quad (1.1.16)$$

где $\partial_k = \partial / \partial x_k$ и второе соотношение выводится из первого с помощью эрмитова сопряжения.

Каждому состоянию $|\Psi\rangle$ соответствует комплексная функция $\langle\vec{x}|\Psi\rangle \equiv \Psi(\vec{x})$, которая представляет собой координатное представление вектора $|\Psi\rangle$ в базисе $|\vec{x}\rangle$ и называется волновой функцией системы. Такое соответствие взаимнооднозначно. Действие операторов \hat{x}_k и \hat{p}_k на произвольное состояние $|\Psi\rangle$ в терминах ее волновой функции $\langle\vec{x}|\Psi\rangle$ записывается следующим образом (см. (1.1.7)):

$$\begin{aligned}\langle\vec{x}|\hat{x}_k|\Psi\rangle &= \int d^d x' \langle\vec{x}|\hat{x}_k|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\Psi\rangle = x_k \langle\vec{x}|\Psi\rangle, \\ \langle\vec{x}|\hat{p}_k|\Psi\rangle &= \int d^d x' \langle\vec{x}|\hat{p}_k|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\Psi\rangle = -i\partial_k \langle\vec{x}|\Psi\rangle,\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

где мы использовали условие полноты (1.1.5):

$$\int d^d x |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| = I,\tag{1.1.18}$$

и учли формулы (1.1.14) и (1.1.16). С точки зрения теории представлений, формулы (1.1.17) определяют дифференциальное координатное представление ρ алгебры Гейзенберга (1.1.13):

$$\rho(\hat{x}_k) = x_k, \quad \rho(\hat{p}_k) = -i\partial_k,\tag{1.1.19}$$

которое действует в пространстве волновых функций $\Psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\Psi\rangle$.

- *Задача 2. Построить дифференциальное импульсное представление алгебры Гейзенберга (1.1.13), которое действует в пространстве волновых функций $\Psi(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\Psi\rangle$.*

Состояние $|\vec{p}\rangle$ частицы с определенным импульсом $\vec{p} = (p_1, \dots, p_d)$ дается волновой функцией $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle$, которая согласно (1.1.14) и (1.1.17) удовлетворяет уравнениям

$$-i\partial_k \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = p_k \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle.$$

Решением этих уравнений являются функции

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp(ip_k x_k),\tag{1.1.20}$$

где нормировочный множитель фиксируется из условия ортонормируемости (1.1.2):

$$\langle\vec{p}'|\vec{p}\rangle = \int d^d x \langle\vec{p}'|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \delta^d(\vec{p} - \vec{p}').\tag{1.1.21}$$

Здесь мы снова воспользовались условием полноты (1.1.18). Для волновой функции в импульсном представлении с учетом формулы (1.1.20), мы получаем соотношение

$$\langle\vec{p}|\Psi\rangle = \int d^d x \langle\vec{p}|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d x \exp(-ip_k x_k) \langle\vec{x}|\Psi\rangle,\tag{1.1.22}$$

которое связывает импульсное и координатное представление волновых функций. Соотношение (1.1.22) является хорошо известным преобразованием Фурье от координатного представления к импульсному.

Еще один пример применения обозначений Дирака мы рассмотрим в следующем разделе.

1.2 Представление Фока. Голоморфное и антиголоморфное представления

Кроме координатного и импульсного представления в квантовой механике часто используют представление Фока и еще два представления, которые называются голоморфным и антиголоморфным. Для формулировки этих представлений вместо \hat{x}_k и \hat{p}_k введем новые динамические переменные:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{p}_k + \hat{x}_k), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\hat{p}_k + \hat{x}_k), \quad (1.2.1)$$

которые, согласно (1.1.13), коммутируют следующим образом

$$[a_k, a_m] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_m^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_m^\dagger] = \delta_{km}. \quad (1.2.2)$$

Эти переменные удобны, например, при рассмотрении d -мерного квантового осциллятора, оператор энергии (гамильтониан) которого равен

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (\hat{p}_k^2 + \hat{x}_k^2) = \sum_{k=1}^d \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (1.2.3)$$

Поэтому в физике алгебра с образующими $\{a_k, a_m^\dagger\}$ и определяющими соотношениями (1.2.2) называется *алгеброй d -мерного квантового осциллятора*.

Пространство \mathcal{F} состояний d -мерного квантового осциллятора, в котором действует алгебра с образующими $\{a_k, a_m^\dagger\}$ и определяющими соотношениями (1.2.2) (в частности оператор энергии $\hat{\mathcal{H}}$) называется пространством Фока, и это пространство строится следующим образом. Вводится нормированный вакуумный вектор $|0\rangle \in \mathcal{F}$ такой, что

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \forall k, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (1.2.4)$$

Соответственно, для сопряженного вектора $\langle 0| = (|0\rangle)^\dagger$ мы имеем $\langle 0| a_k^\dagger = 0$. Далее строятся нормированные вектора

$$|n_1, n_2, \dots, n_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} (a_1^\dagger)^{n_1} \cdot (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_d^\dagger)^{n_d} |0\rangle, \quad (1.2.5)$$

которые образуют базис в пространстве Фока \mathcal{F} , то есть любой вектор из \mathcal{F} представим в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} \psi_{n_1, \dots, n_d} |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle \in \mathcal{F}, \quad \psi_{n_1, \dots, n_d} \in \mathbb{C}.$$

Пространство Фока совпадает с пространством всех состояний квантовомеханической частицы в \mathbb{R}^d : любое ее состояние можно представить в указанном виде. Согласно (1.2.2), (1.2.5) мы получаем

$$\begin{aligned} a_k |n_1, \dots, n_k, \dots, n_d\rangle &= \sqrt{n_k} |n_1, \dots, n_k - 1, \dots, n_d\rangle, \\ a_k^\dagger |n_1, \dots, n_k, \dots, n_d\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_1, \dots, n_k + 1, \dots, n_d\rangle, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

поэтому операторы a_k называются операторами уничтожения, а a_k^\dagger — операторами рождения.

Базисные вектора $\langle n_1, n_2, \dots, n_d |$ в дуальном пространстве \mathcal{F}^* получаются из векторов (1.2.5) эрмитовым сопряжением, а произвольный вектор $\langle \Phi | \in \mathcal{F}^*$ представляется в виде $\langle \Phi | = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} \phi_{n_1, \dots, n_d}^* \langle n_1, \dots, n_d | = (|\Phi\rangle)^\dagger$, где $\phi_{n_1, \dots, n_d} \in \mathbb{C}$.

- *Задача 3. Доказать, что вектора (1.2.5) ортонормированы: $\langle k_1, \dots, k_d | n_1, \dots, n_d \rangle = \delta_{k_1 n_1} \cdots \delta_{k_d n_d}$. Доказать, что относительно скалярного произведения $\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n_1, \dots, n_d} (\phi_{n_1, \dots, n_d}^* \psi_{n_1, \dots, n_d})$ оператор энергии $\hat{\mathcal{H}}$ — эрмитов. Проверить, что вектора (1.2.5) являются собственными для гамильтониана (1.2.3):*

$$\hat{\mathcal{H}} |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle = \left(\sum_{k=1}^d n_k + \frac{1}{2} \right) |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle. \quad (1.2.7)$$

- *Задача 4. Найти волновую функцию $\langle \vec{x} | 0 \rangle$ основного состояния осциллятора (вакуума) в координатном представлении. Доказать, что собственные состояния $|n_1, n_2, \dots, n_d\rangle$ гамильтониана d -мерного осциллятора в координатном представлении имеют вид $\langle \vec{x} | n_1, \dots, n_d \rangle = \left(\prod_{k=1}^d H_{n_k}(x_k) / (2^{n_k} n_k!) \right)^{1/2} \langle \vec{x} | 0 \rangle$, где функции $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ — полиномы Эрмита.*

Условие полноты (1.1.5) для векторов $|n_1, \dots, n_d\rangle$ записывается следующим образом

$$I = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} |n_1, \dots, n_d\rangle \langle n_1, \dots, n_d|, \quad (1.2.8)$$

где I — единичный оператор в пространстве Фока. Отметим, что соотношения (1.2.1) можно обратить и таким образом получить представление Фока алгебры Гейзенберга:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_k + a_k^\dagger), \quad \hat{p}_k = \frac{1}{i\sqrt{2}} (a_k - a_k^\dagger).$$

Перейдем теперь к построению голоморфного и антиголоморфного представлений. Напомним, что в предыдущем примере для построения координатного и импульсного представлений мы использовали полные системы собственных векторов (1.1.14) для операторов координаты \hat{x}_k и импульса \hat{p}_k , соответственно. Для построения антиголоморфного представления вводится полная система собственных векторов для операторов уничтожения a_k :

$$a_k |z\rangle = z_k |z\rangle, \quad (1.2.9)$$

где $|z\rangle := |z_1, z_2, \dots, z_d\rangle$ и z_k — комплексные координаты. Вектора $|z\rangle$ называются когеретными состояниями, и их можно построить следующим образом (здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам k):

$$|z\rangle = \exp(z_k a_k^\dagger) |0\rangle, \quad (1.2.10)$$

где $|0\rangle$ – вакуумное состояние пространства Фока. Соотношение (1.2.9) следует из (1.2.10) с учетом (1.2.2). Пользуясь представлением (1.2.10), мы получаем

$$a_k^\dagger |z\rangle = \frac{\partial}{\partial z_k} |z\rangle. \quad (1.2.11)$$

- **Задача 5.** Найти волновые функции $\langle x_k | z \rangle$ когерентных состояний в координатном представлении.

Для сопряженных векторов $\langle z^* | = (|z\rangle)^\dagger$ мы имеем аналогичные соотношения

$$\langle z^* | = \langle 0 | \exp(z_k^* a_k), \quad \langle z^* | a_k^\dagger = z^* \langle z^* |, \quad \langle z^* | a_k = \frac{\partial}{\partial z^*} \langle z^* |. \quad (1.2.12)$$

Свертка двух когерентных состояний равна:

$$\langle z^* | w \rangle = \langle 0 | \exp(z_k^* a_k) | w \rangle = \langle 0 | \exp(z_k^* w_k) | w \rangle = \exp(z_k^* w_k), \quad (1.2.13)$$

где $z, w \in \mathbb{C}$, и мы воспользовались формулой (1.2.9) и соотношением $\langle 0 | w \rangle = 1$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Отсюда видно, что при $z \neq w$ когерентные состояния $|w\rangle$ и $|z\rangle$ не ортогональны друг другу. Тем не менее, их можно использовать для построения новых представлений в квантовой механике. Ключевым здесь является следующее утверждение.

Утверждение 1.2.1 Условие полноты (1.2.8) для когерентных состояний записывается следующим образом (сравните с (1.1.18))

$$\int d\mu(z, z^*) \exp(-z_k^* z_k) |z\rangle \langle z^* | = I, \quad (1.2.14)$$

где мера $d\mu(z, z^*)$ на \mathbb{C}^d определяется как^{1.3}

$$d\mu(z, z^*) \equiv \frac{1}{\pi^d} \prod_{k=1}^d d^2 z = \frac{1}{\pi^d} \prod_{k=1}^d dx_k dy_k, \quad z_k = x_k + iy_k. \quad (1.2.15)$$

Доказательство. Мы докажем (1.2.14) для одномерного случая $d = 1$, обобщение на случай произвольного конечного числа измерений d – тривиально. Подставим определения когерентных состояний (1.2.10), (1.2.12) в левую часть (1.2.14) и перепишем интеграл в полярных координатах $z = \rho e^{i\phi}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int d^2 z \exp(-|z|^2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(za)^n}{n!} |0\rangle \langle 0| \frac{(z^* a^\dagger)^m}{m!} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\rho e^{-\rho^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} \left(\int_0^\infty d\rho \rho^{2n+1} e^{-\rho^2} \right) |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = I, \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

^{1.3}В математической литературе (см. [16]) мера на \mathbb{C} часто записывается в виде $d^2 z = \frac{i}{2} dz \wedge dz^*$, что эквивалентно нашему определению.

что и требовалось доказать. ■

Теперь, так же как и в случаях координатного и импульсного представлений, вместо вектора состояния $|\Psi\rangle$ можно рассматривать функцию $\langle z^*|\Psi\rangle \equiv \Psi(z^*)$, которая называется волновой функцией в *антиголоморфном представлении*. Действие операторов a_k и a_k^\dagger на произвольное состояние $|\Psi\rangle$ в терминах антиголоморфного представления записывается в виде (см. (1.2.12))

$$\langle z^*|a_k|\Psi\rangle = \frac{\partial}{\partial z_k^*} \langle z^*|\Psi\rangle, \quad \langle z^*|a_k^\dagger|\Psi\rangle = z_k^* \langle z^*|\Psi\rangle, \quad (1.2.17)$$

а скалярное произведение $\langle\Phi|\Psi\rangle$ двух состояний с учетом условия полноты (1.2.14) выглядит в этом представлении следующим образом:

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \langle\Phi|z\rangle \langle z^*|\Psi\rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} (\Phi(z^*))^* \Psi(z^*). \quad (1.2.18)$$

Таким образом, формулы (1.2.17) определяют *антиголоморфное представление* $\bar{\rho}$ алгебры осцилляторов a_k и a_k^\dagger (сравните с (1.1.19))

$$\bar{\rho}(a_k) = \frac{\partial}{\partial z_k^*}, \quad \bar{\rho}(a_k^\dagger) = z_k^*, \quad (1.2.19)$$

действующих в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций $\Psi(z^*) = \langle z^*|\Psi\rangle$ со скалярным произведением (1.2.18).

Если в (1.2.14), (1.2.17) и (1.2.18) сделать замену $z_k^* \leftrightarrow z_k, (\forall k)$, то возникает еще одно полезное представление, которое называется голоморфным. Пространством голоморфного представления ρ алгебры (1.2.2) является гильбертово пространство голоморфных функций $\langle z|\Psi\rangle = \Psi(z) \equiv \Psi(z_1, \dots, z_d)$ со скалярным произведением

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \langle\Phi|z^*\rangle \langle z|\Psi\rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} (\Phi(z))^* \Psi(z), \quad (1.2.20)$$

и реализацией алгебры осцилляторов (1.2.2) в виде

$$\rho(a_k) = \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad \rho(a_k^\dagger) = z_k. \quad (1.2.21)$$

Соответственно, условие полноты (1.2.14) в голоморфном представлении записывается так:

$$\int d\mu(z, z^*) \exp(-z_k^* z_k) |z^*\rangle \langle z| = I, \quad (1.2.22)$$

а базисные вектора (1.2.5) реализуются следующим образом (сравните с формулой (2.2.26))

$$\langle z|n_1, \dots, n_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_d^{n_d}. \quad (1.2.23)$$

Утверждение 1.2.2 Для скалярного произведения (1.2.20) имеет место представление

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \Phi^*(\partial_1, \dots, \partial_d) \cdot \Psi(z)|_{z_1=\dots=z_d=0}, \quad (1.2.24)$$

где $\partial_k = \partial/\partial z_k$. При этом для $\Phi(z) = \sum C_{n_1, \dots, n_d} z_1^{n_1} \dots z_d^{n_d}$ имеем $\Phi^*(\partial_1, \dots, \partial_d) = \sum C_{n_1, \dots, n_d}^* \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}$.

Доказательство. Достаточно доказать тождество (1.2.24) в случае, когда в качестве вектора $\Phi(z) = \langle z|\Phi \rangle$ выбран любой базисный вектор (1.2.23). В этом случае, применяя правило интегрирования по частям, мы имеем

$$\begin{aligned} \langle n_1, \dots, n_d | \Psi \rangle &= \int d\mu(z, z^*) \langle n_1, \dots, n_d | z^* \rangle \langle z | \Psi \rangle e^{-z_k^* z_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) \frac{z_1^{*n_1} \dots z_d^{*n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} \langle z | \Psi \rangle e^{-z_k^* z_k} = \int d\mu(z, z^*) (-1)^{\sum n_k} \langle z | \Psi \rangle \frac{\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} e^{-z_k^* z_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \frac{\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} \langle z | \Psi \rangle = \frac{\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} \Psi(z) \Big|_{z_1 = \dots = z_d = 0}. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Так как любая голоморфная функция $\Phi(z)$ представима в виде ряда по базисным мономам (1.2.23), то из (1.2.25) следует (1.2.24). \blacksquare

Замечание 1. Представление (1.2.24) для скалярного произведения (1.2.20) оказывается чрезвычайно полезным с технической точки зрения. Ниже, в разделах **2.2.2**, **2.4.4** и **2.5.4**, мы будем активно использовать это представление (см. например формулы (2.2.28) и (2.4.86)).

Любой оператор A , действующий в пространстве Фока \mathcal{F} , можно с помощью (1.2.2) записать в нормальной (виковской) форме

$$A = \sum_{\mu, \nu} A_{\mu, \nu} (a_1^\dagger)^{n_1} \cdot (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_d^\dagger)^{n_d} (a_1)^{m_1} \cdot (a_2)^{m_2} \dots (a_d)^{m_d}, \quad (1.2.26)$$

где μ и ν — мультииндексы: $\mu = (m_1, \dots, m_d)$ и $\nu = (n_1, \dots, n_d)$ и $A_{\mu, \nu} \in \mathbb{C}$. Термин “нормальная форма” означает, что в сумме (1.2.26) в каждом слагаемом все операторы уничтожения стоят справа, а рождения слева. Антиголомorphicное представление удобно для определения *виковских символов* операторов A , действующих в \mathcal{F} . Для определения такого символа запишем в антиголомorphicном представлении действие оператора (1.2.26) на некоторый вектор $|\Psi\rangle$:

$$\langle w^* | A | \Psi \rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \langle w^* | A | z \rangle \langle z^* | \Psi \rangle, \quad (1.2.27)$$

где $\langle w^* | A | z \rangle$ — ядро оператора A , которое легко вычисляется с помощью (1.2.9) и (1.2.12):

$$\langle w^* | A | z \rangle = A(w^*, z) e^{w_k^* z_k}, \quad (1.2.28)$$

$$A(w^*, z) = \sum_{\mu, \nu} A_{\mu, \nu} (w_1^*)^{n_1} \cdot (w_2^*)^{n_2} \dots (w_d^*)^{n_d} (z_1)^{m_1} \cdot (z_2)^{m_2} \dots (z_d)^{m_d}.$$

Функция $A(w^*, z)$ называется *виковским (нормальным) символом* оператора A , заданного в нормальной форме (1.2.26). Виковский символ отличается от нормальной формы только тем, что вместо операторов a_i^\dagger и a_j в нем фигурируют комплексные числа w_i^* и z_j , соответственно. Виковские символы полезны в том случае, когда необходимо привести к нормальной форме (1.2.26) произведение двух операторов A_1 и A_2 , каждый из которых записан в нормальной форме.

Утверждение 1.2.3 Пусть $A_1(w^*, z)$ и $A_2(w^*, z)$ — виковские символы операторов A_1 и A_2 , тогда виковский символ оператора $A_1 \cdot A_2$ дается соотношением

$$(A_1 \cdot A_2)(w^*, v) = \int d\mu(z, z^*) e^{-(z_k^* - w_k^*)(z_k - v_k)} A_1(w^*, z) A_2(z^*, v), \quad (1.2.29)$$

где мера $d\mu(z, z^*)$ определена в (1.2.15).

Доказательство. Согласно формуле (1.2.28), которая связывает ядро оператора и его символ, мы имеем

$$\begin{aligned} (A_1 \cdot A_2)(w^*, v) &= \langle w^* | A_1 \cdot A_2 | v \rangle e^{-w_k^* v_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) \langle w^* | A_1 | z \rangle \langle z^* | A_2 | v \rangle e^{-z_k^* z_k - w_k^* v_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) A_1(w^*, z) A_2(z^*, v) e^{w_k^* z_k + z_k^* v_k} e^{-z_k^* z_k - w_k^* v_k}, \end{aligned}$$

что совпадает с (1.2.29). ■

Итак, с помощью (1.2.29) вычисляется виковский символ для $A_1 \cdot A_2$, по которому уже не составляет труда записать оператор $A_1 \cdot A_2$ в нормальной форме.

Замечание 2. Алгебра d -мерного квантового осциллятора (1.2.2) используется для реализации образующих алгебр Ли классических серий $sl(d, \mathbb{C})$, $so(d, \mathbb{C})$ и $sp(2d, \mathbb{C})$. Например, образующие $E_{ij} \in sl(d, \mathbb{C})$ могут быть представлены следующим образом

$$E_{ij} = a_i^\dagger a_j - \frac{\delta_{ij}}{d} \sum_k a_k^\dagger a_k, \quad \sum_k E_{kk} = 0. \quad (1.2.30)$$

Действительно, легко проверить, что коммутационные соотношения операторов E_{ij} , заданных в (1.2.30), совпадают с определяющими соотношениями алгебры $sl(d, \mathbb{C})$ (см. раздел **I-2.2.9** первой части книги)

$$[E_{ij}, E_{km}] = \delta_{jk} E_{im} - \delta_{im} E_{kj}. \quad (1.2.31)$$

Аналогично, для образующих $L_{ij} \in so(d, \mathbb{C})$ и $M_{AB} \in sp(2d, \mathbb{C})$ мы имеем

$$L_{ij} = a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i, \quad M_{AB} = \frac{1}{2} (z_A z_B + z_B z_A), \quad (1.2.32)$$

где $A, B, \dots = 1, 2, \dots, 2d$ и $(z_1, \dots, z_{2d}) = (a_1^\dagger, \dots, a_d^\dagger, a_1, \dots, a_d)$. Коммутационные соотношения операторов (1.2.32) совпадают с определяющими соотношениями алгебр $so(d, \mathbb{C})$ и $sp(2d, \mathbb{C})$ (см. раздел **I-2.2.9** первой части книги)

$$[L_{ij}, L_{k\ell}] = \delta_{jk} L_{i\ell} + \delta_{j\ell} L_{ki} + \delta_{ik} L_{\ell j} + \delta_{i\ell} L_{jk}, \quad (1.2.33)$$

$$[M_{AB}, M_{CD}] = J_{BC}^{-1} M_{AD} + J_{AC}^{-1} M_{BD} + J_{AD}^{-1} M_{CB} + J_{BD}^{-1} M_{CA}, \quad (1.2.34)$$

где $||J_{AC}^{-1}||$ — обратная матрица к матрице симплектической метрики

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} = -J^{-1}, \quad [z_A, z_B] = J_{AB}^{-1}.$$

Реализации (1.2.30) и (1.2.32) называются *представлениями Йордана-Швингера* алгебр Ли $sl(d, \mathbb{C})$, $so(d, \mathbb{C})$ и $sp(d, \mathbb{C})$. Образующие (1.2.30) и (1.2.32) легко записать в голоморфном (1.2.21) или антиголоморфном (1.2.19) представлениях. Например, образующие (1.2.30) алгебры Ли $sl(d, \mathbb{C})$ в голоморфном представлении имеют вид

$$E_{ij} = z_i \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\delta_{ij}}{d} \sum_k z_k \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (1.2.35)$$

Мы будем использовать такое представление ниже в Разделе 2.2.2 при обсуждении представлений со старшим весом для дифференциальной реализации алгебры $sl(2, \mathbb{C})$.

1.3 Алгебра Клиффорда и алгебра свободных фермионов

В данном разделе мы рассмотрим еще один важный пример применения обозначений Дирака. Этот пример будет использоваться нами ниже в разделах 5.4 и 6.1 при построении спинорных представлений алгебры Ли $so(N, \mathbb{C})$ и ее вещественных форм, а также при обсуждении соответствующих спинорных групп Ли.

Материал этого и предыдущего разделов в несколько ином виде изложен также в книгах [15], [14] и [16].

1.3.1 Алгебра Клиффорда

Определение 1.3.1 Ассоциативная алгебра $\mathcal{C}\ell_N$ над полем комплексных чисел \mathbb{C} с единичным элементом I и образующими Γ_m ($m = 1, 2, \dots, N$), которые удовлетворяют определяющим соотношениям

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\delta_{mn} I, \quad (1.3.1)$$

называется комплексной *алгеброй Клиффорда*^{1.4}.

При любой перестановке образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_N$ определяющие соотношения (1.3.1) не меняются, поэтому порядок образующих в алгебре $\mathcal{C}\ell_N$ может быть выбран произвольным.

Комплексная алгебра $\mathcal{C}\ell_N$ имеет несколько неэквивалентных вещественных форм $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (где $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $p+q = N$), то есть вещественных алгебр с набором образующих Γ_m ($m = 1, \dots, N$), удовлетворяющих определяющим соотношениям

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\eta_{mn} I, \quad \|\eta_{mn}\| = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q), \quad (1.3.2)$$

где η_{mn} — метрика (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Комплексификации вещественных алгебр $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ очевидно изоморфны $\mathcal{C}\ell_N$. Мы будем обсуждать вещественные формы $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ алгебры Клиффорда подробнее, а также использовать их, ниже в Главе 6.

^{1.4}Более общее определение алгебр Клиффорда будет дано в разделе 6.1.1

Утверждение 1.3.1 Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ с конечным числом N образующих конечномерна и ее комплексная размерность равна

$$\dim(\mathcal{C}\ell_N) = 2^N . \quad (1.3.3)$$

Доказательство. Элементами алгебры $\mathcal{C}\ell_N$ являются линейные комбинации мономов $\Gamma_{m_1} \cdot \Gamma_{m_2} \cdots \Gamma_{m_k}$. Каждый такой моном можно разложить в сумму симметризованных и антисимметризованных (по парам индексов из набора $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$) комбинаций таких мономов. Согласно (1.3.1) даже частично симметризованные комбинации произведений образующих Γ_m будут упрощаться и сводиться к мономам степени $(k - 2)$ и меньше. Поэтому базис алгебры $\mathcal{C}\ell_N$ состоит из единичного элемента I и всевозможных **полностью антисимметризованных** произведений образующих Γ_m :

$$\Gamma_{[m_1 \dots m_k]} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{p(\sigma)} \Gamma_{\sigma(m_1)} \cdot \Gamma_{\sigma(m_2)} \cdots \Gamma_{\sigma(m_k)} \quad (k = 1, \dots, N) , \quad (1.3.4)$$

где суммирование идет по всем перестановкам $\sigma \in S_k$ индексов $\{m_1, \dots, m_k\}$ и $p(\sigma)$ обозначает четность перестановки σ . Отметим, что набор (1.3.4) при $k = 1$ содержит все образующие Γ_m алгебры $\mathcal{C}\ell_N$, а в силу антисимметрии элементов $\Gamma_{[m_1 \dots m_k]}$ по перестановкам индексов $\{m_1, \dots, m_k\}$ мы имеем $\Gamma_{[m_1 \dots m_k]} = 0$, если $k > N$. Поэтому, число базисных элементов $\Gamma_{[m_1 \dots m_k]}$ ограничено и алгебра $\mathcal{C}\ell_N$ конечномерна. Используя определяющие соотношения (1.3.1), набор базисных элементов (1.3.4) можно свести к набору базисных элементов вида

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \{I, \Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2}, \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2} \Gamma_{m_3}, \dots, \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_N\} \\ &\equiv \{I, \Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_1 m_2}, \Gamma_{m_1 m_2 m_3}, \dots, \Gamma_{12 \dots N}\} , \\ \Gamma_{m_1 m_2 \dots m_k} &\equiv \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2} \cdots \Gamma_{m_k} , \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

где в каждом мономе $\Gamma_{m_1 m_2 \dots m_k}$ произведение образующих Γ_{m_i} упорядочено *лексикографически*:

$$1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq N .$$

Найдем число независимых образующих (1.3.5) и, тем самым вычислим размерность алгебры $\mathcal{C}\ell_N$ с определяющими соотношениями (1.3.1). Число мономов типа $\Gamma_{m_1 \dots m_k}$ в (1.3.5), имеющих степень k по образующим Γ_m , равно числу сочетаний

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} ,$$

поэтому полная размерность алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ равна

$$\dim(\mathcal{C}\ell_N) = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k!(N-k)!} = (1+1)^N = 2^N , \quad (1.3.6)$$

что совпадает с (1.3.3). ■

Рассмотрим последний, самый длинный, базисный элемент в (1.3.5), который записывается либо как упорядоченное произведение всех образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_N$, либо как антисимметризованное произведение этих образующих:

$$\Gamma_{1 \dots N} = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_N = \frac{1}{N!} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \Gamma_{i_1} \cdots \Gamma_{i_N} , \quad (1.3.7)$$

где мы использовали полностью антисимметричный тензор (см. раздел **I-1.2.2** первой части книги):

$$\varepsilon_{\dots i_k \dots i_\ell \dots} = -\varepsilon_{\dots i_\ell \dots i_k \dots}, \quad \varepsilon_{12\dots N} = +1. \quad (1.3.8)$$

Элемент (1.3.7), согласно (1.3.1), удовлетворяет тождеству

$$(\Gamma_{1\dots N})^2 = (-1)^{N(N-1)/2} (\Gamma_N \cdots \Gamma_2 \cdot \Gamma_1) (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_N) = (-1)^\nu I, \quad (1.3.9)$$

где $\nu = \left[\frac{N}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{N}{2}$, то есть число ν — целое неотрицательное и $N = 2\nu, 2\nu + 1$. Определим нормированный элемент

$$\Gamma_{N+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \Gamma_{1\dots N} = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_N \in \mathcal{Cl}_N, \quad (1.3.10)$$

такой, что

$$\Gamma_{N+1}^2 = I. \quad (1.3.11)$$

Отметим, что элемент (1.3.10) определяется с точностью до знака $\Gamma_{N+1} \rightarrow -\Gamma_{N+1}$.

Рассмотрим теперь два случая.

1. Число образующих алгебры \mathcal{Cl}_N — чётно: $N = 2\nu$. Тогда в силу (1.3.1) мы имеем

$$\Gamma_{N+1} \cdot \Gamma_k = -\Gamma_k \cdot \Gamma_{N+1} \quad (\forall k = 1, \dots, N).$$

Поэтому, с учетом (1.3.11), мы получаем, что элементы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ вместе с Γ_{N+1} удовлетворяют соотношениям (1.3.1) для нечётного числа $(N+1) = 2\nu + 1$ образующих алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ и алгебру $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ можно рассматривать как фактор алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ по соотношению $\Gamma_{2\nu+1} = e^{-i\pi\nu/2} \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}$ (или по соотношению $\Gamma_{2\nu+1} = -e^{-i\pi\nu/2} \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}$; напомним, что элемент $\Gamma_{N+1} \in \mathcal{Cl}_{2\nu}$ определен в (1.3.10) с точностью до знака). С другой стороны это означает, что имеются необратимые гомоморфизмы $\rho_\pm: \mathcal{Cl}_{2\nu+1} \rightarrow \mathcal{Cl}_{2\nu}$, заданные отображениями

$$\Gamma'_i \rightarrow \Gamma_i \quad (i = 1, \dots, 2\nu), \quad \pm \Gamma'_{2\nu+1} \rightarrow e^{-i\pi\nu/2} \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu},$$

где $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2\nu}, \Gamma'_{2\nu+1}\}$ образуют алгебру $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$. При таких гомоморфизмах два элемента $e^{-i\pi\nu/2} \Gamma'_1 \cdots \Gamma'_{2\nu} \in \mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ и $\Gamma'_{2\nu+1} \in \mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ (или $-\Gamma'_{2\nu+1} \in \mathcal{Cl}_{2\nu+1}$) отображаются в один элемент $e^{-i\pi\nu/2} \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu} \in \mathcal{Cl}_{2\nu}$.

2. Число образующих алгебры \mathcal{Cl}_N — нечётно: $N = 2\nu + 1$. Тогда для элемента (1.3.10), пользуясь соотношениями (1.3.1), мы получаем

$$\Gamma_{N+1} \cdot \Gamma_k = \Gamma_k \cdot \Gamma_{N+1} \quad (\forall k = 1, \dots, N = 2\nu + 1), \quad (1.3.12)$$

и следовательно Γ_{N+1} принадлежит центру алгебры \mathcal{Cl}_N . Из условия (1.3.11) следует, что центральный элемент Γ_{N+1} имеет только два собственных значения ± 1 . Рассмотрим вместо стандартного набора образующих $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu+1} \in \mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ новый набор $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}, \Gamma_{N+1}\}$, в котором элемент $\Gamma_{2\nu+1}$ заменен на центральный элемент (1.3.10). Действительно, любой элемент комплексной алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ можно переписать в терминах образующих нового набора, если согласно (1.3.10) сделать подстановку

$$\Gamma_{2\nu+1} \equiv \Gamma_N \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \Gamma_{N+1} \cdot \Gamma_1 \cdots \Gamma_{N-1}. \quad (1.3.13)$$

Заметим, что элементы $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N-1=2\nu}\}$ образуют подалгебру $\mathcal{Cl}_{2\nu} \subset \mathcal{Cl}_{2\nu+1}$, поэтому алгебра $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ с точки зрения нового набора образующих $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}, \Gamma_{N+1}\}$ оказывается центральным расширением алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$. Учитывая то, что центральный элемент (1.3.10) удовлетворяет тождеству $\Gamma_{N+1}^2 = I$, мы можем записать любой элемент

$a \in \mathcal{C}l_{2\nu+1}$ в виде $a = a_1 + \Gamma_{N+1} \cdot a_2$, где $a_1, a_2 \in \mathcal{C}l_{2\nu}$. То есть, для алгебры $\mathcal{C}l_{2\nu+1}$ справедливо разложение

$$\mathcal{C}l_{2\nu+1} = I \cdot \mathcal{C}l_{2\nu} + \Gamma_{N+1} \cdot \mathcal{C}l_{2\nu} = \frac{(I + \Gamma_{N+1})}{2} \cdot \mathcal{C}l_{2\nu} + \frac{(I - \Gamma_{N+1})}{2} \cdot \mathcal{C}l_{2\nu}, \quad (1.3.14)$$

где $\frac{1}{2}(I + \Gamma_{N+1})$ и $\frac{1}{2}(I - \Gamma_{N+1})$ — центральные проекторы в алгебре $\mathcal{C}l_{2\nu+1}$, которые проектируют элемент Γ_{N+1} на значения $\Gamma_{N+1} = +I$ и $\Gamma_{N+1} = -I$, соответственно. Формула (1.3.14) показывает, что для комплексных алгебр Клиффорда имеет место изоморфизм

$$\mathcal{C}l_{2\nu+1} = \mathcal{C}l_{2\nu} \oplus \mathcal{C}l_{2\nu}, \quad (1.3.15)$$

который в явном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &\rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma'_i & 0 \\ 0 & \Gamma''_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, 2\nu, \\ \Gamma_{2\nu+1=N} &\rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \Gamma'_1 \dots \Gamma'_{2\nu} & 0 \\ 0 & -e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} \Gamma''_1 \dots \Gamma''_{2\nu} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{N+1} \rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

где слева $\Gamma_i, \Gamma_{2\nu+1}, \Gamma_{N+1} \in \mathcal{C}l_{2\nu+1}$, а Γ'_i и Γ''_i образуют первую и вторую алгебры $\mathcal{C}l_{2\nu}$ в (1.3.15); явная запись образующей $\Gamma_{2\nu+1}$ следует из подстановки (1.3.13) (или из определения центрального элемента (1.3.10)). Итак, рассмотренный нами второй нечетный случай $N = 2\nu + 1$ говорит нам о том, что изучение алгебры Клиффорда $\mathcal{C}l_{2\nu+1}$ всегда можно свести к изучению алгебр Клиффорда $\mathcal{C}l_{2\nu}$.

Рассмотрим случай алгебры Клиффорда $\mathcal{C}l_N$ с четным $N = 2\nu$ и разобьем все множество образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}l_N$ на две группы, скажем, на группы образующих с четными и нечетными номерами m . Далее, введем набор операторов $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, \nu = N/2$):

$$z_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{2\alpha-1} + i\Gamma_{2\alpha}), \quad \bar{z}_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{2\alpha-1} - i\Gamma_{2\alpha}), \quad (1.3.17)$$

так что

$$\Gamma_{2\alpha-1} = z_\alpha + \bar{z}_\alpha, \quad \Gamma_{2\alpha} = i(\bar{z}_\alpha - z_\alpha). \quad (1.3.18)$$

Эти операторы, в силу равенств (1.3.1) удовлетворяют соотношениям

$$[z_\alpha, z_\beta]_+ = 0, \quad [\bar{z}_\alpha, \bar{z}_\beta]_+ = 0, \quad [z_\alpha, \bar{z}_\beta]_+ = \delta_{\alpha\beta} I \quad (\forall \alpha, \beta), \quad (1.3.19)$$

где скобки $[\cdot, \cdot]_+$ обозначают антикоммутатор $[a, b]_+ \equiv a \cdot b + b \cdot a$. Отметим, что операторы z_α и \bar{z}_α **нильпотентны**, $z_\alpha^2 = 0$, $\bar{z}_\alpha^2 = 0$ (оператор нильпотентен, если его квадрат равен нулю).

Определение 1.3.2 *Комплексная алгебра \mathcal{A}_ν с единицей I и образующими $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, \nu = N/2$), удовлетворяющими определяющим соотношениям (1.3.19), называется **алгеброй ν свободных фермионов** или **алгеброй фермионных осцилляторов**.*

Замена $\{\Gamma_m\} \rightarrow \{z_\alpha, \bar{z}_\beta\}$ — это не что иное как замена базиса образующих в комплексной алгебре $\mathcal{C}l_{2\nu}$. Согласно (1.3.18) эта замена обратима, поэтому имеет место изоморфизм комплексных алгебр $\mathcal{C}l_{2\nu} = \mathcal{A}_\nu$.

Положим $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}) = \sqrt{2}(z_1, \dots, z_\nu, \bar{z}_\nu, \dots, \bar{z}_1)$. Тогда соотношения (1.3.1) и (1.3.19) переписываются в виде (сравните с (1.3.2))

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2 \eta_{mn} I, \quad \eta_{nm} = \delta_{n, N-m+1}, \quad (1.3.20)$$

где $|\eta_{mn}|$ — антидиагональная матрица, то есть матрица, у которой все элементы равны нулю за исключением элементов, стоящих на побочной диагонали и равных единице. Данная форма алгебры Клиффорда понадобится нам ниже, в разделе 5.4.

Пусть ρ — точное матричное представление алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, в котором все базисные элементы (1.3.5) линейно независимы. Минимальное комплексное матричное пространство, которое имеет $2^{2\nu}$ независимых базисных элементов и в которое можно вложить комплексную алгебру $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ размерности $2^{2\nu}$ — это пространство $\text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$, имеющее комплексную размерность $2^\nu \times 2^\nu = 2^{2\nu}$. Поэтому точное представление ρ алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, в котором элементы Γ_m реализуются матрицами, должно иметь размерность не меньше чем 2^ν . В следующем разделе мы построим точное представление алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, имеющее минимальную размерность 2^ν . Это указывает на изоморфизм комплексной алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ и матричной алгебры $\text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$, который будет явно установлен в Главе 6 в разделе 6.1.2.

1.3.2 Представление Фока для алгебры свободных фермионов

В силу изоморфизма $\mathcal{Cl}_{2\nu} = \mathcal{A}_\nu$ задачу о построении точного неприводимого представления ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ можно переформулировать как задачу о построении точного неприводимого представления алгебры свободных фермионов (1.3.19). Решение этой задачи сводится к построению пространства Фока \mathcal{F} , соответствующего алгебре фермионных осцилляторов (1.3.19). Опишем пространство \mathcal{F} , пользуясь при этом обозначениями Дирака. Определим вакуумный (младший) вектор $|0\rangle \in \mathcal{F}$ как вектор, который уничтожается операторами z_α :

$$z_\alpha |0\rangle = 0 \quad (\forall \alpha = 1, \dots, \nu), \quad (1.3.21)$$

а операторы \bar{z}_α действуют на $|0\rangle$ как операторы рождения, то есть порождают из $|0\rangle$ ненулевые вектора пространства \mathcal{F} , которое называется **пространством Фока**. В силу нильпотентности оператора \bar{z}_α повторное его действие дает нуль. Поэтому все пространство \mathcal{F} , являясь по построению пространством представления алгебры (1.3.19), состоит из линейных комбинаций ненулевых^{1.5} базисных векторов ($k = 0, 1, \dots, \nu$):

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle = \bar{z}_{\alpha_1} \cdots \bar{z}_{\alpha_k} |0\rangle \quad (1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \leq \nu). \quad (1.3.22)$$

Таким образом, произвольный вектор $|\Psi\rangle \in \mathcal{F}$ записывается следующим образом

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle, \quad \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \in \mathbb{C}. \quad (1.3.23)$$

Для дальнейшего удобно считать, что компоненты $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ полностью антисимметризованы по всем перестановкам индексов $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Число независимых векторов

^{1.5}Если бы какой-либо вектор из (1.3.22) был нулевым, то действуя на него соответствующей комбинацией операторов уничтожения $z_{\alpha_1} \cdots z_{\alpha_k}$ мы получили бы $|0\rangle = 0$.

(1.3.22) вычисляется так же, как вычислялась размерность алгебры Клиффорда (см. цепочку равенств в (1.3.6)), в результате получаем:

$$\dim(\mathcal{F}) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!} = 2^{\nu} = 2^{N/2}. \quad (1.3.24)$$

что совпадает с минимальной размерностью точного матричного представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$. С помощью соотношений (1.3.17), (1.3.18) образующие $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{2\nu}$ однозначно связаны с фермионными операторами z_{α_i} и \bar{z}_{β_i} . Поэтому действие любого элемента алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с образующими (1.3.18) на пространство Фока \mathcal{F} с базисом (1.3.22) определяется действием на это пространство фермионных операторов z_{α_i} и \bar{z}_{β_i} , то есть соотношениями

$$\begin{aligned} z_{\beta} |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \delta_{\beta\alpha_i} |\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k\rangle, \\ \bar{z}_{\beta} |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle &= (-1)^i |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k\rangle \quad (\alpha_i < \beta < \alpha_{i+1}), \\ \bar{z}_{\beta} |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle &= 0 \quad (\beta = \alpha_i). \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Эти соотношения вместе с равенствами (1.3.18) задают 2^{ν} -мерное представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$. Явная матричная запись образующих $\rho(\Gamma_m)$ будет обсуждаться ниже в Разделе 6.1.2.

Утверждение 1.3.2 *Комплексное 2^{ν} -мерное представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, которое строится по формулам (1.3.18) и (1.3.25), является неприводимым. Все неприводимые комплексные представления алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ — 2^{ν} -мерны и эквивалентны.*

Доказательство. Многократным действием операторов $\{z_{\alpha_i}\}$ и $\{\bar{z}_{\beta_j}\}$ любой базисный вектор $|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle \in \mathcal{F}$ может быть переведен с помощью (1.3.25) в любой другой базисный вектор $|\beta_1, \dots, \beta_m\rangle \in \mathcal{F}$. Поэтому в пространстве \mathcal{F} представления ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ нет нетривиальных инвариантных подпространств и следовательно 2^{ν} -мерное представление ρ — неприводимо. Пусть \mathcal{F}' — пространство другого **неприводимого** представления ρ' алгебры (1.3.19) размерности 2^{ν} . Заметим, что в пространстве \mathcal{F}' всегда имеется ненулевой вектор $|0\rangle'$, который удовлетворяет соотношениям (1.3.21). Действительно, выберем любой ненулевой вектор $|\omega_0\rangle \in \mathcal{F}'$. Пусть $z_1 |\omega_0\rangle \neq 0$, тогда $z_1 (z_1 |\omega_0\rangle) = 0$ и вместо вектора $|\omega_0\rangle$ возьмем вектор $|\omega_1\rangle \equiv z_1 |\omega_0\rangle$. Пусть $z_2 |\omega_1\rangle \neq 0$, тогда $z_2 (z_2 |\omega_1\rangle) = 0$ и вместо вектора $|\omega_1\rangle$ возьмем вектор $|\omega_2\rangle \equiv z_2 z_1 |\omega_0\rangle$. Продолжая эту процедуру, мы на некотором шаге k получим вектор $|\omega_k\rangle \equiv |0\rangle' \in \mathcal{F}'$, который удовлетворяет соотношениям (1.3.21) для вакуумного вектора. Действуя на ненулевой вектор $|0\rangle' \in \mathcal{F}'$ операторами рождения \bar{z}_{β} , мы порождаем из него пространство Фока \mathcal{F}'' , натянутое на базисные вектора вида (1.3.22):

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle' = \bar{z}_{\alpha_1} \cdots \bar{z}_{\alpha_k} |0\rangle' \quad (1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \leq \nu). \quad (1.3.26)$$

По построению пространство \mathcal{F}'' — нетривиально и является инвариантным подпространством в \mathcal{F}' . Так как представление ρ' неприводимо, то инвариантное подпространство \mathcal{F}'' должно совпадать с \mathcal{F}' . Итак, пространство \mathcal{F}' неприводимого представления ρ' алгебры (1.3.19), содержит все вектора (1.3.26), которые не равны нулю

и образуют базис в \mathcal{F}' . Поэтому отображение

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle' \rightarrow |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle,$$

взаимнооднозначно и устанавливает эквивалентность представлений ρ и ρ' . \blacksquare

Для определения скалярного произведения в пространстве \mathcal{F} введем (см. Раздел 1.1) дуальное пространство Фока \mathcal{F}^* , которое состоит из линейных комбинаций базисных векторов

$$\langle \beta_\ell, \dots, \beta_2, \beta_1 | = \langle 0 | z_{\beta_\ell} \cdots z_{\beta_1} \quad (\nu \geq \beta_\ell > \cdots > \beta_2 > \beta_1 \geq 1), \quad (1.3.27)$$

порожденных из дуального вакуумного вектора $\langle 0 | \in \mathcal{F}^*$, заданного соотношениями:

$$\langle 0 | \bar{z}_\beta = 0, \quad \forall \beta = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.3.28)$$

и нормированного так, что $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. С помощью этой нормировки и соотношений (1.3.25) можно вычислить свертку любых базисных векторов из \mathcal{F} и \mathcal{F}^* :

$$\langle \beta_\ell, \dots, \beta_2, \beta_1 | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle = \delta_{k,\ell} (\delta_{\beta_1 \alpha_1} \cdots \delta_{\beta_\ell \alpha_\ell}). \quad (1.3.29)$$

Теперь, мы можем определить (см. Раздел 1.1) эрмитово сопряжение \dagger векторов (1.3.23) в \mathcal{F} и $\langle \Psi | \in \mathcal{F}^*$ как отображения $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\rangle^\dagger &= \langle \alpha_k, \dots, \alpha_2, \alpha_1 |, \quad \langle \alpha_k, \dots, \alpha_2, \alpha_1 |^\dagger = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\rangle, \\ \langle \Psi | = |\Psi\rangle^\dagger &= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^* \langle \alpha_k, \dots, \alpha_2, \alpha_1 |, \quad |\Psi\rangle = \langle \Psi |^\dagger, \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

и рассматривать (1.3.29) как определение эрмитова скалярного произведения в \mathcal{F} ; при этом необходимо сделать отождествление $\bar{z}_\alpha = z_\alpha^\dagger$, $\bar{z}_\alpha^\dagger = z_\alpha$.

- *Задача 6. Зададим вектора $|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle'$ и $\langle \beta_\ell, \dots, \beta_1 |'$ так же как и в (1.3.22) и (1.3.27), но при этом не будем требовать выполнения лексикографического упорядочения для параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $(\beta_\ell, \dots, \beta_1)$. Доказать, что в этом случае вместо (1.3.29) мы имеем детерминантные формулы*

$$\begin{aligned} \langle \beta_\ell, \dots, \beta_1 |' |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle' &= \frac{\delta_{k,\ell}}{(\nu-k)!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_\nu} \cdot \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_k \gamma_{k+1} \dots \gamma_\nu} = \\ &= \delta_{k,\ell} \det(\|\delta_{\alpha_i \beta_j}\|_{i,j=1, \dots, k}). \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Отметим, что в соответствии с (1.3.29) и (1.3.30) эрмитово произведение $\langle \Phi | \Psi \rangle$ двух произвольных векторов $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle \in \mathcal{F}$ равно

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} \phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^* \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}. \quad (1.3.32)$$

Замечание. Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$, или в случае $N = 2\nu$ изоморфная ей алгебра свободных фермионов \mathcal{A}_ν , так же как и алгебра d -мерного осциллятора (см. Замечание 2 в конце Раздела 1.2), может быть использована для реализации алгебр Ли

классических серий $sl(\nu, \mathbb{C})$ и $so(N, \mathbb{C})$. Например, для образующих $E_{\alpha\beta} \in sl(\nu, \mathbb{C})$ мы получаем следующее представление (сравните с (1.2.30))

$$E_{\alpha\beta} = \bar{z}_\alpha z_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\nu} \sum_\gamma \bar{z}_\gamma z_\gamma, \quad \sum_\alpha E_{\alpha\alpha} = 0. \quad (1.3.33)$$

Соответственно, для образующих $L_{mn} \in so(N, \mathbb{C})$ мы имеем

$$L_{mn} \equiv \frac{1}{4}(\Gamma_m \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_m) = \frac{1}{2} \Gamma_{[mn]}, \quad (1.3.34)$$

где Γ_m — образующие алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$.

- **Задача 7.** Проверить, что коммутационные соотношения операторов (1.3.33) и (1.3.34) совпадают с определяющими соотношениями (1.2.31) и (1.2.33) алгебр Ли $sl(\nu, \mathbb{C})$ и $so(N, \mathbb{C})$.

Реализация (1.3.34) будет использована нами ниже в Разделе 5.4 при построении спинорных представлений алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$.

1.3.3 Алгебра Грассмана

Аналогом алгебры полиномов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$, где x_i — координаты векторов \vec{x} в пространстве \mathbb{R}^d , в котором определялось координатное представление (1.1.17) и в частности задавалось координатное представление бозонных осцилляторов (1.2.1), для фермионных осцилляторов является алгебра Грассмана.

Определение 1.3.3 *Комплексная алгебра \mathbf{Gr}_d с единичным элементом I и образующими θ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, d$), которые удовлетворяют определяющим соотношениям*

$$\theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\alpha = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \quad (1.3.35)$$

называется алгеброй Грассмана с d образующими.

Пример. Подалгебра в алгебре фермионных осцилляторов (1.3.19) с образующими $\{z_\alpha\}$ (или с образующими $\{\bar{z}_\alpha\}$), где $\alpha = 1, \dots, \nu$, является алгеброй Грассмана \mathbf{Gr}_ν .

Базис в алгебре Грассмана \mathbf{Gr}_d образован мономами (сравните с (1.3.5))

$$\{I, \theta_{\alpha_1}, \theta_{\alpha_1}\theta_{\alpha_2}, \theta_{\alpha_1}\theta_{\alpha_2}\theta_{\alpha_3}, \dots, \theta_{\alpha_1}\theta_{\alpha_2} \cdots \theta_{\alpha_d} \equiv \theta_1\theta_2 \cdots \theta_d\}, \quad (1.3.36)$$

$$1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots \leq d.$$

Соответственно алгебра \mathbf{Gr}_d — конечномерна и ее размерность (см. вычисление (1.3.24)) равна 2^d . На алгебре Грассмана \mathbf{Gr}_d можно ввести градуировку (степень) gr . А именно, градуировка базисных мономов (1.3.36) определяется как $\text{gr}(\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_k}) = k$. Тогда алгебра Грассмана \mathbf{Gr}_d разлагается в сумму $\mathbf{Gr}_d = \bigoplus_{k=1}^d \mathbf{Gr}_d^{(k)}$, где $\mathbf{Gr}_d^{(k)}$ — векторные пространства, образованные элементами $a \in \mathbf{Gr}_d$, имеющими степень $\text{gr}(a) = k$, при этом мы имеем $\mathbf{Gr}_d^{(k)} \cdot \mathbf{Gr}_d^{(\ell)} = \mathbf{Gr}_d^{(k+\ell)}$.

Введем частную производную $\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}$ на алгебре Грассмана \mathbf{Gr}_d , как линейный оператор $\mathbf{Gr}_d \rightarrow \mathbf{Gr}_d$, который определен на базисных мономах (1.3.36) следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_k}) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \delta_{\beta_i}^\alpha (\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_{i-1}} \cdot \theta_{\beta_{i+1}} \cdots \theta_{\beta_k}), \quad \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(I) = 0 \quad (1.3.37)$$

(иначе говоря, производная $\partial/\partial\theta_\alpha$ пронесится через θ_β , если $\beta \neq \alpha$, причем антикоммутируя, $(\partial/\partial\theta_\alpha) \theta_\beta = -\theta_\beta (\partial/\partial\theta_\alpha)$, а действуя на θ_α производная дает единицу, $(\partial/\partial\theta_\alpha) \theta_\alpha = 1$). Согласно этому определению производная $\partial_\theta^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}$ удовлетворяет градуированному правилу Лейбница:

$$\partial_\theta^\alpha(a \cdot b) = \partial_\theta^\alpha(a) \cdot b + (-1)^{\text{gr}(a)} a \cdot \partial_\theta^\alpha(b), \quad (1.3.38)$$

и мы можем приписать такой производной градуировку $\text{gr}(\partial_\theta^\alpha) = -1$. Сравнивая результаты двух последовательных действий (1.3.37) производных ∂_θ^α и ∂_θ^β на базисные мономы, мы получаем

$$\partial_\theta^\alpha \partial_\theta^\beta (\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_k}) = -\partial_\theta^\beta \partial_\theta^\alpha (\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_k}) \Rightarrow \partial_\theta^\alpha \partial_\theta^\beta + \partial_\theta^\beta \partial_\theta^\alpha = 0. \quad (1.3.39)$$

Таким образом, частные производные ∂_θ^α ($\alpha = 1, \dots, d$) антикоммутируют друг с другом и образуют алгебру, изоморфную алгебре Грассмана \mathbf{Gr}_d . Правило Лейбница (1.3.38) можно также интерпретировать как правило коммутирования производной ∂_θ^α и произвольного элемента $a \in \mathbf{Gr}_d$:

$$\partial_\theta^\alpha \cdot a = \partial_\theta^\alpha(a) + (-1)^{\text{gr}(a)} a \cdot \partial_\theta^\alpha. \quad (1.3.40)$$

В частном случае, полагая $a = \theta_\beta$ и учитывая (1.3.37), мы получаем

$$\partial_\theta^\alpha \cdot \theta_\beta = \delta_\beta^\alpha - \theta_\beta \cdot \partial_\theta^\alpha. \quad (1.3.41)$$

Сравнивая соотношения (1.3.35), (1.3.39) и (1.3.41) с определяющими соотношениями (1.3.19) мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 1.3.3 Градуированная алгебра \mathcal{B}_d с образующими $\{\theta_\alpha, \partial_\theta^\beta\}$, где $\alpha, \beta = 1, \dots, d$, изоморфна алгебре свободных фермионов \mathcal{A}_d (см. Определение 1.3.2). Изоморфизм устанавливается с помощью одного из двух отображений $z_\alpha \leftrightarrow \theta_\alpha, \bar{z}_\beta \leftrightarrow \partial_\theta^\beta$, или $z_\alpha \leftrightarrow \partial_\theta^\alpha, \bar{z}_\beta \leftrightarrow \theta_\beta$.

Замечание. Наряду с частной производной $\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}$, которая определена в (1.3.37) и которая называется левой производной, можно определить правую частную производную $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}}$ следующим образом (сравните с (1.3.37))

$$(\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_k}) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \delta_{\beta_i}^\alpha (\theta_{\beta_1} \cdots \theta_{\beta_{i-1}} \cdot \theta_{\beta_{i+1}} \cdots \theta_{\beta_k}).$$

Рассмотрение правой производной проводится аналогично рассмотрению левой производной. В частности для правой производной существует аналог правила Лейбница и аналог Утверждения 1.3.3.

Из Утверждения **1.3.3** следует, что алгебра свободных фермионов \mathcal{A}_d может быть градуирована так же как и алгебра \mathcal{B}_d с образующими $\{\theta_\alpha, \partial_\theta^\beta\}$. В соответствии с этим, припишем образующим алгебры \mathcal{A}_d следующую градуировку

$$\text{gr}(z_\alpha) = +1, \quad \text{gr}(\bar{z}_\alpha) = -1,$$

и, рассматривая алгебры \mathcal{A}_d и \mathcal{B}_d вместе, потребуем, чтобы элементы $a \in \mathcal{A}_d$ и $b \in \mathcal{B}_d$ коммутировали согласно правилу

$$a \cdot b = (-1)^{\text{gr}(a) \cdot \text{gr}(b)} b \cdot a \quad (1.3.42)$$

(то есть четные элементы коммутируют со всеми элементами, а нечетные элементы a и b антикоммутируют друг с другом). Теперь мы готовы перейти к построению аналогов голоморфного и антиголоморфного представлений (см. Раздел **1.2**) для алгебры фермионных осцилляторов. Для этого введем систему собственных векторов для фермионных операторов уничтожения z_α (сравните с (1.2.9)):

$$z_\alpha |\theta\rangle = \theta_\alpha |\theta\rangle, \quad (1.3.43)$$

где $|\theta\rangle := |\theta_1, \dots, \theta_d\rangle$ и θ_α – элементы алгебры $\text{Gr}_d \subset \mathcal{B}_d$, которые далее мы будем называть грассмановыми переменными. Вектора $|\theta\rangle$, удовлетворяющие (1.3.43), называются когерентными состояниями для фермионных осцилляторов. Эти когерентные состояния строятся следующим образом (сравните с (1.2.10)):

$$|\theta\rangle = \exp(\bar{z}_\alpha \theta_\alpha) |0\rangle = \exp(-\theta_\alpha \bar{z}_\alpha) |0\rangle, \quad (1.3.44)$$

где $|0\rangle$ – вакуум фермионного пространства Фока, заданный в (1.3.21). Соотношение (1.3.43) следует из (1.3.44) с учетом (1.3.19) и (1.3.42). Пользуясь представлением (1.3.44) и формулами (1.3.19), (1.3.42), мы получаем

$$\bar{z}_\alpha |\theta\rangle = -\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} |\theta\rangle. \quad (1.3.45)$$

Для дуальных когерентных состояний

$$\langle \theta| = \langle 0| \exp(\theta_\alpha z_\alpha) = \langle 0| \exp(-z_\alpha \theta_\alpha), \quad (1.3.46)$$

где дуальный вакуум $\langle 0|$ определен в (1.3.28), мы имеем соотношения, аналогичные (1.3.43), (1.3.45):

$$\langle \theta| \bar{z}_\alpha = \theta_\alpha \langle \theta|, \quad \langle \theta| z_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \langle \theta|. \quad (1.3.47)$$

- *Задача 8. Проверить самосогласованность определяющих соотношений алгебры свободных фермионов (1.3.19) и равенств (1.3.43), (1.3.45), (1.3.47).*

Свертка двух когерентных состояний (1.3.44) и (1.3.46) равна:

$$\langle \theta|\bar{\theta}\rangle = \langle 0| \exp(\theta_\alpha z_\alpha) |\bar{\theta}\rangle = \langle 0| \exp(\theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha) |\bar{\theta}\rangle = \exp(\theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha), \quad (1.3.48)$$

где $\bar{\theta}_\alpha$ – еще один набор грассмановых переменных такой, что

$$\bar{\theta}_\alpha \cdot \theta_\beta = -\theta_\beta \cdot \bar{\theta}_\alpha, \quad \bar{\theta}_\alpha \cdot a = (-1)^{\text{gr}(a)} a \cdot \bar{\theta}_\alpha, \quad \forall a \in \mathcal{A}_d, \quad \forall \alpha, \beta.$$

То есть переменные $\{\theta_1, \dots, \theta_d, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_d\}$ образуют алгебру Грассмана Gr_{2d} . При выводе (1.3.48) мы воспользовались формулой (1.3.43) и соотношением $\langle 0|\bar{\theta}\rangle = 1$.

Применим фермионные когерентные состояния $|\bar{\theta}\rangle$ и $\langle\theta|$ для построения специальных представлений алгебры свободных фермионов, которые аналогичны (анти)голоморфному представлению в бозонном случае. Для этого, так же как и в случае (анти)голоморфного представления, построим для произвольного вектора (1.3.23) из пространства Фока \mathcal{F} и дуального к нему вектора $\langle\Psi| \in \mathcal{F}^*$ волновые функции (от грассмановых переменных θ_α и $\bar{\theta}_\beta$):

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &\equiv \langle\theta|\Psi\rangle = \langle\theta|\sum_{k=0}^d \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle = \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \theta_{\alpha_1} \cdots \theta_{\alpha_k},\end{aligned}\quad (1.3.49)$$

$$\bar{\Psi}(\bar{\theta}) \equiv \langle\Psi|\bar{\theta}\rangle = \sum_{k=0}^d \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^* \bar{\theta}_{\alpha_k} \cdots \bar{\theta}_{\alpha_1}, \quad (1.3.50)$$

где мы воспользовались формулами (1.3.22), (1.3.27), (1.3.30), в которых положили $\nu = d$, а также формулами (1.3.44) и (1.3.47). Действие операторов z_α и \bar{z}_β на произвольное состояние $|\Psi\rangle$ в терминах волновых функций (1.3.49) согласно (1.3.47) записывается в виде (сравните с (1.2.17))

$$\langle\theta|z_\alpha|\Psi\rangle = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \langle\theta|\Psi\rangle, \quad \langle\theta|\bar{z}_\alpha|\Psi\rangle = \theta_\alpha \langle\theta|\Psi\rangle, \quad (1.3.51)$$

Эти формулы определяют для алгебры \mathcal{A}_d фермионных осцилляторов z_α и \bar{z}_α представление $\bar{\rho}$ (сравните с (1.2.19)):

$$\bar{\rho}(z_\alpha) = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \quad \bar{\rho}(\bar{z}_\alpha) = \theta_\alpha, \quad (1.3.52)$$

действующее в пространстве функций $\Psi(\theta) = \langle\theta|\Psi\rangle$ грассмановых переменных θ_α .

- *Задача 9. Доказать, что размерность пространства функций $\Psi(\theta)$ совпадает с размерностью $\dim(\mathcal{F}) = 2^d$ пространства Фока алгебры \mathcal{A}_d (см. (1.3.24)).*

Выше мы доказали (см. Утверждение 1.3.3), что отображение $\bar{\rho}$ — изоморфизм алгебр \mathcal{A}_d и \mathcal{B}_d , то есть представление $\bar{\rho}$ — точное.

- *Задача 10. Пользуясь формулами (1.3.18) и (1.3.52) построить представление $\bar{\rho}$ для образующих алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$.*

Наконец, скалярное произведение $\langle\Phi|\Psi\rangle$ двух состояний в представлении $\bar{\rho}$ записывается в виде (сравните с (1.2.18)):

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha} \langle\Phi|\bar{\theta}\rangle \langle\theta|\Psi\rangle = \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha} \bar{\Phi}(\bar{\theta}) \Psi(\theta). \quad (1.3.53)$$

Здесь интеграл $\int d\theta d\bar{\theta}$ обозначает интеграл Березина по грассмановым переменным $\{\theta_1, \dots, \theta_d, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_d\} \in \text{Gr}_{2d}$, который в данном случае определяется следующим образом ($d = 1, 2, 3, \dots$):

$$\int d\theta d\bar{\theta} \Psi(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta_d} \cdot \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_d} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_1} \Psi(\theta, \bar{\theta}). \quad (1.3.54)$$

Этот интеграл может рассматриваться как многократный интеграл Березина

$$\int d\theta d\bar{\theta} \Psi(\theta, \bar{\theta}) = \int d\theta_d \int d\bar{\theta}_d \cdots \int d\theta_1 \int d\bar{\theta}_1 \Psi(\theta, \bar{\theta}), \quad (1.3.55)$$

причем каждое интегрирование по θ_α или $\bar{\theta}_\beta$ понимается как взятие соответствующей производной $\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$ или $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta}$. Иначе говоря, интеграл Березина от одной переменной определяется как

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta \theta = 1 \quad (1.3.56)$$

(и аналогично $\int d\bar{\theta} = 0, \int d\bar{\theta} \bar{\theta} = 1$), а символы $d\theta_\alpha, d\bar{\theta}_\beta$ нужно считать антикоммутирующими между собой и с грассмановыми переменными $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\beta$.

- *Задача 11. ★ Доказать, что интеграл по грассмановым переменным в правой части (1.3.53) дает формулу (1.3.32).*

Интеграл Березина является удобным техническим инструментом, который используется например для формулировки континуального интеграла Фейнмана по фермионным переменным. В частности, детерминант $d \times d$ матрицы $\|A_{\alpha\beta}\|$ можно представить в виде интеграла по грассмановым переменным следующим образом

$$\det(A) = \int d\theta d\bar{\theta} \exp(\bar{\theta}_\alpha A_{\alpha\beta} \theta_\beta) = \frac{1}{d!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_d} A_{\alpha_1 \beta_1} \cdots A_{\alpha_d \beta_d} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_d}, \quad (1.3.57)$$

где интеграл $\int d\theta d\bar{\theta}$ был определен в (1.3.54). Справа в формуле (1.3.57) возникло представление для детерминанта, которое мы обсуждали в первой части книги (см. Раздел I-1.2.2). Пусть $d = 2n$ — четное число и $d \times d$ матрица A — кососимметрична $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$. Тогда нетрудно показать, что

$$\int d\theta \exp\left(\frac{1}{2} \theta_\alpha A_{\alpha\beta} \theta_\beta\right) = \frac{1}{2^n n!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_d} A_{\alpha_1 \alpha_2} \cdots A_{\alpha_{2n-1} \alpha_{2n}} \equiv \text{Pf}(A), \quad (1.3.58)$$

где $\text{Pf}(A)$ — пфаффиан матрицы A (см. Раздел I-1.2.2 первой части книги) и при выводе (1.3.58) мы воспользовались формулой $\theta_{\alpha_1} \cdots \theta_{\alpha_d} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_d} \theta_1 \cdots \theta_d$.

- *Задача 12. ★ С помощью интегральных представлений (1.3.57) и (1.3.58), доказать для кососимметричной $(2n \times 2n)$ матрицы A тождество: $\det(A) = (\text{Pf}(A))^2$.*

В заключение этого раздела отметим, что алгебры Грассмана играют ключевую роль в теории суперсимметрии и в частности в теории супергрупп и супералгебр Ли. Эта важнейшая тема выходит за рамки нашей книги.

Глава 2

Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$ и групп Ли $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$

В этой главе мы изучим комплексные конечномерные и неприводимые представления алгебр Ли $sl(2, \mathbb{C})$, $su(2)$ и групп Ли $SU(2)$, а также ограниченный класс представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$. Рассматриваемые представления находятся во взаимно-однозначном соответствии друг с другом: любое представление алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ является одновременно представлением алгебры $su(2)$ и поднимается до представления группы $SU(2)$. Такие представления групп $SU(2)$ удобно изучать, связав их с ограниченным классом представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$, а именно с теми представлениями, которые содержатся в тензорном произведении ее определяющих представлений T . Ясно, что этот класс представлений не исчерпывает всех конечномерных комплексных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$. Например, он не включает представления которые содержатся в тензорных произведениях $T^{\otimes r_1} \otimes (T^*)^{\otimes r_2}$, где T^* – представление, комплексно сопряженное к определяющему.

2.1 Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$

В первой части книги в подразделе **I-3.7.3**, который мы рекомендуем изучить перед чтением данного раздела, мы показали, что для комплексной алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ (и ее вещественной формы $su(2)$) существует бесконечный набор неэквивалентных конечномерных неприводимых представлений $T^{(j)}$, которые характеризуются неотрицательными целыми и полуцелыми числами $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ (спинами) и имеют размерность $(2j + 1)$. Мы построили эти представления явно как представления со старшим весом. Мы также убедились в том, что построенные представления исчерпывают все конечномерные неприводимые представления алгебр $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$.

Напомним основные моменты процедуры построения представлений со старшим весом для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Алгебра $sl(2, \mathbb{C})$ – это трехмерное комплексное векторное пространство, в котором в качестве базисных элементов можно выбрать три

вектора $\{e_+, e_-, \mathbf{h}\}$ с определяющими соотношениями:

$$[e_+, e_-] = 2\mathbf{h}, \quad [\mathbf{h}, e_+] = e_+, \quad [\mathbf{h}, e_-] = -e_- . \quad (2.1.1)$$

Для обертывающей алгебры $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$ соотношения (2.1.1) переписываются в виде

$$e_+ e_- = 2\mathbf{h} + e_- e_+, \quad \mathbf{h} e_{\pm} = e_{\pm} (\mathbf{h} \pm 1) . \quad (2.1.2)$$

Неприводимое представление $T^{(j)}$ алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом j действует в пространстве \mathcal{V} , базис которого порождается из старшего вектора $v_0 \in \mathcal{V}$:

$$\mathbf{h} v_0 = j v_0, \quad e_+ v_0 = 0 . \quad (2.1.3)$$

Представление $T^{(j)}$ конечномерно и неприводимо тогда и только тогда, когда старший вес равен $j = n/2$, где $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ – целое неотрицательное число. Старший вес j называется спином, а пространство \mathcal{V} представления $T^{(j)}$ имеет размерность $(2j+1)$. Все базисные вектора v_k в \mathcal{V} получаются в результате действия понижающих операторов e_- на старший вектор $v_0 \in \mathcal{V}$:

$$v_k = \frac{1}{k!} e_-^k v_0, \quad k = 0, 1, \dots, 2j . \quad (2.1.4)$$

Действие образующих алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в представлении $T^{(j)}$ на базисные вектора $v_k \in \mathcal{V}$ определяется формулами:

$$\mathbf{h} v_k = (j - k) v_k, \quad e_- v_k = (k + 1) v_{k+1}, \quad e_+ v_{k+1} = (2j - k) v_k \quad (k \geq 0), \quad (2.1.5)$$

и из последнего равенства мы имеем $e_+ v_{2j+1} = 0$, что для неприводимого представления $T^{(j)}$ эквивалентно условию $v_{2j+1} = 0$. Формулы (2.1.5) вытекают из соотношений (2.1.2) и уравнений (2.1.3) для старшего вектора v_0 . В частности последнее равенство в (2.1.5) получается с помощью тождества

$$e_+ e_-^k = e_-^k e_+ + k e_-^{k-1} (2\mathbf{h} - k + 1), \quad e_{\pm}, \mathbf{h} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})), \quad (2.1.6)$$

которое понадобится нам в дальнейшем.

Напомним, что матрица $||T_{ij}||$ для линейного оператора T в пространстве \mathcal{V} в заданном базисе $\vec{e}_i \in \mathcal{V}$ определяется стандартным образом

$$T \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_k T_{ki}, \quad (2.1.7)$$

а при линейном преобразовании вектора $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = T \cdot \vec{x}$ его координаты x_i преобразуются по правилу

$$x'_i = (T \cdot \vec{x})_i = T_{ik} x_k . \quad (2.1.8)$$

Поэтому в нашем случае в соответствии с (2.1.7) мы имеем

$$\mathbf{h} \cdot v_k = v_{\ell} \tilde{T}_{\ell k}(\mathbf{h}), \quad e_{\pm} \cdot v_k = v_{\ell} \tilde{T}_{\ell k}(e_{\pm}), \quad (2.1.9)$$

где $\ell, k = 0, 1, \dots, 2j$ и согласно (2.1.5) матрицы образующих $\{e_+, e_-, \mathbf{h}\}$ записываются в виде:

$$\tilde{T}_{\ell k}(\mathbf{h}) = (j - k) \delta_{\ell k}, \quad \tilde{T}_{\ell k}(e_+) = (2j - k + 1) \delta_{\ell, k-1}, \quad \tilde{T}_{\ell k}(e_-) = (k + 1) \delta_{\ell, k+1}, \quad (2.1.10)$$

(здесь использовано соглашение $\delta_{\ell,-1} = 0 = \delta_{\ell,n+1}$). В простейшем нетривиальном случае, когда $j = 1/2$ и пространство \mathcal{V} двумерно, мы воспроизводим определяющее матричное представление $T^{(1/2)}$ для образующих $\{e_+, e_-, \mathfrak{h}\}$:

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.11)$$

- **Задача 13.** Доказать, что любой элемент $A \in SL(2, \mathbb{C})$ с помощью экспоненциального отображения можно представить в виде произведения

$$A = \exp(a_- e_-) \cdot \exp(a_0 \mathfrak{h}) \cdot \exp(a_+ e_+), \quad (2.1.12)$$

где $a_{\pm}, a_0 \in \mathbb{C}$. Указание: записать этот элемент явно, с учетом (2.1.11),

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{a_0}{2}} & a_+ e^{\frac{a_0}{2}} \\ a_- e^{\frac{a_0}{2}} & e^{-\frac{a_0}{2}} + a_- a_+ e^{\frac{a_0}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Используя представление (2.1.13) для $A \in SL(2, \mathbb{C})$, доказать односвязность группы $SL(2, \mathbb{C})$.

- **Задача 14.** Построить конечномерные и неприводимые представления алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ с младшим весом μ , то есть представления, пространства которых порождаются из младшего вектора v :

$$\mathfrak{h} v = \mu v, \quad e_- v = 0. \quad (2.1.14)$$

Доказать, что в этом случае младший вес μ должен быть неположительным целым или полуцелым числом, $\mu = -n/2$, где $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Доказать, что $(2j+1)$ -мерные представления $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом $j = n/2$ и с младшим весом $\mu = -n/2 = -j$ эквивалентны.

Конечномерные неприводимые представления $T^{(j)}$ алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, о которых шла речь выше, одновременно определяют и конечномерные неприводимые представления алгебры $su(2)$ (см. раздел **I-3.7.3** первой части книги). Данные представления алгебры $su(2)$ также характеризуются старшим весом (спином) $j = \mathbf{Z}_{\geq 0}/2$ и могут быть получены с помощью равенств, связывающих базис $\{e_{\pm}, \mathfrak{h}\}$ алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ с базисом $\{\tau_{\alpha}\}$ алгебры $su(2)$:

$$e_{\pm} = i \tau_1 \mp \tau_2, \quad \mathfrak{h} = i \tau_3, \quad (2.1.15)$$

$$\tau_1 = -\frac{i}{2}(e_- + e_+), \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(e_- - e_+), \quad \tau_3 = -i \mathfrak{h}.$$

Например, подставляя в (2.1.15) определяющее представление (2.1.11) образующих алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, мы получаем, что базисные элементы алгебры $su(2)$ в том же представлении $j = 1/2$ записываются в виде $\tau_{\alpha} = -\frac{i}{2}\sigma_{\alpha}$, где σ_{α} — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.16)$$

При выполнении равенств (2.1.15) определяющие соотношения (2.1.1) для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ переходят в определяющие соотношения для алгебры $su(2)$:

$$[\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ijk} \tau_k . \quad (2.1.17)$$

Мы знаем, что всякое представление компактной алгебры Ли, и в частности представление \tilde{T} алгебры $su(2)$, вытекающее из формул (2.1.10), эквивалентно антиэрмитовому представлению T , в котором для базисных элементов τ_α алгебры $su(2)$ выполняются соотношения $T_{\ell k}(\tau_\alpha) = -T_{k\ell}^*(\tau_\alpha)$. Тогда из равенств (2.1.15) следует, что соответствующие матрицы $T(e_\pm)$ образующих e_\pm алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ должны обладать свойством

$$T_{\ell k}(e_-) = (T_{k\ell}(e_+))^* . \quad (2.1.18)$$

Однако матрицы $\tilde{T}(e_\pm)$, построенные в (2.1.10), в случае $j > 1/2$ этого свойства не имеют: (проблема в неправильной нормировке базисных векторов). Приведем матрицы (2.1.10) к виду, удовлетворяющему (2.1.18). Для этого в пространстве \mathcal{V} неприводимого представления $T^{(j)}$ сделаем замену базиса, определив вместо базисных векторов v_k ($k = 0, \dots, 2j$) новые базисные вектора:

$$\begin{aligned} |j, m\rangle &:= \sqrt{(j+m)!(j-m)!} v_{j-m} = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!}} e_-^{j-m} \cdot v_0 , \\ m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j . \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Здесь и далее мы используем для базисных векторов (2.1.19) в пространстве \mathcal{V} обозначения Дирака $|j, m\rangle$ (см. Главу 1). В частности, для старшего вектора v_0 возникает обозначение $|j, j\rangle := \sqrt{(2j)!} \cdot v_0$.

Для новых базисных векторов (2.1.19) согласно формулам (2.1.5) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \cdot |j, m\rangle &= m |j, m\rangle , \quad e_\pm \cdot |j, m\rangle = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} |j, m \pm 1\rangle , \\ J^2 \cdot |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle , \\ m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j , \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

где мы ввели квадратичный оператор Казимира J^2 алгебры $sl(2, \mathbb{C})$:

$$J^2 = \frac{1}{2}(e_- e_+ + e_+ e_-) + \mathbf{h}^2 = e_- e_+ + \mathbf{h}(\mathbf{h} + 1) \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})) . \quad (2.1.21)$$

Из соотношений (2.1.20) с учетом правила (2.1.7) мы получаем следующее матричное представление $T^{(j)}$ для образующих e_\pm и \mathbf{h} (сравните с (2.1.9) и (2.1.10)):

$$\mathbf{h} \cdot |j, m\rangle = |j, m'\rangle T_{m'm}(\mathbf{h}) , \quad e_\pm \cdot |j, m\rangle = |j, m'\rangle T_{m'm}(e_\pm) , \quad (2.1.22)$$

где

$$\begin{aligned} T_{m'm}(\mathbf{h}) &= m \delta_{m'm} , \quad T_{m'm}(e_+) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m',m+1} , \\ T_{m'm}(e_-) &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m',m-1} . \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

При этом мы имеем $T_{m'm}(e_+) = T_{mm'}(e_-)$, то есть для матриц (2.1.23), принимая во внимание их вещественность, свойство (2.1.18) выполняется, и представление (2.1.23)

алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ с помощью формул (2.1.15) переводится в антиэрмитово представление алгебры $su(2)$. Представление (2.1.22) и (2.1.23) эквивалентно представлению, заданному в (2.1.9) и (2.1.10), так как получено в результате замены базиса в \mathcal{V} .

Определим для двух любых векторов $|\alpha\rangle = \sum_m \alpha_m |j, m\rangle$ и $|\beta\rangle = \sum_m \beta_m |j, m\rangle$ ($\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{C}$) в комплексном пространстве \mathcal{V} представления $T^{(j)}$ скалярное произведение:

$$\langle \beta | \alpha \rangle := \sum_m \beta_m^* \alpha_m, \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*. \quad (2.1.24)$$

Относительно этого скалярного произведения базисные вектора $|j, m\rangle$ ортонормированы

$$\langle j, m' | j, m \rangle = \delta_{mm'}, \quad (2.1.25)$$

а матричные элементы (2.1.23) записываются, согласно (2.1.22), в виде

$$\langle j, m' | \mathbf{h} | j, m \rangle = T_{m'm}(\mathbf{h}), \quad \langle j, m' | e_{\pm} | j, m \rangle = T_{m'm}(e_{\pm}). \quad (2.1.26)$$

Воспользуемся теперь общей конструкцией, изложенной в разделе 1, и введем дуальное к \mathcal{V} пространство \mathcal{V}^* , линейных функций $\langle \beta | : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$, которые определяются формулами (2.1.24). В пространстве \mathcal{V}^* в качестве базисных векторов выберем функции $\langle j, m |$ (здесь $m = -j, \dots, j-1, j$), удовлетворяющие (2.1.25). Таким образом, \mathcal{V}^* — комплексное $(2j+1)$ -мерное линейное пространство, каждый вектор которого представляется в виде: $\langle \alpha | = \sum_m \langle j, m | \alpha_m^*$. Определим в пространствах \mathcal{V} и \mathcal{V}^* операцию \dagger эрмитова сопряжения

$$|j, m\rangle^{\dagger} = \langle j, m |, \quad |\alpha\rangle^{\dagger} = \langle \alpha | = \sum_m \langle j, m | \alpha_m^*, \quad (|\alpha\rangle^{\dagger})^{\dagger} = |\alpha\rangle. \quad (2.1.27)$$

Согласно (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.27), скалярное произведение $\langle \beta | \alpha \rangle$ можно рассматривать как свертку вектора $|\alpha\rangle \in \mathcal{V}$ и вектора $\langle \beta | \in \mathcal{V}^*$. Действие любого элемента $a \in sl(2, \mathbb{C})$ в дуальном пространстве \mathcal{V}^* определяется следующим образом ($\langle \beta | \cdot a | \alpha \rangle := \langle \beta | (a \cdot | \alpha \rangle)$). Тогда, пользуясь формулами (2.1.22), (2.1.25) и (2.1.26), для базисных векторов $\langle j, m | \in \mathcal{V}^*$ мы получаем

$$\langle j, m | \cdot \mathbf{h} = \langle j, m | m, \quad \langle j, m | \cdot e_{\pm} = \langle j, m \mp 1 | \sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)}. \quad (2.1.28)$$

Эрмитово сопряженный элемент a^{\dagger} к элементу $a \in sl(2, \mathbb{C})$ определяется по правилу $(a \cdot | \alpha \rangle)^{\dagger} = \langle \alpha | \cdot a^{\dagger}$, поэтому, сравнивая (2.1.20) и (2.1.28), мы имеем $e_{\pm}^{\dagger} = e_{\mp}$ и $\mathbf{h}^{\dagger} = \mathbf{h}$. Далее, из последнего соотношения в (2.1.28) вытекает представление

$$\langle j, m | = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!(2j)!}} \langle j, j | \cdot e_+^{j-m}. \quad (2.1.29)$$

Здесь $\langle j, j | = |j, j\rangle^{\dagger}$ — дуальный старший вектор, для которого согласно (2.1.28) мы имеем (сравните с (2.1.3))

$$\langle j, j | \cdot e_- = 0, \quad \langle j, j | \cdot \mathbf{h} = j \langle j, j |. \quad (2.1.30)$$

Так как младший вектор в \mathcal{V} определяется соотношениями (см. (2.1.14)):

$$e_- \cdot |j, -j\rangle = 0, \quad \mathbf{h} \cdot |j, -j\rangle = -j |j, -j\rangle, \quad (2.1.31)$$

то для дуального младшего вектора мы имеем

$$\langle j, -j | \cdot e_+ = 0, \quad \langle j, -j | \cdot \mathbf{h} = -j \langle j, -j |. \quad (2.1.32)$$

Отметим, что ортонормированность векторов (2.1.25) согласована с (2.1.22), (2.1.28) и (2.1.29) и это можно проверить непосредственно, проделав вычисление

$$\langle j, m' | j, m \rangle = \sqrt{\frac{(j+m')!}{(j-m')!(2j)!}} \langle j, j | \cdot e_+^{j-m'} \cdot | j, m \rangle = \delta_{m',m} \langle j, j | j, j \rangle = \delta_{m',m}. \quad (2.1.33)$$

Базисные вектора (2.1.19) в пространстве представления $T^{(j)}$ характеризуются двумя числами: спином j (характеристика представления) и весом m – собственным значением оператора $\mathbf{h} = i\tau_3$ (“проекцией оператора вектора спина на третью ось”), при этом веса m могут принимать, согласно (2.1.20), значения $m = j, j-1, \dots, 1-j$. Квадрат оператора вектора спина в этом представлении равен

$$T^{(j)}(J^2) = -T^{(j)}(\tau_\alpha)T^{(j)}(\tau_\alpha) = j(j+1)I_{2j+1}, \quad (2.1.34)$$

что вытекает из (2.1.15), (2.1.20) и (2.1.21).

Замечание 1. Представления $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом j (или с младшим весом $\mu = -j$), где $j \notin \mathbf{Z}_{\geq 0}/2$, являются бесконечномерными. У алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ имеются также бесконечномерные неприводимые представления, которые не являются представлениями со старшим (или младшим) весом, то есть в пространствах этих представлений нет векторов, которые удовлетворяют (2.1.3) (или (2.1.31)) и интерпретируются как старший (или младший) вектор.

Замечание 2. На первый взгляд может показаться странным, что у алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ имеется только одно двумерное неприводимое представление со старшим весом $j = 1/2$, в то время как определяющее \tilde{T} и комплексно сопряженное к нему \tilde{T}^* двумерные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ неэквивалентны^{2,1} (см. раздел **I-3.1.3** в первой части книги). Однако противоречия тут нет. Прежде всего, комплексно сопряженное представление можно определить только для вещественной алгебры Ли, см. Раздел **I-3.2** первой части книги, а алгебра $sl(2, \mathbb{C})$ является комплексной. Поэтому соотношение про комплексно сопряженное представление не имеет отношения к алгебре $sl(2, \mathbb{C})$. С другой стороны, алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$ групп Ли G (касательные пространства к вещественным многообразиям G) — это всегда вещественные алгебры; в частности, алгеброй Ли группы $SL(2, \mathbb{C})$ служит шестимерная вещественная алгебра Ли $\mathcal{A}(SL(2, \mathbb{C})) = \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6 = so(1, 3)$ — о веществе алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Именно ее определяющее T и комплексно сопряженное к нему \tilde{T}^* представления неэквивалентны. Комплексные представления алгебры $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6 = so(1, 3)$ одновременно являются представлениями ее комплексификации $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^6 = so(4, \mathbb{C})$. Последняя изоморфна (см. Утверждение **I-2.2.12** из Раздела **I-2.2.12** первой части книги) прямой сумме $sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$,

^{2,1}Здесь уместно подчеркнуть, что все группы Ли G , включая $SL(2, \mathbb{C})$, мы рассматриваем как вещественные многообразия. Альтернативно, группу $SL(2, \mathbb{C})$ можно рассматривать как комплексное многообразие. При таком подходе $sl(2, \mathbb{C})$ — ее комплексная алгебра Ли. В качестве вещественного аналога группы $SL(2, \mathbb{C})$ выступает группа $Spin(1, 3)$, при этом $\mathcal{A}(Spin(1, 3)) = so(1, 3)$. Подход, при котором группа $SL(2, \mathbb{C})$ рассматривается как комплексное многообразие, мы не используем и отождествляем группы $Spin(1, 3)$ и $SL(2, \mathbb{C})$. Группы $Spin(p, q)$ обсуждаются в Разделе **6.2**.

поэтому у нее имеются два двумерных неэквивалентных и неприводимых представления, которые обозначаются как $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$, где первое и второе число в каждой паре относится к спину представления первой и второй алгебр в прямой сумме $sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$. Они и соответствуют определяющему и сопряженному к нему представлениям группы $SL(2, \mathbb{C})$.

Замечание 3. В Главах 2 и 4 мы в основном рассматриваем комплексные конечномерные представления алгебр Ли $sl(2, \mathbb{C})$, $su(2)$ и группы Ли $SU(2)$, а также алгебр Ли $sl(N, \mathbb{C})$, $su(N)$ и групп Ли $SU(N)$. Как нам уже известно, эти представления находятся во взаимнооднозначном соответствии друг с другом: любое представление алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ является одновременно представлением алгебры $su(2)$ и поднимается до представления группы $SU(2)$ и наоборот. Удобно, однако, в основном для упрощения вида формул, связать с представлениями алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ ограниченный класс представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$. А именно, если элемент $g \in SL(2, \mathbb{C})$ записывается как произведение (см. (2.1.12))

$$g = \exp(a_- e_-) \cdot \exp(a_0 \mathbf{h}) \cdot \exp(a_+ e_+) ,$$

где e_{\pm} , \mathbf{h} — генераторы $sl(2, \mathbb{C})$, и a_{\pm} , a_0 — комплексные параметры, то представления T группы $SL(2, \mathbb{C})$, о которых идет речь, связаны с представлениями T алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ соотношением

$$T(g) = \exp(a_- T(e_-)) \cdot \exp(a_0 T(\mathbf{h})) \cdot \exp(a_+ T(e_+)) \quad (2.1.35)$$

(здесь фигурируют экспоненты от комплексных матриц). Ясно, что эти представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями алгебр Ли $sl(2, \mathbb{C})$, $su(2)$ и группы Ли $SU(2)$. Аналогично обстоит дело с представлениями группы $SL(N, \mathbb{C})$, Глава 4. Предыдущее Замечание показывает, однако, что этот класс представлений $SL(2, \mathbb{C})$ не исчерпывает всех ее конечномерных представлений, поэтому в Главах 2 и 4 мы не претендуем дать полную классификацию представлений групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $SL(N, \mathbb{C})$.

2.2 Дифференциальная реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и представления со старшим весом

2.2.1 Реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ с помощью дифференциальных операторов

1. Группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует в двумерном комплексном пространстве \mathcal{V}_2 . Определим это действие несколько необычным образом. Зададим \mathcal{V}_2 как двумерное векторное пространство всех линейных комбинаций

$$\alpha_1 s + \alpha_2 t = \alpha_{\beta} u^{\beta} , \quad \alpha_{\beta} \in \mathbb{C} , \quad (2.2.1)$$

натянутых на две переменные $s = u^1$ и $t = u^2$ как на базис. Коэффициенты α_{β} выступают в качестве координат вектора в \mathcal{V}_2 . Другими словами, мы ввели \mathcal{V}_2 как комплексное пространство однородных полиномов первого порядка по s и t , в котором мономы s и t выступают в качестве базисных элементов. Теперь в пространстве

однородных полиномов (2.2.1) можно определить действие группы $SL(2, \mathbb{C})$, задав его на базисных элементах $s = u^1$ и $t = u^2$:

$$\begin{aligned} T(g) \cdot (s, t) &= (s, t) g = (sA_1^1 + tA_2^1, sA_1^2 + tA_2^2) = (s', t'), \\ T(g) \cdot u^\alpha &= u^\beta A_\beta^\alpha, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где $g = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix}$ – элемент группы $SL(2, \mathbb{C})$ ($A_\beta^\alpha \in \mathbb{C}$ и $\det(g) = 1$). Представление T , заданное в (2.2.2), называется определяющим. Пусть элемент $g \in SL(2, \mathbb{C})$ имеет экспоненциальное представление (2.1.12), (2.1.13). Тогда, дифференцируя обе части равенства (2.2.2) по каждому из параметров a_0, a_\pm и полагая затем $a_0 = a_+ = a_- = 0$, получаем три соотношения

$$\begin{aligned} T(e_+) \cdot u &= u \cdot e_+ = (0, s), \quad T(e_-) \cdot u = u \cdot e_- = (t, 0), \\ T(\mathbf{h}) \cdot u &= u \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}(s, -t), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где 2×2 матрицы $\mathbf{h}, e_\pm \in sl(2, \mathbb{C})$ даны в (2.1.11) и использовано краткое обозначение u для вектора $(u^1, u^2) = (s, t)$. Из соотношений (2.2.3) следует, что $T(e_+)$, $T(e_-)$ и $T(\mathbf{h})$ можно реализовать как дифференциальные операторы

$$\hat{e}_+ := T(e_+) = s \partial_t, \quad \hat{e}_- := T(e_-) = t \partial_s, \quad \hat{\mathbf{h}} := T(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(s \partial_s - t \partial_t), \quad (2.2.4)$$

(сравните с дифференциальной реализацией (1.2.35) алгебры $sl(d, \mathbb{C})$). Эти операторы, по построению, удовлетворяют структурным соотношениям (2.1.1) для образующих \mathbf{h}, e_\pm алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$.

- *Задача 15. Проверить, что дифференциальные операторы (2.2.4) удовлетворяют соотношениям (2.1.1).*

Отметим, что действие (2.2.2) группы $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве векторов (2.2.1) задает определяющее представление $SL(2, \mathbb{C})$. В этом представлении, согласно (2.2.2), координаты векторов (2.2.1) преобразуются следующим образом $\alpha_\beta \rightarrow \alpha'_\beta = A_\beta^\gamma \alpha_\gamma$.

Данное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ можно обобщить следующим образом. Рассмотрим пространство \mathcal{F} гладких функций $f(s, t) \equiv f(u)$ и определим в этом пространстве действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ следующим образом:

$$[T(g) \cdot f](u) = f(u \cdot g), \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (2.2.5)$$

(сравните это действие с формулой для правого регулярного представления из раздела **I-3.5** первой части книги; см. формулу (2.2.21) ниже). Так как пространство \mathcal{F} — бесконечномерно, то и представление T , заданное в (2.2.5), является бесконечномерным. Ниже мы покажем, что это представление приводимо.

- *Задача 16. Проверить, что заданное в (2.2.5) отображение T из группы $SL(2, \mathbb{C})$ в пространство линейных операторов, действующих в \mathcal{F} , гомоморфно.*

Подставляя g в виде (2.1.12) и дифференцируя (2.2.5) по a_i ($i = 0, \pm$) в точке $a_i = 0$, мы воспроизводим дифференциальное представление (2.2.4) образующих алгебры

Ли $sl(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{h}) \cdot f](u) &= \left. \frac{\partial}{\partial a_0} f(u \cdot g) \right|_{a_i=0} = \frac{1}{2} (s\partial_s - t\partial_t) f(u), \\ [T(e_+) \cdot f](u) &= \left. \frac{\partial}{\partial a_+} f(u \cdot g) \right|_{a_i=0} = s \partial_t f(u), \\ [T(e_-) \cdot f](u) &= \left. \frac{\partial}{\partial a_-} f(u \cdot g) \right|_{a_i=0} = t \partial_s f(u), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(сравните с дифференциальными реализациями алгебр Ли в регулярном представлении; см. раздел **I-6.5.3** в первой части книги). Таким образом, дифференциальное представление (2.2.4) алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, полученное исходя из формул (2.2.2) для определяющего представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, может быть распространено на представление $sl(2, \mathbb{C})$, действующее в бесконечномерном функциональном пространстве \mathcal{F} , элементами которого служат функции двух комплексных переменных.

2. Рассмотрим транспонированный к $u = (s, t)$ вектор-столбец $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{pmatrix}$ с компонентами $\bar{u}_1 = \bar{s}$, $\bar{u}_2 = \bar{t}$ и определим комплексное векторное пространство \mathcal{V}_2 как пространство однородных полиномов первой степени по переменным \bar{s} и \bar{t} :

$$\bar{\alpha}^1 \bar{s} + \bar{\alpha}^2 \bar{t} = \bar{\alpha}^\beta \bar{u}_\beta, \quad \bar{\alpha}^\beta \in \mathbb{C}. \quad (2.2.7)$$

В этом пространстве в качестве базисных векторов выступают переменные \bar{s} и \bar{t} . Далее, определим действие элемента g группы $SL(2, \mathbb{C})$ на базисные вектора в этом пространстве следующим образом (сравните с (2.2.2))

$$\bar{T}(g) \cdot \bar{u}_\alpha = (g^{-1} \cdot \bar{u})_\alpha = (A^{-1})_\alpha^{\beta} \bar{u}_\beta \Leftrightarrow \bar{T}(g) \cdot \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^2 \bar{s} - A_1^2 \bar{t} \\ A_1^1 \bar{t} - A_2^1 \bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}' \\ \bar{t}' \end{pmatrix}, \quad (2.2.8)$$

где $g^{-1} = \|(A^{-1})_\alpha^{\beta}\| = \|\varepsilon^{\beta\beta'} A_{\beta'}^{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'\alpha}\|$ — матрица, обратная к элементу $g = \|A_\alpha^{\beta}\| \in SL(2, \mathbb{C})$ и

$$\|\varepsilon_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|\varepsilon^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (2.2.9)$$

Преобразование (2.2.8) задает представление \bar{T} группы $SL(2, \mathbb{C})$, контраградиентное к определяющему представлению (2.2.2) (см. определение контраградиентного представления в пункте **3** подраздела **I-3.1.1** первой части книги).

Возьмем в (2.2.8) элемент g в виде (2.1.12) и продифференцируем обе части (2.2.8) по параметрам a_0, a_\pm , положив затем $a_0 = a_\pm = 0$. В результате получаем соотношения

$$\begin{aligned} \bar{T}(e_+) \cdot \bar{u} &= -e_+ \cdot \bar{u} = -\begin{pmatrix} \bar{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}(e_-) \cdot \bar{u} = -e_- \cdot \bar{u} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{s} \end{pmatrix}, \\ \bar{T}(\mathbf{h}) \cdot \bar{u} &= -\mathbf{h} \cdot \bar{u} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

которые определяют образующие $\bar{T}(e_\pm)$ и $\bar{T}(\mathbf{h})$ как дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \bar{e}_+ &:= \bar{T}(e_+) = -\bar{t} \partial_s, \quad \bar{e}_- := \bar{T}(e_-) = -\bar{s} \partial_t, \\ \bar{\mathbf{h}} &:= \bar{T}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} (\bar{t} \partial_t - \bar{s} \partial_s). \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Эти операторы, так же как и операторы (2.2.4), образуют базис в алгебре Ли $sl(2, \mathbb{C})$ в представлении \bar{T} , то есть удовлетворяют определяющим соотношениям (2.1.1). Так

же, как в предыдущем случае, это представление обобщается до бесконечномерного представления в пространстве функций $f(\bar{s}, \bar{t})$ двух комплексных переменных, причем образующие по-прежнему имеют вид (2.2.11).

- *Задача 17.* Проверить, что дифференциальное представление (2.2.11) для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ соответствует представлению группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве $\overline{\mathcal{F}}$ гладких функций $f(\bar{u})$:

$$[\overline{T}(g) \cdot f](\bar{u}) = f(g^{-1} \cdot \bar{u}). \quad (2.2.12)$$

Сравните (2.2.12) с формулой для левого регулярного представления из раздела I-3.5 первой части книги (см. формулу (2.2.22) ниже).

Отметим, что преобразование (2.2.8), одновременно с преобразованием (2.2.2), оставляет инвариантным свертку базисных векторов

$$(s, t) \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{pmatrix} = (s\bar{s} + t\bar{t}) = u^\beta \bar{u}_\beta \quad (\beta = 1, 2). \quad (2.2.13)$$

Функция (2.2.13) является однородным полиномом первой степени по переменным s и t и одновременно полиномом первой степени по переменным \bar{s} и \bar{t} , поэтому ее можно рассматривать как элемент, принадлежащий прямому произведению векторных пространств (2.2.1) и (2.2.7).

3. Построим обобщения представлений, рассмотренных выше. Для этого рассмотрим пространство $\mathcal{F}_{(1, \bar{1})}$ гладких функций $f(u, \bar{u})$ (считаем переменные $u = (s, t)$ и $\bar{u} = (\bar{s}, \bar{t})$ независимыми) и определим в этом пространстве представление $T_{(1, \bar{1})}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ следующим образом

$$[T_{(1, \bar{1})}(g) \cdot f](u, \bar{u}) = f(u \cdot g, g^{-1} \cdot \bar{u}), \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (2.2.14)$$

Нетрудно проверить, что отображение $T_{(1, \bar{1})}$ – гомоморфизм. Подставим в (2.2.14) экспоненциальное представление (2.1.12) для элемента g , после чего продифференцируем обе части (2.2.14) по a_0, a_\pm и затем положим $a_0 = a_\pm = 0$. В результате получаем выражения для образующих алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в представлении $T_{(1, \bar{1})}$:

$$T_{(1, \bar{1})}(e_\pm) = (\hat{e}_\pm + \bar{e}_\pm), \quad T_{(1, \bar{1})}(\mathbf{h}) = (\hat{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{h}}), \quad (2.2.15)$$

где операторы $\{\hat{e}_\pm, \hat{\mathbf{h}}\}$ и $\{\bar{e}_\pm, \bar{\mathbf{h}}\}$ даны в (2.2.4) и (2.2.11). Таким образом, для любого элемента $a \in sl(2, \mathbb{C})$ мы имеем $T_{(1, \bar{1})}(a) = T(a) + \overline{T}(a)$, где представления T и \overline{T} были определены в (2.2.5) и (2.2.12). Эта формула отражает тот факт, что представление $T_{(1, \bar{1})}$, заданное в (2.2.14), является прямым произведением представлений T и \overline{T} , заданных в (2.2.5) и (2.2.12) (определение прямого произведения представлений групп и алгебр Ли см. в разделе I-3.3 первой части книги).

- *Задача 18.* Проверить, что дифференциальные операторы (2.2.11), а также операторы (2.2.15), действующие в пространстве гладких функций $f(u, \bar{u})$, удовлетворяют соотношениям (2.1.1). Доказать, что любая функция $f(u^\beta \bar{u}_\beta) \in \mathcal{F}_{(1, \bar{1})}$, зависящая только от комбинации $u^\beta \bar{u}_\beta = s\bar{s} + t\bar{t}$, удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$T_{(1, \bar{1})}(e_\pm) \cdot f(u^\beta \bar{u}_\beta) = 0, \quad T_{(1, \bar{1})}(\mathbf{h}) \cdot f(u^\beta \bar{u}_\beta) = 0. \quad (2.2.16)$$

Указание: получить уравнения (2.2.16) для простейшей функции (2.2.13).

Замечание 1. Преобразования (2.2.8), (2.2.10) можно получить из (2.2.2), (2.2.3) если отождествить

$$\bar{s} = t, \quad \bar{t} = -s \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} u^\beta, \quad (2.2.17)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ - антисимметричный тензор 2-го ранга (2.2.9). Соответственно, образующие (2.2.4) и (2.2.11) также переходят друг в друга посредством преобразований (2.2.17). Данный факт говорит о том, что *определяющее и контраградиентное к нему представление алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ (группы $SL(2, \mathbb{C})$) эквивалентны*, и с точки зрения классификации представлений достаточно рассматривать только одно из них. Тем не менее, далее нам придется использовать оба эти представления.

- **Задача 19.** Получить дифференциальные реализации для образующих τ_α алгебры Ли $su(2)$ в представлении $T_{(1, \bar{1})}$. Указание: использовать соотношения (2.1.15).

Замечание 2. Сделаем в формуле (2.2.14), задающей представление $T_{(1, \bar{1})} = T \otimes \bar{T}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, замену переменных (сравните с (2.2.17))

$$s = s_1, \quad t = t_1, \quad \bar{s} = t_2, \quad \bar{t} = -s_2, \quad (2.2.18)$$

и обозначим $u^\alpha = (s_1, t_1)$ и $v^\alpha = (s_2, t_2)$. В результате формула (2.2.14) для представления $T_{(1, \bar{1})}$ переписывается в виде

$$[T_{(2, \bar{0})}(g) \cdot f](u, v) = f(u \cdot g, v \cdot g), \quad (2.2.19)$$

и определяет представление $T_{(2, \bar{0})}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, которое интерпретируется как прямое произведение двух представлений (2.2.5), то есть $T_{(2, \bar{0})} = T \otimes T$, и действует в пространстве $\mathcal{F}_{(2, \bar{0})}$ функций $f(u^\alpha, v^\beta)$. Конструкции (2.2.14) и (2.2.19) представлений $T_{(1, \bar{1})}$ и $T_{(2, \bar{0})}$ легко обобщаются на случай прямого произведения $T_{(n, \bar{m})}$ произвольного числа представлений T и \bar{T} . Пусть вектора $u_{(k)} = (s_k, t_k)$, где $k = 1, \dots, n$, преобразуются в соответствии с (2.2.2), а вектора $\bar{u}_{(i)} = (\bar{s}_i, \bar{t}_i)$, где $i = 1, \dots, m$, преобразуются как указано в (2.2.8). Тогда представления $T_{(n, \bar{m})} = T^{\otimes n} \otimes \bar{T}^{\otimes m}$ действуют в пространствах $\mathcal{F}_{(n, \bar{m})}$ функций $f(u_{(k)}; \bar{u}_{(i)}) := f(u_{(1)}, \dots, u_{(n)}; \bar{u}_{(1)}, \dots, \bar{u}_{(m)})$ и эти представления определяются формулами

$$[T_{(n, \bar{m})}(g) \cdot f](u_{(k)}; \bar{u}_{(i)}) = f(u_{(k)} \cdot g; g^{-1} \cdot \bar{u}_{(i)}). \quad (2.2.20)$$

Представления $T_{(n, \bar{m})}$ понадобятся нам ниже в разделах 2.4.4 и 2.5.4 при выводе явных выражений для коэффициентов Клебша–Гордана и 6- j символов.

- **Задача 20.** Напомним (см. раздел I-3.5 первой части книги), что правое \tilde{T}_R и левое T_R регулярные представления группы G определяются формулами

$$[\tilde{T}_R(g) \cdot f](h) = f(h \cdot g), \quad (2.2.21)$$

$$[T_R(g) \cdot f](h) = f(g^{-1} \cdot h), \quad (2.2.22)$$

где $g, h \in G$ и f – функции на группе G . Указать дополнительные условия на координаты векторов $u_{(i)}$ и $\bar{u}_{(i)}$ в формуле (2.2.20) для представлений $T_{(2, \bar{0})}$ и $T_{(0, \bar{2})}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, при которых эти представления будут эквивалентны регулярным представлениям (2.2.21), (2.2.22) группы $SL(2, \mathbb{C})$.

2.2.2 Построение представлений со старшим весом для дифференциальных реализаций $sl(2, \mathbb{C})$.

Образующие алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, реализованные операторами (2.2.4), действуют в бесконечномерном пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(1,0)}$ функций $f(s, t)$ от двух переменных s и t . Соответствующие формулы приведены в (2.2.6). Данное представление T алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{F} бесконечномерно и приводимо. Выделим в пространстве \mathcal{F} конечномерные инвариантные подпространства неприводимых представлений $sl(2, \mathbb{C})$, пользуясь техникой построения представлений со старшим весом. Напомним, что старший вектор $v_0(s, t) \in \mathcal{F}$ определяется согласно (2.1.3), поэтому мы имеем:

$$\hat{e}_+ \cdot v_0 = 0, \quad \hat{h} \cdot v_0 = j v \quad \Rightarrow \quad s \partial_t v_0 = 0, \quad (s \partial_s - t \partial_t) v_0 = 2j v_0, \quad (2.2.23)$$

где j – старший вес. Решением этих дифференциальных уравнений, с точностью до произвольного постоянного множителя, является функция

$$v_0 = s^{2j} \in \mathcal{F}, \quad (2.2.24)$$

которую мы и будем рассматривать как старший вектор в \mathcal{F} . Следуя стандартной процедуре, породим из этой функции, действуя на нее понижающими операторами $\hat{e}_- = t \partial_s$, последовательность векторов, аналогичных (2.1.4):

$$\begin{aligned} \hat{e}_- \cdot v_0 = 2j s^{2j-1} t &\Rightarrow \hat{e}_-^2 \cdot v_0 = 2j(2j-1) s^{2j-2} t^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \hat{e}_-^k \cdot v_0 = 2j(2j-1) \cdots (2j-k+1) s^{2j-k} t^k, \dots \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

При этом на каждом шаге степень s понижается на единицу, а степень t повышается на единицу, так что все вектора $\hat{e}_-^k \cdot v_0$ оказываются мономами одной и той же, общей по переменным s и t , степени $2j$, которая определяется степенью старшего вектора (2.2.24). Если $j = \frac{n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ – целое неотрицательное число, то последовательность векторов $\hat{e}_-^k \cdot v_0$ оборвется при $k = 2j + 1$, так как согласно (2.2.25) мы имеем $\hat{e}_-^{2j+1} v_0 = 0$. В этом случае из старшего вектора v_0 (2.2.24) порождается конечное число $(2j + 1)$ базисных векторов

$$T_m^j(s, t) = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} s^{j+m} t^{j-m} =: \langle s, t | j, m \rangle, \quad (2.2.26)$$

$$m = -j, -j+1, \dots, j,$$

которые образуют $(2j+1)$ -мерное пространство \mathcal{V}_{2j+1} , на котором действует неприводимое представление $T^{(j)}$ алгебр Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и $su(2)$. Отметим, что индекс m принимает в (2.2.26) целые значения, если j – целое, и полуцелые значения, если j – полуцелое. В (2.2.26) мы ввели для мономов $T_m^j(s, t)$ обозначение $\langle s, t | j, m \rangle$ вместо $|j, m\rangle$, чтобы отличать данную конкретную форму базисных векторов от векторов (2.1.19), которые использовались для абстрактного построения представлений со старшим весом. Описание упомянутых обозначений – обозначений Дирака [29] – было дано в разделе 1.

Пространство \mathcal{V}_{2j+1} , натянутое на базисные вектора (2.2.26), состоит из всех однородных полиномов от двух переменных (s, t) общей степени $2j$ (сравните с (2.2.1)):

$$P_{2j}(s, t) = \sum_{m=-j}^j \alpha_m T_m^j(s, t), \quad \alpha_m \in \mathbb{C}, \quad (2.2.27)$$

и является конечномерным подпространством в \mathcal{F} , инвариантным относительно действия (2.2.6) образующих алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ (и $su(2)$). Подпространство $\mathcal{V}_{2j+1} \in \mathcal{F}$ будет одновременно пространством неприводимого представления $T^{(j)}$ не только для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ (и $su(2)$), но и для соответствующей группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$ (и $SU(2)$), что следует из формулы (2.2.5) для действия этой группы в представлении T (это действие сохраняет степень однородности полиномов).

Нормировочный множитель в (2.2.26) выбран так, чтобы вектора (2.2.26) образовывали ортонормированный базис по отношению к скалярному произведению

$$(P(s, t), P'(s, t)) = P^*(\partial_s, \partial_t) \cdot P'(s, t) \Big|_{s=t=0}, \quad (2.2.28)$$

где $P(s, t)$ и $P'(s, t)$ – любые полиномы из \mathcal{F} , причем для $P(s, t) = \sum_{n_s, n_t} C_{n_s, n_t} s^{n_s} t^{n_t}$ мы имеем $P^*(\partial_s, \partial_t) = \sum_{n_s, n_t} C_{n_s, n_t}^* \partial_s^{n_s} \partial_t^{n_t}$. Скалярное произведение (2.2.28) эквивалентно скалярному произведению, заданному в (2.1.33), в силу их совпадения на базисных векторах в соответствующих пространствах представлений.

Замечание 1. Поясним, каким образом скалярное произведение (2.2.28), возникающее в контексте $sl(2, \mathbb{C})$, соотносится с таким же по форме скалярным произведением (1.2.24), которое рассматривалось (см. Утверждение 1.2.2) в контексте голоморфного представления в квантовой механике. Связь между указанными скалярными произведениями возникает при реализации (1.2.30) образующих $E_{ij} \in sl(d, \mathbb{C})$ как квадратичных комбинаций осцилляторов (представление Йордана-Швингера). В голоморфном представлении базис алгебры $sl(d, \mathbb{C})$ в этой реализации записывается в виде дифференциальных операторов (1.2.35), которые при $d = 2$ и замене переменных $(z_1, z_2) = (s, t)$ в точности совпадают с операторами (2.2.4). Напомним, что голоморфное представление задано в пространстве полиномов с базисом (1.2.23) и скалярным произведением (1.2.24). Соответственно, при $d = 2$ мы получаем, что дифференциальное представление (2.2.4) алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ действует в пространстве полиномов $P(s, t)$ с базисом (2.2.26) и скалярным произведением (2.2.28).

В качестве примера приведем функции $T_m^j(s, t)$ для значений $j = \frac{1}{2}, 1$:

- 1.) $j = 1/2$ ($m = \pm 1/2$) $\Rightarrow T_{-1/2}^{1/2} = t$, $T_{1/2}^{1/2} = s$,
- 2.) $j = 1$ ($m = -1, 0, 1$) $\Rightarrow T_{-1}^1 = t^2/\sqrt{2}$, $T_0^1 = st$, $T_1^1 = s^2/\sqrt{2}$.

Таким образом, в случае $j = 1/2$ функции $T_m^{1/2}$ воспроизводят базисные вектора $u = (s, t)$ определяющего представления, которые использовались для построения дифференциальной реализации (2.2.4). В случае $j = 1$ мы получили базисные мономы для трехмерного пространства полиномов $P_2(s, t)$, в котором действует присоединенное представление алгебры $sl(2, \mathbb{C})$.

- **Задача 21.** Построить конечномерные представления $\bar{T}^{(j)}$ со старшим весом для контраградиентного представления алгебры и группы Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и $SL(2, \mathbb{C})$, которые заданы в (2.2.11) и (2.2.12). Показать, что базисные вектора в пространстве этих представлений реализуется однородными мономы (сравните с (2.2.26)):

$$\bar{T}_m^j = \frac{(-1)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \bar{s}^{j-m} \bar{t}^{j+m}. \quad (2.2.29)$$

Указание: выберите старший вектор в виде функции: $(-\bar{t})^{2j} \in \mathcal{F}_{(0,1)}$.

Отметим, что при отождествлении (2.2.17) мы имеем $\overline{T}_m^j = T_m^j$, как и следовало ожидать.

По построению все вектора (2.2.26) являются собственными векторами для дифференциального оператора \hat{h} (2.2.4):

$$\hat{h} T_m^j = m T_m^j \Leftrightarrow \hat{h} |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (2.2.30)$$

(далее в этом разделе мы для краткости будем опускать часть $\langle s, t |$ в обозначениях $\langle s, t | j, m \rangle$ для векторов (2.2.26), имея ее ввиду для понимания существа дела). Кроме того, пользуясь явными формулами для образующих (2.2.4), мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} \hat{e}_+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle, \\ \hat{e}_- |j, m\rangle &= \sqrt{(j-m+1)(j+m)} |j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Формулы (2.2.30) и (2.2.31) совпадают с (2.1.22) и (2.1.23), при этом, как мы уже говорили, базисные вектора (2.2.26) удовлетворяют условию ортонормированности (2.1.25) по отношению к скалярному произведению (2.2.28). Таким образом, мы воспроизвели в формализме дифференциальных реализаций результаты раздела 2.1.

Те же формулы (2.2.30) и (2.2.31) имеют место и для контраградиентных представлений (2.2.11) и (2.2.29), что следует из эквивалентности (2.2.17).

- *Задача 22. Получить обобщения формул (2.2.31):*

$$\hat{e}_\pm^k |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j \pm m + k)!(j \mp m)!}{(j \pm m)!(j \mp m - k)!}} |j, m \pm k\rangle. \quad (2.2.32)$$

Рассмотрим прямое произведение $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$ двух неприводимых представлений $T^{(j)}$ и $\overline{T}^{(j)}$, где $j = n/2$ и $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, действующих в функциональных пространствах с базисами (2.2.26) и (2.2.29), соответственно. В качестве базиса в пространстве представления $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$ можно выбрать все мономы вида $T_m^j(u) \cdot \overline{T}_{m'}^j(\bar{u})$, где индексы m, m' пробегает значения $-j, \dots, j-1, j$. Представление $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$ в общем случае приводимо и в его разложении по неприводимым представлениям содержится тривиальное одномерное представление. Это тривиальное представление понадобится нам ниже, при вычислении коэффициентов Клебша–Гордана (см. раздел 2.4.4), поэтому мы выделим его из $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$ явно. Для этого необходимо найти вектор $f(u, \bar{u})$ в пространстве представления $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$, который инвариантен относительно преобразований (2.2.14), то есть на $f(u, \bar{u})$ реализуется тривиальное одномерное представление алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ (группы $SL(2, \mathbb{C})$). Рассмотрим функцию $(u^\beta \bar{u}_\beta)^{2j} = (s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$, которая является однородным полиномом степени $2j$ как по переменным (s, t) , так и по переменным (\bar{s}, \bar{t}) , и поэтому данная функция – вектор в пространстве представления $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$. Функция $(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$ инвариантна относительно преобразований (2.2.14), что в частности выражается в виде уравнений (2.2.16). Это означает, что функция $(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$ – искомым вектор в пространстве представления $T^{(j)} \otimes \overline{T}^{(j)}$, образующий инвариантное одномерное подпространство тривиального представления. Наконец, разложим $(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$ с помощью формулы бинома Ньютона:

$$(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j} = (2j)! \sum_{m=-j}^j \frac{(s\bar{s})^{j+m} (t\bar{t})^{j-m}}{(j+m)!(j-m)!} = (2j)! \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \overline{T}_{-m}^j(\bar{u}) T_m^j(u). \quad (2.2.33)$$

В силу инвариантности $(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$ правая часть (2.2.33) интерпретируется как инвариантная свертка базисных векторов T_m^j (2.2.26) и \bar{T}_m^j (2.2.29) из пространств представлений $T^{(j)}$ и $\bar{T}^{(j)}$.

Замечание 2. Любой однородный полином $P_{2j}(s, t)$, составленный как линейная комбинация базисных мономов (2.2.26), может быть записан в виде

$$P_{2j}(s, t) = t^{2j} \phi_{2j}(z), \quad (2.2.34)$$

где мы сделали замену переменных $s, t \rightarrow z = s/t, t$ и определили полином $\phi_{2j}(z)$ степени $2j$ от одной переменной $z = s/t$. В новых переменных (z, t) операторы \hat{e}_\pm, \hat{h} (2.2.4) записываются следующим образом

$$\hat{e}_+ = zt\partial_t - z^2\partial_z, \quad \hat{e}_- = \partial_z, \quad \hat{h} = z\partial_z - \frac{1}{2}t\partial_t, \quad (2.2.35)$$

Так как действие операторов \hat{e}_\pm, \hat{h} на полиномы $P_{2j}(s, t)$ не меняет их степень однородности, то, пользуясь (2.2.34) и (2.2.35), можно определить действие этих операторов в пространстве полиномов $\phi_{2j}(z)$ с помощью соотношений

$$\hat{e}_\pm \cdot (t^{2j} \phi_{2j}(z)) = t^{2j} T_z(e_\pm) \cdot \phi_{2j}(z), \quad \hat{h} \cdot (t^{2j} \phi_{2j}(z)) = t^{2j} T_z(h) \cdot \phi_{2j}(z), \quad (2.2.36)$$

из которых мы находим:

$$T_z(e_+) = 2jz - z^2\partial_z, \quad T_z(e_-) = \partial_z, \quad T_z(h) = z\partial_z - j. \quad (2.2.37)$$

Формулы (2.2.37) задают представление алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в пространстве полиномов $2j$ -го порядка от одной переменной z . Соответствующее представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ вытекает из формул (2.2.2) и (2.2.5). Согласно (2.2.5) действие элемента $g \in SL(2, \mathbb{C})$ на любой однородный полином $P_{2j}(s, t)$ имеет вид

$$[T(g) \cdot P_{2j}](s, t) = P_{2j}(s', t') = (t')^{2j} \phi_{2j}(s'/t') = (t)^{2j} (t'/t)^{2j} \phi_{2j}(s'/t'), \quad (2.2.38)$$

где преобразованные переменные s', t' и функция $\phi_{2j}(s/t)$ определены в (2.2.5) и (2.2.34). Деля в левой части соотношения (2.2.38) замену (2.2.34), мы получаем представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве полиномов $\phi_{2j}(z)$:

$$[T_z(g) \cdot \phi_{2j}](z) = (A_1^2 z + A_2^2)^{2j} \phi_{2j}\left(\frac{A_1^1 z + A_2^1}{A_1^2 z + A_2^2}\right). \quad (2.2.39)$$

Представления (2.2.37) и (2.2.39) будут рассмотрены нами с несколько иной точки зрения в следующем подразделе 2.2.3.

- **Задача 23.** Доказать, что операторы (2.2.37) образуют базис алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Получить представление (2.2.37) алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, исходя из представления (2.2.39) группы $SL(2, \mathbb{C})$. Вычислить оператор Казимира J^2 для реализации (2.2.37).
- **Задача 24.** Для реализации (2.2.37) алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ найти старший вектор v_0 :

$$e_+ v_0 = 0, \quad h v_0 = \lambda v_0,$$

доказать, что $\lambda = j$, и построить представление T для $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом $\lambda = j$. Показать, что T – конечномерное представление, только если $2j$ – целое неотрицательное число. Описать в этом случае пространство представления T и найти его размерность. Описать бесконечномерные представления $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом в случае $2j \neq \mathbf{Z}_{\geq 0}$.

2.2.3 Когерентные состояния для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$

В этом подразделе мы обсудим еще один важный пример использования обозначений Дирака (см. раздел 1). Эти обозначения удобны не только для описания когерентных состояний алгебры осцилляторов (см. подраздел 1.2), но и для описания когерентных состояний алгебр Ли. Мы построим когерентные состояния для простейшего случая алгебр Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и $su(2)$. В этом случае мы покажем, что дифференциальное представление (2.2.37) алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ и представление (2.2.39) группы $SL(2, \mathbb{C})$ естественным образом возникают как представления в пространстве соответствующих когерентных состояний.

Выберем в алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ стандартный базис $\{e_{\pm}, \mathfrak{h}\}$, с определяющими соотношениями (2.1.1). Как мы отметили в разделе 2.1, базис $\{\tau_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) алгебры $su(2)$ — вещественной формы алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, связан с базисом $\{e_{\pm}, \mathfrak{h}\}$ алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ посредством преобразований (2.1.15), при этом условие антиэрмитовости $\tau_i^{\dagger} = -\tau_i$ в каком-либо представлении для образующих $su(2)$ диктует в том же представлении правило эрмитова сопряжения для элементов $\{e_{\pm}, \mathfrak{h}\}$ (см. (2.1.18)):

$$\mathfrak{h}^{\dagger} = \mathfrak{h}, \quad e_{+}^{\dagger} = e_{-}, \quad e_{-}^{\dagger} = e_{+}. \quad (2.2.40)$$

Построим для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ представление $T_{(-j)}$ с младшим весом $(-j)$, пользуясь методами, сформулированными в разделе I-3.7.3 первой части книги. Пусть $|-j\rangle$ — младший вектор в пространстве \mathcal{V} представления $T_{(-j)}$ такой, что

$$e_{-}|-j\rangle = 0, \quad \mathfrak{h}|-j\rangle = -j|-j\rangle, \quad (2.2.41)$$

где в силу условия $\mathfrak{h}^{\dagger} = \mathfrak{h}$ мы имеем $j \in \mathbb{R}$. По аналогии с представлением Фока для квантового осциллятора (см. подраздел 1.2) будем называть младший вектор $|-j\rangle$ вакуумом. Все базисные вектора $|m\rangle \in \mathcal{V}$ получаются действием на вакуум $|-j\rangle$ повышающих операторов e_{+} :

$$|m\rangle := c_m e_{+}^{j+m} |-j\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}|m\rangle = m|m\rangle, \quad (2.2.42)$$

где $m = -j, -j+1, \dots$, то есть $(j+m)$ — целое неотрицательное число. Нормировочный коэффициент c_m мы зафиксируем ниже.

Известно, что представление $T_{(-j)}$ конечномерно и неприводимо тогда и только тогда, когда $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$ — целое или полуцелое неотрицательное число. В этом случае представление $T_{(-j)}$ с младшим весом $(-j)$ эквивалентно представлению $T^{(j)}$ со старшим весом j . Напомним, что все конечномерные и неприводимые представления $T^{(j)}$ со старшим весом $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$ были построены в подразделе I-3.7.3 первой части книги и кратко обсуждались выше в разделе 2.1.

Пусть в пространстве \mathcal{V} представления $T_{(-j)}$ существует эрмитово скалярное произведение $\langle \Psi | \Phi \rangle \in \mathbb{C}$: (см. разделы 1.1 и 2.1):

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = (\langle \Psi | \Phi \rangle)^*, \quad (2.2.43)$$

где $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ два произвольных вектора из \mathcal{V} . Эрмитово сопряженные вектора $\langle \Psi | = |\Psi\rangle^{\dagger}$ образуют пространство \mathcal{V}^* дуальное к пространству \mathcal{V} . Выберем в пространстве \mathcal{V}^* базис, состоящий из векторов $\langle m | = |m\rangle^{\dagger}$ (сравните с (2.1.27)), где $|m\rangle$ — базисные вектора (2.2.42) в пространстве \mathcal{V} . Дуальный вакуумный вектор $\langle -j |$ в силу свойств (2.2.40), (2.2.41) определяется соотношениями

$$\langle -j | e_{+} = 0, \quad \langle -j | \mathfrak{h} = (-j) \langle -j |, \quad (2.2.44)$$

а все базисные вектора $\langle m | \in \mathcal{V}^*$, согласно (2.2.42), строятся в результате действия на дуальный вакуум $\langle -j |$ справа операторами e_{-}

$$\langle m | = |m\rangle^{\dagger} = (c_m e_{+}^{j+m} |-j\rangle)^{\dagger} = c_m^* \langle -j | e_{-}^{j+m}, \quad m = -j, -j+1, \dots$$

Вычисление свертки двух базисных векторов дает

$$\langle m' | m \rangle = c_{m'}^* c_m \langle -j | e_{-}^{j+m'} e_{+}^{j+m} |-j\rangle = \delta_{j+m', j+m} |c_m|^2 (j+m)! (2j)_m,$$

где мы многократно применили формулу (2.1.6), переписанную в виде

$$e_{-}^k e_{+} = e_{+} e_{-}^k - k(2\mathfrak{h} + k - 1) e_{-}^{k-1},$$

и положили $\langle -j | -j \rangle = 1$, а также ввели обозначение

$$(2j)_m = (2j) \cdot (2j - 1) \cdots (j - m + 1) = \frac{\Gamma(2j + 1)}{\Gamma(j - m + 1)}, \quad (2.2.45)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Таким образом, для того чтобы система векторов (2.2.42) была ортонормирована (см. (2.1.25))

$$\langle m' | m \rangle = \delta_{j+m', j+m}, \quad (2.2.46)$$

нам необходимо выбрать коэффициенты c_m в определении (2.2.42) с точностью до фазового множителя в следующем виде (сравните с нормировочным коэффициентом в формуле (2.1.29))

$$c_m = ((j + m)! (2j)_m)^{-1/2} = \left(\frac{\Gamma(2j + 1) \Gamma(j + m + 1)}{\Gamma(j - m + 1)} \right)^{-1/2}. \quad (2.2.47)$$

Единичный оператор I в пространстве \mathcal{V} разлагается по полной системе ортонормированных базисных векторов (2.2.42) стандартным образом (1.1.5)

$$I = \sum_{m=-j}^{\infty} |m\rangle \langle m|, \quad (2.2.48)$$

и соответственно любой вектор $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ представим в виде линейной комбинации базисных векторов $|m\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=-j}^{\infty} |m\rangle \langle m|\Psi\rangle, \quad (2.2.49)$$

где $\langle m|\Psi\rangle \in \mathbb{C}$ — координаты вектора $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ в выбранном базисе.

Рассмотрим теперь производящую функцию для базисных векторов (2.2.42)

$$|z\rangle := \exp(ze_+) | -j \rangle, \quad (2.2.50)$$

которая называется *когерентным состоянием* алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ в представлении $T_{(-j)}$.

Утверждение 2.2.1 *Когерентное состояние (2.2.50) в представлении $T_{(-j)}$ удовлетворяет следующим уравнениям*

$$e_+ |z\rangle = \partial_z |z\rangle, \quad \mathbf{h} |z\rangle = (z \partial_z - j) |z\rangle, \quad e_- |z\rangle = (2jz - z^2 \partial_z) |z\rangle. \quad (2.2.51)$$

Доказательство. Первое соотношение в (2.2.51) очевидно. Два других соотношения доказываются с помощью формул

$$e^{-ze_+} \mathbf{h} e^{ze_+} = \mathbf{h} + z e_+, \quad e^{-ze_+} e_- e^{ze_+} = e_- - 2z \mathbf{h} - z^2 e_+,$$

которые в свою очередь следуют из равенства

$$e^A \cdot B \cdot e^{-A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{[A, [A, \dots [A, B] \dots]]}_k,$$

где A и B — произвольные операторы. ■

Применяя эрмитово сопряжение к обеим частям формулы (2.2.50), мы получаем определение *дуального когерентного состояния* в пространстве \mathcal{V}^*

$$\langle z| := \langle -j| \exp(ze_-), \quad (2.2.52)$$

для которого формулы (2.2.51) с помощью эрмитова сопряжения переписываются следующим образом

$$\langle z| e_- = \partial_z \langle z|, \quad \langle z| \mathbf{h} = (z \partial_z - j) \langle z|, \quad \langle z| e_+ = (2jz - z^2 \partial_z) \langle z|. \quad (2.2.53)$$

Далее мы ограничимся рассмотрением случая конечномерных представлений, когда $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$ и $m = -j, -j+1, \dots, j$. В этом случае пространство представления \mathcal{V} имеет размерность $(2j+1)$, а единичный оператор (2.2.48) записывается в виде

$$I = \sum_{m=-j}^j |m\rangle\langle m|. \quad (2.2.54)$$

В конечномерном случае когерентные состояния образуют полную систему векторов в \mathcal{V} . Это следует из утверждения о том, что единичный оператор (2.2.54) можно разложить по базису когерентных состояний.

Утверждение 2.2.2 *С помощью базиса когерентных состояний (2.2.50) единичный оператор в пространстве \mathcal{V} записывается в виде*

$$I = \int d^2z \mu(z, \bar{z}) |z\rangle\langle \bar{z}|, \quad (2.2.55)$$

где $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\bar{z} := z^* = x - iy$ и $d^2z := dx dy$, а функция $\mu(z, \bar{z})$ равна

$$\mu(z, \bar{z}) = \frac{(2j+1)}{\pi} \frac{1}{(1+z\bar{z})^{2j+2}}. \quad (2.2.56)$$

Доказательство. Покажем, что оператор (2.2.55) коммутирует со всеми образующими $e_{\pm}, \mathfrak{h} \in sl(2, \mathbb{C})$ в представлении $T_{(-j)}$:

$$e_{\pm} \cdot I = I \cdot e_{\pm}, \quad \mathfrak{h} \cdot I = I \cdot \mathfrak{h}. \quad (2.2.57)$$

Подставляя в эти соотношения формулу (2.2.55) для оператора I и используя равенства (2.2.51) и (2.2.53), мы получаем систему дифференциальных уравнений на функцию $\mu(z, \bar{z})$:

$$(\partial_{\bar{z}} \bar{z}^2 + 2\bar{z}j)\mu = -\partial_z \mu, \quad (\partial_z z^2 + 2zj)\mu = -\partial_{\bar{z}} \mu, \quad \bar{z} \partial_z \mu = z \partial_{\bar{z}} \mu.$$

Из последнего соотношения следует, что функция $\mu(z, \bar{z})$ зависит только от произведения $x = z\bar{z}$. В этом случае первое и второе уравнения сводятся к одному и тому же уравнению

$$(2(1+j) + (1+x)\partial_x)\mu = 0, \quad (2.2.58)$$

которое имеет общее решение $\mu(x) = c(1+x)^{-2j-2}$, где c – константа. Подстановка этого решения в (2.2.55) дает оператор

$$I = c \int \frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} |z\rangle\langle \bar{z}|, \quad (2.2.59)$$

коммутирующий со всеми образующими алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в неприводимом представлении $T_{(-j)}$ (см. (2.2.57)) и следовательно, согласно лемме Шура, пропорциональный единичному оператору. Константу c зафиксируем из соотношений $|w\rangle = I \cdot |w\rangle$, где $|w\rangle$ – произвольное когерентное состояние (2.2.50):

$$\begin{aligned} |w\rangle = I \cdot |w\rangle &= c \int \frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} |z\rangle\langle \bar{z}|w\rangle = c \int \frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} |z\rangle\langle \bar{z}|e^{w \cdot e_+} | -j\rangle = \\ &= c \int \frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} e^{z e_+} |w\rangle \langle \bar{z} | -j\rangle = \left(c \int \frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} \right) |w\rangle, \end{aligned} \quad (2.2.60)$$

где мы учли равенства (2.2.57), $e^{w \cdot e_+} |z\rangle = e^{z e_+} |w\rangle$ и $\langle \bar{z} | -j\rangle = 1$, а также условие $\int d^2z \mu(z\bar{z}) z^k \sim \delta_{k,0}$. Сравнивая левую и правую части в (2.2.60) мы находим константу c :

$$c^{-1} = \int \frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} = \frac{\pi}{2j+1}, \quad (2.2.61)$$

что окончательно фиксирует вид (2.2.55), (2.2.56) единичного оператора в \mathcal{V} . ■

- **Задача 25.** Показать прямым вычислением, что правые части равенств (2.2.54) и (2.2.55) тождественно совпадают. Указание: для отождествления правых частей (2.2.54) и (2.2.55) вычислить интеграл^{2,2}

$$\int d^2 z \frac{z^{m+j} \bar{z}^{k+j}}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} = \pi \delta_{k,m} \frac{(j+m)!(j-m)!}{(2j+1)!}. \quad (2.2.62)$$

Пользуясь соотношением полноты (2.2.55), мы можем разложить любой вектор $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ по базису когерентных состояний

$$|\Psi\rangle = \int d^2 z \mu(z, \bar{z}) |z\rangle \langle \bar{z} | \Psi\rangle = \int d^2 z \mu(z, \bar{z}) |\bar{z}\rangle \langle z | \Psi\rangle, \quad (2.2.63)$$

(в последнем равенстве мы сделали замену переменных интегрирования $z \leftrightarrow \bar{z}$). Таким образом, в качестве координат вектора $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ в базисе когерентных состояний выступают волновые функции $\Psi(z) := \langle z | \Psi\rangle$, причем действие образующих $\{e_{\pm}, \mathfrak{h}\}$ на эти волновые функции в соответствии с (2.2.53) дается формулами

$$\begin{aligned} \langle z | e_- | \Psi\rangle &= \partial_z \langle z | \Psi\rangle = \partial_z \Psi(z), & \langle z | \mathfrak{h} | \Psi\rangle &= (z \partial_z - j) \langle z | \Psi\rangle = (z \partial_z - j) \Psi(z), \\ \langle z | e_+ | \Psi\rangle &= (2jz - z^2 \partial_z) \langle z | \Psi\rangle = (2jz - z^2 \partial_z) \Psi(z). \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

Заметим, что в правых частях этих соотношений возникает дифференциальное представление для образующих алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, которое мы получили ранее (см. (2.2.37)) исходя из других соображений. Наконец воспользуемся формулой для единичного оператора (2.2.59) и представим эрмитово скалярное произведение (2.2.43) в терминах волновых функций $\Psi(z) = \langle z | \Psi\rangle$ следующим образом

$$\langle \Psi | \Phi\rangle = c \int \frac{d^2 z}{(1+z\bar{z})^{2+2j}} \langle \Psi | \bar{z}\rangle \langle z | \Phi\rangle = c \int \frac{\overline{\Psi(z)} \Phi(z)}{(1+|z|^2)^{2+2j}} dz d\bar{z}, \quad (2.2.65)$$

где константа c фиксирована в (2.2.61). В базисе когерентных состояний (2.2.52), вектору $|m\rangle$, который мы определили в (2.2.42), соответствует волновая функция:

$$\langle z | m\rangle = a_m z^{j+m}, \quad a_m := \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{1/2}. \quad (2.2.66)$$

То есть, базисному вектору $|m\rangle$ соответствует моном по переменной z степени $(j+m)$. Любой вектор $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ разлагается (см. (2.2.49)) по базисным векторам $|m\rangle$ и следовательно его волновая функция записывается в виде полинома от переменной z степени $2j$

$$\Psi(z) = \langle z | \Psi\rangle = \sum_{m=-j}^j \langle z | m\rangle \langle m | \Psi\rangle = \sum_{m=-j}^j \Psi_m z^{j+m},$$

где $\Psi_m = a_m \langle m | \Psi\rangle \in \mathbb{C}$. Поэтому неприводимое конечномерное представление $T_{(-j)}$ алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ реализуется на пространстве \mathcal{P}_{2j} полиномов от переменной z степени $2j$. При этом действие образующих алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{P}_{2j} задается формулами (2.2.64) и переводит полиномы из \mathcal{P}_{2j} в полиномы из \mathcal{P}_{2j} . Данное представление алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ уже рассматривалось нами в конце подраздела 2.2.2.

- **Задача 26.** Проверить ортонормированность (2.2.46) базисных волновых функций (2.2.66). Указание: воспользоваться представлением (2.2.65) и интегралом (2.2.62).

Действие образующих алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, реализованных в виде дифференциальных операторов (2.2.64), очевидным образом распространяется на бесконечномерное пространство \mathcal{F} гладких функций от z . Данное представление T_z приводимо, так как в \mathcal{F} всегда (для любого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) можно выделить инвариантное подпространство полиномов степени $2j$, на котором реализуется конечномерное представление $T_{(-j)}$. Представление T_z алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ соответствует некоторому бесконечномерному приводимому представлению T_z группы $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{F} . Найдем явную формулу для действия группы $SL(2, \mathbb{C})$ в представлении T_z , которая вытекает из формул (2.2.64) для действия алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$.

^{2,2}Этот интеграл обобщает (2.2.61), а также обобщает интегральное условие $\int d^2 z \mu(z\bar{z}) z^k \sim \delta_{k,0}$, использованное при выводе (2.2.60).

Утверждение 2.2.3 Пусть представление T_z группы $SL(2, \mathbb{C})$ в бесконечномерном пространстве \mathcal{F} соответствует дифференциальному представлению (2.2.64) алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Тогда действие элемента $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ на функции $\Psi(z) \in \mathcal{F}$ в представлении T_z определяется формулой (сравните с (2.2.39))

$$T_z(g) \cdot \Psi(z) = (bz + d)^{2j} \Psi\left(\frac{az + c}{bz + d}\right). \quad (2.2.67)$$

Доказательство. Произвольный элемент $g \in SL(2, \mathbb{C})$ представим следующим образом (см. Задачу 13)

$$g = \exp(a_- e_-) \cdot \exp(a_0 \mathbf{h}) \cdot \exp(a_+ e_+), \quad (2.2.68)$$

где a_{\pm}, a_0 – комплексные параметры. В определяющем представлении (2.1.11) элемент (2.2.68) записывается в виде (2×2) матрицы (2.1.13):

$$g = \begin{pmatrix} e^{\frac{a_0}{2}} & a_+ e^{\frac{a_0}{2}} \\ a_- e^{-\frac{a_0}{2}} & e^{-\frac{a_0}{2}} + a_+ a_- e^{\frac{a_0}{2}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.2.69)$$

В представлении T_z образующие e_{\pm}, \mathbf{h} действуют в пространстве \mathcal{F} как дифференциальные операторы (2.2.64) и справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} T_z(\exp(a_- e_-)) \cdot \Psi(z) &= e^{a_- \partial_z} \cdot \Psi(z) = \Psi(z + a_-), \\ T_z(\exp(a_0 \mathbf{h})) \cdot \Psi(z) &= e^{a_0(z \partial_z - j)} \cdot \Psi(z) = e^{-j a_0} \Psi(e^{a_0} z), \end{aligned} \quad (2.2.70)$$

$$T_z(\exp(a_+ e_+)) \cdot \Psi(z) = e^{a_+(-z^2 \partial_z + 2jz)} \cdot \Psi(z) = (1 + a_+ z)^{2j} \Psi\left(\frac{z}{1 + a_+ z}\right). \quad (2.2.71)$$

Формулы (2.2.70) проверяются достаточно просто (мы предлагаем проделать эту проверку в качестве самостоятельного упражнения). Перепишем левую часть (2.2.71) в виде

$$e^{\lambda e_+} \cdot \Psi(z) = \Psi(e^{\lambda e_+} z e^{-\lambda e_+}) e^{\lambda e_+} \cdot 1, \quad (2.2.72)$$

где для краткости вместо $T_z(e^{\lambda e_+})$ мы пишем $e^{\lambda e_+}$. Тогда формула (2.2.71) следует из равенств

$$e^{\lambda e_+} z e^{-\lambda e_+} = \frac{z}{(1 + \lambda z)}, \quad e^{\lambda e_+} \cdot 1 = (1 + \lambda z)^{2j}. \quad (2.2.73)$$

Первое равенство в (2.2.73) понимается как операторное, а во втором точка обозначает действие оператора $e^{\lambda e_+}$ на функцию (например, $\partial_z \cdot 1 = 0$ и так далее).

- **Задача 27.** ★ Вывести тождества (2.2.72) и (2.2.73) и получить из них формулу (2.2.71).

Наконец, пользуясь соотношениями (2.2.70), (2.2.71) найдем результат действия элемента (2.2.68) на функцию $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} T_z(g) \cdot \Psi(z) &= T_z(e^{a_- e_-}) \cdot T_z(e^{a_0 \mathbf{h}}) \cdot T_z(e^{a_+ e_+}) \cdot \Psi(z) = \\ &= T_z(e^{a_- e_-}) \cdot T_z(e^{a_0 \mathbf{h}}) \cdot (1 + a_+ z)^{2j} \Psi\left(\frac{z}{1 + a_+ z}\right) = \\ &= T_z(e^{a_- e_-}) \cdot e^{-j a_0} (1 + a_+ e^{a_0} z)^{2j} \Psi\left(\frac{e^{a_0} z}{1 + a_+ e^{a_0} z}\right) = \\ &= (e^{-\frac{a_0}{2}} + a_+ e^{\frac{a_0}{2}}(z + a_-))^{2j} \Psi\left(\frac{e^{a_0}(z + a_-)}{1 + a_+ e^{a_0}(z + a_-)}\right) = (bz + d)^{2j} \Psi\left(\frac{az + c}{bz + d}\right), \end{aligned}$$

где коэффициенты a, b, c, d определяются в (2.2.69). Сравнив левую и правую части мы получаем (2.2.67). ■

- **Задача 28.** Доказать, что в случае, когда $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$, действие (2.2.67) группы $SL(2, \mathbb{C})$ переводит полиномы $\Psi(z) \in \mathcal{P}_{2j}$ степени $2j$ в полиномы степени $2j$.

2.3 Конечномерные представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$

2.3.1 Параметризации группы $SU(2)$

В разделе **I-6.2** первой части книги были построены параметризации групп $U(n)$ в терминах $\frac{n(n-1)}{2}$ гиперсферических углов и $\frac{n(n+1)}{2}$ фаз (см. формулу (I-6.2.38)). На основе этих параметризаций можно получить параметризации групп $SU(n)$. В частности, в разделе **I-6.2** была дана параметризация группы $SU(2)$ в терминах углов Эйлера (см. формулу (I-6.2.37)). В данном разделе мы детально обсудим несколько различных параметризаций группы $SU(2)$, которые понадобятся нам ниже. Напомним, что многообразием группы $SU(2)$ является сфера S^3 , поэтому указанные параметризации применимы и для сферы S^3 , и соответственно широко используются в различных физических приложениях.

Напомним (см. раздел **I-2.1.2** первой части книги), что любой элемент U группы Ли $SU(2)$ можно записать в виде

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (2.3.1)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Положим $\alpha = x_0 + ix_3$, $\beta = x_2 + ix_1$ ($x_m \in \mathbb{R}$), тогда любой элемент (2.3.1) группы $SU(2)$ представляется следующим образом

$$U = I_2 x_0 + \sum_{k=1}^3 i \sigma_k x_k, \quad \sum_{m=0}^3 x_m x_m = 1, \quad (2.3.2)$$

где σ_k — матрицы Паули (2.1.16), а I_2 — единичная 2×2 матрица. Из представления (2.3.2) следует, что многообразие группы $SU(2)$ — это сфера S^3 , а U — кватернион единичной длины (определение кватернионов дано в разделе **I-2.2.12** первой части книги).

Любой элемент A алгебры Ли $su(2)$ разлагается по трем базисным образующим $\tau_k = -i\sigma_k/2$ алгебры $su(2)$:

$$A = \Psi \cdot (n_k \tau_k) = -i \frac{\Psi}{2} (n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3), \quad (2.3.3)$$

где $\Psi \in \mathbb{R}$ и $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор в \mathbb{R}^3 . Компоненты вектора \vec{n} можно задать с помощью сферических углов $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\vartheta \in [0, \pi]$:

$$n_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad n_3 = \cos \vartheta. \quad (2.3.4)$$

Воспользуемся экспоненциальным отображением и определим по элементу $A \in su(2)$ элемент группы $SU(2)$:

$$\exp(A) = \exp(\Psi \cdot (n_k \tau_k)) = \exp\left(-i \frac{\Psi}{2} (n_k \sigma_k)\right). \quad (2.3.5)$$

Напомним (см. раздел **I-2.2.13** первой части книги), что группа $SU(2)$ дважды накрывает группу $SO(3)$, поэтому два элемента $\pm \exp(\Psi (n_k \tau_k))$ группы $SU(2)$ соответствуют одному элементу группы $SO(3)$:

$$O(\Psi, \vec{n}) = \exp(\Psi \cdot (n_k S_k)), \quad (2.3.6)$$

где матрицы

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

реализуют присоединенное (соответствующее спину $j = 1$) представление образующих τ_1, τ_2, τ_3 и генерируют повороты в \mathbb{R}^3 вокруг осей: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ и $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, соответственно. Разлагая экспоненту в правой части (2.3.6) в ряд и пользуясь характеристическим тождеством $(n_k S_k)^3 = -(n_k S_k)$, для элемента (2.3.6) получаем

$$\exp(\Psi \cdot (n_k S_k)) = I_3 + (n_k S_k) \sin \Psi + (n_k S_k)^2 (1 - \cos \Psi). \quad (2.3.8)$$

Этот элемент задает вращение в \mathbb{R}^3 на угол Ψ вокруг оси, направленной вдоль \vec{n} , поэтому для группы $SO(3)$ можно считать, что $\Psi \in [-\pi, \pi]$, или можно сдвинуть этот интервал и положить $\Psi \in [0, 2\pi)$.

Введем обозначение для элементов группы $SU(2)$:

$$U_{\vec{n}}(\Psi) = \exp\left(i \frac{\Psi}{2} (n_i \sigma_i)\right). \quad (2.3.9)$$

Матрицы Паули σ_i удовлетворяют соотношениям $\sigma_k \sigma_j = \delta_{kj} I_2 + i \varepsilon_{kji} \sigma_i$, из которых вытекают равенства

$$(n_k \sigma_k)^2 = \vec{n}^2 I_2 = I_2 \Rightarrow (i n_k \sigma_k)^2 = -I_2. \quad (2.3.10)$$

Поэтому, используя операторную формулу Эйлера:

$$\exp(\phi J) = (I \cos \phi + J \sin \phi),$$

где ϕ — параметр, I — единичный оператор и $J^2 = -I$, мы получаем для экспоненты (2.3.9) матричное представление

$$\begin{aligned} U_{\vec{n}}(\Psi) &= \exp\left(i (n_i \sigma_i) \frac{\Psi}{2}\right) = I_2 \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) + i (n_i \sigma_i) \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Psi}{2} + i n_3 \sin \frac{\Psi}{2}, & (n_2 + i n_1) \sin \frac{\Psi}{2} \\ -(n_2 - i n_1) \sin \frac{\Psi}{2}, & \cos \frac{\Psi}{2} - i n_3 \sin \frac{\Psi}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

которое согласуется с (2.3.1) при выборе интервала $\Psi \in [0, 2\pi)$. Действительно, сравнивая (2.3.2) и (2.3.11), мы получаем соотношения

$$x_0 = \cos \frac{\Psi}{2}, \quad x_i = n_i \sin \frac{\Psi}{2}, \quad (2.3.12)$$

из которых с учетом (2.3.4) следует стандартная параметризация трехмерной сферы

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \chi, \quad x_1 = \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = \sin \chi \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

если сделать замену

$$\frac{\Psi}{2} = \chi. \quad (2.3.14)$$

При этом область изменения сферических углов определяется следующим образом

$$\chi \in [0, \pi), \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

что согласуется с рассмотрением общей параметризации сферы S^n , изложенной в разделе **I-6.2** (пункт 3) первой части книги. В явном виде для (2.3.2) мы имеем

$$U = I_2 x_0 + i\sigma_k x_k = \begin{pmatrix} \cos \chi + i \sin \chi \cos \vartheta, & i \sin \chi \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ i \sin \chi \sin \vartheta e^{i\varphi}, & \cos \chi - i \sin \chi \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.3.15)$$

Отметим, что с помощью преобразования подобия любой элемент $U_{\bar{n}}(\Psi) \in SU(2)$, заданный в (2.3.9), приводится к диагональному виду:

$$U_{\bar{n}}(\Psi) = U_{\vartheta, \varphi}^{-1} \cdot \exp\left(i \frac{\Psi}{2} \sigma_3\right) \cdot U_{\vartheta, \varphi}, \quad (2.3.16)$$

где $U_{\vartheta, \varphi} = U_{\bar{e}_2}(\vartheta) \cdot U_{\bar{e}_3}(\varphi)$ и (см. (2.3.11))

$$U_{\bar{e}_2}(\vartheta) = \exp\left(i \frac{\vartheta}{2} \sigma_2\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -\sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad U_{\bar{e}_3}(\varphi) = \exp\left(i \frac{\varphi}{2} \sigma_3\right) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.17)$$

Формула (2.3.16) следует из соотношения $(n_i \sigma_i) = U_{\vartheta, \varphi}^{-1} \cdot \sigma_3 \cdot U_{\vartheta, \varphi}$, проверяемого с помощью представлений (2.3.17).

- *Задача 29. Доказать, что инвариантная мера $d\mu(U_{\bar{n}}(\Psi))$ на группе $SU(2)$ для параметризации (2.3.11), (2.3.4) имеет вид*

$$d\mu(U_{\bar{n}}(\Psi)) = \frac{1}{2} \sin(\vartheta) \sin^2(\Psi/2) d\Psi d\vartheta d\varphi. \quad (2.3.18)$$

*Указание: воспользоваться известным выражением для меры на группе $SU(2)$ (см. раздел **I-2.1.6** в первой части книги)*

$$d\mu(g) = -\text{Tr} \left(\frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} g^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_{i_2}} g^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_{i_3}} g^{-1} \right) \epsilon_{i_1 i_2 i_3} dy_1 dy_2 dy_3,$$

где y_i — координаты на группе.

Далее нам понадобится еще одна параметризация группы $SU(2)$, которая получается следующим образом. Комплексные параметры α и β , входящие в представление (2.3.1), можно записать как $\alpha = \rho_1 e^{i\xi_1}$ и $\beta = \rho_2 e^{i\xi_2}$, где $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$. После чего, делая удобную замену переменных:

$$\rho_1 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \rho_2 = \sin \frac{\theta}{2}, \quad \xi_1 = \frac{1}{2}(\phi + \psi), \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(\phi - \psi),$$

мы получаем следующую параметризацию элементов группы $SU(2)$:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{1}{2}(\psi+\phi)}, & \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{1}{2}(\phi-\psi)} \\ -\sin \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{1}{2}(\psi-\phi)}, & \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{1}{2}(\psi+\phi)} \end{pmatrix} = \quad (2.3.19)$$

$$= U_{\bar{e}_3}(\phi) \cdot U_{\bar{e}_2}(\theta) \cdot U_{\bar{e}_3}(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.20)$$

Представление (2.3.20) является аналогом параметризации элементов группы $SO(3)$ в терминах углов Эйлера (см. пример **2.** в разделе **I-6.2** первой части книги) и демонстрирует наличие соответствия $SO(3) = SU(2)/Z_2$.

Матрица (2.3.19), (2.3.20) согласуется с (2.3.1) при определенном выборе областей изменения трех углов ϕ, θ и ψ . Этот выбор важен, например, при интегрировании по всей группе $SU(2)$ в координатах ϕ, θ и ψ . Напомним, что для группы $SO(3)$ область изменения углов Эйлера ϕ, θ и ψ выбирается следующим образом

$$SO(3) : \quad \psi \in [-\pi, \pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (2.3.21)$$

Для покрытия всей группы $SU(2)$ (сферы S^3) с помощью матриц (2.3.19), в случае стандартной области изменения двух сферических углов ϕ, θ (2.3.21), мы должны положить

$$SU(2) : \quad \psi \in [-2\pi, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad (2.3.22)$$

(сравните интервал изменения угла ψ в (2.3.21) и (2.3.22)). При таком выборе области изменения углов группа $SU(2)$ дважды покрывает группу $SO(3)$ и элементы $U_{\vec{e}_3}(\psi)$, стоящие в произведении (2.3.20) справа, образуют полную подгруппу $U(1)$ в $SU(2)$. Последний факт понадобится нам ниже, когда мы будем обсуждать сферические функции на однородном пространстве $SU(2)/U(1)$.

Подчеркнем, что параметризацию элементов $SU(2)$ с помощью представления (2.3.11) (например с помощью трехмерных сферических углов (2.3.15)) не следует путать с параметризацией $SU(2)$ в терминах углов Эйлера (2.3.19), для которой связь с параметрами x_m представления (2.3.2) имеет вид (сравните с (2.3.12) и (2.3.13))

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi+\psi}{2}, & x_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi-\psi}{2}, \\ x_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi-\psi}{2}, & x_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi+\psi}{2}. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

2.3.2 Конечномерные представления групп $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C})$ и $SO(3)$. Тензорные представления. Функции Вигнера

Рассмотрим более подробно представления группы $SU(2)$, а также группы $SO(3)$. Нам по-прежнему будет полезно изучать также специальные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, про которые говорится в Замечании **3.** в конце раздела **2.1** и которые находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями группы $SU(2)$.

Пользуясь обозначениями $s = u^1, t = u^2$, введенными в (2.2.1), и выражением (2.2.26) для базисных векторов $T_m^j(s, t)$:

$$T_m^j(s, t) = ((j+m)!(j-m)!)^{-1/2} (u^1)^{j+m} (u^2)^{j-m}, \quad (2.3.24)$$

запишем любой однородный полином (2.2.27) в виде

$$P_{2j}(s, t) = \psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2j}} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_{2j}}, \quad (2.3.25)$$

где компоненты $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \in \mathbb{C}$ образуют симметричный (в силу симметричности произведения $u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}}$) тензор ранга $2j$. Таким образом, пространство \mathcal{V}_{2j+1} однородных полиномов (2.2.27) (пространство неприводимого представления $T^{(j)}$) эквивалентно пространству симметричных тензоров ранга $2j$. Напомним, что общее определение тензора дано в разделе **I-3.3.1** первой части книги.

- **Задача 30.** Доказать, что компоненты $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}$ из (2.3.25) связаны с параметрами α_m из (2.2.27) соотношениями $\underbrace{\psi_{1, \dots, 1, 2, \dots, 2}}_{j+m} = \sqrt{(j+m)!(j-m)!} \frac{\alpha_m}{(2j)!}$.

В соответствии с (2.2.2) и (2.2.5) действие элементов $g = \|A_\beta^\alpha\|$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ (и группы $SU(2)$) на базисные мономы $u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}} \in \mathcal{V}_{2j+1}$ имеет вид

$$u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}} \rightarrow T(g) \cdot [u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}}] = u^{\beta_1} \cdot u^{\beta_2} \dots u^{\beta_{2j}} A_{\beta_1}^{\alpha_1} A_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots A_{\beta_{2j}}^{\alpha_{2j}}. \quad (2.3.26)$$

Это действие распространяется на линейные комбинации таких мономов, то есть на произвольные однородные полиномы (2.3.25), являющиеся векторами в пространстве \mathcal{V}_{2j+1} неприводимого представления $T^{(j)}$. Согласно стандартной процедуре (2.1.7) и (2.1.8), действие (2.3.26) переписывается как преобразование координат векторов (2.3.25), то есть компонент $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}$ симметричного тензора ранга $2j$:

$$\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \rightarrow [T^{(j)}(g) \cdot \psi]_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots A_{\alpha_{2j}}^{\beta_{2j}} \psi_{\beta_1, \dots, \beta_{2j}}. \quad (2.3.27)$$

Вспоминая определение прямого произведения представлений (см. раздел **I-3.3.1** первой части книги), мы видим, что пространство \mathcal{V}_{2j+1} симметричных тензоров ψ ранга $2j$ вложено в пространство $\underbrace{\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_2}_{2j}$, где \mathcal{V}_2 — пространство двумер-

ного определяющего представления $T^{(1/2)}$. При этом представление $T^{(j)}(g)$ элемента $g \in SL(2, \mathbb{C})$ действует в \mathcal{V}_{2j+1} как оператор, записанный в виде тензорного произведения двумерных операторов (см. (2.3.26) и (2.3.27)):

$$\underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_{2j} = \underbrace{T^{(1/2)}(g) \otimes \dots \otimes T^{(1/2)}(g)}_{2j} \equiv (T^{(1/2)}(g))^{\otimes 2j}. \quad (2.3.28)$$

Таким образом, неприводимое представление $T^{(j)}$ вложено в представление $(T^{(1/2)})^{\otimes 2j}$, действующее в пространстве $\mathcal{V}_2^{\otimes 2j}$. Другими словами, представление $(T^{(1/2)})^{\otimes 2j}$ приводимо, и в его разложении по неприводимым представлениям содержится представление $T^{(j)}$, действующее в подпространстве $\mathcal{V}_{2j+1} \subset \mathcal{V}_2^{\otimes 2j}$ симметричных тензоров ранга $2j$ (мы будем обсуждать этот факт более подробно ниже в разделах **2.4.2** и **2.4.3**).

Аналогично, любой однородный полином степени $2j$ по переменным $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (\bar{s}, \bar{t})$, построенный из дуальных базисных мономов $\bar{T}_m^j(\bar{s}, \bar{t})$, совпадающих с базисом (2.2.29) с точностью до знаковых факторов (сравните с (2.3.24)):

$$\bar{T}_m^j(\bar{s}, \bar{t}) \equiv (-1)^{j-m} \bar{T}_{-m}^j(\bar{s}, \bar{t}) = ((j+m)!(j-m)!)^{-1/2} (\bar{u}_1)^{j+m} (\bar{u}_2)^{j-m}, \quad (2.3.29)$$

записывается в виде

$$\bar{P}_{2j}(\bar{s}, \bar{t}) = \bar{u}_{\alpha_1} \bar{u}_{\alpha_2} \dots \bar{u}_{\alpha_{2j}} \bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}.$$

Здесь компоненты $\bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \in \mathbb{C}$ также образуют симметричный тензор ранга $2j$. Согласно (2.2.8) аналоги преобразований (2.3.27) для компонент $\bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}$ имеют вид

$$\bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \rightarrow [T^{(j)}(g) \cdot \bar{\psi}]^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} = \bar{\psi}^{\beta_1, \dots, \beta_{2j}} (A^{-1})_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots (A^{-1})_{\beta_{2j}}^{\alpha_{2j}}. \quad (2.3.30)$$

Таким образом, симметричный тензор $\bar{\psi}$ преобразуется контраградиентно по отношению к преобразованиям (2.3.27) тензора ψ , то есть на пространстве симметричных

тензоров $\bar{\psi}$ реализовано представление $\bar{T}^{(j)}$, контраградиентное к представлению $T^{(j)}$. Представления типа (2.3.27) и (2.3.30) в литературе иногда называются тензорными, или спин-тензорными. Более подробно такие представления будут обсуждаться далее в разделах 4.4 и в третьей части книги.

Замечание. Неприводимые представления $T^{(j)}$ и соответствующие им ко-представления $\bar{T}^{(j)}$, как для группы $SL(2, \mathbb{C})$, так и для группы $SU(2)$, оказываются эквивалентными и переводятся друг в друга с помощью преобразований

$$\varepsilon_{\alpha_1 \beta_1} \cdots \varepsilon_{\alpha_{2j} \beta_{2j}} \bar{\psi}^{\beta_1, \dots, \beta_{2j}} = \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}, \quad (2.3.31)$$

что с очевидностью следует из формул (2.2.17). Поэтому далее в этом разделе мы сконцентрируемся только на рассмотрении неприводимых представлений $T^{(j)}$. Подчеркнем также, что с комплексно сопряженными представлениями $T^{(j)*}$ ситуация несколько иная. Для унитарных матриц $A \in SU(2)$ мы имеем $A^* = (A^\top)^{-1}$. Поэтому в случае группы $SU(2)$ комплексно сопряженное представление $T^{(j)*}$ (необходимо комплексно сопрячь матрицу (2.3.28)) совпадает с контраградиентом представлением $\bar{T}^{(j)}$, которое, как мы только что показали, эквивалентно $T^{(j)}$. Отсюда следует, что для группы $SU(2)$ представление $T^{(j)}$ эквивалентно своему комплексно сопряженному представлению $T^{(j)*}$. Однако для группы $SL(2, \mathbb{C})$, которую мы рассматриваем как вещественную шестимерную группу, представления $T^{(j)}$ и $T^{(j)*}$, так же как и представления $T^{(\frac{j}{2})}$ и $T^{(\frac{j}{2})*}$, неэквивалентны (см. Замечание 2. в конце раздела 2.1). Неэквивалентные представления $T^{(j)}$ и $T^{(j)*}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, а также их прямые произведения, важны с точки зрения физических приложений и будут подробно обсуждаться нами в третьей части книги.

Найдем теперь явный вид представлений $T^{(j)}(g)$ элементов g группы $SL(2, \mathbb{C})$ (или группы $SU(2)$). Операторы $T^{(j)}(g)$ действуют в пространстве \mathcal{V}_{2j+1} и их матрицы будут записаны в базисе мономов (2.2.26), (2.3.24). Согласно правилам (2.2.2), (2.2.5) и (2.3.26) моном $T_m^j(s, t)$ при действии на него элемента $g = \|\|A_\beta^\alpha\|\| \in SL(2, \mathbb{C})$ преобразуется в однородный полином степени $2j$ следующего вида:

$$[T^{(j)}(g) \cdot T_m^j(s, t)] = T_m^j(s', t') = \frac{(sA_1^1 + tA_2^1)^{j+m} (sA_1^2 + tA_2^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} = \quad (2.3.32)$$

$$= \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{k'=0}^{j-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!k'!(j+m-k)!(j-m-k')!} (t^{k+k'} s^{2j-k-k'}) \cdot (A_1^1)^{j+m-k} (A_1^2)^{j-m-k'} (A_2^1)^k (A_2^2)^{k'}, \quad (2.3.33)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались формулой бинома Ньютона. Теперь запишем полином (2.3.33) в виде линейной комбинации базисных мономов $T_{m'}^j(s, t)$ ($m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$). Удобно использовать определения

$$n! = \infty \quad \text{при } n < 0, \quad 0! = 1, \quad (2.3.34)$$

которые соответствуют аналитическому продолжению факториальной функции как гамма-функции: $n! = \Gamma(n+1)$. При таком определении можно опустить пределы суммирования в (2.3.33), так как факториалы в знаменателе равны бесконечности вне пределов суммирования. Если положить $m' = j - k - k'$, то m' должно пробегать

все целочисленные значения для целых j и все полуцелые значения для полуцелых j . Выделяя в правой части (2.3.33) базисные мономы $T_{m'}^j(s, t)$, мы получаем

$$[T^{(j)}(g) \cdot T_m^j](s, t) = \sum_{m'=-j}^j T_{m'}^j(s, t) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\|A_\beta^\alpha\|), \quad (2.3.35)$$

где $g = \|A_\beta^\alpha\|$ и возникшая здесь $(2j+1)$ -мерная матрица $\mathcal{D}^{(j)}$ с элементами

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g) = \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!} \cdot (A_1^1)^{j+m-k} (A_1^2)^{k-m+m'} (A_2^1)^k (A_2^2)^{j-k-m'} \quad (2.3.36)$$

является матрицей неприводимого представления $T^{(j)}$ элемента $g \in SL(2, \mathbb{C})$. Для матриц $\mathcal{D}^{(j)}$ имеет место свойство:

$$\mathcal{D}_{m_1 m_2}^{(j)}(\|A_\beta^\alpha B_\alpha^\gamma\|) = \mathcal{D}_{m_1 m_3}^{(j)}(\|A_\beta^\alpha\|) \mathcal{D}_{m_3 m_2}^{(j)}(\|B_\beta^\alpha\|), \quad (2.3.37)$$

вытекающее из гомоморфности отображения $T^{(j)}$ ($T^{(j)}$ – представление). Отметим, что равенство (2.3.37), с учетом явного вида (2.3.36) матриц $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}$, представляет собой набор достаточно нетривиальных тождеств.

Конечномерное представление $T^{(j)}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, построенное в (2.3.35), не является унитарным, в чем можно убедиться непосредственно, заметив, что матрица $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$ не унитарна для некоторых $g = \|A_\beta^\alpha\| \in SL(2, \mathbb{C})$. Действительно, эрмитова свертка векторов $T_m^j(s, t)$ (сравните с первым равенством в (2.2.33))

$$\sum_{m=-j}^j T_m^j(s, t) (T_m^j(s, t))^* = \frac{(|s|^2 + |t|^2)^{2j}}{(2j)!} \quad (2.3.38)$$

должна была бы быть инвариантной при преобразованиях (2.3.35) с унитарной матрицей $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$. Однако ясно, что правая часть (2.3.38) не сохраняется при таких преобразованиях, когда двумерные матрицы $g = \|A_\beta^\alpha\| \in SL(2, \mathbb{C})$ не унитарны (неунитарные двумерные преобразования (2.2.2) не сохраняют квадратичную форму: $|s|^2 + |t|^2 \neq |s'|^2 + |t'|^2$). Неунитарность матриц $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}\|$ неудивительна, поскольку конечномерное представление некомпактной группы $SL(2, \mathbb{C})$ всегда неунитарно. Тем не менее матрицы $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}\|$ с элементами (2.3.36) обладают рядом замечательных свойств.

Утверждение 2.3.1 Матрицы $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$ конечномерных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$, заданные в (2.3.36), эквивалентны псевдо-ортогональным матрицам для целых j и симплектическим матрицам^{2,3} для полуцелых j .

Доказательство. Пользуясь отождествлением (2.2.17), инвариант (2.2.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j} &= (2j)! \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} T_m^j(s_1, t_1) T_{-m}^j(s_2, t_2) = \\ &= (2j)! \sum_{m, m'} T_m^j(s_1, t_1) \eta_{m, m'}^{(j)} T_{m'}^j(s_2, t_2), \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

^{2,3}Определения псевдо-ортогональных и симплектических матриц и соответствующих групп даны в разделе **I-1.2.5** первой части книги.

где мы определили метрику^{2.4}

$$\eta_{m,m'}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-m'} , \quad (2.3.40)$$

для которой имеем

$$\eta_{m',m}^{(j)} = (-1)^{2m} \eta_{m,m'}^{(j)} = (-1)^{2j} \eta_{m,m'}^{(j)} ,$$

и следовательно она симметрична $\eta_{m,m'}^{(j)} = \eta_{m',m}^{(j)}$ для целых j и антисимметрична $\eta_{m,m'}^{(j)} = -\eta_{m',m}^{(j)}$ для полуцелых j . В силу инвариантности свертки (2.3.39) относительно преобразований (2.3.35) мы получаем, что метрика (2.3.40) обладает следующим свойством инвариантности

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{km}^{(j)}(g) \mathcal{D}_{k'm'}^{(j)}(g) \eta_{m,m'}^{(j)} &= \eta_{k,k'}^{(j)} \Rightarrow \\ \mathcal{D}^{(j)}(g) \cdot \eta^{(j)} \cdot (\mathcal{D}^{(j)}(g))^{\top} &= \eta^{(j)} , \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C}) , \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

где матрицы $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$ заданы в (2.3.36) и определяют представление $T^{(j)}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$. Квадрат матрицы метрики $\|\eta_{m,m'}^{(j)}\|$ равен

$$\eta^{(j)} \cdot \eta^{(j)} = (-1)^{2j} I_{2j+1} , \quad (2.3.42)$$

где, напомним, I_{2j+1} — обозначает $(2j+1)$ -мерную единичную матрицу. В случае целых j мы имеем $(\eta^{(j)})^2 = I_{2j+1}$, поэтому собственные значения симметричной матрицы $\|\eta_{m,m'}^{(j)}\|$ равны (± 1) , и ее можно диагонализировать так, что она примет стандартный вид псевдо-евклидовой метрики (см. Раздел **I-1.2.5** в первой части книги):

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} , \quad p+q = 2j+1 . \quad (2.3.43)$$

Здесь нулями обозначены прямоугольные $(p \times q)$ и $(q \times p)$ нулевые блоки. В этом случае условие (2.3.41) определяет для всех $g \in SL(2, \mathbb{C})$ нечетномерные матрицы $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$, эквивалентные псевдо-ортогональным матрицам, причем для четных j мы имеем $p = j+1$, $q = j$, а для нечетных j имеем $p = j$, $q = j+1$.

- **Задача 31.** Получить указанные значения параметров p и q . Для этого найти в случае целых j все собственные вектора и соответствующие собственные значения матрицы (2.3.40).

Для полуцелых j антисимметричная и четномерная матрица $\|\eta_{m,m'}^{(j)}\|$ согласно (2.3.42) удовлетворяет тождеству $(\eta^{(j)})^2 = -I_{2j+1}$ и с помощью преобразования эквивалентности она приводится к стандартному виду симплектической метрики (см. Раздел **I-1.2.5** в первой части книги):

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} , \quad 2r = 2j+1 , \quad (2.3.44)$$

где 0 обозначает нулевую $(r \times r)$ матрицу. В этом случае условие (2.3.41) эквивалентно условию $\mathcal{D} \cdot J \cdot \mathcal{D}^{\top} = J$ для симплектических матриц \mathcal{D} . ■

^{2.4}Напомним, что $(j-m)$ всегда принимает целые значения, даже если спин j — полуцелый, и поэтому все ненулевые элементы метрики $\eta_{m,m'}^{(j)}$ равны ± 1 .

Следствие. Инвариант (2.2.33) с помощью метрики (2.3.40) записывается в виде, аналогичном (2.3.39):

$$(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j} = (2j)! \sum_{m=-j}^j T_m^j(s, t) \eta_{m,m'}^{(j)} \bar{T}_{m'}^j(\bar{s}, \bar{t}) = (2j)! \sum_{m=-j}^j T_m^j(s, t) \tilde{T}_m^j(\bar{s}, \bar{t}), \quad (2.3.45)$$

где $\tilde{T}_m^j(\bar{s}, \bar{t}) = \eta_{m,m'}^{(j)} \bar{T}_{m'}^j(\bar{s}, \bar{t})$ – дуальные базисные вектора, которые были введены в (2.3.41). Соответственно, действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на вектор $\bar{T}_{m'}^j(\bar{s}, \bar{t})$ должно совпадать^{2.5} с действием (2.3.35) этой группы на вектор $T_m^j(s, t)$, и мы имеем

$$[T^{(j)}(g) \cdot \bar{T}_m^j](\bar{s}, \bar{t}) = \bar{T}_m^j(\bar{s}', \bar{t}') = \sum_{m'=-j}^j \bar{T}_{m'}^j(\bar{s}, \bar{t}) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g). \quad (2.3.46)$$

Здесь преобразованные переменные (\bar{s}', \bar{t}') определены в (2.2.8). Из инвариантности функции (2.3.45) и формулы (2.3.35) также следует закон преобразования для мономов $\tilde{T}_m^j(\bar{s}, \bar{t})$ дуального базиса (2.3.41):

$$[T^{(j)}(g) \cdot \tilde{T}_m^j](\bar{s}, \bar{t}) = \tilde{T}_m^j(\bar{s}', \bar{t}') = \sum_{m'=-j}^j \mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(g^{-1}) \tilde{T}_{m'}^j(\bar{s}, \bar{t}). \quad (2.3.47)$$

Эта формула понадобится нам в дальнейшем.

Заметим теперь, что вся схема построения конечномерных неприводимых представлений для группы $SL(2, \mathbb{C})$, изложенная выше, может быть без изменений применена и для случая ее компактной подгруппы $SU(2)$. Для этого в формулах (2.2.2) и (2.3.32) – (2.3.36) необходимо вместо матриц $g = \|A_{\beta}^g\| \in SL(2, \mathbb{C})$ использовать только унитарные матрицы U из подгруппы $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$, которые представляются в виде (2.3.1). Для преобразований (2.2.2) в этом случае мы имеем

$$(s', t') = (s, t)U = (s\alpha - t\beta^*, s\beta + t\alpha^*), \quad (2.3.48)$$

а формулы (2.3.35) и (2.3.36) записываются следующим образом

$$T_m^j(s', t') = [T^{(j)}(U) \cdot T_m^j](s, t) = \sum_{m'} T_{m'}^j(s, t) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta), \quad (2.3.49)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) &= \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U) = \langle j, m' | U | j, m \rangle = \\ &= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!} \alpha^{j+m-k} \beta^{k-m+m'} (\beta^*)^k (\alpha^*)^{j-k-m'}, \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ и суммирование идет по целым k .

- **Задача 32.** ★ Доказать, что элементы $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)$, заданные в (2.3.50), можно записать в компактном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) &= A_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) (\partial_y)^{j+m'} (y-1)^{j+m} (y+1)^{j-m} \Big|_{y=2\alpha\alpha^*-1}, \\ A_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) &\equiv \frac{2^{m'-j} \sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m')!(j-m)!(j+m)!}} \cdot \alpha^{m'+m} \beta^{m'-m}, \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

где $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ и $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

^{2.5}Это отражает тот факт, что представления $T^{(j)}$ эквивалентны своим контраградиентным представлениям.

В (2.3.50) мы использовали дираковские обозначения $\langle j, m' | U | j, m \rangle$ для компонент матрицы $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U)\|$ элемента $U \in SU(2)$ в представлении $T^{(j)}$. Данные обозначения обсуждались нами в разделе 1 и являются чрезвычайно удобными. Например, пользуясь этими обозначениями, соотношения (2.3.49) и (2.3.47) в случае $g^{-1} = U^{-1} \in SU(2)$ можно записать как равенства

$$\langle s', t' | j, m \rangle = \langle s, t | U | j, m \rangle = \sum_{m'} \langle s, t | j, m' \rangle \langle j, m' | U | j, m \rangle, \quad (2.3.52)$$

$$\langle j, m | \bar{s}', \bar{t}' \rangle = \langle j, m | U^{-1} | \bar{s}, \bar{t} \rangle = \sum_{m'} \langle j, m | U^{-1} | j, m' \rangle \langle j, m' | \bar{s}, \bar{t} \rangle, \quad (2.3.53)$$

где согласно (2.2.26), (2.3.48) и (2.2.8) мы положили^{2.6}

$$\langle s', t' | = \langle s, t | U, \quad \langle s, t | j, m \rangle := T_m^{(j)}(s, t), \quad (2.3.54)$$

$$| \bar{s}', \bar{t}' \rangle = U^{-1} | \bar{s}, \bar{t} \rangle, \quad \langle j, m | \bar{s}, \bar{t} \rangle := \tilde{T}_m^{(j)}(\bar{s}, \bar{t}). \quad (2.3.55)$$

Заметим, что вторые равенства в (2.3.52) и (2.3.53) могут быть получены из универсальных и более компактных формул

$$U | j, m \rangle = \sum_{m'} | j, m' \rangle \langle j, m' | U | j, m \rangle, \quad (2.3.56)$$

$$\langle j, m | U^{-1} = \sum_{m'} \langle j, m | U^{-1} | j, m' \rangle \langle j, m' |, \quad (2.3.57)$$

где оператор U понимается уже не как (2×2) матрица, а как абстрактный элемент группы $SU(2)$. При этом вектора $| j, m \rangle$ и $\langle j, m |$ в (2.3.52), (2.3.52), (2.3.56) и (2.3.57) также должны рассматриваться как абстрактные вектора, введенные в (2.1.19) и (2.1.29). Соотношения (2.3.49), (2.3.52) возникают из (2.3.56), если обе части этой формулы свернуть с дуальным вектором $\langle s, t |$, который удовлетворяет (2.3.54). Аналогичным образом из равенства (2.3.57) возникают соотношения (2.3.47), (2.3.53). Формулы (2.3.52) и (2.3.56) являются аналогами равенств (1.1.7), полученных нами в Разделе 1.1 при обсуждении обозначений Дирака. Соотношение (2.3.37) также переписывается в дираковских обозначениях

$$\langle j, m_1 | U \cdot U' | j, m_2 \rangle = \sum_{m_3} \langle j, m_1 | U | j, m_3 \rangle \langle j, m_3 | U' | j, m_2 \rangle, \quad \forall U, U' \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (2.3.58)$$

Наконец, из формул (2.3.56), (2.3.57) и (2.3.58) следует, что состояния $| j, m \rangle$ должны образовывать полную систему базисных векторов в пространстве неприводимого представления $T^{(j)}$ (сравните с (1.1.5) и (2.2.54)):

$$\sum_{m=-j}^j | j, m \rangle \langle j, m | = I.$$

Ясно, что Утверждение 2.3.1 справедливо не только для матриц представлений элементов группы $SL(2, \mathbb{C})$, но и для матриц $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)\|$ представлений элементов

^{2.6}Перенормированные полиномы $t^{-2j} \langle s, t | j, m \rangle$, в которых сделана замена переменных $s/t = z$, очевидным образом связаны с когерентными состояниями (2.2.66).

унитарной группы $SU(2)$. Более того, в отличие от случая $SL(2, \mathbb{C})$, конечномерные представления (2.3.49), (2.3.50) группы $SU(2)$ оказываются унитарными

$$\sum_m \mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta) \mathcal{D}_{mm''}^{(j)*}(\alpha, \beta) = \delta_{m'm''} ,$$

так как эрмитова свертка (2.3.38) очевидно инвариантна относительно преобразований (2.3.49) (в силу инвариантности квадратичной формы $|s|^2 + |t|^2$, возникшей в правой части (2.3.38), при всех двумерных унитарных преобразованиях (2.3.48)).

Из явной формулы (2.3.50) следует, что

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(-\alpha, -\beta) = (-1)^{2j} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) , \quad (2.3.59)$$

поэтому для целых $j = \ell$ элементы (2.3.50) не меняются при замене $U \rightarrow -U$ и оказываются однозначными функциями на группе $SO(3)$, элементам которой соответствуют пары $\pm U \in SU(2)$. Это означает, что неприводимые представления (2.3.49), (2.3.50) группы $SU(2)$ для целых $j = \ell$ являются одновременно неприводимыми представлениями и для группы $SO(3)$, причем эти представления исчерпывают все конечномерные неприводимые представления $SO(3)$. Последнее утверждение можно пояснить следующим образом. Группа $SU(2)$ – универсальная накрывающая группы $SO(3)$, поэтому все конечномерные неприводимые представления $SO(3)$ содержатся в множестве конечномерных неприводимых представлений $SU(2)$, которые нумеруются целыми и полуцелыми неотрицательными числами j . Остается доказать, что представления (2.3.49), (2.3.50) для полуцелых j не являются представлениями $SO(3)$. Это следует из того, что при полуцелых j функции $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)$, согласно (2.3.59), меняют знак при замене $U \rightarrow -U$ и не могут быть представлениями группы $SO(3)$ (в обычном смысле^{2.7}).

Выберем для элементов матрицы (2.3.1) параметризацию (2.3.11), (2.3.4) (см. также (2.3.15):

$$\alpha = \cos \chi + i \sin \chi \cdot \cos \vartheta , \quad \beta = i \sin \chi \cdot \sin \vartheta \cdot e^{-i\varphi} ,$$

тогда коэффициенты (2.3.50) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\chi, \vec{n}) &= e^{i\varphi(m-m')} \frac{(1-\sin^2 \vartheta \sin^2 \chi)^j}{(-1)^{m'} (\sin \vartheta)^{m-m'}} \frac{(\cos \vartheta - i \operatorname{ctg} \chi)^m}{(\cos \vartheta + i \operatorname{ctg} \chi)^{m'}} \cdot \\ &\cdot \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j-k+m)!(k-m+m')!} \left(\frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \chi}{1-\sin^2 \vartheta \sin^2 \chi} \right)^k . \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

В параметризации элементов $U \in SU(2)$ в терминах углов Эйлера (2.3.19):

$$\alpha = \cos(\theta/2) e^{i\frac{1}{2}(\psi+\phi)} , \quad \beta = \sin(\theta/2) e^{i\frac{1}{2}(\phi-\psi)} , \quad (2.3.61)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi) &= \langle j, m' | U(\phi, \theta, \psi) | j, m \rangle = e^{im'\phi + im\psi} d_{m'm}^{(j)}(\theta) = \\ &= e^{im'\phi + im\psi} \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^{2k-m+m'} \cos^{2j} \left(\frac{\theta}{2} \right) . \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

^{2.7}В литературе представления $T^{(j)}$ с полуцелыми спинами j иногда называются двузначными представлениями $SO(3)$.

Здесь элементы $U(\phi, \theta, \psi)$ заданы в (2.3.20), и мы выделили в (2.3.62) функции

$$\begin{aligned} d_{m'm}^{(j)}(\theta) &= \langle j, m' | U_{\bar{e}_2}(\theta) | j, m \rangle = \\ &= \cos^{2j}(\frac{\theta}{2}) \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}))^{m-m'}} \sum_k \frac{(-1)^k \operatorname{tg}^{2k}(\frac{\theta}{2})}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!}, \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

которые называются D -функциями Вигнера. Функции (2.3.62) упрощаются в некоторых частных случаях. Например, положим $\theta = \phi = 0$ в (2.3.62), тогда в силу того, что $\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}) = 0$ и с учетом значений факториалов в знаменателе, из всей суммы по k выживет только слагаемое с $2k = m - m' = 0$. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} \langle j, m' | U_{\bar{e}_3}(\psi) | j, m \rangle &= \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(0, 0, \psi) = e^{im\psi} \delta_{m,m'}, \\ m', m &= -j, -j+1, \dots, j. \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

В следующих разделах мы покажем, что сферические функции, присоединенные функции Лежандра, полиномы Лежандра и Чебышева выражаются через D -функции Вигнера.

- **Задача 33.** Получить из (2.3.62) следующие равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{jm}^{(j)} &= \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}^{j-m}(\frac{\theta}{2}) \cos^{2j}(\frac{\theta}{2}) e^{i(j\phi+m\psi)}, \\ \mathcal{D}_{mj}^{(j)} &= (-1)^{j-m} \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}^{j-m}(\frac{\theta}{2}) \cos^{2j}(\frac{\theta}{2}) e^{i(m\phi+j\psi)}, \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi) = \mathcal{D}_{-m' -m}^{(j)}(-\psi, \theta, -\phi). \quad (2.3.66)$$

2.3.3 Сферические функции на $S^2 = SU(2)/U(1)$. Операторы Лапласа на $SU(2)$ и $SU(2)/U(1)$

Материал данного подраздела можно рассматривать как иллюстрацию к общим конструкциям, изложенным в Разделах **I-2.1.6**, **I-3.6.2** и **I-6.5** первой части книги.

В предыдущем подразделе мы нашли явный вид (2.3.50) элементов $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U) = \langle j, m' | U | j, m \rangle$ матриц неприводимых представлений $T^{(j)}$ группы $SU(2)$ для всех j . Согласно теореме Петера-Вейля (Теорема **I-3.6.7**, Раздел **I-3.6.2** первой части книги), элементы (2.3.50) образуют полную систему функций на группе $SU(2)$, то есть на сфере S^3 . Соответственно, если мы ограничимся только элементами (2.3.50) для целых неотрицательных $j = \ell$, то они образуют полную систему функций на многообразии группы $SO(3)$, то есть на \mathbb{RP}^3 (напомним, что представления $T^{(\ell)}$ с целыми $\ell \geq 0$ исчерпывают все конечномерные неприводимые представления группы $SO(3)$).

В дальнейшем в этом разделе мы будем пользоваться параметризацией (2.3.19), (2.3.20) элементов $U \in SU(2)$ в терминах углов Эйлера ϕ, θ, ψ . Элементы $U(\phi, \theta, \psi) \in SU(2)$ действуют на базисные вектора $|j, m\rangle$ векторного пространства \mathcal{V}_{2j+1} представления $T^{(j)}$ согласно (2.3.56):

$$|j, m\rangle \rightarrow U(\phi, \theta, \psi) |j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j |j, m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi). \quad (2.3.67)$$

где функции $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi) = \langle j, m' | U(\phi, \theta, \psi) | j, m \rangle$ были определены в (2.3.62). Эти функции, как мы указывали выше, образуют полную систему на многообразии $SU(2)$, то есть на сфере S^3 , каждая точка которой в данном случае параметризуется тремя углами Эйлера.

Займемся теперь определением полной системы функций на однородном пространстве $S^2 = SU(2)/U(1)$. Мы будем следовать общему подходу, который был сформулирован в разделе **I-6.5.5**

первой части книги. В группе $SU(2)$ имеется подгруппа $H = U(1)$, образованная диагональными матрицами

$$U_{\vec{e}_3}(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \psi \in [-2\pi, 2\pi]. \quad (2.3.68)$$

Элементы $U_{\vec{e}_3}(\psi) \in H \subset SU(2)$ в представлении $T^{(j)}$ реализуются в виде $(2j+1)$ -мерных диагональных матриц $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(0, 0, \psi)\|$, которые были получены в (2.3.64), причем при $j = 1/2$ матрица (2.3.64) совпадает с (2.3.68). Для целых $j = \ell$ представления (2.3.64) подгруппы $U(1)$ одновременно являются комплексными представлениями подгруппы $SO(2) \subset SO(3)$, которая образована вращениями (2.3.6) вокруг оси $\vec{n} = \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$:

$$T_3(-\psi) = O(-\psi, \vec{e}_3) = \exp(-\psi S_3), \quad \psi \in [-\pi, \pi].$$

Подставим (2.3.64) в (2.3.67). В результате мы получаем действие любого элемента $U = U_{\vec{e}_3}(\psi)$ из подгруппы $H = U(1)$ на базисные вектора $|j, m\rangle \in \mathcal{V}_{2j+1}$:

$$U_{\vec{e}_3}(\psi) |j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j |j, m'\rangle \langle j, m' | U_{\vec{e}_3}(\psi) |j, m\rangle = e^{im\psi} |j, m\rangle, \quad (2.3.69)$$

$$m \in [-j, -j+1, \dots, j-1, j],$$

(здесь и далее для упрощения формул мы пишем $U_{\vec{e}_k}(\psi)|j, m\rangle$ вместо $T^{(j)}(U_{\vec{e}_k}(\psi))|j, m\rangle$). Таким образом, представление $T^{(j)}$ абелевой подгруппы $H = U(1) \in SU(2)$ (в полном согласии со Следствием 2. к Лемме Шура I-3.4.5 из первой части книги) приводимо и распадается в прямую сумму одномерных представлений, число которых равно $(2j+1)$. Если спин j принимает целые значения ℓ , то индекс m у базисных векторов $|\ell, m\rangle \in \mathcal{V}_{2\ell+1}$ также принимает целые значения $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ и в частности может равняться нулю. То есть, среди базисных векторов $|\ell, m\rangle$ имеется специальный вектор $|\ell, 0\rangle$, который в силу (2.3.69) является инвариантным (стационарным) относительно действия всей подгруппы $H = U(1)$:

$$U_{\vec{e}_3}(\psi)|\ell, 0\rangle = |\ell, 0\rangle, \quad \forall \psi. \quad (2.3.70)$$

Пользуясь этим фактом, для любого $U_{\vec{e}_3}(\psi) \in H$ и какого-нибудь $U \in SU(2)$ мы получаем

$$\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi)) = \langle \ell, m | U \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi) | \ell, 0 \rangle = \langle \ell, m | U | \ell, 0 \rangle = \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U). \quad (2.3.71)$$

Таким образом, компоненты $\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U)$ одинаковы для всех элементов в фиксированном левом смежном классе в группе $SU(2)$ по подгруппе $H = U(1)$, и поэтому эти компоненты являются функциями на однородном пространстве $SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$. В параметризации углов Эйлера, компоненты $\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U)$ записываются следующим образом

$$\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi, \theta, \psi) = \langle \ell, m | U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi) | \ell, 0 \rangle = \langle \ell, m | U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) | \ell, 0 \rangle = \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi, \theta, 0), \quad (2.3.72)$$

и зависят только от углов ϕ и θ , которые параметризуют однородное пространство $SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$, то есть сферу S^2 . Функции (2.3.72) имеют специальное обозначение:

$$Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) := \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi, \theta, 0) = e^{im\phi} d_{m0}^{(\ell)}(\theta), \quad (2.3.73)$$

и называются сферическими функциями или сферическими гармониками. С точки зрения общей терминологии, принятой в разделе I-6.5.5 первой части книги и применимой к любым группам Ли, функции (2.3.71), (2.3.72) являются присоединенными сферическими функциями представления $T^{(\ell)}$. В случае группы $SU(2)$ и сферы $S^2 = SU(2)/U(1)$ мы будем использовать как термины “сферические функции” и “сферические гармоники”, так и термин “присоединенные сферические функции представления $T^{(\ell)}$ ”.

С помощью формул (2.3.51) и (2.3.61) функция Вигнера $d_{m0}^{(\ell)}(\theta)$ (2.3.63), входящая в определение $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$, может быть приведена к виду

$$d_{m0}^{(\ell)}(\theta) = \frac{\sqrt{(\ell-m)!}}{\sqrt{(\ell+m)!}} \cdot P_m^{(\ell)}(\cos \theta), \quad (2.3.74)$$

где

$$P_m^{(\ell)}(y) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-y^2)^{m/2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\ell+m} (y^2-1)^\ell \quad (2.3.75)$$

называется присоединенной функцией Лежандра. Среди $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$ имеется компонента $Y_0^{(\ell)}(\theta) = d_{00}^{(\ell)}(\theta)$, которая не зависит от ϕ и называется зональной сферической функцией. Согласно (2.3.74) и (2.3.75) мы имеем $Y_0^{(\ell)}(\theta) = P^{(\ell)}(\cos \theta)$, где полиномы

$$P^{(\ell)}(y) = P_0^{(\ell)}(y) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\ell (y^2-1)^\ell, \quad (2.3.76)$$

называются полиномами Лежандра.

- **Задача 34.** ★ Пользуясь формулами (2.3.58), (2.3.66), (2.3.72), (2.3.73) и (2.3.74) доказать теорему сложения для сферических функций:

$$\sum_m Y_{-m}^{(\ell)}(-\phi_1, \theta_1) Y_m^{(\ell)}(\phi_2, \theta_2) = \sum_m e^{im(\phi_1+\phi_2)} P_{-m}^{(\ell)}(\cos \theta_1) P_m^{(\ell)}(\cos \theta_2) = P^{(\ell)}(\cos \omega_{12}), \quad (2.3.77)$$

где $\cos \omega_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$.

В разделе **I-6.5.5** первой части книги указывалось, что если группа G компактна, а подгруппа $H \subset G$ массивна, то все присоединенные сферические функции на однородном пространстве G/H образуют полную систему функций на этом пространстве. Напомним, что подгруппа $H \subset G$ называется массивной, если все неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ группы G являются представлениями класса 1 относительно подгруппы H , то есть во всех пространствах \mathcal{V}_λ представлений $T^{(\lambda)}$ имеются вектора $|0\rangle$, на которые подгруппа H действует тривиально $H|0\rangle = |0\rangle$. Тогда, присоединенные сферические функции, образующие полную систему на G/H , записываются как матричные элементы $\langle m|T^{(\lambda)}(g)|0\rangle$, где $g \in G$ и $\langle m|$ – базисные вектора в дуальном пространстве \mathcal{V}_λ^* . Согласно (2.3.70) роль векторов $|0\rangle$ в нашем случае играют вектора $|\ell, 0\rangle$, и следовательно все представления $T^{(\ell)}$ группы $SO(3)$ являются представлениями класса 1 относительно подгруппы $SO(2)$, то есть подгруппа $SO(2)$ массивна в $SO(3)$. Поэтому в данном примере матричные элементы $\langle m|T^{(\lambda)}(g)|0\rangle$ это сферические гармоники $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = \langle \ell, m|U(\phi, \theta, 0)|\ell, 0\rangle$, которые образуют полную систему функций на сфере $S^2 = SO(3)/SO(2)$.

Теперь построим два бесконечномерных представления группы $SU(2)$, первое из которых действует в пространстве функций на многообразии $S^3 = SU(2)$, а второе – в пространстве функций на однородном пространстве $S^2 = SU(2)/U(1)$. Для этого рассмотрим левое действие произвольного элемента $U \in SU(2)$ на элемент $U(\phi, \theta, \psi) \in SU(2)$, записанный в параметризации Эйлера:

$$U \cdot U(\phi, \theta, \psi) = U \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) U_{\vec{e}_3}(\psi) = U_{\vec{e}_3}(\phi') U_{\vec{e}_2}(\theta') U_{\vec{e}_3}(\psi'), \quad (2.3.78)$$

где результат этого действия в правой части также записан в параметризации углов Эйлера (ϕ', θ', ψ') . Умножая обе части второго равенства в (2.3.78) справа на $U_{\vec{e}_3}(-\psi)$, получаем

$$U \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) = U_{\vec{e}_3}(\phi') U_{\vec{e}_2}(\theta') U_{\vec{e}_3}(\psi''), \quad (2.3.79)$$

где $\psi'' = \psi' - \psi$. Соотношение (2.3.79) интерпретируется как левое действие элемента $U \in SU(2)$ на однородном пространстве $SU(2)/U(1)$, точки которого нумеруются (см. (2.3.72)) представителями $U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta)$: точку сферы $S^2 = SU(2)/U(1)$ с координатами (θ, ϕ) элемент $U \in SU(2)$ переводит в точку с координатами (θ', ϕ') . Из соотношения (2.3.79) в частности видно, что ϕ' и θ' в (2.3.78) не зависят от ψ .

Пусть элемент $U = \exp(\frac{i}{2} t^k \sigma_k) = \exp(-t^k \tau_k)$ группы $SU(2)$ близок к единичному, то есть параметры t^i – малы. Тогда функции ϕ', θ', ψ' в уравнениях (2.3.78), (2.3.79) в первом порядке по t^i равны

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + (t^1 \cos(\phi) - t^2 \sin(\phi)) \operatorname{ctg}(\theta) + t^3 + \dots, \\ \theta' &= \theta + t^1 \sin(\phi) + t^2 \cos(\phi) + \dots, \\ \psi' &= \psi + (-t^1 \cos(\phi) + t^2 \sin(\phi)) \sin^{-1}(\theta) + \dots, \end{aligned} \quad (2.3.80)$$

где многоточием обозначены члены второго и более порядка по переменным $\{t^k\}$.

- **Задача 35.** ★ Вывести формулы (2.3.80).

Введем обозначения $\vec{x} = (\phi, \theta, \psi)$ и $\vec{F}(\vec{t}, \vec{x}) = (\phi', \theta', \psi')$, принятые в разделе **I-2.1.6** первой части книги. Тогда формулы (2.3.80) можно записать в виде $F^i(\vec{t}, \vec{x}) = x^i + t^k R_k^i(\vec{x}) + \dots$, где мы использовали матрицу

$$R_i^j(\vec{x}) = \partial_{t^i} F^j(\vec{t}, \vec{x})|_{\vec{t}=0} = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi' & \partial_1 \theta' & \partial_1 \psi' \\ \partial_2 \phi' & \partial_2 \theta' & \partial_2 \psi' \\ \partial_3 \phi' & \partial_3 \theta' & \partial_3 \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \operatorname{ctg} \theta & \sin \phi & -\cos \phi / \sin \theta \\ -\sin \phi \operatorname{ctg} \theta & \cos \phi & \sin \phi / \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.81)$$

Эта матрица по определению равна матрице право-инвариантных векторных полей на S^3 .

Согласно общей теории (см. раздел **I-6.3** первой части книги) на основе формулы (2.3.78) для левого действия группы $SU(2)$ на себя и формулы (2.3.79) для левого действия группы $SU(2)$ на факторпространство $SU(2)/U(1)$, можно построить два бесконечномерных представления группы $SU(2)$. С помощью формулы (2.3.78) (определяющей преобразования параметров $(\phi, \theta, \psi) \rightarrow (\phi', \theta', \psi')$ на сфере S^3) строится левое регулярное представление ρ_R группы $SU(2)$ (сравните с представлением T_R в (2.2.22)):

$$[\rho_R(U^{-1}) \cdot f](\phi, \theta, \psi) = f'(\phi, \theta, \psi) \equiv f(\phi', \theta', \psi'), \quad (2.3.82)$$

которое действует в пространстве функций $f(\phi, \theta, \psi)$ на $SU(2) = S^3$; здесь ϕ, θ, ψ — углы Эйлера, параметризующие элементы группы $SU(2)$. Второе бесконечномерное представление ρ группы $SU(2)$ строится на основе формулы (2.3.79):

$$[\rho(U^{-1}) \cdot f](\phi, \theta) = f(\phi', \theta') \equiv f'(\phi, \theta), \quad \forall U \in SU(2). \quad (2.3.83)$$

Это представление действует в пространстве функций $f(\phi, \theta)$ на однородном пространстве $S^2 = SU(2)/U(1)$; здесь углы ϕ и θ нумеруют точки на сфере S^2 .

- **Задача 36.** Доказать, что отображения ρ_R и ρ из группы $SU(2)$ в группу операторов, действующих согласно (2.3.82) и (2.3.83) на функциях $f(\phi, \theta, \psi)$ и $f(\phi, \theta)$, являются гомоморфизмами.

Снова подставим $U = \exp(-t^i \tau_i)$ в формулы (2.3.82), (2.3.83) и далее продифференцируем обе части этих формул по t^i с учетом (2.3.78), (2.3.79) и (2.3.80), полагая затем $t^i = 0$. В результате мы получаем (согласно общей методике, изложенной в разделе **I-6.5.3** первой части книги) представления ρ_R и ρ для образующих τ_i алгебры $su(2)$ в виде дифференциальных операторов. Для регулярного представления ρ_R (2.3.82) имеем

$$\begin{aligned} \rho_R(\tau_1) &= \cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \sin(\phi) \partial_\theta - \cos(\phi) \sin^{-1}(\theta) \partial_\psi, \\ \rho_R(\tau_2) &= -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \cos(\phi) \partial_\theta + \sin(\phi) \sin^{-1}(\theta) \partial_\psi, \quad \rho_R(\tau_3) = \partial_\phi. \end{aligned} \quad (2.3.84)$$

Эти операторы по построению (см. разделы **I-2.1.6** и **I-6.5.3**) равны^{2.8} право-инвариантным векторным полям $\rho_R(\tau_k) = R_k^j \partial_j$ на группе $SU(2)$. Аналогично, дифференцируя соотношения (2.3.83) по параметрам t^i , мы получаем представление ρ для образующих $SU(2)$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \rho(\tau_1) = \cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \sin(\phi) \partial_\theta, \\ \hat{\tau}_2 &= \rho(\tau_2) = -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \cos(\phi) \partial_\theta, \quad \hat{\tau}_3 = \rho(\tau_3) = \partial_\phi, \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

которые действуют в пространстве функций на однородном пространстве $SU(2)/U(1) = S^2$. Отметим, что представление (2.3.85) получается из представления (2.3.84), если в последнем положить $\partial_\psi = 0$ и таким образом занулить все производные вдоль кривых на многообразии группы $SU(2)$, которые соответствуют одномерной подгруппе стабильности $U(1)$, образованной элементами $U_{\vec{e}_3}(\psi)$.

^{2.8}Если мы сделаем замену параметров $t^k \rightarrow -t^k$, то согласно (2.3.80), (2.3.81) у всех элементов R_k^j поменяется знак $R_k^j \rightarrow -R_k^j$ и право-инвариантные векторные поля будут определяться формулой $(-R_k^j \partial_j)$. Именно такое соглашение принято в разделах **I-2.1.6** и **I-6.5** первой части книги.

- **Задача 37.** Проверить, что операторы (2.3.84) и (2.3.85) образуют базис алгебры $su(2)$, то есть удовлетворяют структурным соотношениям (2.1.17).
- **Задача 38.** Доказать, что квадратичный оператор Казимира $\hat{\tau}_k \hat{\tau}_k$ (оператор Лапласа на сфере $S^3 = SU(2)$) для образующих (2.3.84) в параметризации углов Эйлера равен

$$\rho_R(\tau_k \tau_k) = \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \operatorname{ctg} \theta \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\partial_\psi - 2 \cos \theta \partial_\phi) \partial_\psi \equiv \Delta_{SU(2)}. \quad (2.3.86)$$

- **Задача 39.** ★ Доказать, что лапласиан (2.3.86) на сфере S^3 (на группе $SU(2)$) в параметризации углов Эйлера (2.3.23), умноженный на фактор 4, равен стандартному лапласиану на сфере S^3 , записанному в параметризации сферических углов (2.3.13):

$$\Delta'_{SU(2)} = \frac{1}{\sin^2 \chi} \partial_\chi (\sin^2 \chi \cdot \partial_\chi) + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \cdot \partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2. \quad (2.3.87)$$

То есть, мы имеем $4 \cdot \Delta_{SU(2)} = \Delta'_{SU(2)}$.

Квадратичный оператор Казимира $\hat{\tau}_k \hat{\tau}_k$ для образующих (2.3.85) (оператор Лапласа на сфере S^2) получается из оператора (2.3.86), если в нем положить $\partial_\psi = 0$. В результате оператор Казимира $su(2)$ в представлении (2.3.85) приобретает стандартный вид оператора Лапласа на сфере $S^2 = SU(2)/U(1)$:

$$\hat{\tau}_k \hat{\tau}_k = \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \operatorname{ctg} \theta \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right) \equiv \Delta_{SU(2)/U(1)}. \quad (2.3.88)$$

Рассмотренные выше бесконечномерные представления ρ_R и ρ группы $SU(2)$ являются приводимыми. Для примера выделим конечномерные неприводимые представления из представления ρ (2.3.83). Для этого подействуем на обе части операторного равенства (2.3.79) слева с вектором $\langle \ell, m |$, а справа с вектором $| \ell, 0 \rangle$ и воспользуемся соотношениями (2.3.58), где положим $m_3 = m'$, $j = \ell$ и $U' = U(\phi, \theta, \psi)$, а также воспользуемся (2.3.70), (2.3.72) и (2.3.73). В итоге (2.3.79) переписется в виде соотношений

$$\langle \ell, m | U \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) | \ell, 0 \rangle = \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(U) Y_{m'}^{(\ell)}(\phi, \theta) = Y_m^{(\ell)}(\phi', \theta'), \quad (2.3.89)$$

где U – любой элемент $SU(2)$, а преобразованные углы ϕ' , θ' зависят от U , ϕ и θ и однозначно определяются из уравнений (2.3.79). Согласно общей теории, изложенной в разделе **1-6.5.5** первой части книги, соотношения (2.3.89) определяют специальное представление $\rho^{(\ell)}$ группы $SU(2)$:

$$[\rho^{(\ell)}(U^{-1}) \cdot Y_m^{(\ell)}](\phi, \theta) = \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(U) Y_{m'}^{(\ell)}(\phi, \theta) = Y_m^{(\ell)}(\phi', \theta'). \quad (2.3.90)$$

Из первого равенства в (2.3.90) следует, что сферические функции $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$ образуют базис в пространствах специальных конечномерных неприводимых представлений $\rho^{(\ell)}$ группы $SU(2)$, которые нумеруются целыми числами $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Эти конечномерные представления эквивалентны представлениям $T^{(\ell)}$ и вкладываются (это видно из второго равенства в (2.3.90)) как подпредставления в бесконечномерное представление ρ группы $SU(2)$, которое было определено в (2.3.83). Напомним, что представления (2.3.90) группы $SU(2)$ одновременно являются (так как ℓ – целое) и неприводимыми представлениями группы $SO(3)$.

Получим представление алгебры $su(2)$, которое соответствует представлению $\rho^{(\ell)}$ группы $SU(2)$. Для этого снова подставим экспоненциальное представление для элемента $U = \exp(-t^i \tau_i)$ в равенство (2.3.90) и продифференцируем обе части этого равенства по t^k , а потом положим $t^k = 0$. В результате получаем формулу для действия образующих τ_k в дифференциальном представлении (2.3.85) на сферические гармоники:

$$\hat{\tau}_k \cdot Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = - \sum_{m'} \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\tau_k) Y_{m'}^{(\ell)}(\phi, \theta).$$

Здесь $|\mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\tau_k)|$ – матрицы образующих τ_k алгебры Ли $su(2)$ в представлении $T^{(\ell)}$. Та же формула в обозначениях Дирака записывается следующим образом

$$\hat{\tau}_k \langle \ell, m | \phi, \theta \rangle = - \langle \ell, m | \tau_k | \phi, \theta \rangle = - \sum_{m'} \langle \ell, m | \tau_k | \ell, m' \rangle \langle \ell, m' | \phi, \theta \rangle, \quad (2.3.91)$$

где мы положили

$$\begin{aligned} |\phi, \theta\rangle &:= U(\phi, \theta, 0) |\ell, 0\rangle, \quad \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\tau_k) = \langle \ell, m | \tau_k | \ell, m' \rangle, \\ Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \langle \ell, m | \phi, \theta \rangle = \langle \ell, m | U(\phi, \theta, 0) | \ell, 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.92)$$

Отметим, что связь (2.3.91) матричных представлений $\|\mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\tau_k)\|$ образующих τ_k и их дифференциальных реализаций (2.3.85), показывает, что действие дифференциального оператора $\hat{\tau}_k$ на сферические функции $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$ эквивалентно действию справа образующей $(-\tau_k)$ на дуальные вектора $\langle \ell, m |$. Сделаем замену (2.1.15) для образующих (2.3.85). В результате получаем дифференциальное представление для базисных элементов e_{\pm}, \mathfrak{h} алгебры $sl(2, \mathbb{C})$:

$$\hat{e}_{\pm} = i \hat{\tau}_1 \mp \hat{\tau}_2 = e^{\mp i \phi} (\mp \partial_{\theta} + i \operatorname{ctg} \theta \partial_{\phi}), \quad \hat{\mathfrak{h}} = i \hat{\tau}_3 = i \partial_{\phi}. \quad (2.3.93)$$

В соответствии с (2.3.91) действие дифференциальных образующих (2.3.93) на функции $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = \langle \ell, m | \phi, \theta \rangle$ определяется действием образующих $(-e_{\pm}), (-\mathfrak{h})$ в представлении $T^{(\ell)}$ справа на дуальные вектора $\langle \ell, m |$. Пользуясь уравнениями (2.1.28), (2.3.91) мы получаем^{2.9}

$$\begin{aligned} (-\hat{\mathfrak{h}}) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \langle \ell, m | \mathfrak{h} | \phi, \theta \rangle = m Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta), \\ (-\hat{e}_{-}) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \langle \ell, m | e_{-} | \phi, \theta \rangle = \sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m)} Y_{m+1}^{(\ell)}(\phi, \theta), \\ (-\hat{e}_{+}) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \langle \ell, m | e_{+} | \phi, \theta \rangle = \sqrt{(\ell - m + 1)(\ell + m)} Y_{m-1}^{(\ell)}(\phi, \theta). \end{aligned} \quad (2.3.94)$$

Так как образующие e_{+} и e_{-} порождают (с помощью равенств (2.1.28), (2.1.29)) все базисные вектора $\langle m, \ell |$ дуального пространства $\mathcal{V}_{2\ell+1}^*$ из дуальных старших $\langle \ell, \ell |$ или младших $\langle \ell, -\ell |$ векторов, то в рассматриваемом случае дифференциальные операторы \hat{e}_{\pm} , построенные в (2.3.93), должны порождать все сферические гармоники $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$ из функций $Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$ и $Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$, соответствующих векторам $\langle \ell, \ell |$ и $\langle \ell, -\ell |$. Выберем в (2.3.62) $j = \ell$ и положим $m' = \ell, m = 0$, или $m' = -\ell, m = 0$, в результате получаем

$$\begin{aligned} Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \frac{\sqrt{(2\ell)!}}{2^{\ell}(\ell!)} e^{i\ell\phi} \sin^{\ell}(\theta) = \langle \ell, \ell | \phi, \theta \rangle, \\ Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) &= (-1)^{\ell} \frac{\sqrt{(2\ell)!}}{2^{\ell}(\ell!)} e^{-i\ell\phi} \sin^{\ell}(\theta) = \langle \ell, -\ell | \phi, \theta \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

- **Задача 40.** Показать, что функции $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$, заданные в (2.3.73), (2.3.74) и (2.3.75), подчиняются уравнениям (2.3.94). В частности проверить, что функции $Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$ и $Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$ (2.3.95) удовлетворяют условиям для старшего и младшего дуального вектора (см. (2.1.32), (2.1.30)): $\hat{e}_{-} Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) = 0, \hat{e}_{+} Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) = 0$. Вывести представление (2.3.73), (2.3.74) и (2.3.75) для функций $Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$, действуя на $Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$ и $Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$ операторами \hat{e}_{+}^m и \hat{e}_{-}^m , соответственно.
- **Задача 41.** Пользуясь равенствами (2.3.94), доказать, что сферические функции $Y_m^{(\ell)}$ являются собственными функциями оператора Лапласа на двумерной сфере $\Delta_{SU(2)/U(1)}$ (2.3.88):

$$\Delta_{SU(2)/U(1)} Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = \ell(\ell + 1) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta), \quad \forall m,$$

то есть проверить соотношение (2.1.34) для данного представления (сравните с общей формулой действия оператора Лапласа $\Delta_{G/H}$ на присоединенные сферические функции; раздел I-6.5.5 первой части книги).

- **Задача 42.** Пользуясь представлением (2.3.84) и формулой (2.3.62) доказать, что функции $\mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\phi, \theta, \psi)$ являются собственными для оператора Лапласа (2.3.86) на $SU(2) = S^3$

$$\Delta_{SU(2)} \mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\phi, \theta, \psi) = j(j + 1) \mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\phi, \theta, \psi), \quad \forall m, m',$$

^{2.9}Учитывая известный автоморфизм алгебры $sl(2, \mathbb{C})$, мы можем поменять обозначения $\hat{e}_{\pm} \rightarrow -\hat{e}_{\mp}, \hat{\mathfrak{h}} \rightarrow -\hat{\mathfrak{h}}$ в равенствах (2.3.93) и (2.3.94), и таким образом переписать эти равенства в более привычном виде, принятом во многих книгах по квантовой механике.

где j – целые и полуцелые неотрицательные числа. Показать, что спектральная задача для оператора Лапласа (2.3.87) на сфере S^3 записывается в виде

$$\Delta'_{SU(2)} \Psi^{(j)}(\varphi, \vartheta, \chi) = n(n+2) \Psi^{(j)}(\varphi, \vartheta, \chi),$$

где n – целые неотрицательные числа.

Найдем меру Хаара для группы $SU(2)$. Для этого вычислим детерминант от матрицы (2.3.81)

$$\det(\|R_k^j\|) = \sin^{-1}(\theta). \quad (2.3.96)$$

Напомним (см. раздел **I-2.1.6** в первой части книги), что мера Хаара на n -мерной компактной группе G в локальной окрестности точки $g(\vec{x}) \in G$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – локальные координаты (параметры), определяется через матрицу $\|R_k^j\|$ правых векторных полей по формуле

$$d\mu(g) = c \cdot \det^{-1}(\|R_k^j\|) dx_1 \cdots dx_n.$$

Подставляя сюда равенство (2.3.96), мы получаем инвариантную меру Хаара на группе $SU(2)$, записанную в параметризации Эйлера

$$d\mu(U) = \frac{1}{16\pi^2} \sin(\theta) d\phi d\theta d\psi, \quad (2.3.97)$$

где константа $c = \frac{1}{16\pi^2}$ выбрана так, чтобы объем всей группы $SU(2)$ равнялся единице (область изменения углов Эйлера для группы $SU(2)$ указана в (2.3.22)). Соотношение ортогональности (см. раздел **I-3.6.2** первой части книги) для матричных элементов $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U)$ (2.3.62) неприводимых представлений $T^{(j)}$ группы $SU(2)$ записываются в виде

$$\int d\mu(U) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U) \left(\mathcal{D}_{k'k}^{(j')} (U) \right)^* = c(j) \delta^{jj'} \delta_{m'k'} \delta_{mk}, \quad (2.3.98)$$

где константу $c(j)$ в (2.3.98) можно вычислить, если зафиксировать $j = j'$, $k = m = j$, $k' = m' = j$ и воспользоваться (2.3.62) и (2.3.65). В этом случае интеграл (2.3.98) сводится к следующему интегралу для функций Вигнера

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) d_{jj}^{(j)}(\theta) d_{jj}^{(j)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \cos^{4j}(\theta/2) = c(j), \quad (2.3.99)$$

откуда мы получаем, что

$$c(j) = \frac{1}{2j+1}. \quad (2.3.100)$$

Из формулы (2.3.98) также следует соотношение ортогональности (см. раздел **I-6.5.5** первой части книги) для сферических функций (2.3.73):

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) \left(Y_{m'}^{(\ell')}(\phi, \theta) \right)^* = c(\ell) \delta^{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (2.3.101)$$

и соответственно для присоединенных функций Лежандра (2.3.75) и полиномов Лежандра (2.3.76).

- **Задача 43.** Доказать, что с учетом (2.3.100), (2.3.73) и (2.3.74) из формулы (2.3.101) следует соотношение ортогональности для присоединенных функций Лежандра:

$$\int_{-1}^1 dx P_m^{(\ell)}(x) P_m^{(\ell')}(x) = \frac{2}{(2\ell+1)} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta^{\ell\ell'}.$$

2.4 Тензорное произведение представлений группы $SU(2)$ и ряд Клебша - Гордана

2.4.1 Разложение Клебша–Гордана

Пусть представления $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ группы G неприводимы. Обозначим соответствующие пространства представлений как \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 . Прямое произведение $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$ этих представлений в общем случае приводимо. Пусть группа G компактна. Тогда, согласно Утверждению **I-3.5.1** (см. раздел **I-3.5** первой части книги), представление $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$ всегда разложимо в прямую сумму по неприводимым представлениям $T^{(\alpha)}$ группы G , которые действуют в пространствах представлений \mathcal{V}_α (индекс α нумерует неприводимые неэквивалентные представления). Таким образом, мы имеем разложение

$$\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 = \bigoplus_\alpha m_\alpha \mathcal{V}_\alpha, \quad (2.4.1)$$

где m_α – кратности вхождения неприводимых представлений, эквивалентных $T^{(\alpha)}$, в тензорное произведение $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$. В правой части (2.4.1) мы использовали формальную запись прямой суммы пространств $\bigoplus_\alpha \bigoplus_{\kappa=1}^{m_\alpha} \mathcal{V}_{\kappa;\alpha}$, где индекс κ нумерует представления, эквивалентные представлению $T^{(\alpha)}$. Другими словами, существует такая обратимая матрица C , с помощью которой все матрицы представления $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$ приводятся к блочно-диагональному виду

$$C (T^{(1)}(g) \otimes T^{(2)}(g)) C^{-1} = \bigoplus_\alpha \bigoplus_{\kappa=1}^{m_\alpha} T_\kappa^{(\alpha)}(g), \quad (2.4.2)$$

где g – произвольный элемент G . Матрица C переводит базис пространства $(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2)$, состоящий из прямого произведения базисных векторов \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 , в естественный базис пространства $\bigoplus_\alpha m_\alpha \mathcal{V}_\alpha$, состоящий из базисных векторов всех слагаемых подпространств \mathcal{V}_α . Элементы матрицы C называются коэффициентами Клебша–Гордана. Действие матрицы C можно записать в явном виде

$$\sum_{d,b} C_{(\alpha,c)}^{(1,d),(2,b)} |d\rangle_1 \otimes |b\rangle_2 = |c\rangle_\alpha, \quad (2.4.3)$$

где $|d\rangle_1$, $|b\rangle_2$ и $|c\rangle_\alpha$ – нормированные базисные вектора пространств \mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_2 и $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$, соответственно (индекс κ мы опустили), и индексы d, b, c нумеруют эти базисные вектора. Формула (2.4.3) называется разложением (или рядом) Клебша–Гордана, а вектора $|c\rangle_\alpha$ называются векторами связанного базиса в пространстве (2.4.1).

Проблема построения ряда Клебша–Гордана в теории представлений групп является одной из самых сложных задач, решение которой известно только для некоторого класса групп и определенных типов представлений.

В этом разделе мы изучим проблему построения ряда Клебша–Гордана для конечномерных представлений $T^{(j)}$ группы $SU(2)$, которые характеризуются спином j . Эти представления, как мы видели, соответствуют конечномерным представлениям алгебры Ли $su(2)$ или конечномерным представлениям алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$.

Прежде всего мы обсудим метод нахождения кратностей m_α в разложении (2.4.1) и (2.4.2). Пусть мы имеем два неприводимых представления $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ группы $SU(2)$ или, что то же самое, два неприводимых представления $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ алгебр Ли

$su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$. Напомним, что представление $T^{(j)}$ действует в пространстве \mathcal{V}_{2j+1} с базисными векторами $|j, m\rangle$ (2.1.19) и элементы группы $SU(2)$ реализуются в этом представлении в виде $(2j+1)$ -мерных матриц (2.3.50). В рассматриваемом случае равенство (2.4.2) записывается в виде

$$C (T^{(j_1)}(U) \otimes T^{(j_2)}(U)) C^{-1} = \bigoplus_j \bigoplus_{\kappa=1}^{m_j} T_{\kappa}^{(j)}(U), \quad \forall U \in SU(2). \quad (2.4.4)$$

Возьмем элемент $U \in SU(2)$ в параметризации (2.3.9): $U = U_{\vec{n}}(\psi)$ (здесь мы используем обозначение ψ вместо Ψ). Из равенства (2.4.4) следует соотношение для характеров:

$$\chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) = \sum_j m_j \chi^j(\psi), \quad (2.4.5)$$

где

$$\chi^{(j)}(\psi) = \text{Tr}_{2j+1} (T^{(j)}(U_{\vec{n}}(\psi))) = \sum_{m=-j}^j \langle j, m | U_{\vec{n}}(\psi) | j, m \rangle, \quad (2.4.6)$$

и Tr_{2j+1} обозначает след в пространстве \mathcal{V}_{2j+1} представления $T^{(j)}$.

Утверждение 2.4.1 *Характер (2.4.6) не зависит от направления \vec{n} , а зависит только от угла ψ , и равен*

$$\chi^{(j)}(\psi) = \frac{\sin(\psi(j+1/2))}{\sin(\psi/2)}. \quad (2.4.7)$$

Здесь угол поворота $\psi \in [-2\pi, 2\pi)$ характеризует в группе $SU(2)$ класс сопряженных элементов, состоящий из всех элементов $U_{\vec{n}}(\psi)$ (2.3.9) с фиксированным ψ и произвольными \vec{n} .

Доказательство. Преобразования подобия (2.3.16) любой элемент $U_{\vec{n}}(\psi)$ (2.3.9) с произвольным \vec{n} сводится к элементу $U_{\vec{e}_3}(\psi)$, который можно использовать для нумерации класса сопряженных элементов. С учетом преобразования (2.3.16) характер любого элемента $U_{\vec{n}}(\psi) \in SU(2)$ в представлении $T^{(j)}$ равен

$$\begin{aligned} \chi^{(j)}(\psi) &= \text{Tr}_{2j+1} (T^{(j)}(U_{\vec{n}}(\psi))) = \text{Tr}_{2j+1} (T^{(j)}(U_{\vec{\vartheta}, \varphi}^{-1} \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi) \cdot U_{\vec{\vartheta}, \varphi})) = \\ &= \text{Tr}_{2j+1} (T^{(j)}(U_{\vec{e}_3}(\psi))) = \sum_m \langle j, m | U_{\vec{e}_3}(\psi) | j, m \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

то есть, не зависит от \vec{n} , а зависит только от угла ψ . Пользуясь формулой (2.4.8) и явным видом (2.3.64) для матрицы элемента $U_{\vec{e}_3}(\psi)$ в представлении $T^{(j)}$, мы вычисляем характер (2.4.6), (2.4.8) для любого элемента $U_{\vec{n}}(\psi)$:

$$\chi^{(j)}(\psi) = \sum_{m=-j}^j \langle j, m | U_{\vec{e}_3}(\psi) | j, m \rangle = \sum_{m=-j}^j e^{im\psi} = \frac{e^{i\psi(j+1/2)} - e^{-i\psi(j+1/2)}}{e^{i\psi/2} - e^{-i\psi/2}}, \quad (2.4.9)$$

что и дает (2.4.7). ■

Знание явных выражений (2.4.7), (2.4.9) для характеров $\chi^{(j)}$ всех конечномерных неприводимых представлений $T^{(j)}$ группы $SU(2)$ позволяет получить разложение (2.4.5) (и тем самым найти кратности m_j), если воспользоваться полнотой и

ортогональностью функций $\chi^{(j)}(\psi)$ в соответствии с общей теорией характеров компактных групп (см. раздел **I-3.6.2** первой части книги). Здесь мы изложим прямой способ вывода разложения (2.4.5), из которого значения для кратностей m_j будут следовать автоматически.

Подставим функции (2.4.7) в левую часть (2.4.5) и воспользуемся тождеством

$$\sin(a) \sin(b) = \sin(a + b - c) \sin(c) + \sin(a - c) \sin(b - c) ,$$

которое справедливо для любых a, b и c . Положим $a = \psi(j_1 + \frac{1}{2})$, $b = \psi(j_2 + \frac{1}{2})$ и $c = \psi/2$. Тогда левая часть (2.4.5) переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) &= \frac{\sin(\psi(j_1 + \frac{1}{2})) \sin(\psi(j_2 + \frac{1}{2}))}{\sin^2(\psi/2)} = \\ &= \frac{\sin(\psi(j_1 + j_2 + \frac{1}{2}))}{\sin(\psi/2)} + \frac{\sin(\psi j_1) \sin(\psi j_2)}{\sin^2(\psi/2)} = \chi^{(j_1+j_2)}(\psi) + \chi^{(j_1-\frac{1}{2})}(\psi) \cdot \chi^{(j_2-\frac{1}{2})}(\psi) . \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Второе слагаемое в правой части (2.4.10) может быть снова расписано с помощью тождества (2.4.10), после чего мы имеем

$$\chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) = \chi^{(j_1+j_2)}(\psi) + \chi^{(j_1+j_2-1)}(\psi) + \chi^{(j_1-1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2-1)}(\psi) ,$$

где к третьему слагаемому в правой части мы снова можем применить (2.4.10) и так далее. Пусть $j_1 \geq j_2$ (случай $j_2 \geq j_1$ рассматривается аналогично), тогда после $(2j_2)$ шагов мы получим, что в правой части в последнем квадратичном слагаемом второй сомножитель будет равен единице, так как $\chi^{(0)}(\psi) = 1$, после чего процедура многократного применения формулы (2.4.10) оборвется, и в результате мы получим разложение

$$\chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) = \chi^{(j_1+j_2)}(\psi) + \chi^{(j_1+j_2-1)}(\psi) + \dots + \chi^{(j_1-j_2)}(\psi) . \quad (2.4.11)$$

Сравнивая этот результат с разложением (2.4.5), мы видим, что в (2.4.5) необходимо положить $m_j = 1$ для $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ и $m_j = 0$ для других j . Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2.4.2 *Разложение (2.4.4) прямого произведения двух неприводимых конечномерных представлений $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ группы $SU(2)$ имеет вид*

$$\left(T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \right) = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} T^{(j)} , \quad (2.4.12)$$

что соответствует тождеству характеров (2.4.11).

Данное утверждение эквивалентно тому, что прямое произведение пространств представлений $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ разлагается в прямую сумму пространств представлений $T^{(j)}$ со спинами j , которые лежат в интервале $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$, причем каждый из этих спинов встречается однократно, а шаг изменения j равен 1. Этот результат хорошо известен в квантовой механике и называется правилом сложения спинов j_1

и j_2 . Справедливость формулы (2.4.12) можно также проверить путем подсчета размерностей соответствующих пространств представлений, что эквивалентно проверке комбинаторного тождества:

$$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j + 1) .$$

Замечание. Из формулы (2.4.11) для $j_1 = j$ и $j_2 = 1/2$ получаем соотношение

$$\chi^{(j)} \cdot \chi^{(\frac{1}{2})} = \chi^{(j+\frac{1}{2})} + \chi^{(j-\frac{1}{2})} , \quad (2.4.13)$$

где

$$\chi^{(0)} = 1 , \quad \chi^{(\frac{1}{2})} = 2 \cos(\psi/2) . \quad (2.4.14)$$

Согласно тождеству (2.4.13), которое можно рассматривать как рекуррентное соотношение с начальными данными (2.4.14), все функции $\chi^{(j)}(\psi)$, заданные в (2.4.7), являются полиномами $P_{2j}(x)$ степени $2j$ от переменной $x = \cos(\psi/2)$. Полиномы $P_{2j}(x)$ называются полиномами Чебышева второго рода. Ортогональность этих полиномов

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) (1-x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{nm} , \quad (2.4.15)$$

следует из общего утверждения об ортогональности характеров неприводимых представлений любой компактной группы (см. раздел **I-3.6.2** первой части книги).

- *Задача 44.* Вывести формулу (2.4.15), записав интеграл по группе $SU(2)$ от произведения характеров $\chi^{(\frac{n}{2})}(\psi) \cdot \chi^{(\frac{m}{2})}(\psi)$ с мерой (2.3.18).
- *Задача 45.* Доказать, что производящая функция для полиномов $P_{2j}(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{1-2tx+t^2} . \quad (2.4.16)$$

Указание: умножить обе части (2.4.16) на $(1-2tx+t^2)$ и использовать соотношение (2.4.13), записанное как $2xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)$, а также учесть начальные данные (2.4.14): $P_0 = 1, P_1 = 2x$.

Итак, задача о вычислении кратностей в (2.4.2) решена. Далее задача построения ряда Клебша–Гордана сводится к явному выделению неприводимых компонент в прямом произведении представлений $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ и вычислению коэффициентов матрицы C (коэффициентов Клебша–Гордана), фигурирующих в формулах (2.4.2) и (2.4.3). В следующих разделах мы рассмотрим различные методы, которые используются при решении этих задач в случае конечномерных неприводимых представлений группы $SU(2)$.

2.4.2 Выделение неприводимых представлений со старшим весом в прямом произведении представлений

В этом подразделе мы опишем способ выделения неприводимых компонент в прямом произведении представлений $T^{(j)}$ с разными j с помощью метода построения представлений со старшим весом (см. раздел 2.1 и раздел I-3.7.3 первой части книги). Этот способ удобен для практических вычислений при не слишком больших значениях j .

Выберем, как это принято в квантовой механике, в качестве образующих алгебры $su(2)$ эрмитовы операторы S_α , для которых в определяющем представлении мы имеем

$$S_\alpha = i \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_\alpha,$$

и которые удовлетворяют соотношениям, вытекающим из (2.1.17):

$$[S_\alpha, S_\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \quad (2.4.17)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями $S_x = S_1, S_y = S_2, S_z = S_3$ и называть эти образующие компонентами оператора вектора спина.

Рассмотрим двумерное определяющее представление $T^{(\frac{1}{2})}$ алгебры $su(2)$ (группы $SU(2)$) и зафиксируем базис $\vec{e}^A = (\vec{e}^1, \vec{e}^2)$ в 2-мерном пространстве \mathcal{V}_2 этого представления. Любой вектор $v \in \mathcal{V}$ разлагается по данному базису $v = v_A \vec{e}^A$ и может быть представлен в координатной форме в виде вектор-столбца $v_A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Соответственно для базисных векторов их координатное представление имеет вид

$$\vec{e}^A = (\vec{e}^A)_B \vec{e}^B, \quad (\vec{e}^A)_B = \delta_B^A \quad \Rightarrow \quad (2.4.18)$$

$$|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}^1)_A, \quad |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}^2)_A. \quad (2.4.19)$$

Здесь и далее в этом подразделе, где это не вызовет противоречий, мы будем отождествлять базисные вектора \vec{e}^A и их координатные представления $(\vec{e}^A)_B$. Действие операторов спина S_α на произвольный вектор $v \in \mathcal{V}$ определяется стандартным образом (2.1.7), (2.1.8):

$$v \rightarrow v' = S_\alpha \cdot v = v_A (S_\alpha \cdot \vec{e}^A) = v_B \vec{e}^A (S_\alpha)_A^B \quad \Rightarrow \quad v_A \rightarrow v'_A = (S_\alpha)_A^B v_B. \quad (2.4.20)$$

Отсюда следует правило действия S_α на базисные вектора в координатной форме

$$(\vec{e}^A)_B \rightarrow (S_\alpha \cdot \vec{e}^A)_B = (S_\alpha)_B^C (\vec{e}^A)_C = (\vec{e}^C)_B (S_\alpha)_C^A, \quad (2.4.21)$$

где в последнем равенстве мы использовали представление (2.4.18). В согласии с этим правилом стрелки в обозначениях $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ в (2.4.19) соответствуют направлению вектора спина по отношению к оси z (вверх и вниз) или, что тоже самое, знаку собственного значения $m = +1/2$, или $m = -1/2$, оператора S_z , взятого в определяющем представлении $S_z = 1/2 \sigma_3$:

$$S_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle, \quad S_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle.$$

Далее для базисных векторов

$$\vec{e}^{A_1} \otimes \vec{e}^{A_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}^{A_n} \in \mathcal{V}^{\otimes n}, \quad (2.4.22)$$

(здесь \vec{e}^A – базисные вектора в \mathcal{V}_2) мы пользуемся следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}^1 \otimes \vec{e}^1, & |\downarrow\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}^2 \otimes \vec{e}^1, \\ |\uparrow\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}^1 \otimes \vec{e}^2, & |\downarrow\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}^2 \otimes \vec{e}^2, \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

$$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \vec{e}^1 \otimes \vec{e}^1 \otimes \vec{e}^1, \quad |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle = \vec{e}^2 \otimes \vec{e}^1 \otimes \vec{e}^1, \quad |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle = \vec{e}^2 \otimes \vec{e}^1 \otimes \vec{e}^2, \dots \quad (2.4.24)$$

В квантовой механике вектора (2.4.22) соответствуют состояниям систем из n частиц спина $1/2$.

В соответствии с определениями, данными в разделе **I-3.3.1** первой части книги, действие операторов компонент вектора спина S_x, S_y, S_z на состояния из пространства представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ определяется общим правилом:

$$T(S_\alpha)(v \otimes u) = (T^{(j_1)}(S_\alpha)v) \otimes u + v \otimes (T^{(j_2)}(S_\alpha)u), \quad (2.4.25)$$

где v и u – вектора из пространств \mathcal{V}_{2j_1+1} и \mathcal{V}_{2j_2+1} представлений $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$, соответственно. Таким образом, мы имеем

$$T(S_\alpha) = T^{(j_1)}(S_\alpha) \otimes I_{2j_2+1} + I_{2j_1+1} \otimes T^{(j_2)}(S_\alpha), \quad (2.4.26)$$

где I_n – единичный оператор в \mathcal{V}_n .

Положим $j_1 = j_2 = 1/2$ в формуле (2.4.26). В результате мы получаем представление Δ алгебры $su(2)$ (и одновременно представление обертывающей алгебры $\mathcal{U}(su(2))$) действующее в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$:

$$\Delta(S_\alpha) = S_\alpha \otimes I + I \otimes S_\alpha, \quad (2.4.27)$$

где $I = I_2$ – единичный оператор в \mathcal{V} и операторы S_α , действующие на вектора из \mathcal{V} , берутся в определяющем представлении $T^{(\frac{1}{2})}$. Операторы $\Delta(S_\alpha)$ (2.4.27) применяются к состояниям $(v \otimes u)$, где $v, u \in \mathcal{V}$, согласно (2.4.25):

$$\Delta(S_\alpha)(v \otimes u) = (S_\alpha \otimes I + I \otimes S_\alpha)(v \otimes u) = (S_\alpha v) \otimes u + v \otimes (S_\alpha u). \quad (2.4.28)$$

Далее, для определения действия образующих S_α алгебры $su(2)$ на базисные состояния (2.4.24) в $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$, которые представляют собой композицию трех частиц со спином $1/2$ (тензорное произведение трех двумерных векторов), мы пользуемся формулой

$$\Delta^2(S_\alpha) = S_\alpha \otimes I \otimes I + I \otimes S_\alpha \otimes I + I \otimes I \otimes S_\alpha, \quad (2.4.29)$$

где Δ^2 – обозначает представление $\mathcal{U}(su(2))$ в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$, и так далее. В общем случае для определения действия операторов спина S_α на базисные состояния (2.4.22) мы должны воспользоваться представлением (сравните с формулами (2.4.27), (2.4.29)):

$$\Delta^{n-1}(S_\alpha) = \sum_{k=1}^n S_\alpha^{(k)}, \quad (2.4.30)$$

где

$$S_\alpha^{(k)} = I^{\otimes(k-1)} \otimes S_\alpha \otimes I^{\otimes(n-k)}. \quad (2.4.31)$$

Таким образом, действие оператора S_α в представлении (2.4.30) на любое состояние

$$\psi = \psi_{A_1 A_2 \dots A_n} \bar{e}^{A_1} \otimes \bar{e}^{A_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{A_n} \in \mathcal{V}^{\otimes n}, \quad (\psi_{A_1 A_2 \dots A_n} \in \mathbb{C}), \quad (2.4.32)$$

описывающее n частиц со спином $1/2$, дается в соответствии с (2.4.20) и (2.4.30) формулой

$$\Delta^{n-1}(S_\alpha) \psi = \sum_{k=1}^n \psi_{A_1 A_2 \dots A_n} \bar{e}^{A_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{A_{k-1}} \otimes \bar{e}^{B_k} (S_\alpha)_{B_k}^{A_k} \otimes \bar{e}^{A_{k+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{A_n}. \quad (2.4.33)$$

Применим правило (2.4.28) и правило, вытекающее из (2.4.29), к состояниям (2.4.23) и (2.4.24). Тогда собственные значения m оператора S_z на состояниях (2.4.23) равны $1, 0, 0, -1$, а на состояниях (2.4.24) равны $3/2, 1/2, -1/2, \dots$, соответственно.

Вектора (2.4.22), образуют базис пространства $\mathcal{V}^{\otimes n}$, в котором реализуется представление $su(2)$ размерности 2^n . Для выделения неприводимых компонент из $\mathcal{V}^{\otimes n}$ воспользуемся стандартной процедурой построения представлений со старшим весом. Введем повышающие и понижающие операторы S_\pm (аналоги образующих $e_\pm \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, которые заданы в (2.1.2)):

$$S_+ = S_x + iS_y, \quad S_- = S_x - iS_y, \\ [S_+, S_-] = 2S_z, \quad [S_z, S_\pm] = \pm S_\pm.$$

Здесь S_z – аналог образующей \mathfrak{h} из (2.1.2). В определяющем представлении имеем

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_+ | \uparrow \rangle = 0, \quad S_+ | \downarrow \rangle = | \uparrow \rangle, \\ S_- | \uparrow \rangle = | \downarrow \rangle, \quad S_- | \downarrow \rangle = 0. \quad (2.4.34)$$

Итак, в этом представлении операторы S_+ и S_- либо "переворачивают" спины, либо уничтожают соответствующие вектора.

Вначале рассмотрим процедуру выделения неприводимых представлений на примере 4-мерного пространства $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ с базисными векторами (2.4.23). Для удобства эти вектора мы запишем в виде "башни" в соответствии с их собственными значениями m оператора S_z в представлении Δ :

$$\begin{array}{ll} | \uparrow \uparrow \rangle & m = 1 \\ | \uparrow \downarrow \rangle, | \downarrow \uparrow \rangle & m = 0 \\ | \downarrow \downarrow \rangle & m = -1 \end{array} \quad (2.4.35)$$

Напомним, что собственное значение m оператора S_z называют проекцией вектора спина на ось z . Согласно определению (2.1.3), в качестве вектора со старшим весом в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ мы можем выбрать состояние $| \uparrow \uparrow \rangle$ с максимальной проекцией $m = 1$, так как это состояние уничтожается повышающим оператором, который в соответствии с (2.4.27) выбирается в виде $\Delta(S_+) = S_+ \otimes I + I \otimes S_+ \equiv \Delta S_+$. Затем, для того чтобы породить из старшего вектора $| \uparrow \uparrow \rangle$ все пространство неприводимого

представления, мы воспользуемся стандартной процедурой и подействуем на $|\uparrow\uparrow\rangle$ понижающим оператором $\Delta(S_-) = S_- \otimes I + I \otimes S_- \equiv \Delta S_-$ и учтем при этом (2.4.34). В результате получаем

$$(\Delta S_-) \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (\Delta S_-)^2 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = 2|\downarrow\downarrow\rangle, \quad (\Delta S_-)^3 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = 0.$$

Таким образом, мы построили три симметричных (по отношению к перестановке спинов) вектора

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle & & m = 1, \\ (\Delta S_-) \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle & & m = 0, \\ (\Delta S_-)^2 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = 2|\downarrow\downarrow\rangle & & m = -1 \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

которые определяют базис в инвариантном 3-х мерном подпространстве, вложенном в 4-х мерное пространство $\mathcal{V}^{\otimes 2}$. Данное 3-х мерное инвариантное пространство соответствует неприводимому представлению $su(2)$ со спином $j = 1$, что следует из вычисления собственного значения $j(j+1)$ для оператора Казимира (2.1.21):

$$J^2 = \frac{1}{2}(S_+S_- + S_-S_+) + S_z^2 = S_-S_+ + (1 + S_z)S_z, \quad (2.4.37)$$

в представлении Δ на векторах (2.4.36). Напомним (см. (2.1.34)), что оператор Казимира (2.4.37) имеет одно и тоже собственное значение $j(j+1)$ на всех векторах неприводимого представления со спином j , поэтому достаточно вычислить это собственное значение на любом из данных векторов. Это собственное значение легко вычисляется для вектора со старшим весом, и мы согласно (2.4.37) имеем

$$\Delta(J^2)|\uparrow\uparrow\rangle = (1 + \Delta(S_z))\Delta(S_z)|\uparrow\uparrow\rangle = 2|\uparrow\uparrow\rangle,$$

то есть $j(j+1) = 2$, что соответствует значению $j = 1$. Пользуясь обозначениями $|j, m\rangle$, введенными в разделе 2.1, представим вектора (2.4.36) после их нормировки следующим образом:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle &= \bar{e}^1 \otimes \bar{e}^1, \quad |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle = \bar{e}^2 \otimes \bar{e}^2, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}^2 \otimes \bar{e}^1 + \bar{e}^1 \otimes \bar{e}^2). \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

Итак, мы выделили из пространства $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ с базисом (2.4.35) трехмерное инвариантное подпространство $\mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}^{\otimes 2}$ с базисом (2.4.38). Так как $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ — четырехмерно, то остается 1-мерное подпространство \mathcal{V}_1 в $\mathcal{V}^{\otimes 2}$, не входящее в пространство \mathcal{V}_3 . Из сравнения (2.4.35) и (2.4.38) следует, что вектор, образующий подпространство \mathcal{V}_1 , имеет проекцию $m = 0$ и его можно выделить из $\mathcal{V}^{\otimes 2}$, налагая условие старшего веса, но уже на произвольное состояние с проекцией $m = 0$:

$$\Delta S_+ \cdot (a_1|\downarrow\uparrow\rangle + a_2|\uparrow\downarrow\rangle) = 0.$$

Как нетрудно увидеть, это условие дает $a_1 = -a_2$. Таким образом, мы находим последний ортонормированный базисный вектор в $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ (в дополнение к трем векторам (2.4.38)):

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}^2 \otimes \bar{e}^1 - \bar{e}^1 \otimes \bar{e}^2), \quad (2.4.39)$$

который антисимметричен и соответствует одномерному неприводимому представлению со спином $j = 0$. То, что этот вектор действительно образует тривиальное одномерное инвариантное подпространство следует из того факта, что не только ΔS_+ , но и ΔS_- и ΔS_z равны нулю на этом векторе. Таким образом, мы получили разложение $\mathcal{V}^{\otimes 2} = \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_1$, где \mathcal{V}_3 и \mathcal{V}_1 — пространства неприводимых представлений $T^{(1)}$ и $T^{(0)}$ алгебры $su(2)$ (группы $SU(2)$).

Отметим еще раз, что базисные состояния (2.4.36) в пространстве \mathcal{V}_3 — симметричные комбинации произведений двумерных векторов (2.4.23), а базисный вектор (2.4.39) в \mathcal{V}_1 — антисимметричен. Таким образом, произвольные вектора (2.4.32) в пространствах \mathcal{V}_3 и \mathcal{V}_1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{(A_1 A_2)} \bar{e}^{A_1} \otimes \bar{e}^{A_2} = \psi_{11} |1, 1\rangle + \sqrt{2} \psi_{(12)} |1, 0\rangle + \psi_{22} |1, -1\rangle \in \mathcal{V}_3, \\ \psi_0 &= \psi_{[A_1 A_2]} \bar{e}^{A_1} \otimes \bar{e}^{A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon^{A_1 A_2} \psi_{[A_1 A_2]}) |0, 0\rangle \in \mathcal{V}_1, \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

где \bar{e}^A — базисные вектора (2.4.18) и (2.4.19) в пространстве определяющего представления алгебры $su(2)$, $\varepsilon^{A_1 A_2}$ — компоненты антисимметричного тензора ($\varepsilon^{A_1 A_2} = -\varepsilon^{A_2 A_1}$ и $\varepsilon^{12} = -1$), скобки (...) и [...] обозначают соответственно симметризацию и антисимметризацию индексов у компонент $\psi_{A_1 A_2} \in \mathbb{C}$ и мы воспользовались (2.4.38), (2.4.39), а также тождествами

$$\begin{aligned} \psi_{[A_1 A_2]} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{A_1 A_2} (\varepsilon^{B_1 B_2} \psi_{[B_2 B_1]}), \\ \bar{e}^{A_1} \otimes \bar{e}^{A_2} - \bar{e}^{A_2} \otimes \bar{e}^{A_1} &= \varepsilon^{A_1 A_2} (\varepsilon_{B_1 B_2} \bar{e}^{B_2} \otimes \bar{e}^{B_1}) = \sqrt{2} \varepsilon^{A_1 A_2} |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Здесь $\varepsilon_{AB} \varepsilon^{BC} = \delta_A^C$, то есть $\varepsilon^{AB} = -\varepsilon_{AB}$.

- **Задача 46.** Пользуясь формулой (2.4.33), проверить, что антисимметричный вектор ψ_0 , заданный в (2.4.40), инвариантен и на нем реализуется одномерное представление $su(2)$:

$$\Delta(S_\alpha) \psi_{[A_1 A_2]} \bar{e}^{A_1} \otimes \bar{e}^{A_2} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

(здесь \bar{e}^A — базисные вектора в пространстве представления алгебры $su(2)$ со спином $j = 1/2$). Указание: воспользоваться формулой (2.4.41) и тождеством $(S_\alpha)_{A_1}^{B_1} \varepsilon_{B_1 A_2} + (S_\alpha)_{A_2}^{B_2} \varepsilon_{A_1 B_2} = 0$, которое следует из (I-1.2.16).

- **Задача 47.** Доказать, что вектора $|\Phi\rangle = \phi_{B[AC]} \bar{e}^A \otimes \bar{e}^B \otimes \bar{e}^C$ и $|\Psi\rangle = \psi_{A[BC]} \bar{e}^A \otimes \bar{e}^B \otimes \bar{e}^C$ образуют два пространства представления $su(2)$ со спином $j = 1/2$. Указание: воспользоваться формулой (2.4.33), утверждением из предыдущей задачи и проверить, что $\Delta^2(J^2)|\Phi\rangle = (3/4)|\Phi\rangle$, $\Delta^2(J^2)|\Psi\rangle = (3/4)|\Psi\rangle$.

Применим ту же процедуру выделения неприводимых представлений, что и выше, в случае тензорного произведения двух представлений $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ с произвольными j_1 и j_2 . Базис в пространстве $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$ представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ состоит из векторов $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$, где $m_i = -j_i, -j_i + 1, \dots, j_i - 1, j_i$. Действие операторов S_α на эти вектора определяется формулой (2.4.25). Вектор $|v_0\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$ удовлетворяет всем требованиям для вектора со старшим весом представления $T^{(j_1+j_2)}$:

$$T(S_z)|v_0\rangle = (j_1 + j_2)|v_0\rangle, \quad T(S_+)|v_0\rangle = 0,$$

где $T(S_\alpha)$ определены в (2.4.25), и следовательно мы имеем

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle . \quad (2.4.42)$$

Поддействуем на обе части этого соотношения понижающим оператором $T(S_-)$ и воспользуемся формулами (2.4.25) и (2.1.22), (2.2.31). Для левой и правой частей мы по отдельности имеем

$$\begin{aligned} T(S_-) |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle &= \sqrt{2(j_1 + j_2)} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle , \\ T(S_-) \left(|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle \right) &= (T^{(j_1)}(S_-) |j_1, j_1\rangle) \otimes |j_2, j_2\rangle + |j_1, j_1\rangle \otimes (T^{(j_2)}(S_-) |j_2, j_2\rangle) = \\ &= \sqrt{2j_1} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2} |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle . \end{aligned}$$

В результате получаем вектор

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \frac{\sqrt{j_1}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle + \frac{\sqrt{j_2}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle , \quad (2.4.43)$$

Этот вектор записан как линейная комбинация двух собственных векторов оператора $T(S_z)$, имеющих собственное значение $m = (j_1 + j_2 - 1)$. Поддействуем теперь еще раз понижающим оператором $T(S_-)$ на состояние (2.4.43). В результате мы получим вектор с собственным значением $m = (j_1 + j_2 - 2)$ и так далее. Продолжая действовать на получающиеся состояния понижающими операторами $T(S_-)$, мы породим все базисные вектора пространства $\mathcal{V}_{2(j_1+j_2)+1}$ неприводимого представления $T^{(j_1+j_2)}$.

Заметим, что для $j_1 \geq 1/2$, $j_2 \geq 1/2$ в пространстве $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$ среди векторов, имеющих собственное значение $m = (j_1 + j_2 - 1)$ оператора $T(S_z)$, есть еще один, ортогональный к (2.4.43), вектор $|v_1\rangle$. Будем искать данный вектор в виде

$$|v_1\rangle = \alpha_1 |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle + \alpha_2 |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle . \quad (2.4.44)$$

Этот вектор, ортогональный к (2.4.43), должен уничтожаться повышающим оператором $T(S_+)$.

- *Задача 48. Доказать, что из ортогональности $\langle j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 | v_1 \rangle = 0$ следует тождество $T(S_+) |v_1\rangle = 0$.*

Таким образом, вектор $|v_1\rangle$ удовлетворяет требованиям:

$$T(S_z) |v_1\rangle = (j_1 + j_2 - 1) |v_1\rangle , \quad T(S_+) |v_1\rangle = 0 ,$$

и следовательно является старшим вектором $|v_1\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$ представления $T^{(j_1+j_2-1)}$. Уравнение $T(S_+) |v_1\rangle = 0$, условие нормировки $\langle v_1 | v_1 \rangle = 1$ и требование вещественности коэффициентов определяет вектор (2.4.44) однозначно (с точностью до общего знака, который выбирается по соглашению):

$$|v_1\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = \frac{\sqrt{j_1}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle - \frac{\sqrt{j_2}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle . \quad (2.4.45)$$

Действуя далее на вектор (2.4.45) понижающими операторами $T(S_-)$, мы породим все базисные вектора пространства $\mathcal{V}_{2(j_1+j_2)-1}$ представления $T^{(j_1+j_2-1)}$.

Теперь рассмотрим подпространство \mathcal{V}' в $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$, образованное всеми векторами $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ с собственным значением $m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2$ оператора $T(S_z)$. Если $j_1 \geq 1, j_2 \geq 1$, то подпространство \mathcal{V}' трехмерно и в нем мы можем выделить, решая уравнение $T(S_+)|v_3\rangle = 0$, единственный старший вектор $|v_3\rangle$ с весом $(j_1 + j_2 - 2)$, который будет ортогонален двум другим векторам $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2\rangle$ и $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2\rangle$ из \mathcal{V}' . После этого, действуя на $|v_3\rangle$ понижающими операторами $T(S_-)$, мы получаем инвариантное подпространство в $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$, соответствующее неприводимому представлению $T^{(j_1+j_2-2)}$, и так далее. Продолжая данную процедуру, мы в конце концов воспроизведем разложение (2.4.12) прямого произведения представлений $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ в прямую сумму представлений $T^{(j)}$. Отметим, что возникающие при этом формулы, аналогичные (2.4.38), (2.4.43) и (2.4.45), записываются в общем виде следующим образом (сравните с рядом Клебша-Гордана (2.4.3))

$$|j_3, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m\rangle, \quad (2.4.46)$$

где j_3 – любой спин из интервала $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$, а $|j_3, m\rangle, |j_1, m_1\rangle$ и $|j_2, m_2\rangle$ – базисные ортонормированные вектора (см. (2.1.25)) в пространствах представлений $T^{(j_3)}, T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$, соответственно. В формуле (2.4.46) мы ввели обозначение

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m\rangle := (\langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 |) | j_3, m\rangle. \quad (2.4.47)$$

для коэффициентов Клебша-Гордана. В частности константы в правых частях формул (2.4.38), (2.4.43) и (2.4.45) дают численные значения для соответствующих коэффициентов Клебша-Гордана.

Пример. В заключение этого раздела, в качестве примера, приведем вычисление коэффициентов Клебша-Гордана, которые возникают при разложении тензорного произведения $T^{(j_1)} \otimes T^{(\frac{1}{2})}$ на неприводимые представления. Согласно Утверждению 2.4.2 мы имеем $T^{(j_1)} \otimes T^{(\frac{1}{2})} = T^{(j_1+\frac{1}{2})} \oplus T^{(j_1-\frac{1}{2})}$. В качестве старшего вектора представления $T^{(j_1+\frac{1}{2})}$ выступает вектор

$$|j_1 + 1/2, j_1 + 1/2\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle. \quad (2.4.48)$$

Действуя на обе части (2.4.48) оператором

$$T(S_-^k) = \left(T^{(j_1)}(S_-) \otimes I + I \otimes T^{(\frac{1}{2})}(S_-) \right)^k, \quad (2.4.49)$$

получаем ($k \leq j_1$)

$$S_-^k |j_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2}\rangle = S_-^k |j_1, j_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + k S_-^{k-1} |j_1, j_1\rangle \otimes S_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad (2.4.50)$$

где мы использовали краткую форму записи: $S_-^k |j, m\rangle \equiv T^{(j)}(S_-^k) |j, m\rangle$. Теперь, пользуясь (2.2.32), соотношение (2.4.50) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & |j_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2} - k\rangle = \\ & = \sqrt{\frac{(2j_1+1-k)}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{k}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - k + 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

Старший вектор $|v_1\rangle = |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2}\rangle$ представления $T^{(j_1-\frac{1}{2})}$ ищем в виде комбинации (сравните с (2.4.44)):

$$|j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2}\rangle = \alpha_1 |j_1, j_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \alpha_2 |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad (2.4.52)$$

где коэффициенты α_1, α_2 определяются так же как и для вектора (2.4.44) и приведены в (2.4.45) (необходимо положить $j_2 = 1/2$):

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2j_1}{(2j_1+1)}}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{(2j_1+1)}}.$$

Снова действуем на обе части уравнения (2.4.52) оператором (2.4.49). В результате с учетом (2.2.32) получаем, соответственно, для левой и правой частей

$$\begin{aligned} S_-^k |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{k!(2j_1-1)!}{(2j_1-1-k)!}} |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2} - k\rangle, \\ \alpha_2 S_-^k |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha_2 k S_-^{k-1} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes S_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha_1 S_-^k |j_1, j_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \\ = \alpha_2 \sqrt{\frac{(k+1)!(2j_1-1)!}{(2j_1-1-k)!}} |j_1, j_1 - 1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha_2 k \sqrt{\frac{k!(2j_1-1)!}{(2j_1-k)!}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \\ + \alpha_1 \sqrt{\frac{k!(2j_1)!}{(2j_1-k)!}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \\ = -\sqrt{\frac{(k+1)!(2j_1-1)!}{(2j_1+1)(2j_1-1-k)!}} |j_1, j_1 - 1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{(2j_1-k)k!(2j_1-1)!}{(2j_1+1)(2j_1-k-1)!}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно мы имеем

$$\begin{aligned} |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2} - k\rangle &= \\ = -\sqrt{\frac{(k+1)!}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - 1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{(2j_1-k)!}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.53)$$

Сворачивая соотношения (2.4.51) и (2.4.53) с вектором $\langle j_1, m_1 | \otimes \langle \frac{1}{2}, m_2 |$ и учитывая (2.4.47), мы получаем следующую известную таблицу коэффициентов Клебша-Гордана $\langle j_1, m_1; \frac{1}{2}, m_2 | j, m \rangle$, которая приведена во многих учебниках по квантовой механике:

	$m_2 = 1/2$	$m_2 = -1/2$
$j = j_1 + \frac{1}{2}$	$\left(\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$
$j = j_1 - \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$

2.4.3 Спиновая цепочка Гейзенберга

Пусть \mathcal{V} снова обозначает двумерное пространство \mathcal{V}_2 определяющего представления $T^{(\frac{1}{2})}$ алгебры $su(2)$. Задача о выделении неприводимых представлений алгебры $su(2)$ из ее представления $(T^{(\frac{1}{2})})^{\otimes n}$, то есть инвариантных подпространств из прямого произведения $\mathcal{V}^{\otimes n}$ пространств определяющего представления, интересна с точки зрения изучения некоторых квантовых физических систем. Например, пространство $\mathcal{V}^{\otimes n}$ можно рассматривать как пространство квантовых состояний модели спиновой цепочки Гейзенберга, состоящей из n узлов и описываемой оператором

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^n S_\alpha^{(k)} \cdot S_\alpha^{(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} S_+^{(k)} \cdot S_-^{(k+1)} + \frac{1}{2} S_-^{(k)} \cdot S_+^{(k+1)} + S_z^{(k)} \cdot S_z^{(k+1)} \right), \quad (2.4.54)$$

который действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$, интерпретируется как оператор энергии системы и называется **гамильтонианом**. Сумма в (2.4.54) идет по всем узлам цепочки, и мы отождествляем узлы с номерами $k = 1$ и $k = n + 1$ (замкнутая спиновая цепочка). В каждом узле k цепочки находится атом, состояние которого описывается спином — операторами $S_\alpha^{(k)}$, которые были определены в (2.4.31). Гамильтониан \mathcal{H}_n коммутирует с компонентами оператора вектора **полного** спина, то есть коммутирует с образующими S_α алгебры $su(2)$ в представлении (2.4.30):

$$[\mathcal{H}_n, \Delta^{n-1}(S_\alpha)] = 0. \quad (2.4.55)$$

- **Задача 49.** Доказать формулу (2.4.55). Указание. Воспользоваться тем, что каждое слагаемое $S_\alpha^{(k)} \cdot S_\alpha^{(k+1)}$ в (2.4.54) является поляризованным оператором Казимира для алгебры Ли $su(2)$ (см. раздел I-3.7.4 первой части книги) и поэтому коммутирует с $\Delta_k(S_\beta) = S_\beta^{(k)} + S_\beta^{(k+1)}$.

имел единичную длину. Затем к полученному вектору применяем снова $\Delta^{n-1}(S_-)$ и так далее. После действия $(\Delta^{n-1}(S_-))^k$ мы получаем симметричный вектор с проекцией $m = n/2 - k$, записанный в виде линейной комбинации базисных векторов, у которых k спинов направлены вниз. Процедура остановится на шаге $k = n$, когда действие $\Delta^{n-1}(S_-)$ на полученное последнее состояние $|\downarrow \dots \downarrow\rangle$ даст нуль, так как все спины в этом состоянии направлены вниз. Построенное таким образом пространство \mathcal{V}_{n+1} неприводимого представления $T^{(n/2)}$ имеет размерность $(n+1)$, а все вектора этого пространства — собственные вектора гамильтониана (2.4.54) с одним и тем же собственным значением $E = n/4$, что вытекает из условия (2.4.55). Отметим, что в пространство \mathcal{V}_{n+1} входит по одному вектору из подпространств с фиксированным m (по одной линейной комбинации базисных векторов из каждой строчки в (2.4.57)).

Затем мы берем произвольную комбинацию векторов в $\mathcal{V}^{\otimes n}$ с проекцией спина на ось z , равной $m = n/2 - 1$ (вторая строчка в (2.4.57)):

$$|n/2 - 1, n/2 - 1\rangle = a_1 |\downarrow \uparrow \dots \uparrow\rangle + a_2 |\uparrow \downarrow \dots \uparrow\rangle + \dots + a_n |\uparrow \dots \uparrow \downarrow\rangle \quad (2.4.61)$$

и налагаем на получившееся состояние условие старшего вектора

$$\Delta^{n-1}(S_+) |n/2 - 1, n/2 - 1\rangle = 0. \quad (2.4.62)$$

Условие (2.4.62), с учетом (2.4.34), дает

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0, \quad (2.4.63)$$

что эквивалентно ортогональности вектора (2.4.61) и вектора (2.4.60). Требование того, чтобы состояния (2.4.61) были собственными векторами гамильтониана (2.4.54) приводит к дополнительным уравнениям на параметры a_i . Явные решения дополнительных уравнений определяют $(n-1)$ собственное состояние с $j = m = n/2 - 1$, каждое из которых называется одномагнитным состоянием спиновой цепочки и может использоваться в качестве старшего вектора для стандартного построения инвариантных подпространств представлений $T^{(n/2-1)}$. Мы не будем здесь выписывать эти одномагнитные состояния и уравнения, определяющие собственные значения гамильтониана на этих состояниях, так как данный материал уже выходит за рамки нашей книги, и отсылаем читателя к специальной литературе (см., например, монографию [32]).

Для пояснения дальнейшей процедуры выделения инвариантных подпространств в $\mathcal{V}^{\otimes n}$, соответствующих неприводимым представлениям $T^{(n/2-1)}$, нам достаточно выбрать *любые* $(n-1)$ состояний (2.4.61), (2.4.63), не требуя при этом, чтобы они были собственными для гамильтониана (2.4.54). В частности мы можем выбрать $a_k = -a_{k+1}$ и $a_i = 0$ ($\forall i \neq k, k+1$), где $k = 1, 2, \dots, n-1$. В результате мы получаем $(n-1)$ различных независимых векторов со старшим весом $m = n/2 - 1$ и спином $j = n/2 - 1$. Из этих старших векторов, в результате действия понижающими операторами (2.4.59), порождаются эквивалентные $(n-1)$ -мерные неприводимые представления $T^{(n/2-1)}$. Действительно, как мы отметили выше в разделе 2.4.2, антисимметричную комбинацию двух спинов ($\downarrow \uparrow - \uparrow \downarrow$) можно рассматривать как скаляр (синглетное состояние), поэтому например вектор (2.4.61) с $a_k = -a_{k+1}$ и $a_i = 0$ ($\forall i \neq k, k+1$), который можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (S_-^k - S_-^{k+1}) \underbrace{|\uparrow \dots \uparrow\rangle}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underbrace{|\uparrow \dots \uparrow \downarrow \uparrow \dots\rangle}_{k-1} - \underbrace{|\uparrow \dots \uparrow \uparrow \downarrow \dots\rangle}_{k-1}), \quad (2.4.64)$$

естественно рассматривать как старший вектор $|\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-2}\rangle$. Далее, мы действуем на вектор (2.4.64)

понижающими операторами $(\Delta^{n-1}(S_-))^k$, где $k = 1, \dots, n-2$, и в результате, пользуясь (2.4.59) и (2.4.34), порождаем инвариантное $(n-1)$ -мерное пространство со спином $j = n/2 - 1$ как это было описано выше. После чего мы снова выделяем в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ вектора со старшим весом, но уже с проекцией $m = n/2 - 2$ (третья строчка в (2.4.57)), которые будут ортогональны векторам, принадлежащим пространствам неприводимых представлений $T^{(\frac{n}{2})}$, $T^{(\frac{n}{2}-1)}$ и полученным ранее из состояний (2.4.60) и (2.4.61), (2.4.63) с помощью действия на них понижающими операторами (2.4.59). Число новых старших векторов будет равно $(n-1)n/2 - n = (n-3)n/2$. Собственные состояния гамильтониана (2.4.54) в этом секторе называются двух-магнитными состояниями (построены из базисных векторов, у которых две стрелки направлены вниз). Действуя на новые старшие вектора понижающими операторами, мы порождаем $(n-3)$ -мерные инвариантные подпространства

представлений $T^{(\frac{n}{2}-2)}$ со спином $j = (n/2 - 2)$, и так далее. Все линейно независимые вектора на уровне $m = n/2 - k + 1$, которых C_n^{k-1} штук, либо содержатся в пространствах представлений $T^{(j)}$ с $j > \frac{n}{2} - k + 1$, либо являются старшими векторами представлений $T^{(\frac{n}{2}-k+1)}$. Поэтому на k -ом шаге ($k < n/2$) на уровне $m = n/2 - k$ среди C_n^k линейно независимых векторов мы имеем C_n^{k-1} векторов, которые принадлежат пространствам представлений $T^{(j)}$ с $j > \frac{n}{2} - k$, а оставшиеся линейно независимые состояния являются старшими векторами представлений $T^{(\frac{n}{2}-k)}$ и их количество равно

$$m(n, k) = C_n^k - C_n^{k-1} = C_n^k \left(\frac{n - 2k + 1}{n - k + 1} \right), \quad k < n/2. \quad (2.4.65)$$

Таким образом, в результате указанной выше процедуры в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ мы выделяем инвариантные $(2j + 1)$ -мерные подпространства \mathcal{V}_{2j+1} представлений $T^{(j)}$ со спинами $j = n/2, n/2 - 1, \dots, 0$ или $j = n/2, n/2 - 1, \dots, 1/2$, в зависимости от того является ли n четным или нечетным числом. Общая формула разложения $\mathcal{V}^{\otimes n}$ по инвариантным подпространствам \mathcal{V}_{2j+1} с учетом кратностей (2.4.65) имеет вид

$$\mathcal{V}^{\otimes n} = \mathcal{V}_{n+1} + (n - 1)\mathcal{V}_{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\mathcal{V}_{n-3} + \dots = \mathcal{V}_{n+1} + \sum_{k=1}^{[n/2]} m(n, k) \mathcal{V}_{n-2k+1}, \quad (2.4.66)$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$, и соответствует разложению (аналог формулы (2.4.1))

$$(T^{(1/2)})^{\otimes n} = T^{(n/2)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} m(n, k) T^{(n/2-k)}. \quad (2.4.67)$$

Формула (2.4.65), определяющая кратности $m(n, k)$ вхождения неприводимых представлений $T^{(n/2-k)}$ в представление $(T^{(1/2)})^{\otimes n}$, одновременно дает число независимых k -магнонных состояний спиновой цепочки Гейзенберга, то есть дает на уровне $m = n/2 - k$ число собственных состояний оператора энергии (2.4.54) с собственными значениями, которые могут отличаться от собственных значений магнонных состояний, построенных на предыдущих уровнях $m > n/2 - k$. Эта формула была получена Г.Бете в 1931 году в его знаменитой статье [33] и иногда в литературе называется формулой Бете.

- **Задача 50.** Проверить формулу (2.4.66) подставив в нее размерности соответствующих пространств: $\dim(\mathcal{V}^{\otimes n}) = 2^n$ и $\dim(\mathcal{V}_n) = n$.
- **Задача 51.** Получить формулу (2.4.67), исходя из формулы (2.4.12). Указание: применить индукцию по n .

2.4.4 Метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана

В этом разделе мы рассмотрим метод получения явных выражений для коэффициентов матрицы C , фигурирующих в формулах (2.4.2) и (2.4.3), для случая конечномерных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ (или $SU(2)$). Другими словами, мы обсудим метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle$ в формуле (2.4.46). Метод, который будет обсуждаться ниже, предложен Б.Л. Ван-дер-Варденом в [18], см. также [10]. Как и прежде, удобно рассматривать не сами представления группы $SU(2)$, а представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, принадлежащие подклассу, описанному в Замечании 3. в конце раздела 2.1. Подчеркнем, что мы рассматриваем только такие представления группы $SL(2, \mathbb{C})$.

Пусть мы имеем два представления $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ (или $SU(2)$) в пространствах с базисными векторами $T_m^{j_1}$ и $T_m^{j_2}$ (2.2.26), которые являются мономерами степени $(2j_1)$ и $(2j_2)$ от переменных $u^\alpha = (s_1, t_1)$ и $v^\alpha = (s_2, t_2)$, соответственно. Прямое произведение представлений $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ действует в подпространстве $\mathcal{P}_{(j_1, j_2)} \subset \mathcal{F}_{(2, \bar{0})}$, натянутом на базисные мономы $T_m^{j_1}(s_1, t_1) \cdot T_m^{j_2}(s_2, t_2)$, согласно формуле (2.2.19). Начнем с замечания, что для $j_1 = j_2 = j$ в представлении

$T^{(j)} \otimes T^{(j)}$ содержит одномерное тривиальное представление $SL(2, \mathbb{C})$, которое реализуется на инвариантном векторе $(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j} \in \mathcal{P}_{(j,j)}$. Действительно, функция $\varepsilon_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = (s_1 t_2 - s_2 t_1)$ инвариантна относительно преобразований (2.2.19). Поэтому любая степень этой функции: $(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j}$ также будет инвариантом. Согласно (2.3.39) разложение функции $(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j}$ в ряд по переменным s_i и t_i дает инвариантную (по построению) свертку базисных векторов $T_m^j(s_1, t_1)$ и $T_m^j(s_2, t_2)$. Свертка (2.3.39) была записана с помощью инвариантной метрики (2.3.40), которую удобно для дальнейшего представить в виде:

$$\eta_{m,-m'}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m,m'} . \quad (2.4.68)$$

Эта метрика будет играть существенную роль в разделе 2.5.

Вернемся к общему случаю двух представлений $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$. Рассмотрим еще одно ко-представление $\bar{T}^{(j_3)}$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, реализованное в пространстве однородных полиномов степени $2j_3$, зависящих от дуальных переменных (\bar{s}_3, \bar{t}_3) , с базисом (2.2.29). Представление $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$ в подпространстве $\mathcal{P}_{(j_1, j_2, j_3)} \subset \mathcal{F}_{(2, \bar{1})}$, натянутом на базисные мономы $T_{m_1}^{j_1}(s_1, t_1) \cdot T_{m_2}^{j_2}(s_2, t_2) \cdot \bar{T}_m^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3)$, действует как представление $T_{(2, \bar{1})}$ согласно общей формуле (2.2.20). В представлении $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$ можно выделить тривиальное одномерное подпредставление, реализованное на инвариантной однородной функции \mathcal{I} от 6 переменных $\{s_1, t_1, s_2, t_2, \bar{s}_3, \bar{t}_3\}$:

$$\mathcal{I} = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{n_3} (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^{n_2} (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^{n_1} , \quad (2.4.69)$$

где n_1, n_2, n_3 – целые неотрицательные числа и

$$n_3 = j_1 + j_2 - j_3 , \quad n_1 = j_3 + j_2 - j_1 , \quad n_2 = j_3 + j_1 - j_2 . \quad (2.4.70)$$

Действительно, степень однородности по каждой паре переменных (s_1, t_1) , (s_2, t_2) и (\bar{s}_3, \bar{t}_3) всех слагаемых полинома, возникающего при разложении (2.4.69), равна $n_3 + n_2 = 2j_1$, $n_3 + n_1 = 2j_2$ и $n_1 + n_2 = 2j_3$, соответственно, а значит вектор (2.4.69) принадлежит пространству $\mathcal{P}_{(j_1, j_2, j_3)}$ представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$. Кроме того этот вектор инвариантен относительно преобразований (2.2.20), что следует из инвариантности функций (2.2.33) и (2.3.39), и следовательно он образует пространство одномерного представления $SL(2, \mathbb{C})$.

- *Задача 52. Используя дифференциальные реализации (2.2.4) и (2.2.11) для образующих алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, проверить условие инвариантности для \mathcal{I} , которое записывается в виде*

$$(\hat{e}_\pm^{(1)} + \hat{e}_\pm^{(2)} + \hat{e}_\pm^{(3)})\mathcal{I} = 0 , \quad (\hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)} + \hat{h}^{(3)})\mathcal{I} = 0 . \quad (2.4.71)$$

Поскольку инвариант \mathcal{I} (2.4.69) является однородным полиномом по \bar{s}_3, \bar{t}_3 степени $2j_3$, то он может быть разложен по базису векторов $\bar{T}_m^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3)$ и записан в виде инвариантной свертки:

$$\mathcal{I} = \sum_{m=-j_3}^{j_3} (-1)^{j_3-m} W_m^{j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2) \cdot \bar{T}_{-m}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3) . \quad (2.4.72)$$

Из сравнения этой свертки с инвариантом (2.2.33) с необходимостью следует, что полиномы $W_m^{j_3}$, принадлежащие пространству $\mathcal{P}_{(j_1, j_2)}$ представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$, преобразуются при действии (2.2.19) группы $SL(2, \mathbb{C})$ так же, как вектора $T_m^{j_3}(s_3, t_3)$. Таким образом, функции $W_m^{j_3}$ могут рассматриваться в качестве базисных векторов пространства неприводимого представления, эквивалентного $T^{(j_3)}$ и вложенного в $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$.

Найдем разложение вектора $W_m^{j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2)$ по базисным мономам $T_{m_1}^{(j_1)}(s_1, t_1) \cdot T_{m_2}^{(j_2)}(s_2, t_2)$ в пространстве $\mathcal{P}_{(j_1, j_2)}$ представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$. Чтобы это сделать, рассмотрим разложение инварианта (2.4.69) в ряд по всем переменным $(s_1, t_1, s_2, t_2, \bar{s}_3, \bar{t}_3)$, которое получается с помощью формулы бинорма Ньютона:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_{k, k_1, k_2} (-1)^k C_{n_3}^k C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} (s_1 t_1)^{n_3 - k} (s_2 t_2)^k (s_1 \bar{s}_3)^{n_2 - k_2} (t_1 \bar{t}_3)^{k_2} (s_2 \bar{s}_3)^{n_1 - k_1} (t_2 \bar{t}_3)^{k_1} = \\ &= \sum_{k, k_1, k_2} (-1)^k C_{n_3}^k C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} (s_1^{n_3 + n_2 - k - k_2} t_1^{k + k_2}) (s_2^{n_1 - k_1 + k} t_2^{n_3 - k + k_1}) (\bar{s}_3^{n_1 + n_2 - k_1 - k_2} \bar{t}_3^{k_1 + k_2}), \end{aligned} \quad (2.4.73)$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, и суммирование идет по $0 \leq k \leq n_3$, $0 \leq k_1 \leq n_1$, $0 \leq k_2 \leq n_2$. На самом деле мы можем считать, что суммирование по k, k_1, k_2 в (2.4.73) не ограничено, так как согласно (2.3.34) биномиальные коэффициенты равны нулю вне указанных пределов суммирования. Для выделения в (2.4.73) базисных векторов пространств представлений $T^{(j_1)}$, $T^{(j_2)}$ и $\bar{T}^{(j_3)}$ (см. (2.2.26) и (2.2.29)) мы зафиксируем n_1, n_2 и n_3 согласно (2.4.70) и сделаем замену переменных суммирования, то есть перейдем от индексов $k_{1,2}$ к индексам $m_{1,2}$:

$$\begin{aligned} k + k_2 = j_1 - m_1 &\quad \Rightarrow \quad 0 \leq j_1 - m_1 \leq n_3 + n_2 \Rightarrow -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \\ n_3 - k + k_1 = j_2 - m_2 &\quad \Rightarrow \quad 0 \leq j_2 - m_2 \leq n_3 + n_1 \Rightarrow -j_2 \leq m_2 \leq j_2. \end{aligned}$$

При этом мы имеем

$$k_1 + k_2 = j_3 - (m_1 + m_2).$$

Заметим, что после всех этих замен суммирование по k в (2.4.73) остается, но затрагивает только биномиальные коэффициенты. Поэтому разложение (2.4.73) перепишется следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_{m_1, m_2} \left(\sum_k (-1)^k C_{n_3}^k C_{2j_2 - n_3}^{j_2 - n_3 - m_2 + k} C_{2j_1 - n_3}^{j_1 - m_1 - k} \right) (s_1^{j_1 + m_1} t_1^{j_1 - m_1}) (s_2^{j_2 + m_2} t_2^{j_2 - m_2}) (\bar{s}_3^{j_3 + m} \bar{t}_3^{j_3 - m}) = \\ &= \mathcal{D}(j_1, j_2, j_3) \sum_{m_1, m_2} \langle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m \rangle \rangle (-1)^{j_3 - m} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \bar{T}_{-m}^{j_3}, \end{aligned} \quad (2.4.74)$$

где $m = m_1 + m_2$, $\sum_{m_1, m_2} = \sum_{m_1 = -j_1}^{j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{j_2}$ и выделен множитель

$$\mathcal{D}(j_1, j_2, j_3) = (j_2 + j_3 - j_1)! (j_1 + j_3 - j_2)! (j_2 + j_1 - j_3)!. \quad (2.4.75)$$

В формуле (2.4.74) мы использовали обозначения $\langle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m \rangle \rangle$ для выражений [18]:

$$\langle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m \rangle \rangle = \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (j_3 + m)! (j_3 - m)!}}{(j_1 - m_1 - k)! (j_1 - n_3 + m_1 + k)! (j_2 + m_2 - k)! (j_2 - n_3 - m_2 + k)! k! (n_3 - k)!} =$$

$$= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m)!(j_3-m)!}}{(j_1-m_1-k)!(j_3-j_2+m_1+k)!(j_2+m_2-k)!(j_3-j_1-m_2+k)!k!(j_1+j_2-j_3-k)!}, \quad (2.4.76)$$

которые, как станет ясно ниже, с точностью до нормировки совпадают с коэффициентами Клебша-Гордана, введенными в (2.4.46). Мы вновь можем опустить пределы суммирования по k в (2.4.76), так как в силу соглашения (2.3.34) дробь в правой части (2.4.76) обращается в нуль, если хотя бы один из шести факториалов в знаменателе, скажем, $k!$ или $(j_1 - m_1 - k)!$ становится бесконечным. Сравнивая инвариант (2.4.74) с инвариантной сверткой (2.4.72), мы получаем

$$W_m^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2) = \mathcal{D}(j_1, j_2, j_3) \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m \rangle. \quad (2.4.77)$$

Отметим, что вектор $W_m^{j_3}$ не нормирован относительно скалярного произведения (2.2.28). Поэтому вместо вектора $W_m^{j_3}$ мы определим нормированный вектор

$$T_m^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2) = \frac{\mu}{\mathcal{D}} W_m^{j_3} = \sum_{m_1, m_2} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m \rangle, \quad (2.4.78)$$

где $\mu(j_1, j_2, j_3)$ — нормировочный множитель, который будет зафиксирован ниже (см. Утверждение 2.4.3), и мы ввели обозначение для коэффициентов Клебша-Гордана

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle = \mu(j_1, j_2, j_3) \langle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle \rangle \delta_{m, m_1+m_2}. \quad (2.4.79)$$

То, что это действительно коэффициенты Клебша-Гордана, следует из сравнения формул (2.4.78) и (2.4.46). С учетом (2.4.78) инвариант (2.4.69), (2.4.72) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{\mathcal{D}}{\mu} \sum_{m=-j_3}^{j_3} (-1)^{j_3-m} T_m^{j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2) \cdot \bar{T}_{-m}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3) = \\ &= \frac{\mathcal{D}}{\mu} \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^{j_3-m_3} T_{m_1}^{j_1}(s_1, t_1) T_{m_2}^{j_2}(s_2, t_2) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \bar{T}_{-m_3}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3). \end{aligned} \quad (2.4.80)$$

В силу инвариантности функции \mathcal{I} при $SL(2, \mathbb{C})$ -преобразованиях (2.2.20), при которых вектора $T_m^j(s, t)$ преобразуются по правилу (2.3.35), мы получаем, что коэффициенты $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle$ преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(g) \mathcal{D}_{m'_2 m_2}^{(j_2)}(g) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \mathcal{D}_{m_3 m'_3}^{(j_3)}(g^{-1}) = \\ = \langle j_1, m'_1; j_2, m'_2 | j_3, m'_3 \rangle, \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2.4.82)$$

Таким образом, коэффициенты Клебша-Гордана можно рассматривать как коэффициенты инвариантного тензора третьего ранга (см. Определение I-3.3.2 в первой части книги).

Утверждение 2.4.3 Явное выражение для коэффициента Клебша-Гордана (2.4.79) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle &= \delta_{m, m_1+m_2} \mu(j_1, j_2, j_3) \cdot \\ &\cdot \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m)!(j_3-m)!}}{(j_1-m_1-k)!(j_3-j_2+m_1+k)!(j_2+m_2-k)!(j_3-j_1-m_2+k)!k!(j_1+j_2-j_3-k)!}, \end{aligned} \quad (2.4.83)$$

где нормировочный коэффициент $\mu(j_1, j_2, j_3)$ равен

$$\mu(j_1, j_2, j_3) = \sqrt{2j_3 + 1} \Delta(j_1, j_2, j_3), \quad (2.4.84)$$

и комбинация

$$\Delta(j_1, j_2, j_3) = \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_3 - j_2)!(j_2 + j_3 - j_1)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}}, \quad (2.4.85)$$

называется треугольным коэффициентом.

Доказательство. Подставим (2.4.76) в (2.4.79). В результате получаем выражение (2.4.83), в котором необходимо вычислить нормировочный коэффициент $\mu(j_1, j_2, j_3)$, введенный в (2.4.78). Рассмотрим инвариантный вектор (2.4.69) из пространства представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$. Его норма согласно (2.2.28) равна

$$(\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} \cdot (\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})^{n_2} \cdot (\partial_{s_2} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_2} \partial_{\bar{t}_3})^{n_1} \cdot \mathcal{I}. \quad (2.4.86)$$

Для получения этой нормы воспользуемся замечательными тождествами

$$\begin{aligned} & (\partial_{s_2} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_2} \partial_{\bar{t}_3}) \cdot (s_1 t_2 - s_2 t_1)^p (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^q (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^r = \\ & = r(r + p + q + 1)(s_1 t_2 - s_2 t_1)^p (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^q (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^{r-1}, \end{aligned} \quad (2.4.87)$$

$$(\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{t_1} \partial_{s_2}) \cdot (s_1 t_2 - s_2 t_1)^p = p(p + 1)(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{p-1}, \quad (2.4.88)$$

которые выводятся прямым вычислением. Тождества, аналогичные (2.4.87), имеют место и для действия операторов $(\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})$ и $(\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})$ на инвариант \mathcal{I} . Применим формулы (2.4.87) и (2.4.88) для вычисления (2.4.86):

$$\begin{aligned} & (\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} (\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})^{n_2} (\partial_{s_2} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_2} \partial_{\bar{t}_3})^{n_1} \mathcal{I} \\ & = \frac{n_1!(n_1+n_2+n_3+1)!}{(n_2+n_3+1)!} (\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} (\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})^{n_2} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{n_3} (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^{n_2} \\ & = \frac{n_1!(n_1+n_2+n_3+1)!}{(n_2+n_3+1)!} \cdot \frac{n_2!(n_2+n_3+1)!}{(n_3+1)!} (\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{n_3} \\ & = \frac{n_1!(n_1+n_2+n_3+1)!}{(n_2+n_3+1)!} \cdot \frac{n_2!(n_2+n_3+1)!}{(n_3+1)!} \cdot n_3!(n_3+1)! \\ & = n_1! n_2! n_3! (n_1 + n_2 + n_3 + 1)! \end{aligned}$$

Итак, нормированный инвариантный вектор равен

$$\tilde{\mathcal{I}} = \frac{\mathcal{I}}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! (n_1 + n_2 + n_3 + 1)!}}, \quad (2.4.89)$$

а его разложение по базису полиномов $\bar{T}_{m_3}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3)$ имеет вид

$$\tilde{\mathcal{I}} = \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} (-1)^{j_3-m_3} \bar{T}_{-m_3}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3) T_{m_3}^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2), \quad (2.4.90)$$

где, напомним, $T_{m_3}^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2)$ — нормированные базисные вектора в подпространстве представления $T^{(j_3)}$, вложенного в пространство представления $T^{j_1} \otimes T^{j_2}$; коэффициент $(2j_3 + 1)^{-1/2}$ перед сверткой в правой части (2.4.90) определяется тем, что эта свертка должна давать нормированный вектор в пространстве представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$.

- **Задача 53.** Пользуясь (2.4.88), доказать, что норма вектора: $\frac{1}{(2j)!}(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j} = \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \bar{T}_{-m}^j(\bar{s}, \bar{t}) T_m^j(s, t)$ равна $(2j + 1)$.

Сравнивая формулы (2.4.90) и (2.4.80), мы получаем коэффициент $\mu(j_1, j_2, j_3)$, указанный в (2.4.84). ■

Наряду с коэффициентами Клебша–Гордана удобно использовать коэффициенты $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$, которые называются 3- j символами Вигнера. По определению 3- j символы связаны следующими соотношениями с коэффициентами Клебша–Гордана:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_2-j_1+m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3, -m_3 \rangle. \quad (2.4.91)$$

и следовательно, так же как и коэффициенты Клебша–Гордана, отличны от нуля только если $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. Символы Вигнера обладают простыми симметричными свойствами, см. раздел 2.4.5.

2.4.5 Свойства коэффициентов Клебша–Гордана и 3- j символов

Переищем, используя обозначения Дирака, соотношение (2.4.78) в виде (см. (2.4.46)):

$$|j_3, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle, \quad (2.4.92)$$

где напомним, что j_3 – любой спин из интервала $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$, а $|j_3, m\rangle$, $|j_1 m_1\rangle$ и $|j_2 m_2\rangle$ — ортонормированные базисные вектора в пространствах представлений $T^{(j_3)}$, $T^{(j_1)}$ и $T^{(j_2)}$, соответственно. Пользуясь ортонормированностью базисных векторов из соотношений (2.4.92) можно вывести следующее представление для коэффициентов Клебша–Гордана

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle := (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 |) |j_3 m\rangle. \quad (2.4.93)$$

Отметим, что в силу очевидной симметрии инварианта (2.4.69):

$$\mathcal{I}_{j_1, j_2, j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2; \bar{s}_3, \bar{t}_3) = (-1)^{j_1+j_2-j_3} \mathcal{I}_{j_2, j_1, j_3}(s_2, t_2; s_1, t_1; \bar{s}_3, \bar{t}_3),$$

коэффициенты Клебша–Гордана (2.4.93) меняются при перестановке векторов $\langle j_1 m_1 |$ и $\langle j_2, m_2 |$ в правой части (2.4.93) следующим образом

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j_3} \langle j_2 m_2, j_1 m_1 | j_3 m \rangle. \quad (2.4.94)$$

Отметим также, что для базисного вектора $|j_3 m\rangle$ в левой части (2.4.92) и в правой части (2.4.93) иногда полезно использовать более информативное обозначение $|j_1 j_2; j_3 m\rangle$, в котором явно указываются спины j_1 и j_2 изначальных состояний. Базис в пространстве представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ составленный из векторов $|j_1 j_2; j_3 m\rangle$, где $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$, называется базисом связанных состояний или просто связанным базисом.

Подействуем эрмитовым сопряжением на обе части соотношения (2.4.92) для чего воспользуемся равенствами (2.1.27). В результате получим равенство

$$\langle j_1, j_2; j_3, m | = \sum_{m_1, m_2} \langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 |, \quad (2.4.95)$$

где в силу вещественности коэффициентов Клебша–Гордана (2.4.79) мы имеем

$$\langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle := \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle^* = \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle. \quad (2.4.96)$$

Если свернуть обе части (2.4.95) с вектором $|j_1, j_2; j_4, m_4\rangle$ и воспользоваться представлением (2.4.93), то получается (с заменой $m \rightarrow m_3$) условие ортогональности для коэффициентов в Клебша-Гордана

$$\delta_{j_3, j_4} \delta_{m_3, m_4} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_3 m_3 | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_4, m_4 \rangle. \quad (2.4.97)$$

Далее, рассмотрим оператор $\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j_1, j_2; j_3, m\rangle \langle j_1, j_2; j_3, m|$, который действует в пространстве \mathcal{V} представления $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ и, согласно Утверждению 2.4.2, проецирует все состояния из \mathcal{V} на состояния, имеющие собственное значение оператора h , равное m . В пространстве \mathcal{V} можно определить другой оператор

$$\sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} (|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle) \langle j_1 m_1| \otimes \langle j_2 m_2| = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} |j_1 m_1\rangle \langle j_1 m_1| \otimes |j_2 m_2\rangle \langle j_2 m_2|,$$

с точно такими же свойствами, поэтому мы имеем тождество

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j_1, j_2; j_3, m\rangle \langle j_1, j_2; j_3, m| = \sum_{\substack{m'_1, m'_2 \\ m'_1+m'_2=m}} |j_1 m'_1\rangle \langle j_1 m'_1| \otimes |j_2 m'_2\rangle \langle j_2 m'_2|, \quad (2.4.98)$$

которое позволяет обратить разложение Клебша-Гордана (2.4.92). Действительно, умножим равенство (2.4.98) справа на вектор $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$. В результате, пользуясь сопряженным к (2.4.93) представлением

$$\langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle := \langle j_3 m | (|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle), \quad (2.4.99)$$

мы получаем обратное к (2.4.92) разложение Клебша-Гордана

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j_1, j_2; j_3, m\rangle \langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle, \quad (2.4.100)$$

где в силу определения (2.4.79) коэффициентов Клебша-Гордана мы имеем $m = m_1 + m_2$. Теперь если свернуть обе части равенства (2.4.100) с вектором $\langle j_1 m'_1| \otimes \langle j_2 m'_2|$, то в дополнение к (2.4.97) возникает еще одно условие ортогональности для коэффициентов Клебша-Гордана

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | j_3 m \rangle \langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2},$$

где опять же следует помнить, что $m = m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$.

Замечание 1. С учетом переопределения (2.4.70) и отождествления $\bar{t}_3 = -s_3$, $\bar{s}_3 = t_3$, которое рассматривалось в (2.2.17), запишем инвариант (2.4.69) в симметричном виде

$$(-1)^{j_2-j_1-j_3} \mathcal{I} = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{j_1+j_2-j_3} (s_3 t_1 - s_1 t_3)^{j_3+j_1-j_2} (s_2 t_3 - s_3 t_2)^{j_3+j_2-j_1}. \quad (2.4.101)$$

Тогда после перенормировки (2.4.89) мы имеем

$$\frac{(-1)^{j_2-j_1-j_3} \mathcal{I}}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! (n_1 + n_2 + n_3 + 1)!}} = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} T_{m_1}^{j_1}(s_1 t_1) T_{m_2}^{j_2}(s_2 t_2) T_{m_3}^{j_3}(s_3 t_3), \quad (2.4.102)$$

где $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ — 3-j символы Вигнера (2.4.91). Соотношения (2.4.91) следуют из сравнения (2.4.102) и формулы (2.4.81), в которой необходимо сделать подстановку $\bar{t}_3 \rightarrow -s_3$, $\bar{s}_3 \rightarrow t_3$ и учесть (2.4.70), (2.4.75) и (2.4.84). Так как выражение (2.4.101) не меняется (с точностью до замены общего знака) при любой перестановке трех индексов $\{1, 2, 3\}$, или при замене $s_i \leftrightarrow t_i$, то соответствующей симметрией обладает и 3-j символ (2.4.91). В частности, переставляя индексы, мы имеем

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4.103)$$

где сумма $(j_1 + j_2 + j_3)$ в силу соотношений (2.4.70) всегда является целым числом. Таким образом, 3- j символы (2.4.91) обладают следующими свойствами.

1. Согласно (2.4.103) они не меняются при четной перестановке столбцов

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix},$$

и приобретают фазовый множитель $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ при нечетной перестановке столбцов.

2. При замене $s_i \leftrightarrow t_i$ ($i = 1, 2, 3$), мы имеем $T_{m_i}^{j_i}(s_i, t_i) \rightarrow T_{-m_i}^{j_i}(s_i, t_i)$, а из формулы (2.4.101) следует, что при этой замене $\mathcal{I} \rightarrow (-1)^{j_1+j_2+j_3} \mathcal{I}$. Поэтому, согласно (2.4.102), 3- j символы приобретают фазовый множитель $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ при изменении знаков всех проекций m_i на противоположные:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4.104)$$

3. Согласно (2.4.79) мы имеем

$$m_1 + m_2 + m_3 \neq 0 \implies \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.105)$$

- **Задача 54.** Пользуясь соотношениями (2.4.76), (2.4.79), (2.4.84) и (2.4.91), получить формулу

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_2-j_1+m_3} \Delta(j_1, j_2, j_3)}{(j_1+j_2-j_3)!(j_1+j_3-j_2)!} \sqrt{\frac{(2j_1)!(j_2-m_2)!(j_3-m_3)!}{(j_2+m_2)!(j_3+m_3)!}} \delta_{j_1, -m_2-m_3}. \quad (2.4.106)$$

Вывести из нее равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & j_2 & j_3 \\ 0 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_2-m_2}}{\sqrt{(j_2+j_3+1)}} \delta_{m_2, -m_3} \delta^{j_2, j_3}. \quad (2.4.107)$$

Замечание 2. В терминах однородных координат $z_i = s_i/t_i$ симметричная форма (2.4.101) для \mathcal{I} переписывается в виде

$$\mathcal{I} = t_1^{2j_1} t_2^{2j_2} t_3^{2j_3} (z_1 - z_2)^{j_1+j_2-j_3} (z_1 - z_3)^{j_3+j_1-j_2} (z_2 - z_3)^{j_3+j_2-j_1},$$

а уравнения инвариантности (2.4.71) в этих координатах выглядят следующим образом

$$\sum_{i=1}^3 \partial_{z_i} \mathcal{I} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (z_i t_i \partial_{t_i} - z_i^2 \partial_{z_i}) \mathcal{I} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \left(z_i \partial_{z_i} - \frac{1}{2} t_i \partial_{t_i} \right) \mathcal{I} = 0. \quad (2.4.108)$$

- **Задача 55.** Вывести уравнения (2.4.108) из уравнений (2.4.71), сделав там замену переменных $\bar{t}_3 = -s_3$, $\bar{s}_3 = t_3$ и подставив туда $\hat{e}_+^{(i)} = s_i \partial_{t_i}$, $\hat{e}_-^{(i)} = t_i \partial_{s_i}$ и $\hat{h}^{(i)} = \frac{1}{2}(s_i \partial_{s_i} - t_i \partial_{t_i})$.

При этом инвариантная функция \mathcal{I}^{-1} после соответствующей перенормировки дает голоморфную часть

$$G_{j_1, j_2, j_3}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{j_1+j_2-j_3} (z_1 - z_3)^{j_3+j_1-j_2} (z_2 - z_3)^{j_3+j_2-j_1}} \quad (2.4.109)$$

выражения для 3-х точечной функции Грина в 2-мерных конформных теориях поля

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = G_{j_1, j_2, j_3}(z_1, z_2, z_3) \cdot G_{\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3). \quad (2.4.110)$$

Комбинации параметров $\Delta_a = j_a + \bar{j}_a$ и $s_a = j_a - \bar{j}_a$ определяют, соответственно, конформные размерности и спины двумерных полей $\phi_a(z_a, \bar{z}_a)$, что вытекает из их конформных преобразований: $\phi_a(z, \bar{z}) \rightarrow \lambda^{j_a} \bar{\lambda}^{\bar{j}_a} \phi_a(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z})$, при которых коррелятор (2.4.110) является инвариантом. Связь

(2.4.109) с функциями Грина не случайна, она вытекает из того факта, что 3-х точечные голоморфные функции $G_{j_1, j_2, j_3}(z_1, z_2, z_3) \equiv G(z_1, z_2, z_3)$ в двумерных конформных теориях поля удовлетворяют тождествам Уорда:

$$\sum_{i=1}^3 \partial_{z_i} G = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (z_i^2 \partial_{z_i} + z_i \Delta_i) G = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \left(z_i \partial_{z_i} + \frac{\Delta_i}{2} \right) G = 0, \quad (2.4.111)$$

которые эквивалентны уравнениям инвариантности (2.4.108) при $\Delta_i = 2j_i$ (сравните дифференциальные операторы в (2.4.111) с операторами в (2.2.37)).

Замечание 3. На практике часто необходимо вычислить коэффициенты Клебша–Гордана в (2.4.46) не для всех спинов j_1 и j_2 , а только для некоторых фиксированных и не очень больших значений j_1 , или j_2 . В этом случае бывает полезным подход, основанный на использовании ”правила сложения спинов” (I-3.3.14), (I-3.7.73), (2.4.25), которое в случае алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ (алгебры $su(2)$ с учетом связи (2.1.15)) записывается в виде

$$T(e_{\pm}) = T^{(j_1)}(e_{\pm}) \otimes 1 + 1 \otimes T^{(j_2)}(e_{\pm}), \quad T(\mathbf{h}) = T^{(j_1)}(\mathbf{h}) \otimes 1 + 1 \otimes T^{(j_2)}(\mathbf{h}). \quad (2.4.112)$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | \left(T^{(j)}(e_{\pm}) | j m \right) &= (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | T(e_{\pm}) | j m) = \\ &= \left(\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | [T^{(j_1)}(e_{\pm}) \otimes 1 + 1 \otimes T^{(j_2)}(e_{\pm})] | j m \right) = \\ &= (\langle j_1 m_1 | T^{j_1}(e_{\pm}) \otimes \langle j_2 m_2 | | j m) + (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | T^{j_2}(e_{\pm}) | | j m), \end{aligned} \quad (2.4.113)$$

где мы учли правило сложения спинов (2.4.112). Сравним левую и правую части в (2.4.113), воспользуемся правилами действия образующих e_{\pm} на дуальные вектора (2.1.28) и определением коэффициентов Клебша–Гордана (2.4.93). В результате получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} &\sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \pm 1 \rangle = \\ &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1, m_1 \mp 1; j_2, m_2 | j, m \rangle + \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 \mp 1 | j, m \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.114)$$

Подставляя в (2.4.113) вместо операторов e_{\pm} оператор \mathbf{h} , мы получаем условие

$$(m_1 + m_2 - m) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle = 0, \quad (2.4.115)$$

откуда вновь следует, что коэффициент Клебша–Гордана $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle$, заданный в (2.4.93), отличен от нуля только если $m = m_1 + m_2$.

- **Задача 56.** Рассмотреть матричный элемент $\langle j m | T^{(j)}(e_{\mp}) (|j_1 m_1 \rangle \otimes |j_2 m_2 \rangle)$ и получить уравнения для обратных коэффициентов Клебша–Гордана (2.4.99):

$$\begin{aligned} &\sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j, m \pm 1 | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle = \\ &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j, m | j_1, m_1 \mp 1; j_2, m_2 \rangle + \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j, m | j_1, m_1; j_2, m_2 \mp 1 \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.116)$$

$$(m_1 + m_2 - m) \langle j, m | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle = 0. \quad (2.4.117)$$

Сравнить эти уравнения с уравнениями (2.4.114), (2.4.115) с учетом условия (2.4.96).

Возьмем теперь уравнение (2.4.114) с верхним знаком и положим в нем $m = j$. Тогда левая часть (2.4.114) исчезает и мы получаем набор соотношений, с помощью которых находим коэффициенты Клебша–Гордана $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, j \rangle$ с точностью до общего фактора, определяемого нормировкой и соглашением, что $\langle j_1, j_1; j_2, j - j_1 | j, j \rangle$ вещественен и положителен. Выбирая теперь нижний знак в (2.4.114), мы выражаем $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m - 1 \rangle$ через $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle$ и, следовательно, пользуясь лестничной процедурой, находим все коэффициенты Клебша–Гордана, начиная с $m = j$, с точностью до общего нормировочного множителя.

2.5 Тензорные операторы и $3n$ - j символы

2.5.1 Тензорные операторы и теорема Вигнера-Экарта

Пусть T – n -мерное представление группы G в пространстве $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$. Выберем в $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ базис \vec{e}_k ($k = 1, \dots, n$). Тогда каждому элементу $g \in G$ в представлении T сопоставляется $n \times n$ матрица с элементами $T_{kl}(g) \in \mathbb{K}$ (см. (2.1.7)):

$$T(g) \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_l T_{lk}(g).$$

Пусть ρ – унитарное представление группы G в комплексном векторном пространстве \mathcal{V} с эрмитовой формой.

Определение 2.5.1 Набор линейных операторов $\{\hat{T}_k^{(T)}\}$ ($k = 1, \dots, n$), действующих в пространстве \mathcal{V} представления ρ группы G и удовлетворяющих соотношениям

$$\rho(g) \cdot \hat{T}_k^{(T)} \cdot \rho(g^{-1}) = \hat{T}_\ell^{(T)} T_{\ell k}(g), \quad \forall g \in G. \quad (2.5.1)$$

называется тензорным оператором группы G в представлении T . Если представление T – приводимо (неприводимо), то тензорный оператор $\{\hat{T}_k^{(T)}\}$ называется приводимым (неприводимым).

- **Задача 57.** Пусть задан набор линейно-независимых операторов $\{\hat{T}_k^{(T)}\}$ ($k = 1, \dots, n$), действующих в пространстве \mathcal{V} , а ρ – представление группы G в пространстве \mathcal{V} . Пусть присоединенное действие группы G на операторы $\{\hat{T}_k^{(T)}\}$ задается формулой (2.5.1). Доказать, что матрицы $\|T_{\ell k}(g)\|$, возникшие в правой части (2.5.1), определяют отображение $T: G \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$, которое является представлением G .

Отметим, что в некоторых случаях при введении тензорных операторов требования конечномерности представления T и унитарности представления ρ можно ослабить. Иногда требуют, чтобы пространство \mathcal{V} , в котором действуют тензорные операторы, было полным, или гильбертовым (определение 1.1.1 гильбертова пространства дано в разделе 1.1). Для наших целей свойство полноты, или гильбертовости, пространства \mathcal{V} будет несущественным.

Пусть G – группа Ли и $\mathcal{A}(G)$ соответствующая алгебра Ли. Рассмотрим соотношение (2.5.1) для элементов $g \in G$, лежащих на кривой $g(t) = \exp(tA)$, где $A \in \mathcal{A}(G)$ вблизи единичного элемента G . Дифференцируя обе части соотношения (2.5.1) по t в точке $t = 0$, мы получаем определение тензорного оператора в терминах алгебры Ли группы G :

$$[\rho(A), \hat{T}_k^{(T)}] = \hat{T}_\ell^{(T)} T_{\ell k}(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}(G). \quad (2.5.2)$$

Тензорные операторы играют важную роль в квантовой механике и особенно в квантовой теории поля. Например, операторы импульса и спина в нерелятивистской квантовой механике — это тензорные (векторные) операторы группы вращений трехмерного пространства, а квантовые поля в релятивистской квантовой теории поля — это тензорные операторы группы Пуанкаре.

Рассмотрим неприводимый тензорный оператор $\{\hat{T}_m^j\}$ ($m = -j, \dots, j-1, j$) группы $SU(2)$ в представлении $T^{(j)}$, то есть набор операторов, которые при присоединенном действии (2.5.2) алгебры Ли $su(2)$ или ее комплексификации $sl(2, \mathbb{C})$ преобразуется как базисные вектора (2.2.26) в пространстве неприводимого представления $T^{(j)}$. В соответствии с соотношениями (2.1.22), (2.2.30), (2.2.31) и (2.5.2) мы имеем

$$[\rho(\mathbf{h}), \hat{T}_m^j] = m \hat{T}_m^j, \quad (2.5.3)$$

$$[\rho(\hat{e}_\pm), \hat{T}_m^j] = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \hat{T}_{m \pm 1}^j. \quad (2.5.4)$$

Конкретным примером тензорного оператора группы $SU(2)$ служат сферические гармоники $\{Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi)\}$ ($m = -\ell, \dots, \ell$), которые действуют как операторы в пространстве \mathcal{V} всех квадратично интегрируемых функций $f(\theta, \phi)$ на сфере S^2 (см. раздел 2.3.3) следующим образом:

$$f(\theta, \phi) \rightarrow f'(\theta, \phi) = Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi) \cdot f(\theta, \phi).$$

Имея ввиду то, что сферические гармоники $Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi)$ – операторы, левые части соотношений (2.3.94) можно записать как коммутаторы функций $Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi)$ и образующих $\hat{\mathbf{h}} = -\rho(\mathbf{h})$ и $\hat{e}_\pm = -\rho(e_\mp)$, заданных в виде дифференциальных операторов (2.3.93), действующих в \mathcal{V} , после чего соотношения (2.3.94) приобретают форму (2.5.3) и (2.5.4).

- *Задача 58. Показать, что мономы (2.2.26) могут рассматриваться как тензорные операторы, действующие в пространстве всех функций $f(s, t)$. Переписать соотношения (2.2.31) в виде коммутаторов (2.5.3) и (2.5.4).*

Рассмотренный пример относится к случаю, когда ρ – бесконечномерное унитарное представление группы $SU(2)$, которое действует в пространстве \mathcal{V} всех квадратично интегрируемых функций $f(\theta, \phi)$ на сфере S^2 . Важный момент в этом примере заключается в том, что тензорные операторы $\hat{T}_m^{(\ell)} = Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi)$ для разных $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ действуют в одном и том же пространстве \mathcal{V} и их можно умножать друг на друга, другими словами, элементы $\hat{T}_m^{(j)}$ образуют алгебру тензорных операторов. Обсудим этот момент более подробно.

По определению (см. (2.5.3) и (2.5.4)) на тензорных операторах \hat{T}_m^j , как и на векторах $|j, m\rangle$, реализуется конечномерное представление $T^{(j)}$ алгебры $su(2)$. Произведение неприводимых тензорных операторов $\hat{T}_{m_1}^{j_1} \cdot \hat{T}_{m_2}^{j_2}$ является новым тензорным оператором (в общем случае приводимым), который преобразуется при присоединенном действии алгебры $su(2)$ так же, как тензорные произведения соответствующих векторов $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$. Таким образом, для произведения неприводимых тензорных операторов можно использовать аналоги разложений Клебша–Гордана (2.4.78) и (2.4.100):

$$\hat{X}_m^{j_3} = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} \hat{T}_{m_1}^{j_1} \cdot \hat{U}_{m_2}^{j_2} \cdot \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle, \quad (2.5.5)$$

$$\hat{T}_{m_1}^{j_1} \cdot \hat{U}_{m_2}^{j_2} = \sum_{j_3 = |j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} \hat{X}_m^{j_3} \cdot \langle j_1, j_2; j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle, \quad (2.5.6)$$

где $\hat{X}_m^{j_3}$, $\hat{T}_{m_1}^{j_1}$ и $\hat{U}_{m_2}^{j_2}$ — тензорные операторы, удовлетворяющие (2.5.3), (2.5.4). Положим $j_1 = j_2 = j$ и $m = 0, j_3 = 0$ в формуле (2.5.5) и учтем вытекающее из (2.4.83) равенство (сравните с (2.4.107) и метрикой (2.4.68))

$$\langle j m_1, j m_2 | 0, 0 \rangle = \frac{(-1)^{j-m_1}}{\sqrt{2j+1}} \delta_{m_1, -m_2} .$$

В результате (2.5.5) записывается в виде

$$\hat{X}_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \hat{T}_m^j \hat{U}_{-m}^j , \quad (2.5.7)$$

где в левой части возникает оператор \hat{X}_0^0 , который, согласно правой части (2.5.7) равен инвариантной свертке с метрикой (2.4.68) двух тензорных операторов \hat{T}_m^j и \hat{U}_m^j (сравните эту свертку с (2.3.39)). В представлении сферических гармоник, для целых $j = \ell$, формула (2.5.7) соответствует известной теореме сложения (2.3.77), которая с помощью замены $\phi_1 \rightarrow \pi - \phi_1$ представима в виде (сравните с (2.5.7))

$$(-1)^\ell P^{(\ell)}(\cos w_{12}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^{\ell-m} Y_m^{(\ell)}(\theta_1, \phi_1) Y_{-m}^{(\ell)}(\theta_2, \phi_2) ,$$

где функция $\cos w_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$ — инвариант относительно присоединенного действия образующих (2.3.85) алгебры $su(2)$:

$$[\tau_\alpha(\theta_1, \phi_1) + \tau_\alpha(\theta_2, \phi_2), \cos w_{12}] = 0 . \quad (2.5.8)$$

В задачах квантовой механики возникает необходимость вычисления матричных элементов $\langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m_2}^{j_2} | j_1 m_1 \rangle$ тензорных операторов $\hat{T}_{m_2}^{j_2}$, которые действуют в пространстве \mathcal{V} , включающем все пространства \mathcal{V}_{2j+1} неприводимых представлений $T^{(j)}$. Покажем, что эта задача сводится к задаче о вычислении коэффициентов Клебша–Гордана. Подействуем на соотношения (2.5.3) и (2.5.4) состояниями $\langle j_3 m_3 |$ и $| j_1 m_1 \rangle$ слева и справа, соответственно. В результате получаем

$$(m_3 - m_1) \langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle = m \langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle , \quad (2.5.9)$$

$$\langle j_3 m_3 | [\rho(\hat{e}_\pm), \hat{T}_m^j] | j_1 m_1 \rangle = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m \pm 1}^j | j_1 m_1 \rangle . \quad (2.5.10)$$

Первое из этих соотношений дает правило отбора: матричный элемент $\langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle$ равен нулю для всех $m_3 \neq m_1 + m$, а второе соотношение с учетом (2.2.31) сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j_3 \mp m_3 + 1)(j_3 \pm m_3)} \langle j_3 m_3 \mp 1 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle = \\ & = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m \pm 1}^j | j_1 m_1 \rangle + \\ & + \sqrt{(j_1 \pm m_1 + 1)(j_1 \mp m_1)} \langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \pm 1 \rangle . \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Уравнения (2.5.9) и (2.5.11) совпадают с уравнениями (2.4.116) и (2.4.117), которые определяют коэффициенты Клебша–Гордана с точностью до нормировки. Поэтому,

матричные элементы тензорных операторов и коэффициенты Клебша–Гордана пропорциональны друг другу:

$$\langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m_2}^{j_2} | j_1 m_1 \rangle = \frac{\langle j_3 || \hat{T}^{j_2} || j_1 \rangle}{\sqrt{2j_3 + 1}} \cdot \langle j_3 m_3 | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle, \quad (2.5.12)$$

где нормировочный коэффициент $\langle j_3 || \hat{T}^{j_2} || j_1 \rangle$ не зависит от m_1, m_2 и m_3 и называется в физической литературе *приведенным матричным элементом* (множитель $\frac{1}{\sqrt{2j_3+1}}$ вводится для удобства). Соотношение (2.5.12), связывающее матричные элементы тензорного оператора $\hat{T}_{m_2}^{j_2}$ с коэффициентами Клебша–Гордана, является содержанием знаменитой теоремы Вигнера–Эккарта.

2.5.2 Коэффициенты Рака и 3n-j символы

Коэффициенты Клебша–Гордана (2.4.79) и связанные с ними матричные элементы тензорных операторов (2.5.12), а также 3-j символы (2.4.91) можно рассматривать в качестве компонент тензоров 3-его ранга

$$\begin{aligned} t^{(j_1, j_2, \bar{j}_3)} &= \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle |m_1\rangle_{j_1} \otimes |m_2\rangle_{j_2} \otimes \langle m_3 |_{j_3} \in \mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(2)} \otimes \mathcal{V}_{(3)}^*, \\ t^{(j_1, j_2, j_3)} &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |m_1\rangle_{j_1} \otimes |m_2\rangle_{j_2} \otimes |m_3\rangle_{j_3} \in \mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(2)} \otimes \mathcal{V}_{(3)}, \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

где по трем индексам m_1, m_2, m_3 , которые пробегают значения $m_k = (-j_k, -j_k + 1, \dots, j_k - 1, j_k)$, подразумевается суммирование, и мы использовали краткие обозначения $|m\rangle_j = |j m\rangle$, $\langle m|_j = \langle j m|$, $\mathcal{V}_{(k)} = \mathcal{V}_{2j_k+1}$. Напомним, что тензор ранга r определяется как элемент тензорного произведения r векторных пространств (см. Определение **I-3.3.1** в разделе **I-3.3.1** первой части книги).

Действие произвольного элемента $g = U$ группы $SU(2)$ на базисные вектора $|j m\rangle \in \mathcal{V}_{2j+1}$ и $\langle j m| \in \mathcal{V}_{2j+1}^*$ пространств представлений $T^{(j)}$ и $\bar{T}^{(j)}$ задается соотношениями (2.3.56) и (2.3.57). Это действие переписываются в виде преобразования компонент тензоров (2.5.13) следующим образом

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle &\rightarrow \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(g) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(g) \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | j_3 m'_3 \rangle \mathcal{D}_{m'_3 m_3}^{(j_3)}(g^{-1}), \\ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(g) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(g) \mathcal{D}_{m_3 m'_3}^{(j_3)}(g) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

(по повторяющимся индексам m'_k идет суммирование). Выше мы уже отметили (см. формулу (2.4.82)), что коэффициенты Клебша–Гордана $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle$ обладают инвариантностью относительно $SU(2)$ -преобразований (2.5.14), то есть правая часть первого преобразования в (2.5.14) совпадает с левой. Аналогично, из инвариантности свертки, стоящей в правой части равенства (2.4.102), относительно преобразований (2.3.35), где $g \in SU(2)$, следует, что 3-j символы (2.4.91) также обладают свойствами инвариантности:

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(g) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(g) \mathcal{D}_{m_3 m'_3}^{(j_3)}(g) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.5.15)$$

Таким образом, и коэффициенты Клебша–Гордана, и 3-*j* символы являются, согласно определению **I-3.3.2** из раздела **I-3.3.1** первой части книги, компонентами инвариантных тензоров третьего ранга (2.5.13). Очевидно, что такие тензоры можно сворачивать друг с другом по индексам m_k , соответствующим одному и тому же представлению (с одним и тем же спином j_k), используя при этом инвариантную метрику $\eta^{(j_k)}$, которая была определена в (2.3.40), (2.4.68). В результате таких сверток возникают новые инвариантные тензоры, вообще говоря другого ранга, в том числе и инвариантные скалярные величины.

Следуя этим правилам, мы, например, можем рассматривать правую часть условия ортогональности (2.4.97) как инвариантную свертку 2-х коэффициентов Клебша–Гордана, в результате которой возникает инвариантный тензор второго ранга. С учетом (2.4.91) и свойств симметрии (2.4.103), (2.4.104) условие ортогональности (2.4.97) в терминах 3-*j* символов переписывается в виде

$$\sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_1+j_2-m_1-m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ -m_1 & -m_2 & m_4 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_3-m_3}}{2j_3+1} \delta_{m_3, -m_4} \delta^{j_3, j_4}, \quad (2.5.16)$$

где в правой части стоит тензор второго ранга, пропорциональный инвариантной метрике $\|\eta_{m_3, m_4}^{(j_3)}\|$. Если в обеих частях равенства (2.5.16) мы положим $j_4 = j_3$ и $m_4 = -m_3$, умножим их на $(-1)^{j_3-m_3}$ и просуммируем по m_3 , то в левой части мы получим полную инвариантную свертку двух 3-*j* символов, которая согласно правой части будет тривиальна и равна единице:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2, m_3} \sum_{m'_1, m'_2, m'_3} \eta_{m_1, m'_1}^{(j_1)} \eta_{m_2, m'_2}^{(j_2)} \eta_{m_3, m'_3}^{(j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^{\sum_{k=1}^3 (j_k - m_k)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m_1, m_2, m_3} \left(\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Здесь мы учли свойство (2.4.104) и условие $\sum_{k=1}^3 m_k = 0$. Таким образом, нетривиальной скалярной инвариантной свертки произведения двух 3-*j* символов не существует.

Легко понять, что скалярной инвариантной свертки произведения трех 3-*j* символов также не существует, так как невозможно попарно свернуть их девять индексов m_k . Поэтому рассмотрим следующий возможный вариант, а именно, скалярные инвариантные свертки четырех 3-*j* символов. Ниже мы продемонстрируем, что имеется всего одна такая свертка, которая не тривиализуется с помощью тождеств (2.5.16), и которую в терминах коэффициентов Клебша–Гордана можно записать в виде

$$\mathbf{I} \equiv \sum_{m_1, \dots, m_6} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle \langle j_5 m_5 | j_1 m_1, j_6 m_6 \rangle \langle j_6 m_6 | j_2 m_2, j_4 m_4 \rangle \langle j_4 m_4, j_3 m_3 | j_5 m_5 \rangle. \quad (2.5.18)$$

Данная свертка инвариантна относительно преобразований $SU(2)$ и задает скалярную величину. Инвариантность (2.5.18) следует из соотношения (2.4.82) и дуального к нему соотношения

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{m'_3 m_3}^{(j_3)}(g) \langle j_3, m_3 | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(g^{-1}) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(g^{-1}) = \\ &= \langle j_3, m'_3 | j_1, m'_1; j_2, m'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

которое получается при комплексном сопряжении (2.4.82) (необходимо учесть вещественность (2.4.96) коэффициентов Клебша–Гордана, а также унитарность матриц $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$ в случае $g \in SU(2)$). С учетом (2.4.91), (2.4.103) и (2.4.104) инвариант (2.5.18), умноженный на некоторую тривиальную функцию, зависящую только от спинов j_k , переписывается в виде инвариантной свертки по всем проекциям m_i четырех 3-*j* символов

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{2j_4-j_1-j_2-j_3}}{(2j_5+1)\sqrt{(2j_3+1)(2j_6+1)}} \mathbf{I} = \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{j_6-j_1-j_2+2m_5+m_3+m_6} \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_6 & j_5 \\ m_1 & m_6 & -m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ m_2 & m_4 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ m_4 & m_3 & -m_5 \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_{i=1}^6 (j_i - m_i)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \\ & \equiv \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

где для получения первого равенства мы воспользовались (2.4.96) и определениями (2.4.91) для 3-*j* символов, а третья строчка в (2.5.20) получена с помощью замены индекса суммирования $m_3 \rightarrow -m_3$ и применения свойств (2.4.103), (2.4.104), (2.4.105). Кроме того, мы воспользовались условиями

$$2(j_1 \pm j_2 \pm j_3) = 0 \pmod{2}, \quad 2(j_k \pm m_k) = 0 \pmod{2}, \quad (2.5.21)$$

(верхние и нижние знаки не коррелированы), которые выполняются для индексов любого 3-*j* символа $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. В третьей строчке (2.5.20) все свертки по m_k осуществляются с помощью инвариантных метрик (2.4.68). Скалярные инварианты, введенные в (2.5.20) (сравните с формулой (108,2) в [19]), имеют стандартное обозначение $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$ и называются *6-*j* символами Вигнера*. Название "6-*j*" связано с тем, что инварианты (2.5.20) – функции от значений шести спинов j_1, \dots, j_6 . Для этих инвариантов имеется явное выражение (см. например [23], [19]):

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \Delta(j_1, j_2, j_3) \Delta(j_1, j_5, j_6) \Delta(j_4, j_2, j_6) \Delta(j_4, j_5, j_3) \cdot \\ & \cdot \sum_k (-1)^k (k+1)! \frac{[(k-j_1-j_2-j_3)!(k-j_1-j_5-j_6)!(k-j_4-j_2-j_6)!(k-j_4-j_5-j_3)!]^{-1}}{(j_1+j_2+j_4+j_5-k)!(j_1+j_3+j_4+j_6-k)!(j_2+j_3+j_5+j_6-k)!}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

В формуле (2.5.22) мы использовали треугольные коэффициенты $\Delta(j_1, j_2, j_3)$, которые были определены в (2.4.85). Формула (2.5.22) будет получена нами ниже в разделе **2.5.4**.

Вместо введенных Ю.Вигнером 6-*j* символов, в спектроскопии также используются *коэффициенты Рака* $W(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6)$, которые были независимо введены Дж.Рака и отличаются от 6-*j* символов фазовым множителем

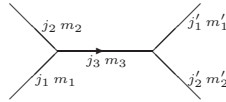
$$W(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6) = (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}.$$

Важной задачей в теории представлений группы $SU(2)$ является построение и исследование всех инвариантных свертки любого числа 3-*j* символов (аналогичных

сверке (2.5.20)). При рассмотрении таких инвариантных сверток удобно пользоваться диаграммной техникой, согласно которой 3-*j* символы (2.4.91) представляются в виде вершин с тремя исходящими из них линиями (такие вершины называются трехвалентными), причем каждая линия пронумерована своей парой индексов (j_k, m_k) , где $k = 1, 2, 3$. Инвариантная свертка по индексам m_k двух 3-*j* символов, осуществляемая с помощью инвариантной метрики (2.4.68), изображается в виде ориентированного ребра, соединяющего вершины, соответствующие этим 3-*j* символам. Например, свертка двух 3-*j* символов (сравните с (2.5.17)) по паре индексов m_3, m'_3 :

$$\sum_{m_3, m'_3} \eta_{m_3, m'_3}^{(j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \sum_{m_3} (-1)^{j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & -m_3 \end{pmatrix}, \quad (2.5.23)$$

будет изображаться в виде двух-вершинного графа с одним внутренним ориентированным ребром и четырьмя внешними линиями



В дальнейшем, в большинстве случаев, индекс суммирования m_3 на внутренних ориентированных ребрах выписываться не будет. Данная диаграммная техника^{2.11} детально представлена на рисунках 2.1, 2.2, на которых приведена диаграмма для 3-*j* символа (2.4.91) (Рис. 2.1), и дано графическое изображение (Рис. 2.2) инвариантной метрики (2.3.40), (2.4.68). Для диаграммных вычислений нам также понадобится графическое представление (Рис. 2.3) свертки двух внешних линий графа с инвариантной метрикой. Отметим, что аналогичная диаграммная техника использовалась в [23].

При применении данной техники следует следить за ориентацией диаграмм: зеркальное отражение диаграммы (относительно какой либо оси), не сводящееся к ее повороту в плоскости, в общем случае может приводить к изменению знака соответствующего выражения (см. вторую строчку на Рис. 2.1). В качестве примера применения данной техники, на Рис. 2.4 приведено графическое представление тождеств (2.5.16), (2.5.17).

Понятно, что полной инвариантной свертки произведения нечетного числа 3-*j* символов не существует, так как невозможно попарно свернуть их нечетное число индексов m_k . Рассмотрим произведение четного числа 3-*j* символов и пусть все их проекции m_k попарно засуммированы с помощью инвариантных метрик по правилам, которые были указаны выше (см. например (2.5.17), (2.5.20) и (2.5.23)). Возникающая при этом свертка 3-*j* символов является скалярным инвариантом. Такая скалярная свертка графически изображается как замкнутый граф, все вершины которого – трехвалентны и соответствуют 3-*j* символам, а ребра ориентированы, помечены своими спинами j_k и соответствуют сверткам по m_k с помощью инвариантных метрик. В таком замкнутом графе выполняется соотношение $3V = 2E$, где V – число вершин графа (число 3-*j* символов), а E – число ребер в графе (число спариваний,

^{2.11}В литературе также используется дуальная диаграммная техника, когда 3-*j* символу сопоставляется не трехвалентная вершина, а треугольник, и пары (j_k, m_k) , нумерующие 3-*j* символ, приписываются не ребрам исходящим из вершины, а сторонам треугольника. Обе техники эквивалентны. Дуальной техникой мы воспользуемся ниже в разделе 2.5.3.

$$\begin{array}{c} j_1 m_1 \\ | \\ \hline j_2 m_2 \\ \hline j_3 m_3 \end{array} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{c} j_1 m_1 \\ | \\ \hline j_2 m_2 \\ \hline j_3 m_3 \end{array} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \cdot \begin{array}{c} \hline j_2 m_2 \\ | \\ \hline j_1 m_1 \\ \hline j_3 m_3 \end{array}$$

Рис. 2.1: Графическое представление 3-j символов.

$$\begin{array}{c} j' m' \\ \longrightarrow \\ j m \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \longrightarrow \\ m \end{array} \begin{array}{c} m' \\ \longrightarrow \\ j' \end{array} \delta^{j,j'} = \eta_{m,m'}^{(j)} \delta^{j,j'} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-m'} \delta^{j,j'} \equiv (-1)^{2j} \cdot \begin{array}{c} j' m' \\ \longrightarrow \\ j m \end{array}$$

Рис. 2.2: Графическое представление инвариантной метрики.

$$\sum_{m_1, m_2} \delta^{j_1, j_2} \eta_{m_1, m_2}^{(j_1)} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2} \left[\begin{array}{c} j_1, m_1 \\ \longrightarrow \\ -m_1 \end{array} \dots \begin{array}{c} j_2, m_2 \\ \longrightarrow \\ -m_2 \end{array} \right] = \begin{array}{c} j_1, m_1 \\ \longrightarrow \\ \text{граф} \\ \longleftarrow \\ j_2, m_2 \end{array} = \delta^{j_1, j_2} \cdot \begin{array}{c} j_1 \\ \text{граф} \end{array}$$

Рис. 2.3: Свертка двух входящих линий графа с инвариантной метрикой.

соответствующее числу спинов j_1, j_2, \dots). Это соотношение между V и E означает, что V – обязательно четное число, скажем $V = 2n$, а $E = 3n$ – делится на 3. Поэтому, в результате полной свертки нескольких 3-j символов, число которых четно и равно $2n$, возникающие скалярные инварианты зависят от $3n$ спинов j_1, j_2, \dots, j_{3n} . В соответствии с этим замечанием указанные скалярные инварианты (если они не факторизуются в произведение скалярных инвариантов, построенных из меньшего числа 3-j символов) называются 3n-j символами.

Итак, диаграммная техника позволяет графически представлять свертки большого числа 3-j символов, а также производить с этими свертками различные наглядные манипуляции и преобразования, применяя соотношения, представленные на рисунках 2.3 и 2.4. Продемонстрируем работу этой техники на примере вычисления (см. Рис. 2.5) некоторой инвариантной скалярной свертки четырех 3-j символов. В этом вычислении мы последовательно используем первое и второе тождества, изображенные на Рис. 2.4, а также применяем формулу (см. Рис. 2.3) для свертки двух внешних линий с инвариантной метрикой.

- **Задача 59.** Проверить формулу для свертки четырех 3-j символов, представленную на Рис. 2.5, с помощью тождеств (2.5.16) и (2.5.17), не применяя графическую технику.

$$\begin{array}{c} j_1 \\ \text{граф} \\ \longleftarrow \\ j_2 \end{array} = (-1)^{j_1+j_2+j_4} \cdot \begin{array}{c} j_1 \\ \text{граф} \\ \longrightarrow \\ j_2 \end{array} \begin{array}{c} j_4 m_4 \\ \longrightarrow \\ j_3 m_3 \end{array} = \frac{1}{(2j_3+1)} \cdot \begin{array}{c} j_4 m_4 \\ \longrightarrow \\ j_3 m_3 \end{array}$$

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \cdot \begin{array}{c} j_1 \\ \text{граф} \\ \longrightarrow \\ j_2 \\ \longrightarrow \\ j_3 \end{array} = 1$$

Рис. 2.4: Графическое представление для тождеств (2.5.16) и (2.5.17).

значений спинов j_k , соответствующих вращениям и отражениям этого тетраэдра:

1.) 6-j символ инвариантен относительно любой перестановки столбцов:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ j_4 & j_6 & j_5 \end{Bmatrix}; \quad (2.5.24)$$

2.) 6-j символ инвариантен относительно перестановки первого и второго ряда спинов j_k в первых двух столбцах

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{Bmatrix}. \quad (2.5.25)$$

Доказать, что множество всех композиций преобразований (2.5.24) и (2.5.25) образует группу симметрий тетраэдра, изоморфную группе перестановок S_4 .

Единственный нетривиальный 9-j инвариант, составленный из шести 3-j символов и называемый 9-j символом, дается непланарным графом, который изображен на Рис. 2.8. То, что мы не указываем на этом графе направления ребер, учитывается произвольным фазовым фактором $(-1)^{B''}$ в правой части. Пример "тривиального" скалярного 9-j инварианта, составленного из шести 3-j символов, будет приведен ниже в задаче 65 (см. Рис. 2.15 к этой задаче).

$$= (-1)^{B''} \cdot \begin{Bmatrix} j_3 & j_1 & j_5 \\ j_6 & j_8 & j_7 \\ j_4 & j_2 & j_9 \end{Bmatrix}$$

Рис. 2.8: Графическое представление 9-j символа (тетраэдр, у которого пара противоположных ребер соединена еще одним ребром j_1).

- **Задача 61.** Описать симметрии 9-j символа, которые вытекают из его графического представления на Рис.2.8.

2.5.3 6-j символы и ассоциативность произведения представлений

Замечательным фактом является то, что 6-j символы связаны с условием ассоциативности в тензорной алгебре представлений $SU(2)$:

$$(T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) \otimes T^{(j_3)} = T^{(j_1)} \otimes (T^{(j_2)} \otimes T^{(j_3)}). \quad (2.5.26)$$

Для того, чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим представление $T = T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes T^{(j_3)}$ в пространстве $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_3+1}$, и будем строить связанный базис в векторном пространстве \mathcal{V} , применения разложения Клебша–Гордана. Имеется два способа построить такой базис, реализуя его через базисные вектора $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle \in \mathcal{V}$. Первый способ заключается в том, чтобы сначала применить формулу Клебша–Гордана (2.4.100) к произведению $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ и

разложить это произведение по базисным векторам $|j_1, j_2; j_4, m_4\rangle$, где $m_4 = m_1 + m_2$ и $|j_1 - j_2| \leq j_4 \leq j_1 + j_2$, а затем применить формулу Клебша–Гордана к произведению $|j_1, j_2; j_4, m_4\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} & |j_4, j_3; j_5, m_5\rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_2, m_3} (|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) \otimes |j_3, m_3\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4\rangle \langle j_4, m_4; j_3, m_3 | j_5, m_5\rangle, \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

где напомним $m_4 = m_1 + m_2$ и $m_5 = m_1 + m_2 + m_3$. При этом базисных векторов с квантовыми числами j_5, m_5 может быть несколько — они различаются значениями промежуточного спина j_4 . Аналогично, второй способ заключается в том, что формула разложения Клебша–Гордана (2.4.100) применяется сначала к произведению $|j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$, а потом уже к произведению вектора $|j_1, m_1\rangle$ и промежуточного “связанного состояния” $|j_2, j_3; j_6, m_6\rangle$:

$$\begin{aligned} & |j_1, j_6; j_5, m_5\rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_2, m_3} |j_1, m_1\rangle \otimes (|j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle) \langle j_2, m_2; j_3, m_3 | j_6, m_6\rangle \langle j_1, m_1; j_6, m_6 | j_5, m_5\rangle, \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

где $m_6 = m_2 + m_3$ и $m_5 = m_1 + m_2 + m_3$. Иногда спины промежуточных состояний удобно обозначать как $j_4 = j_{12}$ и $j_6 = j_{23}$. Здесь и далее, например в левых частях формул (2.5.27) и (2.5.28), мы используем более информативные обозначения $|j_4, j_3; j_5, m_5\rangle$ и $|j_1, j_6; j_5, m_5\rangle$ для векторов $|j_5, m_5\rangle$ связанного базиса. Это сделано для того, чтобы различать вообще говоря несовпадающие вектора $|j_4, j_3; j_5, m_5\rangle$ и $|j_1, j_6; j_5, m_5\rangle$, которые получаются с помощью различных промежуточных связанных состояний.

Поясним последнее утверждение более подробно, для чего в качестве иллюстрации рассмотрим произведение трех представлений со спинами $j_1 = 1/2$, $j_2 = 3$ и $j_3 = 1$:

$$\begin{array}{ccc} T^{(1/2)} \otimes T^{(3)} \otimes T^{(1)} & \begin{array}{l} \nearrow (T^{(5/2)} \oplus T^{(7/2)}) \otimes T^{(1)} \\ \searrow T^{(1/2)} \otimes (T^{(2)} \oplus T^{(3)} \oplus T^{(4)}) \end{array} & \begin{array}{l} \searrow T^{(3/2)} \oplus 2T^{(5/2)} \oplus 2T^{(7/2)} \oplus T^{(9/2)} \\ \nearrow \end{array} \\ & & \end{array} \quad (2.5.29)$$

Согласно разложению, которое записано в правой части этой формулы, в связанном базисе имеются два базисных вектора с квантовыми числами $j = 5/2$, $m = m_5$ и два базисных вектора с квантовыми числами $j = 7/2$, $m = m_5$. Поэтому пространства связанных состояний, имеющих такие квантовые числа, оказываются двумерными. В этом случае вектора типа $|5/2, m_5\rangle$ и $|7/2, m_5\rangle$, возникающие в первом подходе (2.5.27) (верхний путь в (2.5.29)) не обязаны совпадать с векторами того же типа из второго подхода (2.5.28) (нижний путь в (2.5.29)), а могут представляться в виде их линейных комбинаций. Например, для двух векторов типа $|5/2, m_5\rangle$, полученных в первом подходе, мы имеем разложение по двум векторам того же типа, построенным во втором подходе:

$$\begin{aligned} |5/2, 1; 5/2, m_5\rangle &= w_1 |1/2, 2; 5/2, m_5\rangle + w_2 |1/2, 3; 5/2, m_5\rangle, \\ |7/2, 1; 5/2, m_5\rangle &= w_3 |1/2, 2; 5/2, m_5\rangle + w_4 |1/2, 3; 5/2, m_5\rangle. \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Аналогичные формулы имеют место и для векторов типа $|7/2, m_5\rangle$. Как мы покажем ниже, коэффициенты w_α в (2.5.30) зависят только от первоначальных спинов j_1, j_2 ,

j_3 и спинов связанных состояний j_4, j_5 и j_6 и не зависят от проекции m_5 . Кроме того мы покажем, что коэффициенты w_α с точностью до домножения на некоторые тривиальные функции от спинов j_k совпадают с 6-j символами (2.5.22).

Вернемся к обсуждению общего случая. Базисные вектора (2.5.27) и (2.5.28), имеющие одни и те же квантовые числа j_5 и m_5 , связаны друг с другом, так же как и в рассмотренном выше частном случае (см. (2.5.30)), некоторым линейным преобразованием:

$$|j_4, j_3; j_5, m_5\rangle = \sum_{j_6} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} |j_1, j_6; j_5, m_5\rangle, \quad (2.5.31)$$

где в качестве коэффициентов (аналогов w_α) выступают символы, которые согласно (2.5.31) можно представить в виде матричного элемента

$$\langle j_1, j_23; j_5, m_5 | j_{12}, j_3; j_5, m'_5 \rangle = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \delta_{m_5, m'_5}, \quad (2.5.32)$$

где $j_{12} = j_4$ и $j_{23} = j_6$.

Утверждение 2.5.1 Коэффициенты $\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}$ в уравнениях (2.5.31) и (2.5.32) не зависят от проекции m_5 .

Доказательство. Учтем, что

$$|j_{12}, j_3; j_5, j_5 - 1\rangle = (2j_5)^{-1/2} e_- |j_{12}, j_3; j_5, j_5\rangle,$$

и запишем

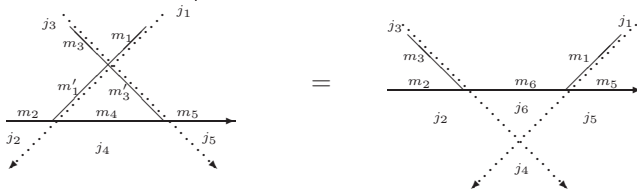
$$\begin{aligned} \langle j_1, j_23; j_5, j_5 - 1 | j_{12}, j_3; j_5, j_5 - 1 \rangle &= (2j_5)^{-1} \langle j_1, j_23; j_5, j_5 | e_+ \cdot e_- | j_{12}, j_3; j_5, j_5 \rangle = \\ &= (2j_5)^{-1} \langle j_1, j_23; j_5, j_5 | 2\mathbf{h} | j_{12}, j_3; j_5, j_5 \rangle = \langle j_1, j_23; j_5, j_5 | j_{12}, j_3; j_5, j_5 \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, левые части (2.5.32) совпадают при $m_5 = j_5$ и $m_5 = j_5 - 1$. Доказательство для более низких m_5 проводится по индукции. ■

С учетом соотношений (2.5.27) и (2.5.28) и того, что вектора $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$ образуют базис в \mathcal{V} , равенство (2.5.31) переписывается в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{m_4} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_4, m_4; j_3, m_3 | j_5, m_5 \rangle = \\ &\sum_{j_6} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \sum_{m_6} \langle j_2, m_2; j_3, m_3 | j_6, m_6 \rangle \langle j_1, m_1; j_6, m_6 | j_5, m_5 \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

- **Задача 62.** С учетом равенства (2.4.94), представить соотношение (2.5.33) в графическом виде (специальный тип уравнения Янга-Бакстера) [24]



где индексы m_i, m'_i приписываются сплошным ребрам (по внутренним ребрам с индексами m'_1, m'_3, m_4, m_6 идет суммирование), индексы j_1, j_3 приписаны пунктирным линиям, индексы j_2, j_4, j_5, j_6 приписаны двумерным граням (по внутренней грани с индексом j_6 идет суммирование) и

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} j_1 \\ | \\ m_1 \\ | \\ m_2 \text{---} m_4 \\ | \\ j_2 \text{---} j_4 \\ | \\ \downarrow \end{array} &= \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle, & \begin{array}{c} j_3 \text{---} j_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ m_3 \quad m_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ m'_1 \quad m_3 \end{array} &= R(j_1, j_3)_{m'_1 m'_3}^{m_1 m_3} = \delta_{m'_1}^{m_1} \delta_{m'_3}^{m_3}, \\
 \begin{array}{c} j_3 \text{---} j_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \quad j_6 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_4 \quad j_5 \end{array} &= (-1)^{j_2+j_5-j_4-j_6} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} j_1 \text{---} j_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_5 \quad j_6 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_4 \quad j_2 \end{array}.
 \end{aligned}$$

При преобразованиях из группы $SU(2)$ левая часть, а также все слагаемые (в сумме по j_6) в правой части тождества (2.5.33) ведут себя как компоненты инвариантных тензоров 4-го ранга — свертка этих компонент с базисными векторами $(-1)^{j_5-m_5} T_{-m_5}^{j_5} \cdot T_{m_1}^{j_1} \cdot T_{m_2}^{j_2} \cdot T_{m_3}^{j_3}$ будет $SU(2)$ -инвариантом. Таким образом, соотношение (2.5.33) является соотношением между тензорами 4-ого ранга, которое для последующего удобно переписать в терминах 3-j символов (2.4.91):

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m_4} (-1)^{j_4-m_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ m_1 & m_2 & -m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ m_4 & m_3 & m_5 \end{pmatrix} = \\
 &= (-1)^{2j_1} \sum_{j_6} \sqrt{\frac{2j_6+1}{2j_4+1}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \sum_{m_6} (-1)^{j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_6 \\ m_2 & m_3 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_6 & j_5 \\ m_1 & m_6 & m_5 \end{pmatrix}. \tag{2.5.34}
 \end{aligned}$$

Здесь для вычисления фазового фактора мы воспользовались условиями (2.5.21). С помощью диаграммной техники (см. рисунки 2.1 и 2.2) это соотношение графически изображается так, как показано на Рис. 2.9 (для дальнейшего нам также удобно сделать замену индекса суммирования $j_6 \rightarrow j'_6$).

$$\begin{array}{c} j_1 \ m_1 \\ / \\ j_2 \ m_2 \\ / \\ j_4 \ m_4 \\ / \\ j_5 \ m_5 \text{---} j_3 \ m_3 \end{array} = (-1)^{2j_1} \sum_{j'_6} \sqrt{\frac{2j'_6+1}{2j_4+1}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j'_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} j_1 \ m_1 \\ / \\ j_2 \ m_2 \\ / \\ j'_6 \ m'_6 \\ / \\ j_5 \ m_5 \text{---} j_3 \ m_3 \end{array}$$

Рис. 2.9: Графическое представление условия ассоциативности (2.5.34).

Утверждение 2.5.2 Коэффициенты $\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}$, использованные в уравнениях ассоциативности (2.5.33) и (2.5.34), с точностью до некоторого фактора, зависящего от спинов j_k , равны 6-j символам:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_5}}{\sqrt{(2j_4+1)(2j_6+1)}} \cdot \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_5}}{\sqrt{(2j_4+1)(2j_6+1)}} \cdot \langle j_1, j_6; j_5, m_5 | j_4, j_3; j_5, m_5 \rangle. \tag{2.5.35}$$

Доказательство. Возьмем диаграмму для тензора 4-го ранга из правой части соотношения на Рис. 2.9, сделаем в ней обратную замену $j'_6 \rightarrow j_6$ и отразим эту диаграмму

относительно вертикальной оси. В результате получаем графическое представление (см. Рис.2.10) дуального тензора. Свернем (посредством инвариантных метрик) тензоры в обеих частях соотношения на Рис. 2.9 с получившимся дуальным тензором, изображенным на Рис. 2.10. Свертку будем производить так, что у дуального тензора все внешние линии будут входящими.

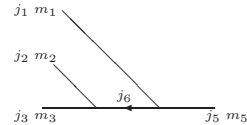
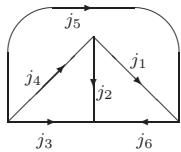
$$\sum_{m_6} (-1)^{j_6 - m_6} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_6 \\ m_3 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & m_5 & m_6 \end{pmatrix} =$$


Рис. 2.10: Графическое представление дуального тензора.

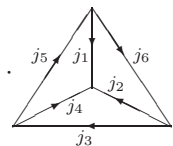
Тогда слева (как это показано на Рисунках 2.11 и 2.12) появится свертка четырех 3-*j* символов, которая представляется в виде тетраэдра, и согласно Рис. 2.6 данная свертка соответствует 6-*j* символу (обратите внимание на расстановку спинов j_k и на ориентацию ребер). А в правой части (см. Рис. 2.12) возникнет сумма коэффициентов $\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6' \end{bmatrix}$, умноженных на скалярные инварианты, которые соответствуют графам, изображенным в левой части соотношения на Рис. 2.5.



$$= (-1)^{2(j_1 + j_2 + j_3)} \cdot \begin{matrix} j_5 & j_1 & j_6 \\ j_4 & j_2 & j_3 \end{matrix} = (-1)^{2(j_1 + j_2 + j_3)} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}.$$

Рис. 2.11: Инвариантная свертка левой части соотношения на Рис. 2.9.

Таким образом, соотношение, представленное на Рис. 2.9, после свертки с дуальным тензором переписывается в виде равенства для скалярных инвариантов, как это изображено на Рис. 2.12.



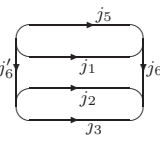
$$(-1)^{2(j_1 + j_2 + j_3)} \cdot \begin{matrix} j_5 & j_1 & j_6 \\ j_4 & j_2 & j_3 \end{matrix} = (-1)^{2j_1} \sum_{j_6'} \sqrt{\frac{2j_6' + 1}{2j_4 + 1}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6' \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} j_5 \\ j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{matrix} \Bigg|_{j_6}$$


Рис. 2.12: Инвариантная скалярная форма соотношения на Рис. 2.9.

Вычисление инвариантной свертки четырех 3-*j* символов из правой части равенства на Рис. 2.12 было сделано на Рис. 2.5. Подставляя результат в правую часть равенства на Рис. 2.12 и учитывая то, что инвариант в левой части этого равенства, имеющий представление в виде тетраэдра, соответствует 6-*j* символу (см. Рис. 2.11), мы окончательно переписываем тождество, изображенное на Рис. 2.12, в виде первого равенства в (2.5.35). Второе равенство в (2.5.35) следует из формулы (2.5.32).

Следствие. Согласно Утверждению 2.5.1 правая часть в (2.5.35) не зависит от m_5 .

В соответствии с этим, 6-j символ можно определить с помощью формулы:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{B'}}{\sqrt{(2j_4 + 1)(2j_6 + 1)(2j_5 + 1)}} \sum_{m_5} \langle j_1, j_6; j_5, m_5 | j_4, j_3; j_5, m_5 \rangle, \quad (2.5.36)$$

где $B' = j_1 + j_2 + j_3 + j_5$. В следующем подразделе мы будем использовать именно это определение.

- **Задача 63.** Проверить формулу (2.5.35) прямым вычислением скалярного произведения $\langle j_1, j_6; j_5, m_5 | j_4, j_3; j_5, m_5 \rangle$ векторов (2.5.27) и (2.5.28).

С помощью соотношения (2.5.35), условие ассоциативности (2.5.34) (см. также Рис. 2.9) переписывается в терминах 6-j символов. Другими словами, 6-j символы однозначно определяют коэффициенты в условии ассоциативности (2.5.34) для тензорного произведения трех представлений (2.5.26). Поэтому 6-j символы иногда называют ассоциаторами. Условие ассоциативности, представленное на Рис. 2.9, в терминах 6-j символов в графическом виде изображено на Рис. 2.13.

Рис. 2.13: Условие ассоциативности (2.5.34) (см. Рис. 2.9), переписанное в терминах 6-j символов.

- **Задача 64.** Пользуясь той же процедурой, что и при переходе от соотношения на Рис. 2.9 к скалярному соотношению на Рис. 2.12, доказать тождество, изображенное на Рис. 2.14, где $B'' = (j_1 + j_2 + j_3) + 2(j_4 + j_5 + j_6) \pmod{2}$. Указание: отразить все внешние линии в левой части соотношения внутрь треугольника, после чего левая часть приобретет фактор $(-1)^{B''}$, а затем свернуть обе части с 3-j символом.

Рис. 2.14: Тождество для свертки трех 3-j символов.

- **Задача 65.** Доказать, что инвариант, сконструированный из шести 3-j символов и показанный на Рис. 2.15, не является новым нетривиальным 9-j инвариантом, так как выражается в виде произведения двух 6-j символов (здесь $(-1)^{B'''}$ — некоторый фазовый фактор, зависящий от выбора ориентации ребер на графе в левой части Рис. 2.15). Указание: воспользоваться тождеством, представленным на Рис. 2.14.

Рис. 2.15: Свертка шести 3-j символов, дающая "тривиальный" 9-j инвариант.

Замечание 1. Тождество на Рис. 2.14 может быть использовано для получения компактного выражения для 6-j символа в виде однократной суммы. Для этого надо положить в этом тождестве $m_1 = j_1$ и воспользоваться явным выражением для 3-j символа $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$, которое приведено в (2.4.106).

Замечание 2. Отметим, что нетривиальный инвариант, соответствующий 9-j символу, изображенному на Рис. 2.8, связан с условием ассоциативности для тензорного произведения четырех представлений (сравните с (2.5.26))

$$[T^{(j_1)} \otimes (T^{(j_2)} \otimes T^{(j_3)})]_{13} \otimes T^{(j_4)}_{24} = (T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) \otimes (T^{(j_3)} \otimes T^{(j_4)}) . \quad (2.5.37)$$

Здесь в левой части скобки $[...]_{13}$ и $(...)_{24}$ обозначают соответственно применение формулы Клебша–Гордана (2.4.100) к слиянию представлений $T^{(j_1)}$ с $T^{(j_3)}$ и $T^{(j_2)}$ с $T^{(j_4)}$. Данное условие ассоциативности приводит к некоторому тождеству на 3-j символы, которое графически изображено на Рис. 2.16 (аналог соотношения, представленного на Рис. 2.9), где в правой части стоит линейная комбинация 9-j символов (их определение дано на Рис. 2.8), а $f(j_1, \dots, j_9)$ – некоторая тривиальная функция от спинов j_k , в частности содержащая фазовые факторы.

Рис. 2.16: Графическое представление условия ассоциативности для определения 9-j символа.

Поясним, почему коэффициенты в правой части соотношения на Рис. 2.16 могут быть выражены через 9-j символы, изображенные на Рис. 2.8. Действительно, осуществляя ту же процедуру, что и при переходе от соотношения на Рис. 2.9 к соотношению на Рис. 2.12, то есть, определяя дуальный тензор (см. Рис. 2.17) к тензору из правой части равенства на Рис. 2.16, а затем сворачивая обе части с этим дуальным тензором, мы в левой части равенства на Рис. 2.16 получим граф, совпадающий с диаграммой (см. Рис. 2.8) для 9-j символа, а в правой части получается линейная комбинация 9-j символов с коэффициентами в виде инвариантных сверток шести 3-j символов, вычисляемых с помощью формул, указанных на Рисунках 2.4 и 2.5:

$$\sum_{j'_8, j'_9} f(j_1, \dots, j_7, j'_8, j'_9) \cdot \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_5 \\ j_6 & j'_8 & j_7 \\ j_4 & j_2 & j'_9 \end{matrix} \right\} \cdot \left(\text{Diagram with 9-j symbol} \right) = \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_5 \\ j_6 & j_8 & j_7 \\ j_4 & j_2 & j_9 \end{matrix} \right\} \cdot \frac{f(j_1, \dots, j_9) \cdot (-1)^B}{(2j_8+1)(2j_9+1)} .$$

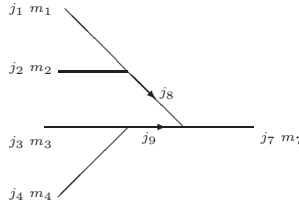


Рис. 2.17: Дуальный тензор к тензору из правой части равенства на Рис. 2.16.

$$(2.5.38)$$

Здесь $(-1)^B$ — некоторый фазовый фактор, зависящий от выбора ориентации ребер на графах в левой и правой частях Рис. 2.16. В результате, сравнивая (2.5.38) и 9-j символ (см. Рис. 2.8), возникший в результате свертки левой части соотношения на Рис. 2.16 и дуального тензора на 2.17, мы получаем уравнение, которое определяет функцию $f(j_1, \dots, j_9) = (-1)^B(2j_8 + 1)(2j_9 + 1)$.

Замечание 3. Так как 6-j символ является ассоциатором для тензорного произведения трех представлений, что выражается в виде тождества, изображенного на Рис. 2.13, то 6-j символ, как мы сейчас увидим, автоматически удовлетворяет пентагональному соотношению, которое вытекает из эквивалентности двух путей перехода от тензорного произведения четырех представлений $((T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) \otimes T^{(j_3)}) \otimes T^{(j_4)}$, где скобки указывают порядок слияния представлений группы $SU(2)$, к тензорному произведению тех же представлений, но в котором слияние представлений осуществляется в противоположном порядке: $T^{(j_1)} \otimes (T^{(j_2)} \otimes (T^{(j_3)} \otimes T^{(j_4)}))$. Здесь под "слиянием" понимается последовательное применение формулы Клебша-Гордана к тензорному произведению двух соответствующих представлений. Указанную эквивалентность можно представить в виде диаграммы на Рис. 2.18.

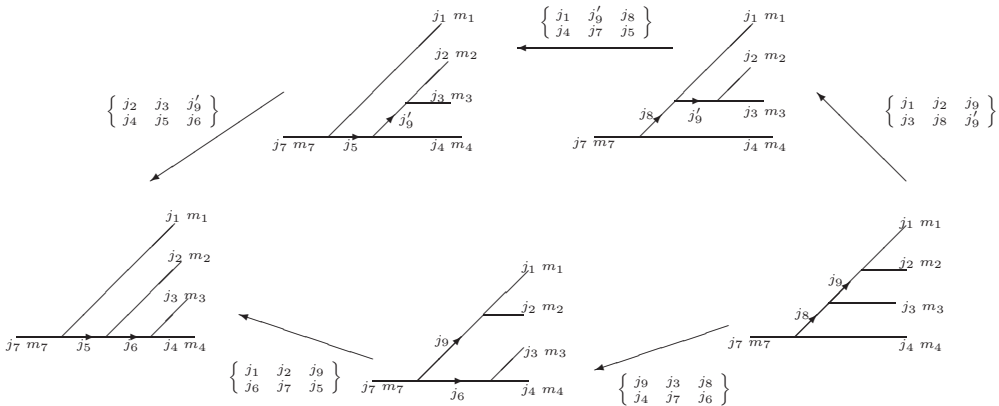


Рис. 2.18: Пентагональное соотношение для ассоциаторов.

В качестве элементов этой диаграммы выступают инвариантные тензоры ранга 5, построенные как свертки трех 3-j символов. Графически эти тензора представляются в виде "деревьев", которые демонстрируют порядок слияния четырех представлений

$T^{(j_k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Каждый шаг, показанный стрелкой, на этой диаграмме – это применение соотношения ассоциативности (которое изображено на Рис. 2.13) для тензорного произведения трех представлений. При этом на каждом шаге происходит перестройка соответствующего "дерева". В результате двух возможных переходов от крайне правого тензора к крайне левому тензору на Рис. 2.18 (верхний и нижний путь) возникают два разных выражения в виде линейных комбинаций левого тензора с коэффициентами, построенными из 6-j символов. Приравнивая эти два выражения, мы получаем пентагональное тождество на 6-j символы, которое называется тождеством Биденхарна – Эллиотта:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_9 \\ j_6 & j_7 & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_9 & j_3 & j_8 \\ j_4 & j_7 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{j'_9} (-1)^R (2j'_9 + 1) \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j'_9 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_9 \\ j_3 & j_8 & j'_9 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j'_9 & j_8 \\ j_4 & j_7 & j_5 \end{matrix} \right\}, \quad (2.5.39)$$

где $(-1)^R$ – фазовый фактор.

- **Задача 66.** Вывести тождество Биденхарна-Эллиотта (2.5.39), пользуясь диаграммой на Рис. 2.18, и вычислить фазовый фактор $(-1)^R$.

Тождество (2.5.39) имеет замечательную трехмерную геометрическую интерпретацию, если вспомнить, что 6-j символы изображаются в виде тетраэдров (см. Рис. 2.6). При этом, однако, необходимо (см. Рис. 2.19) представлять 6-j символ в виде тетраэдра, дуального по отношению к тетраэдру, изображенному в левой части соотношения на Рис. 2.6. Это означает, что 3-j символу, или трех-валентной вершине тетраэдра на диаграмме Рис. 2.6, соответствует треугольная грань дуального тетраэдра, изображенного на диаграмме Рис. 2.19, и наоборот. Подчеркнем, что в дуальной диаграммной технике^{2.12} свертка 3-j символов по проекциям m_k представляется как склейка соответствующих треугольников по общим ребрам (в этом случае, как и прежде, индексы суммирования m_k на ребрах опускаются). Так же как и в предыдущей диаграммной технике, следует принять некоторое соглашение по ориентации ребер. Это будет фиксировать знаковый фактор $(-1)^{\tilde{B}}$ во втором соотношении на Рис. 2.19.

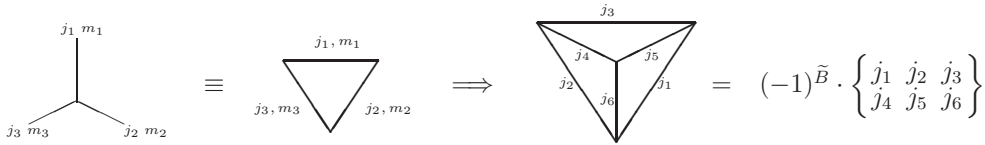


Рис. 2.19: Дуальное графическое представление 3-j и 6-j символов.

Следует отметить, что представление 3-j символа не в виде трех-валентной вершины (см. Рис. 2.1), а в виде треугольника, как это принято в дуальной технике (см. левое равенство на Рис. 2.19), с геометрической точки зрения является более естественным. Действительно, согласно разложению Клебша–Гордана (2.4.12) 3-j символ не равен нулю только если нумерующие его спины j_1, j_2 и j_3 удовлетворяют условиям треугольника:

$$j_1 + j_2 \geq j_3, \quad j_2 + j_3 \geq j_1, \quad j_3 + j_1 \geq j_2,$$

^{2.12} Дуальная диаграммная техника использовалась для изложения свойств 6-j символов, например, в книге [19].

поэтому в дуальной технике спины j_1, j_2, j_3 , приписываемые сторонам треугольника, естественно рассматривать как длины этих сторон.

Замечание 4. Пользуясь дуальным представлением для 6-j символов, тождество Биденхарна – Эллиотта (2.5.39) графически представляется так, как показано на Рис. 2.20. Данное графическое соотношение можно интерпретировать как одну из перестроек триангуляций трехмерных пространств^{2,13}. Данное геометрическое свойство 6-j символов позволяет использовать их при построении моделей гравитации на триангулированных многообразиях (модель Понзано-Редже [34], модель Тураева-Виро [35] и др.).

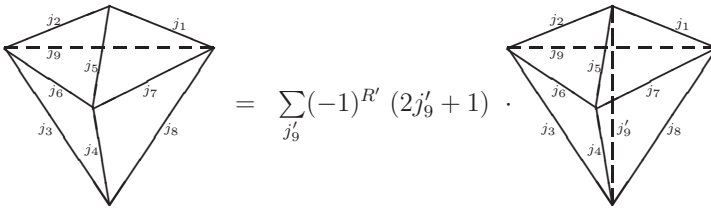


Рис. 2.20: Графическое представление для тождества Биденхарна – Эллиотта (2.5.39).

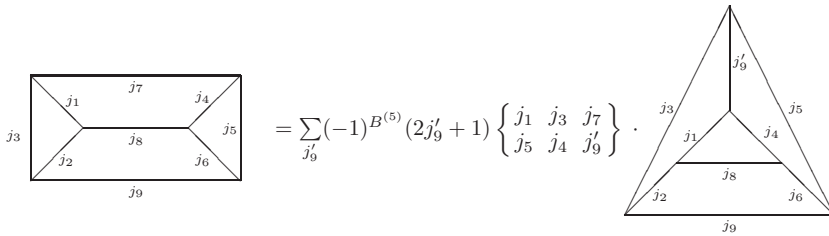


Рис. 2.21: Преобразование диаграммы на Рис. 2.15 с помощью условия ассоциативности.

- **Задача 67.** Получить тождество Биденхарна – Эллиотта (2.5.39) вычислив инвариант, соответствующий диаграмме в левой части Рис. 2.15, другим способом. А именно, сначала преобразовать эту диаграмму с помощью соотношения ассоциативности, которое дано на Рис. 2.13 (применяя его к подграфу, содержащему спины j_1, j_3, j_7, j_5 и j_4 на диаграмме в левой части Рис. 2.21), и получить соотношение, представленное на Рис. 2.21, правая часть которого вычисляется далее с помощью тождества, изображенного на Рис. 2.14. В конце использовать симметрию 6-j символа, присущую тетраэдру.

^{2,13}Склейка двух тетраэдров, имеющих одну общую грань в левой части соотношения на Рис. 2.20 (произведение двух 6-j символов в левой части (2.5.39)) представляется как склейка трех тетраэдров, имеющих одно общее ребро j'_9 , по которому идет суммирование, в правой части соотношения на Рис. 2.20 (свертка трех 6-j символов в правой части (2.5.39)).

2.5.4 Вычисление 6-j символов. Метод Швингера

В этом подразделе мы изложим метод вычисления 6-j символов, который использует метод производящих функций, предложенный Ю.Швингером [36] (см. также [37]). Этот же метод применим и для вычисления 9-j символов [36]. Здесь под вычислением 3n-j символов мы понимаем получение для них компактных выражений, имеющих возможно меньшее число суммирований.

1. Функциональное представление.

Запишем тензор $\sum_{m_4} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_4, m_4; j_3, m_3 | j_5, m_5 \rangle$ из левой части (2.5.33) в виде

$$\sum_{m_4, m'_4} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_4, m_4 | j_4, m'_4 \rangle \langle j_4, m'_4; j_3, m_3 | j_5, m_5 \rangle,$$

умножим его на вектора

$$T_{m_1}^{j_1}(s_1, t_1), T_{m_2}^{j_2}(s_2, t_2), T_{m_3}^{j_3}(s_3, t_3), (-1)^{j_5 - m_5} \bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T}), \quad (2.5.40)$$

подставим формулу для скалярного произведения (2.2.28) базисных векторов (2.2.26) и (2.2.29)

$$\langle j_4, m_4 | j_4, m'_4 \rangle = (-1)^{j_4 - m_4} \bar{T}_{-m_4}^{j_4}(\partial_\sigma, \partial_\tau) T_{m'_4}^{j_4}(\sigma, \tau) \Big|_{\sigma=\tau=0} = \delta_{m_4 m'_4}, \quad (2.5.41)$$

и просуммируем по проекциям $m_1, m_2, m_3, m_4, m'_4, m_5$. В результате, с учетом соотношения (2.4.81):

$$\begin{aligned} & (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{j_1 + j_2 - j_3} (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^{j_1 + j_3 - j_2} (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^{j_2 + j_3 - j_1} = \\ & = \frac{D}{\mu} \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^{j_3 - m_3} T_{m_1}^{j_1}(s_1, t_1) T_{m_2}^{j_2}(s_2, t_2) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \bar{T}_{-m_3}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3), \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

мы получаем (с точностью до нормировки) инвариантный полином по переменным $s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3, \bar{S}, \bar{T}$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12} &= (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} \\ & \times (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma \bar{S} + \tau \bar{T})^{n_{4\sigma}} (s_3 \bar{S} + t_3 \bar{T})^{n_{34}} \Big|_{\sigma=\tau=0}, \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

где $(j_{12} := j_4)$

$$\begin{aligned} n_{12} &= j_1 + j_2 - j_{12}, & n_{1\sigma} &= j_{12} + j_1 - j_2, & n_{2\sigma} &= j_{12} + j_2 - j_1, \\ n_{3\sigma} &= j_{12} + j_3 - j_5, & n_{4\sigma} &= j_5 + j_{12} - j_3, & n_{34} &= j_5 + j_3 - j_{12}. \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

По построению инвариант (2.5.43) является однородным полиномом по парам переменных $(s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3)$ степени $2j_1, 2j_2, 2j_3$, соответственно, то есть при фиксированных \bar{S}, \bar{T} принадлежит $\mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(2)} \otimes \mathcal{V}_{(3)}$, где $\mathcal{V}_{(k)} \equiv \mathcal{V}_{2j_k+1}$ – пространство представления $T^{(j_k)}$. По переменным $(s_1, t_1), (s_2, t_2)$ он имеет те же трансформационные свойства, что и инвариантный полином

$$\mathcal{I} = (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \bar{s} + t_1 \bar{t})^{n_{1\sigma}} (s_2 \bar{s} + t_2 \bar{t})^{n_{2\sigma}},$$

то есть он принадлежит подпространству $\mathcal{V}_{(12)} \subset \mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(2)}$ представления спина j_{12} (так как степень однородности \mathcal{I} по дуальным переменным \bar{s}, \bar{t} равна $2j_{12}$; см. Раздел 2.4.4). Наконец, инвариантный полином (2.5.43) имеет степень $2j_5$ по переменным (\bar{S}, \bar{T}) и поэтому имеет место разложение

$$\mathcal{I}_{12} = N_{12} \sum_{m_5} (-1)^{j_5 - m_5} \bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T}) T_{m_5}^{j_5, j_{12}}(s_1, \dots, t_3) \quad (2.5.45)$$

где $\bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T})$ и $T_{m_5}^{j_5, j_{12}}(s_1, \dots, t_3)$ – нормированные базисные вектора в пространствах $\bar{\mathcal{V}}_{(5)}$ и $\mathcal{V}_{(5)}$, вложенных в $\mathcal{V}_{(12)} \otimes \mathcal{V}_{(3)}$, а N_{12} – нормировочный коэффициент. Он с точностью до знака определяется соотношением

$$(2j_5 + 1) N_{12}^2 = (\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12}) = \mathcal{I}_{12}(\hat{s}_1, \dots, \hat{T}) \cdot \mathcal{I}_{12}(s_1, \dots, \bar{T}) \Big|_{s_i=t_i=\bar{s}=\bar{t}=0}, \quad (2.5.46)$$

где $\hat{s} = \partial_s$, и так далее. Появление множителя $(2j_5 + 1)$ в левой части соотношения (2.5.46) объясняется тем, что вектор (2.5.45) с точностью до фактора N_{12} равен сумме $(2j_5 + 1)$ векторов $(-1)^{j_5 - m_5} \bar{T}_{-m_5}^{j_5} T_{m_5}^{j_5, j_{12}} \in \bar{\mathcal{V}}_{(5)} \otimes \mathcal{V}_{(5)}$, каждый из которых нормирован на единицу.

Аналогично, сворачивая с векторами (2.5.40) тензор

$$\sum_{m_6, m'_6} \langle j_2, m_2; j_3, m_3 | j_6, m_6 \rangle \langle j_6, m_6 | j_6, m'_6 \rangle \langle j_1, m_1; j_6, m'_6 | j_5, m_5 \rangle ,$$

из правой части (2.5.33) и учитывая (2.5.41), сопоставим ему с помощью (2.4.81) инвариантный полином

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{23} &= (s_2 t_3 - t_2 s_3)^{r_{23}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{r_{2\sigma}} (s_3 \partial_\sigma + t_3 \partial_\tau)^{r_{3\sigma}} \\ &\times (s_1 \tau - t_1 \sigma)^{r_{1\sigma}} (\sigma \bar{S} + \tau \bar{T})^{r_{4\sigma}} (s_1 \bar{S} + t_1 \bar{T})^{r_{14}} \Big|_{\sigma=\tau=0} , \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

где ($j_{23} := j_6$)

$$\begin{aligned} r_{23} &= j_2 + j_3 - j_{23} , & r_{2\sigma} &= j_{23} + j_2 - j_3 , & r_{1\sigma} &= j_{23} + j_1 - j_5 , \\ r_{3\sigma} &= j_{23} + j_3 - j_2 , & r_{4\sigma} &= j_5 + j_{23} - j_1 , & r_{14} &= j_5 + j_1 - j_{23} . \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

Точно так же, как и в (2.5.45), полином (2.5.47) раскладывается в виде

$$\mathcal{I}_{23} = N_{23} \sum_{m_5} (-1)^{j_5 - m_5} \bar{T}_{-m_5}^{j_5} (\bar{S}, \bar{T}) T_{m_5}^{j_5, j_{23}} (s_1, \dots, t_3) , \quad (2.5.49)$$

где $\bar{T}_{-m_5}^{j_5} (\bar{S}, \bar{T})$ и $T_{m_5}^{j_5, j_{23}} (s_1, \dots, t_3)$ – нормированные базисные вектора в пространствах $\bar{\mathcal{V}}_{(5)}$ и $\mathcal{V}_{(5)} \subset \mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(23)}$, а нормировочный коэффициент N_{23} вычисляется по формуле, аналогичной (2.5.46):

$$(2j_5 + 1) N_{23}^2 = (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{23}) = \mathcal{I}_{23}(\hat{s}_1, \dots, \hat{T}) \cdot \mathcal{I}_{23}(s_1, \dots, \bar{T}) \Big|_{s_i=t_i=\bar{s}=\bar{T}=0} . \quad (2.5.50)$$

С учетом (2.5.45) и (2.5.49) мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}) &= N_{23} N_{12} \sum_{m_5, m'_5} (-1)^{2j_5 - m_5 - m'_5} (\bar{T}_{-m'_5}^{j_5}, \bar{T}_{-m_5}^{j_5}) (T_{m'_5}^{j_5, j_{23}}, T_{m_5}^{j_5, j_{12}}) = \\ &= N_{23} N_{12} \sum_{m_5} (T_{m_5}^{j_5, j_{23}}, T_{m_5}^{j_5, j_{12}}) , \end{aligned} \quad (2.5.51)$$

с помощью которого, а также учитывая нормировку (2.5.46) и (2.5.50), формула (2.5.36) представляется в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{B'}}{\sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)(2j_5 + 1)}} \sum_{m_5} (T_{m_5}^{j_5, j_{23}}, T_{m_5}^{j_5, j_{12}}) = \\ &= \frac{(-1)^{B'}}{\sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)}} \frac{(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12})}{\sqrt{(\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12})(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{23})}} , \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

причем скалярные произведения $(,)$ в (2.5.51) и (2.5.52) нужно понимать так же, как и в (2.5.46), (2.5.50). Отметим, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} 2j_{12} &= n_{1\sigma} + n_{2\sigma} = n_{3\sigma} + n_{4\sigma} , & 2j_{23} &= r_{1\sigma} + r_{4\sigma} = r_{2\sigma} + r_{3\sigma} , \\ B' &= j_1 + j_2 - j_3 - j_5 = n_{12} - n_{34} = r_{1\sigma} - r_{3\sigma} = r_{2\sigma} - r_{4\sigma} . \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

Поэтому, согласно последней формуле в (2.5.52), с учетом (2.5.43), (2.5.47), 6-*j* символ является функцией от двенадцати параметров (2.5.44) и (2.5.48), которые, впрочем, не являются независимыми.

Для дальнейшего в (2.5.43) и (2.5.47) удобно сделать замену переменных $\bar{S} \rightarrow t_4, \bar{T} \rightarrow -s_4$ и рассматривать полиномы

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12} &= (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} \\ &\times (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}} (s_3 t_4 - t_3 s_4)^{n_{34}} \Big|_{\sigma=\tau=0} , \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{23} &= (s_2 t_3 - t_2 s_3)^{r_{23}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{r_{2\sigma}} (s_3 \partial_\sigma + t_3 \partial_\tau)^{r_{3\sigma}} \\ &\times (\tau s_1 - \sigma t_1)^{r_{1\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{r_{4\sigma}} (s_1 t_4 - t_1 s_4)^{r_{14}} \Big|_{\sigma=\tau=0} . \end{aligned} \quad (2.5.55)$$

Утверждение 2.5.3 Инвариантные вектора (2.5.54) и (2.5.55) нормированы следующим образом:

$$(\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12}) = \mu_{12} \frac{(1 + n_{12} + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})!(1 + n_{34} + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!}{(2j_{12} + 1)}, \quad (2.5.56)$$

$$(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{23}) = \mu_{23} \frac{(1 + r_{23} + r_{2\sigma} + r_{3\sigma})!(1 + r_{14} + r_{1\sigma} + r_{4\sigma})!}{(2j_{23} + 1)}, \quad (2.5.57)$$

где

$$\mu_{12} = n_{12}! n_{1\sigma}! n_{2\sigma}! n_{3\sigma}! n_{4\sigma}! n_{34}!, \quad \mu_{23} = r_{23}! r_{1\sigma}! r_{2\sigma}! r_{3\sigma}! r_{4\sigma}! r_{14}!. \quad (2.5.58)$$

Доказательство. Формула (2.5.57) получается из (2.5.56) соответствующими подстановками, поэтому достаточно вычислить только норму (2.5.56). Запишем по определению

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12}) &= \mathcal{I}_{12}(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_4, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_4) \cdot \mathcal{I}_{12}(s_1, \dots, s_4, t_1, \dots, t_4) = \\ &(\hat{s}_1 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 \hat{s}_2)^{n_{12}} (\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}} (\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}} (\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}} (\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}} (\hat{s}_3 \hat{t}_4 - \hat{t}_3 \hat{s}_4)^{n_{34}} \\ &\times (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}} (s_3 t_4 - t_3 s_4)^{n_{34}}, \end{aligned}$$

где подразумевается, что после вычисления всех производных $\partial_\theta, \partial_\sigma, \hat{s}_1, \hat{t}_1, \dots$, необходимо положить все соответствующие переменные $\theta, \sigma, s_1, t_1, \dots$ равными нулю. Подействуем операторами $(\hat{s}_1 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 \hat{s}_2)^{n_{12}}$ и $(\hat{s}_3 \hat{t}_4 - \hat{t}_3 \hat{s}_4)^{n_{34}}$ на $\mathcal{I}_{12}(s_1, \dots, s_4, t_1, \dots, t_4)$. В соответствии с (2.4.87) получим

$$\begin{aligned} &(\hat{s}_3 \hat{t}_4 - \hat{t}_3 \hat{s}_4)^{n_{34}} (\hat{s}_1 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 \hat{s}_2)^{n_{12}} \cdot \mathcal{I}_{12} = \\ &= \frac{n_{12}! (1 + n_{12} + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})!}{(1 + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})!} \cdot \frac{n_{34}! (1 + n_{34} + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!}{(1 + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!} \\ &\times (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}}. \end{aligned} \quad (2.5.59)$$

Осталось вычислить

$$\begin{aligned} &(\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}} (\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}} (\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}} (\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}} \\ &\times (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}} = \\ &= (\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} \\ &(\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}}. \end{aligned} \quad (2.5.60)$$

Для того, чтобы выполнить дифференцирование в выражении (2.5.60) по $s_1, t_1, \dots, s_4, t_4$, запишем его следующим образом

$$\begin{aligned} &[(\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}}, (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}}] \cdot [(\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}}, (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}}] \cdot \\ &\cdot [(\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}}, (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}}] \cdot [(\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}}, (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}}], \end{aligned}$$

и воспользуемся тождествами

$$[\hat{s}_k \partial_\zeta + \hat{t}_k \partial_\theta, s_k \partial_\sigma + t_k \partial_\tau] = (\partial_\zeta \partial_\sigma + \partial_\theta \partial_\tau), \quad [\zeta \hat{t}_k - \theta \hat{s}_k, \sigma t_k - \tau s_k] = (\zeta \sigma + \theta \tau).$$

Тогда выражение (2.5.60) приводится к виду

$$n_{1\sigma}! n_{2\sigma}! n_{3\sigma}! n_{4\sigma}! \times (\partial_\zeta \partial_\sigma + \partial_\theta \partial_\tau)^{n_{1\sigma} + n_{2\sigma}} (\zeta \sigma + \theta \tau)^{n_{3\sigma} + n_{4\sigma}}, \quad (2.5.61)$$

где согласно (2.5.44) мы имеем $n_{1\sigma} + n_{2\sigma} = n_{3\sigma} + n_{4\sigma} = 2j_{12}$. Наконец, применяя (2.4.88), мы получаем

$$\begin{aligned} &(\partial_\zeta \partial_\sigma + \partial_\theta \partial_\tau)^{n_{1\sigma} + n_{2\sigma}} (\zeta \sigma + \theta \tau)^{n_{3\sigma} + n_{4\sigma}} = (n_{3\sigma} + n_{4\sigma})! (1 + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})! = \\ &= \frac{1}{2j_{12} + 1} (1 + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})! (1 + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!. \end{aligned} \quad (2.5.62)$$

Собирая появившиеся в (2.5.59), (2.5.61), (2.5.62) множители, мы приходим к результату (2.5.56). ■

Подставим выражения (2.5.56), (2.5.57) в (2.5.52), в итоге получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{B'} \Delta(j_1, j_2, j_{12}) \Delta(j_2, j_3, j_{23}) \Delta(j_1, j_{23}, j_5) \Delta(j_{12}, j_3, j_5) \\ &\times \frac{1}{\mu_{12} \mu_{23}} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}) \end{aligned} \quad (2.5.63)$$

где $\Delta(p, q, r)$ — треугольные коэффициенты (2.4.85), а в знаменателе стоят факторы μ_{12} и μ_{23} , явный вид которых дан в (2.5.58). Отметим, что с учетом отождествления $j_4 \equiv j_{12}$, $j_6 \equiv j_{23}$ и замены $j_3 \leftrightarrow j_4$ произведение Δ -факторов в (2.5.63) совпадает с произведением, приведенным в (2.5.22) (см. также [19], формула (108.10)).

Замечание. С точки зрения описания симметрий 6- j символа (2.5.52), (2.5.63) оказывается более полезным представлять его не в терминах шести спинов j_k , а в терминах двенадцати неотрицательных целых параметров, фигурирующих в (2.5.44), (2.5.48). Эти параметры удобно записывать в виде таблицы 3×4 , которая была введена Шелепиным [38] и называется R -символом:

$$\left\| \begin{array}{cccc} n_{34} & r_{23} & r_{14} & n_{12} \\ r_{3\sigma} & n_{3\sigma} & n_{1\sigma} & r_{1\sigma} \\ r_{4\sigma} & n_{2\sigma} & n_{4\sigma} & r_{2\sigma} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \end{array} \right\| = \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{array} \right\}.$$

Например, было показано, что 6- j символ не меняется при произвольной перестановке строк или столбцов в R -символе.

- **Задача 68.** Выписать все композиции перестановок строк и столбцов R -символа, которые соответствуют симметриям тетраэдра 6- j символа (2.5.24) и (2.5.25).
- **Задача 69.** Проверить, что инвариантность R -символа относительно перестановки двух последних столбцов, эквивалентна симметрии 6- j символа [39]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & \frac{1}{2}(j_2 + j_5 + j_4 - j_6) & \frac{1}{2}(j_2 + j_6 + j_4 - j_5) \\ j_3 & \frac{1}{2}(j_2 + j_5 + j_6 - j_4) & \frac{1}{2}(j_6 + j_5 + j_4 - j_2) \end{array} \right\}.$$

- **Задача 70.** Проверить тождества, которые связывают параметры $R_{\alpha p}$:

$$R_{\alpha p} + R_{\beta q} = R_{\alpha q} + R_{\beta p}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; p, q = 1, 2, 3, 4).$$

Найти все соотношения типа $2j_1 = R_{13} + R_{24} = R_{14} + R_{23}$ (см. (2.5.53)), которые выражают спины j_k через коэффициенты $R_{\alpha p}$.

2. Метод производящих функций.

Далее, для вывода явной формулы 6- j символа нам необходимо в выражении (2.5.52) вычислить скалярное произведение $(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12})$. Будем проводить это вычисление с помощью метода производящих функций, который был предложен Ю.Швингером [36].

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{12}(z_{12}, z_{i\sigma}, z_{34}) &= \exp[z_{12}(s_1 t_2 - t_1 s_2) + z_{1\sigma}(s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau) + z_{2\sigma}(s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)] \\ &\times \exp[z_{3\sigma}(\sigma t_3 - \tau s_3) + z_{4\sigma}(\sigma t_4 - \tau s_4) + z_{34}(s_3 t_4 - t_3 s_4)]|_{\sigma, \tau=0}, \end{aligned} \quad (2.5.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{23}(w_{23}, w_{i\sigma}, w_{14}) &= \exp[w_{23}(s_2 t_3 - t_2 s_3) + w_{2\sigma}(s_2 \partial_\zeta + t_2 \partial_\theta) + w_{3\sigma}(s_3 \partial_\zeta + t_3 \partial_\theta)] \\ &\times \exp[w_{1\sigma}(\theta s_1 - \zeta t_1) + w_{4\sigma}(\zeta t_4 - \theta s_4) + w_{14}(s_1 t_4 - t_1 s_4)]|_{\zeta, \theta=0}. \end{aligned}$$

Коэффициенты их разложений по мономам

$$\frac{(z_{12}^{n_{12}} \cdot z_{1\sigma}^{n_{1\sigma}} \cdot z_{2\sigma}^{n_{2\sigma}} \cdot z_{3\sigma}^{n_{3\sigma}} \cdot z_{4\sigma}^{n_{4\sigma}} \cdot z_{34}^{n_{34}})}{n_{12}! n_{1\sigma}! n_{2\sigma}! n_{3\sigma}! n_{4\sigma}! n_{34}!}, \quad \frac{(w_{23}^{r_{23}} \cdot w_{1\sigma}^{r_{1\sigma}} \cdot w_{2\sigma}^{r_{2\sigma}} \cdot w_{3\sigma}^{r_{3\sigma}} \cdot w_{4\sigma}^{r_{4\sigma}} \cdot w_{14}^{r_{14}})}{r_{23}! r_{1\sigma}! r_{2\sigma}! r_{3\sigma}! r_{4\sigma}! r_{14}!}, \quad (2.5.65)$$

совпадают соответственно с векторами \mathcal{I}_{12} и \mathcal{I}_{23} , которые заданы в (2.5.54) и (2.5.55). Отметим, что знаменатели в выражениях (2.5.65) равны коэффициентам μ_{12} и μ_{23} , введенным в (2.5.58). Выполним в (2.5.64) дифференцирование по ζ , θ , σ , τ , воспользовавшись стандартными формулами типа $e^{a\partial_\theta} F(\theta) = F(\theta + a)e^{a\partial_\theta}$. В результате для функций \mathcal{K}_{12} и \mathcal{K}_{23} получаем формулы:

$$\mathcal{K}_{12} = \exp \left[\sum_{p < q} z_{pq}(s_p t_q - t_p s_q) \right], \quad \mathcal{K}_{23} = \exp \left[\sum_{i < j} w_{ij}(s_i t_j - t_i s_j) \right], \quad (2.5.66)$$

где $i, j, p, q = 1, 2, 3, 4$ и наборы переменных таковы:

$$\begin{aligned} z : (z_{12}; z_{13} = z_{1\sigma}z_{3\sigma}; z_{14} = z_{1\sigma}z_{4\sigma}; z_{23} = z_{2\sigma}z_{3\sigma}; z_{24} = z_{2\sigma}z_{4\sigma}; z_{34}), \\ w : (w_{12} = w_{1\sigma}w_{2\sigma}; w_{23}; w_{24} = w_{2\sigma}w_{4\sigma}; w_{13} = w_{1\sigma}w_{3\sigma}; w_{14}; w_{34} = w_{3\sigma}w_{4\sigma}). \end{aligned} \quad (2.5.67)$$

Теперь выражение

$$\frac{1}{\mu_{12} \mu_{23}} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}), \quad (2.5.68)$$

где μ_{12}, μ_{23} определены в (2.5.58), можно представить как коэффициент при мономе

$$(w_{23}^{r_{23}} \cdot w_{1\sigma}^{r_{1\sigma}} \cdot w_{2\sigma}^{r_{2\sigma}} \cdot w_{3\sigma}^{r_{3\sigma}} \cdot w_{4\sigma}^{r_{4\sigma}} \cdot w_{14}^{r_{14}}) \cdot (z_{12}^{n_{12}} \cdot z_{1\sigma}^{n_{1\sigma}} \cdot z_{2\sigma}^{n_{2\sigma}} \cdot z_{3\sigma}^{n_{3\sigma}} \cdot z_{4\sigma}^{n_{4\sigma}} \cdot z_{34}^{n_{34}}), \quad (2.5.69)$$

в разложении производящей функции (2.5.66):

$$\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq}) = \left\{ \exp \left[\sum_{i < j} w_{ij} (\hat{s}_i \hat{t}_j - \hat{t}_i \hat{s}_j) \right] \times \exp \left[\sum_{p < q} z_{pq} (s_p t_q - t_p s_q) \right] \right\}_{s_i = t_i = 0}. \quad (2.5.70)$$

Напомним, что здесь мы используем обозначение $\hat{s}_i = \partial_{s_i}$, $\hat{t}_i = \partial_{t_i}$. Для дальнейшего нам удобно доопределить z_{ij} и w_{ij} при $i > j$ как антисимметричные матрицы $\|w_{ij}\|$ и $\|z_{ij}\|$ с элементами $z_{ij} = -z_{ji}$ и $w_{ij} = -w_{ji}$.

Утверждение 2.5.4 Рассмотрим d -мерный аналог функции (2.5.70), то есть индексы i, j, p, q пробегает значения $\{1, 2, \dots, d\}$, а переменные z_{ij} и w_{ij} определяют антисимметричные d -мерные матрицы $w = \|w_{ij}\|$ и $z = \|z_{ij}\|$. Тогда для d -мерной функции (2.5.70) имеет место детерминантное представление

$$\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq}) = \frac{1}{\det(I_d + w \cdot z)}, \quad (2.5.71)$$

где I_d — единичная d -мерная матрица.

Доказательство. Прежде всего запишем d -мерную функцию $\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq})$, заданную в (2.5.70), как матричный элемент

$$\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq}) = \langle K_w | K_z \rangle, \quad (2.5.72)$$

где

$$|K_z\rangle = \exp \left(\sum_{i,j=1}^d z_{ij} a_i^\dagger b_j^\dagger \right) |0\rangle, \quad \langle K_w| = \langle 0| \exp \left(\sum_{i,j=1}^d w_{ij} a_i b_j \right), \quad (2.5.73)$$

а $\{a_i, a_i^\dagger\}$ и $\{b_j, b_j^\dagger\}$ — два набора независимых операторов рождения и уничтожения для d -мерных осцилляторов (см. раздел 1.2). Воспользуемся условием полноты (1.2.22) для когерентных состояний $|\alpha^*, \beta^*\rangle$ в голоморфном представлении:

$$a_i |\alpha^*, \beta^*\rangle = \alpha_i^* |\alpha^*, \beta^*\rangle, \quad b_j |\alpha^*, \beta^*\rangle = \beta_j^* |\alpha^*, \beta^*\rangle,$$

и перепишем матричный элемент (2.5.72) в виде:

$$\begin{aligned} \langle K_w | K_z \rangle &= \int d\mu(\alpha, \alpha^*) d\mu(\beta, \beta^*) e^{-\alpha_i \alpha_i^* - \beta_j \beta_j^*} \langle K_w | \alpha^*, \beta^* \rangle \langle \alpha, \beta | K_z \rangle = \\ &= \int d\mu(\alpha, \alpha^*) d\mu(\beta, \beta^*) \exp(w_{ij} \alpha_i^* \beta_j^* + z_{ij} \alpha_i \beta_j) \exp[-\alpha_i \alpha_i^* - \beta_j \beta_j^*], \end{aligned} \quad (2.5.74)$$

где мы опустили знаки суммирования по повторяющимся индексам, и мера $d\mu(\alpha, \alpha^*)$ определена в (1.2.15). Гауссов интеграл (2.5.74) можно вычислить, сделав замену переменных интегрирования: $\beta_i \rightarrow \gamma_i + \alpha_k^* w_{ki}$, $\beta_i^* \rightarrow \bar{\gamma}_i + \alpha_k z_{ki}$. В результате получаем

$$\langle K_w | K_z \rangle = \left(\int d\mu(\alpha, \alpha^*) \exp(-\alpha_i^* (\delta_{ij} + w_{ik} z_{kj}) \alpha_j) \right) \left(\int d\mu(\gamma, \bar{\gamma}) e^{-\bar{\gamma}_i \gamma_i} \right), \quad (2.5.75)$$

где первый интеграл по α_i и α_i^* равен $\det^{-1}(I + w z)$, а интеграл по γ_i и $\bar{\gamma}_i$ равен единице. ■

Детерминант, возникший в правой части равенства (2.5.71), может быть вычислен явно. Прежде всего заметим, что для него имеет место тождество

$$\det(I_d + w \cdot z) = \left[\text{Pf} \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} \right]^2, \quad (2.5.76)$$

где Pf — обозначает пфаффиан антисимметричной и четномерной матрицы. Напомним (см. раздел **I-1.2.2** первой части книги), что пфаффиан для любой антисимметричной $2n \times 2n$ матрицы $Z = \|\|Z_{ij}\|\|$ определяется следующим образом (1.3.58)

$$\text{Pf}(Z) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i_1, \dots, i_{2n}} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 \dots i_{2n-1} i_{2n}} Z_{i_1 i_2} Z_{i_3 i_4} \dots Z_{i_{2n-1} i_{2n}}. \quad (2.5.77)$$

Используя это определение, пфаффиан в правой части (2.5.76) записывается в виде

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} = (-1)^{d(d+1)/2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{(d-2k)!} \tilde{w}_{i_1 \dots i_{d-2k}} \cdot \tilde{z}_{i_1 \dots i_{d-2k}} \right), \quad (2.5.78)$$

где $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ — целая часть $\frac{d}{2}$ и выражение

$$\tilde{z}_{i_1 \dots i_{d-2k}} = \frac{1}{2^k k!} \sum_{j_1, \dots, j_{2k}} \varepsilon_{i_1 \dots i_{d-2k} j_1 j_2 j_3 j_4 \dots j_{2k}} (z_{j_1 j_2} z_{j_3 j_4} \dots z_{j_{2k-1} j_{2k}}), \quad (2.5.79)$$

естественно назвать неполным пфаффианом.

- **Задача 71.** ★ Вывести для детерминанта $\det(I_d + w \cdot z)$ тождество (2.5.76) и получить равенство (2.5.78).

Приведем явные выражения для $\det(I_d + w \cdot z)$ для некоторых малых значений d . Подставим (2.5.78) в равенство (2.5.76). Тогда, для $d = 2$ и $d = 3$, то есть для случая 2×2 и 3×3 матриц w и z , мы соответственно получаем

$$\det(I_2 + wz) = [1 - z_{12}w_{12}]^2, \quad \det(I_3 + wz) = \left[1 - \sum_{i < j} z_{ij}w_{ij} \right]^2.$$

Эти формулы легко проверяются прямым вычислением. Для 4×4 матриц мы имеем

$$\det(I_4 + wz) = \left[1 - \sum_{i < j} z_{ij}w_{ij} + \text{Pf}(z) \cdot \text{Pf}(w) \right]^2, \quad (2.5.80)$$

где пфаффиан $\text{Pf}(z)$, согласно его определению (2.5.77), равен

$$\text{Pf}(z) = \frac{1}{8} \varepsilon_{ijklm} z_{ij} z_{km} = (z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{23}z_{14}). \quad (2.5.81)$$

Наконец, для 5×5 матриц w и z мы получаем выражение $\det(I_5 + wz) = \left[1 - \sum_{i < j} z_{ij}w_{ij} + \tilde{z}_\ell \tilde{w}_\ell \right]^2$, где $\tilde{z}_\ell = \frac{1}{8} \varepsilon_{ijklm} z_{ij} z_{km}$. Например, $\tilde{z}_1 = (z_{23}z_{45} - z_{24}z_{35} + z_{34}z_{25})$, сравните с (2.5.81).

3. Явная формула для 6 - j -символа.

Для завершения вычисления 6 - j символов нам необходимо воспользоваться выражением для детерминанта из правой части (2.5.71) в случае $d = 4$. В этом случае, применяя (2.5.80) и (2.5.81), мы для производящей функции (2.5.70) получаем

$$\mathcal{K} = \left[1 - \frac{1}{2} z_{ij}w_{ij} + (z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{23}z_{14})(w_{12}w_{34} - w_{13}w_{24} + w_{23}w_{14}) \right]^{-2}. \quad (2.5.82)$$

Для специальных наборов (2.5.67) переменных z_{ij} и w_{ij} выражение (2.5.82) упрощается, поскольку $z_{13}z_{24} = z_{14}z_{23}$, $w_{12}w_{34} = w_{13}w_{24}$. Имеем поэтому

$$\mathcal{K}(z_{ij}, w_{ij}) = \frac{1}{\left[1 - \left(\sum_{i<j} z_{ij} w_{ij}\right) + z_{12} z_{34} w_{23} w_{14}\right]^2}. \quad (2.5.83)$$

Это и есть окончательное выражение для производящей функции $6j$ -символов. Нас интересует коэффициент при мономе (2.5.69) в разложении функции \mathcal{K} (2.5.83). Запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z_{ij}, w_{ij}) &= \sum_Q (Q+1) \left[\left(\sum_{i<j} z_{ij} w_{ij} \right) - z_{12} z_{34} w_{23} w_{14} \right]^Q \\ &= \sum_Q (Q+1)! \left\{ \frac{1}{Q!} \left[\left(\sum_{i<j} z_{ij} w_{ij} \right) - z_{12} z_{34} w_{23} w_{14} \right]^Q \right\}, \end{aligned} \quad (2.5.84)$$

и разложим функцию, стоящую в фигурных скобках, с помощью обобщенного биномиального разложения:

$$[x_1 + \dots + x_k]^Q = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ a_1 + \dots + a_k = Q}} \frac{Q!}{a_1! \dots a_k!} x_1^{a_1} \dots x_k^{a_k}.$$

Тогда для общего члена разложения в фигурных скобках в (2.5.84) будем иметь

$$(-1)^b \cdot \left(\prod_{i<j} \frac{(w_{ij} z_{ij})^{a_{ij}}}{a_{ij}!} \right) \cdot \frac{(w_{23} w_{14} z_{12} z_{34})^b}{b!},$$

где a_{ij} ($i < j$) и b – целые числа, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{i<j} a_{ij} + b = Q. \quad (2.5.85)$$

Принимая во внимание соответствие (2.5.67), распишем этот общий член явно

$$\begin{aligned} &(-1)^b \cdot \frac{(w_{1\sigma} w_{2\sigma} z_{12})^{a_{12}}}{a_{12}!} \cdot \frac{(w_{1\sigma} w_{3\sigma} z_{1\sigma} z_{3\sigma})^{a_{13}}}{a_{13}!} \cdot \frac{(w_{14} z_{1\sigma} z_{4\sigma})^{a_{14}}}{a_{14}!} \\ &\times \frac{(w_{23} z_{2\sigma} z_{3\sigma})^{a_{23}}}{a_{23}!} \cdot \frac{(w_{2\sigma} w_{4\sigma} z_{2\sigma} z_{4\sigma})^{a_{24}}}{a_{24}!} \cdot \frac{(w_{3\sigma} w_{4\sigma} z_{34})^{a_{34}}}{a_{34}!} \cdot \frac{(w_{23} w_{14} z_{12} z_{34})^b}{b!}. \end{aligned}$$

Сравнивая этот общий член с мономом (2.5.69), и учитывая (2.5.85), мы получаем набор уравнений на параметры a_{ij} , b , для которых, вспоминая (2.5.44) и (2.5.48), находим

$$\begin{aligned} b &= j_1 + j_2 + j_3 + j_5 - Q, \\ a_{12} &= Q - j_3 - j_{12} - j_5, \\ a_{13} &= j_1 + j_3 + j_{12} + j_{23} - Q, \\ a_{14} &= Q - j_2 - j_3 - j_{23}, \\ a_{23} &= Q - j_1 - j_{23} - j_5, \\ a_{24} &= j_2 + j_{12} + j_{23} + j_5 - Q, \\ a_{34} &= Q - j_1 - j_2 - j_{12}. \end{aligned} \quad (2.5.86)$$

Это дает ответ для скалярного произведения (2.5.68)

$$\frac{1}{\mu_{12} \mu_{23}} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}) = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j_5} \sum_Q (-1)^Q \frac{(Q+1)!}{\left(\prod_{i<j} a_{ij}!\right) b!},$$

и соответственно для $6j$ -символа (2.5.63):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{B' + j_1 + j_2 + j_3 + j_5} \Delta(j_1, j_2, j_{12}) \Delta(j_2, j_3, j_{23}) \Delta(j_1, j_{23}, j_5) \Delta(j_3, j_{12}, j_5) \\ &\times \sum_Q (-1)^Q \frac{(Q+1)!}{\left(\prod_{i<j} a_{ij}!\right) b!}. \end{aligned} \quad (2.5.87)$$

Этот ответ с точностью до замены $j_3 \leftrightarrow j_{12}$ (напомним, что $j_{12} = j_4$, $j_{23} = j_6$), $Q \rightarrow k$ и с учетом зафиксированного в (2.5.36) знакового фактора $(-1)^{B'+j_1+j_2+j_3+j_5} = 1$ совпадает с (2.5.22) (см. также [19], формула (108.10)).

Глава 3

Представления простых алгебр Ли. Теория весов

В данной Главе мы будем опираться на результаты, изложенные в работах [5], [6], [7], [8]. Мы также существенно используем материал, представленный в первой части книги в Главе I-5 "Корневые системы и классификация простых алгебр Ли" (разделы I-5.1 и I-5.2).

3.1 Корневые системы простых алгебр Ли

3.1.1 Корневые системы алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$

В этом подразделе мы дадим краткое описание корневых систем алгебр Ли классических серий: $sl(r+1, \mathbb{C})$ (A_r -серия), $so(2r+1, \mathbb{C})$ (B_r -серия), $sp(2r, \mathbb{C})$ (C_r -серия) и $so(2r, \mathbb{C})$ (D_r -серия). Указанные корневые системы представляют значительный интерес сами по себе (подробное изложение корневых систем простых алгебр Ли содержится в разделе I-5.2 первой части книги); кроме того, они понадобятся нам в следующих разделах при изложении примеров, иллюстрирующих общие положения теории весов и теории представлений простых алгебр Ли.

Для простой комплексной алгебры Ли \mathcal{A} ранга r выберем базис Картана - Вейля $\{H_i, E_\alpha\}$ (здесь $i = 1, \dots, r$ и корни $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ - вектора в вещественном r -мерном пространстве \mathfrak{V}_r , которое называется корневым пространством) с определяющими соотношениями:

$$[H_i, H_k] = 0, \quad [H_k, E_\alpha] = \alpha_k E_\alpha, \quad (3.1.1)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha, \beta} \neq 0, \quad \text{если } (\alpha + \beta) - \text{ корень}, \quad (3.1.2)$$
$$[E_\alpha, E_\beta] = 0, \quad \text{если } (\alpha + \beta) - \text{ не корень и } \alpha + \beta \neq 0,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^k H_k, \quad \alpha^k = g^{kj} \alpha_j, \quad (3.1.3)$$

и зафиксируем нормировку образующих H_i подалгебры Картана и корневых образующих E_α так, чтобы метрика Киллинга имела вид

$$g_{kj} = \text{Tr}(\text{ad}(H_k) \cdot \text{ad}(H_j)) = \sum_{\alpha} \alpha_k \alpha_j, \quad (3.1.4)$$

$$\text{Tr}(\text{ad}(H_k) \cdot \text{ad}(E_\alpha)) = 0, \quad \text{Tr}(\text{ad}(E_\alpha) \cdot \text{ad}(E_\beta)) = \delta_{\alpha, -\beta}. \quad (3.1.5)$$

Во второй формуле (3.1.3) элементы g^{jk} образуют матрицу, обратную к $\|g_{jk}\|$, а в (3.1.4) сумма идет по всем корням α алгебры Ли \mathcal{A} . С помощью матриц $\|g^{jk}\|$ и $\|g_{jk}\|$ мы можем поднимать и опускать индексы у компонент векторов из корневого пространства \mathfrak{V}_r .

Отметим, что базис $\{H_k\}$ подалгебры Картана в простой комплексной алгебре \mathcal{A} всегда можно выбрать так, чтобы он совпадал с базисом подалгебры Картана в компактной вещественной форме алгебры \mathcal{A} . Если после этого сделать подстановку $H_k \rightarrow i H_k$, то, как показано в первой части книги (см. Замечание 2 в разделе I-5.1.2), в любом конечномерном представлении базисные элементы подалгебры Картана сводятся с помощью преобразования эквивалентности к эрмитовым матрицам. В этом случае корни α – вещественные вектора, и метрика g_{ij} , согласно второму равенству из (3.1.4), определяет евклидову метрику в r -мерном вещественном корневом пространстве \mathfrak{V}_r . Действительно, в этом случае скалярное произведение

$$(x, y) = x^i g_{ij} y^j = x^i y_i \quad (\forall x, y \in \mathfrak{V}_r), \quad (3.1.6)$$

положительно определено, так как мы имеем $(x, x) = (x^i g_{ij} x^j) = \sum_\alpha (x, \alpha)^2 > 0$ для всех ненулевых вещественных векторов x . В дальнейшем мы будем использовать именно такой выбор базисных элементов подалгебры Картана.

Напомним, что если α – корень алгебры Ли \mathcal{A} , то $(-\alpha)$ – также корень этой алгебры. Поэтому (см. раздел I-5.2.2 первой части книги), выбирая некоторый вектор $x \in \mathfrak{V}_r$, такой, что $(x, \alpha) \neq 0$ ($\forall \alpha$), множество всех корней α можно разбить на два подмножества положительных $(x, \alpha) > 0$ и отрицательных $(x, \alpha) < 0$ корней. Положительные корни, которые нельзя разложить в сумму двух положительных корней, называются *простыми*. Число простых корней равно рангу r алгебры \mathcal{A} и они образуют базис в корневом пространстве \mathfrak{V}_r . Все остальные корни α являются линейными комбинациями $\alpha = \sum_i \alpha^{(i)} n_i$ простых корней $\alpha^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) с целыми коэффициентами n_i , причем для положительных и отрицательных α мы соответственно имеем $n_i \geq 0$ и $n_i \leq 0$.

Далее для корневых систем алгебр Ли \mathcal{A} будем использовать стандартное обозначение $\Phi(\mathcal{A})$.

1. Корневая система для алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ (A_r -серия).

Выберем для алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ (A_r -серия) базис Картана–Вейля, состоящий из элементов (см. Раздел I-5.2.3 первой части книги)

$$E_{\alpha^{(ij)}} = e_{ij}, \quad E_{-\alpha^{(ij)}} = e_{ji} \quad (i < j), \quad (3.1.7)$$

$$H_i \equiv e_{ii} - 1/(r+1) \cdot I_{r+1} \quad (i = 1, \dots, r+1), \quad (3.1.8)$$

где $e_{ij} - (r+1) \times (r+1)$ матричные единицы, $I_{r+1} = \sum_i e_{ii}$ – единичная $(r+1)$ -мерная матрица и $\text{Tr}(H_i) = 0$. Элементы H_i подчиняются дополнительному соотношению

$$\sum_{i=1}^{r+1} H_i = 0, \quad (3.1.9)$$

и образуют подалгебру Картана в $sl(r+1, \mathbb{C})$, а $E_{\alpha^{(ij)}}$ и $E_{-\alpha^{(ij)}}$ – корневые образующие. Элементы (3.1.7) и (3.1.8) удовлетворяют коммутационным соотношениям ($k < l$):

$$[H_i, E_{\alpha^{(kl)}}] = \alpha_i^{(kl)} E_{\alpha^{(kl)}}, \quad [H_i, E_{-\alpha^{(kl)}}] = -\alpha_i^{(kl)} E_{-\alpha^{(kl)}}, \quad (3.1.10)$$

где $\alpha_i^{(kl)}$ – компоненты $(r+1)$ -мерных корневых векторов

$$\alpha^{(kl)} = e^{(k)} - e^{(l)} \quad (k, l = 1, \dots, r+1; k < l), \quad (3.1.11)$$

которые записаны в терминах единичных базисных векторов $e^{(k)}$ (имеющих координаты $e_i^{(k)} = \delta_i^k$) в $(r+1)$ -мерном векторном пространстве. Заметим, что все корни (3.1.11) корневой системы алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, ортогональны вектору

$$u = \sum_k e^{(k)} = (1, 1, \dots, 1),$$

и поэтому лежат в r -мерной гиперплоскости P_u , ортогональной вектору u (этот факт, разумеется, не случаен и проистекает из (3.1.9)). Невырожденная евклидова метрика в гиперплоскости P_u определяется следующим образом

$$g_{ij} = \frac{1}{\kappa} \text{Tr}(H_i H_j) = \frac{1}{\kappa} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{(r+1)} \right), \quad (3.1.12)$$

и мы имеем $(\alpha^{(ik)}, \alpha^{(ik)}) = \kappa \cdot |e^{(i)} - e^{(k)}|^2 = 2\kappa$. Масштабный коэффициент κ , который определяется из сравнения формул (3.1.4) и (3.1.12), будет сокращаться во всех дальнейших соотношениях, поэтому для простоты мы можем считать его равным единице. В качестве вектора x , фиксирующего положительные $(\alpha, x) > 0$ и отрицательные $(\alpha, x) < 0$ корни α , выберем вектор $x = (x^1, x^2, \dots, x^{r+1}) \in P_u$, с координатами: $\sum_i x^i = 0$, и $x^i > x^j$, если $i < j$. Таким образом, корни $(e^{(k)} - e^{(l)})$ корневой системы $\Phi(sl(r+1, \mathbb{C}))$ при $k < l$ образуют систему положительных корней $\{\alpha_+^{(kl)}\}$, а при $k > l$ – систему отрицательных корней $\{\alpha_-^{(kl)}\}$:

$$\alpha_+^{(kl)} = (e^{(k)} - e^{(l)}), \quad \alpha_-^{(kl)} = -(e^{(k)} - e^{(l)}), \quad k < l. \quad (3.1.13)$$

В дальнейшем для положительных и отрицательных корней α мы будем писать $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$, соответственно. Из множества всех положительных корней $\alpha_+^{(kl)}$, заданных в (3.1.13), выбирают r независимых положительных корней

$$\alpha^{(i)} = \alpha^{(i, i+1)} = (e^{(i)} - e^{(i+1)}), \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.1.14)$$

которые образуют базис в корневом пространстве $\mathfrak{V}_r = P_u$ и являются *простыми корнями*. Действительно, все корни (3.1.13) записываются в виде линейных комбинаций простых корней (3.1.14) с целочисленными коэффициентами n_i , причем $n_i \geq 0$ для положительных корней $\alpha_+^{(kl)}$ и $n_i \leq 0$ для отрицательных корней $\alpha_-^{(kl)}$.

2. Корневые системы для алгебр $so(2r+1, \mathbb{C})$ (B_r -серия) и $so(2r, \mathbb{C})$ (D_r -серия). Алгебра $so(n, \mathbb{C})$ определяется как множество комплексных $n \times n$ матриц A , удовлетворяющих условию

$$A^\top \eta + \eta A = 0, \quad (3.1.15)$$

где η – симметричная невырожденная вещественная метрика, которую можно привести к некоторому стандартному виду. В первой части книги (см. пункт 6 раздела I-2.2.9) был сделан выбор $\eta = I_n$. Напомним, что любой другой выбор симметричной метрики η приводит к определению алгебры Ли, изоморфной $so(n, \mathbb{C})$. Для изучения весов представлений алгебры Ли $so(n, \mathbb{C})$ удобнее выбрать метрику η в другом виде,

а именно, в виде антидиагональной матрицы, у которой все элементы равны нулю, за исключением элементов, стоящих на побочной диагонали и равных 1:

$$\|\eta_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ij} = \delta_{i,n-j+1}. \quad (3.1.16)$$

Подстановка метрики (3.1.16) в (3.1.15) дает условие

$$A_{ij} = -A_{j'i'}, \quad (3.1.17)$$

где

$$i' = n - i + 1.$$

Соотношение (3.1.17) и определяет матрицы A , составляющие алгебру Ли $so(n, \mathbb{C})$ (здесь и далее мы пишем "алгебра $so(n, \mathbb{C})$ " вместо "алгебра, изоморфная алгебре $so(n, \mathbb{C})$ "). Условие (3.1.17) говорит о том, что матрица A антисимметрична при отражении относительно ее побочной диагонали. Преимущество такого определения алгебры $so(n, \mathbb{C})$ связано с тем, что подалгебра Картана в данной формулировке образована диагональными матрицами

$$H_k = e_{kk} - e_{k'k'}, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right], \quad (3.1.18)$$

при этом корневые образующие базиса Картана–Вейля алгебры $so(n, \mathbb{C})$ имеют вид

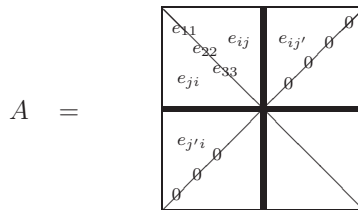
$$E_{ij} = e_{ij} - e_{j'i'}, \quad E_{ij'} = e_{ij'} - e_{j'i}, \quad 1 \leq i < j \leq \left[\frac{n}{2}\right]. \quad (3.1.19)$$

$$E_{ji} = e_{ji} - e_{i'j'}, \quad E_{j'i} = e_{j'i} - e_{i'j}, \quad 1 \leq i < j \leq \left[\frac{n}{2}\right]. \quad (3.1.20)$$

где e_{ij} – $(n \times n)$ матричные единицы и $[y]$ – целая часть числа y . В случае $n = 2r + 1$ к набору (3.1.19), (3.1.20) необходимо добавить дополнительные образующие

$$E_{i,r+1} = e_{i,r+1} - e_{r+1,i'}, \quad E_{r+1,i} = e_{r+1,i} - e_{i',r+1} \quad (i = 1, \dots, r), \quad (3.1.21)$$

которые не попадают в наборы (3.1.19) и (3.1.20). Образующие (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20) и (3.1.21) заполняют всю (с учетом антисимметрии по отношению к побочной диагонали) матрицу образующих A так, как схематично показано на следующем рисунке:



Подчеркнем, что места в матрице A , отмеченные на рисунке двумя жирными линиями, в случае $n = 2r$ отсутствуют, а в случае $n = 2r + 1$ заполнены дополнительными образующими (3.1.21) (за исключением центрального элемента $A_{r+1,r+1} = 0$, лежащего на пересечении главной и побочной диагонали).

Коммутационные соотношения для образующих (3.1.18), (3.1.19) и (3.1.20), определяющие корневые вектора, легко вычисляются, и мы имеем

$$[H_k, E_{ij}] = (e_k^{(i)} - e_k^{(j)}) E_{ij}, \quad [H_k, E_{ij'}] = (e_k^{(i)} + e_k^{(j)}) E_{ij'}, \quad i < j, \quad (3.1.22)$$

$$[H_k, E_{ji}] = -(e_k^{(i)} - e_k^{(j)}) E_{ji}, \quad [H_k, E_{j'i}] = -(e_k^{(i)} + e_k^{(j)}) E_{j'i}, \quad i < j. \quad (3.1.23)$$

где $e^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) – базисные единичные вектора с координатами $e_k^{(i)} = \delta_k^i$ в корневом r -мерном пространстве \mathfrak{A}_r . Кроме этих соотношений в случае $n = 2r + 1$ мы имеем дополнительно

$$[H_k, E_{i,r+1}] = e_k^{(i)} E_{i,r+1}, \quad [H_k, E_{r+1,i}] = -e_k^{(i)} E_{r+1,i} \quad (i = 1, \dots, r). \quad (3.1.24)$$

Таким образом, согласно (3.1.22) и (3.1.23), корни α алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ имеют вид (см. также Раздел I-5.2.3 первой части книги)

$$\alpha = \{ \alpha_{\pm}^{(i,j)} = (e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad -\alpha_{\pm}^{(i,j)} = -(e^{(i)} \pm e^{(j)}) \}, \quad 1 \leq i < j \leq r. \quad (3.1.25)$$

Инвариантная метрика в корневом пространстве \mathfrak{A}_r определяется стандартно:

$$g_{ij} = \frac{1}{2\kappa} \text{Tr}(H_i H_j) = \frac{1}{\kappa} \delta_{ij}, \quad (3.1.26)$$

поэтому длина всех корневых векторов (3.1.25) одинакова и равна $|\alpha_{\pm}^{(i,j)}| = \sqrt{2\kappa}$ (масштабный коэффициент κ для дальнейшего не будет важен). Корни $e^{(i)} \pm e^{(j)}$ ($i < j$) образуют систему положительных корней, а корни $-(e^{(i)} \pm e^{(j)})$ ($i < j$) – систему отрицательных корней. Простые корни, определяющие базис в корневом пространстве алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, выбираются следующим образом:

$$\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)} \quad (i = 1, \dots, r-1), \quad \alpha^{(r)} = e^{(r-1)} + e^{(r)}, \quad (3.1.27)$$

так что все корни (3.1.25) алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ записываются в виде линейной комбинации простых корней (3.1.27) с целочисленными коэффициентами.

Для алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ (B_r -серия) к набору корней (3.1.25) необходимо, согласно (3.1.24), добавить корневые вектора $\pm e^{(k)}$ ($k = 1, \dots, r$). Таким образом, полная корневая система для алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ состоит из векторов (см. Раздел I-5.2.3 первой части книги)

$$\alpha = \{ \pm e^{(k)}, \quad \alpha_{\pm}^{(i,j)} = (e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad -\alpha_{\pm}^{(i,j)} = -(e^{(i)} \pm e^{(j)}) \}, \quad 1 \leq i < j \leq r, \quad (3.1.28)$$

где длина корней (3.1.28) равна $|\alpha_{\pm}^{(i,j)}| = \sqrt{2\kappa}$ и $|e^{(i)}| = \sqrt{\kappa}$ (здесь мы воспользовались той же метрикой (3.1.26); масштабный коэффициент κ для дальнейшего не важен). Простые корни для корневой системы (3.1.28) выбираются в виде

$$\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)} \quad (i = 1, \dots, r-1), \quad \alpha^{(r)} = e^{(r)}, \quad (3.1.29)$$

и все вектора (3.1.28) корневой системы алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ записываются в виде линейной комбинации корней (3.1.29) с целочисленными коэффициентами.

3. Корневая система для алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ (C_r -серия).

Алгебра Ли $sp(2r, \mathbb{C})$ определяется (см. Раздел I-5.2.3 первой части книги) как множество комплексных матриц A , удовлетворяющих тому же условию (3.1.15), но с *антисимметричной* (симплектической) невырожденной вещественной метрикой

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.30)$$

где 0 – обозначает нулевые $(r \times r)$ блоки, а I_r – единичная $(r \times r)$ матрица. Представим матрицу A в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (3.1.31)$$

где X, Y, Z, W – комплексные $r \times r$ матрицы. Тогда условие (3.1.15) с метрикой (3.1.30) дает

$$X = -W^T, \quad Y^T = Y, \quad Z^T = Z, \quad (3.1.32)$$

и базис Картана–Вейля в алгебре $sp(2r, \mathbb{C})$ может быть выбран следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{i,i} - e_{r+i,r+i} &\equiv H_i \quad (i = 1, \dots, r), & e_{i,j} - e_{r+j,r+i} &\equiv X_{ij} \quad (i \neq j = 1, \dots, r), \\ e_{i,r+j} + e_{j,r+i} &\equiv Y_{ij}, & e_{r+i,j} + e_{r+j,i} &\equiv Z_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, r). \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Диагональные элементы H_i ($i = 1, \dots, r$) образуют подалгебру Картана в $sp(2r, \mathbb{C})$.

Пользуясь (3.1.33), получаем коммутационные соотношения, определяющие корневые вектора

$$[H_i, X_{kl}] = (e^{(k)} - e^{(l)})_i X_{kl}, \quad [H_i, Y_{kl}] = (e^{(k)} + e^{(l)})_i Y_{kl}, \quad [H_i, Z_{kl}] = -(e^{(k)} + e^{(l)})_i Z_{kl}, \quad (3.1.34)$$

где как обычно $e_i^{(k)} = \delta_i^k$ – компоненты базисных единичных векторов в r -мерном корневом пространстве. Таким образом, корневая система алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ имеет вид (см. также Раздел I-5.2.3 первой части книги)

$$\pm(e^{(k)} - e^{(l)}) \quad (k < l), \quad \pm(e^{(k)} + e^{(l)}) \quad (k < l), \quad \pm 2e^{(k)}, \quad k, l = 1, \dots, r. \quad (3.1.35)$$

Метрику в корневом пространстве \mathfrak{V}_r зафиксируем следующим образом

$$g_{ij} = \frac{1}{2\kappa} \text{Tr}(H_i H_j) = \frac{1}{\kappa} \delta_{ij}. \quad (3.1.36)$$

При этом корневые вектора (3.1.35) имеют длину: $|(e^{(k)} \pm e^{(l)})| = \sqrt{2\kappa}$ и $|2e^{(k)}| = 2\sqrt{\kappa}$ (масштабный фактор κ , который определяется из сравнения (3.1.36) и (3.1.4) в дальнейшем будет несущественным). Корни

$$(e^{(k)} - e^{(l)}) \quad k < l, \quad (e^{(k)} + e^{(l)}) \quad k \leq l, \quad (3.1.37)$$

считаем положительными. Тогда базис простых корней для корневой системы (3.1.35) фиксируется следующим образом

$$\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)} \quad (i = 1, \dots, r-1), \quad \alpha^{(r)} = 2e^{(r)}. \quad (3.1.38)$$

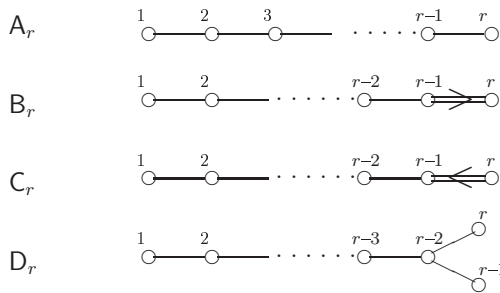
- **Задача 72.** Проверить, что все корни (3.1.35) выражаются в виде линейных комбинаций простых корней (3.1.38) с целочисленными коэффициентами, причем для положительных корней (3.1.37) все целочисленные коэффициенты неотрицательны.

Замечание. Как было показано в разделе I-5.2.4 первой части книги, системы простых корней $\alpha^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) простых алгебр Ли \mathcal{A} ранга r и соответствующие матрицы Картана

$$K_{ij} = 2 \frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2}, \tag{3.1.39}$$

представляются графически (кодируются) в виде диаграмм Дынкина \mathcal{D} (см. Рис.3.1). Вершина диаграммы \mathcal{D} с номером i соответствует простому корню $\alpha^{(i)}$, стрелка $>$ (или $<$) указывает на корень меньшей длины (если вершины соединены одной линией, то соответствующие корни имеют одинаковую длину и стрелка не ставится), а число линий между вершинами i и j равно $(K_{ij} \cdot K_{ji})$.

Алгебры Ли классических серий



Исключительные алгебры Ли

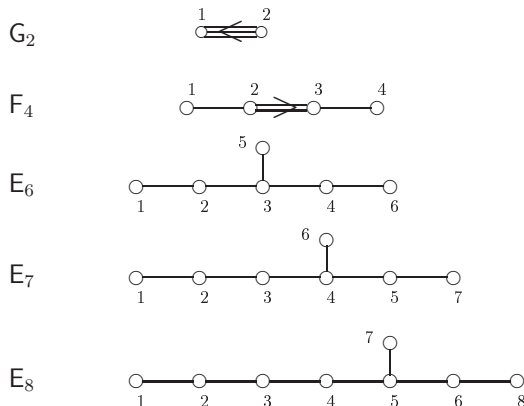


Рис. 3.1: Диаграммы Дынкина для простых конечномерных алгебр Ли.

3.1.2 Корневые системы исключительных алгебр Ли

В данной Главе **3** большинство общих утверждений о корневых системах и о представлениях простых алгебр Ли будут доказываться, как правило, только для алгебр Ли классических серий, которые мы кратко описали в предыдущем подразделе **3.1.1**. Рассмотрение случая исключительных алгебр Ли будет предлагаться читателю в качестве самостоятельной работы. В связи с этим в данном подразделе мы все же даем краткое описание корневых систем исключительных алгебр Ли G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , и E_8 . Более подробное изложение таких корневых систем можно найти в подразделе **I-5.2.5** первой части нашей книги [1] (см. также [2], [9], [3] и [4]).

1. Корневая система алгебры Ли G_2 .

Ранг алгебры Ли G_2 равен двум, а соответствующая диаграмма Дынкина изображена на Рис.3.1. Матрица Картана (3.1.39) строится по этой диаграмме Дынкина и имеет вид

$$\|K_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.40)$$

Корневое двумерное пространство для алгебры G_2 удобно выбрать так же, как и корневое пространство для алгебры $sl(3, \mathbb{C})$, а именно, как гиперплоскость P_u в трехмерном евклидовом пространстве, которая перпендикулярна вектору $u = e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} = (1, 1, 1)$. Зафиксируем короткий простой корень из корневой системы $\Phi(G_2)$ алгебры G_2 следующим образом: $\alpha^{(1)} = (e^{(1)} - e^{(2)})$. Второй простой корень для G_2 мы будем искать в виде вектора

$$\alpha^{(2)} = \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(2)} - (\beta_1 + \beta_2) e^{(3)} \in P_u.$$

Пользуясь явным видом матрицы Картана (3.1.40) и условием $(\alpha^{(1)})^2 = 2$, мы получаем, что вектор $\alpha^{(2)}$ должен удовлетворять двум соотношениям: $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) = -3$ и $(\alpha^{(2)})^2 = 6$, которые дают уравнения на коэффициенты β_1, β_2 :

$$\beta_2 = \beta_1 + 3, \quad \beta_1^2 + 3\beta_1 + 2 = 0.$$

Эти уравнения имеют два решения ($\beta_1 = -2, \beta_2 = 1$) и ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 2$) и определяют две эквивалентные (относительно зеркального преобразования; см. подраздел **I-5.2.5** первой части книги [1]) корневые системы. Выбирая первое решение, мы получаем в качестве базиса простых корней алгебры G_2 :

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}, \quad \alpha^{(2)} = -2e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}. \quad (3.1.41)$$

Все 12 корней корневой системы $\Phi(G_2)$ получаются из (3.1.41) стандартным образом (например, как допустимые целочисленные суммы простых корней (3.1.41)) и представимы в виде

$$\Phi(G_2) = \{\pm(e^{(j)} - e^{(k)}), \pm(3e^{(i)} - e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)})\}, \quad (3.1.42)$$

где $1 \leq j < k \leq 3$ и $i = 1, 2, 3$. Размерность алгебры G_2 равна $\dim(\Phi(G_2)) + 2 = 14$.

2. Корневая система алгебры Ли F_4 .

Матрица Картана (3.1.39) для алгебры F_4 строится по ее диаграмме Дынкина (см. Рис.3.1) и имеет вид

$$\|K_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.43)$$

Заметим, что стирание вершины 4 в диаграмме F_4 дает нам диаграмму B_3 (см. Рис.3.1) для алгебры $so(7, \mathbb{C})$. Поэтому, алгебра $so(7, \mathbb{C})$ является подалгеброй в F_4 , и корневая система $\Phi(F_4)$ содержит в себе (как подсистему) корневую систему $\Phi(so(7, \mathbb{C}))$, которая определена в (3.1.28) и (3.1.29) при $r = 3$. Берем в качестве первых трех простых корней алгебры F_4 простые корни алгебры $so(7, \mathbb{C})$:

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}, \quad \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)}, \quad \alpha^{(3)} = e^{(3)},$$

и ищем четвертый простой корень алгебры F_4 в виде вектора $\alpha^{(4)} = \sum_{i=1}^4 a_i e^{(i)} \in \mathbb{R}^4$, который должен удовлетворять соотношениям (согласно виду матрицы Картана (3.1.43)):

$$(\alpha^{(i)}, \alpha^{(4)}) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (\alpha^{(4)})^2 = 1, \quad K_{34} = -1 \Rightarrow (\alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}) = -1/2.$$

Отсюда мы получаем $a_1 = a_2 = a_3 = -1/2$, $a_4 = \pm 1/2$ и, постулируя в последнем равенстве знак "+" (знак "-" дает зеркальную относительно плоскости $P_{e^{(4)}}$ систему $\Phi(F_4)$), окончательно фиксируем простые корни алгебры F_4 :

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= e^{(1)} - e^{(2)}, \quad \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)}, \quad \alpha^{(3)} = e^{(3)}, \\ \alpha^{(4)} &= \frac{1}{2} (-e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)} + e^{(4)}). \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Вся корневая система $\Phi(F_4)$ состоит из корней (3.1.28) при $r = 3$ системы $\Phi(so(7, \mathbb{C}))$ и корневых векторов, содержащих простой корень $\alpha^{(4)}$. В итоге, полная корневая система алгебры F_4 имеет вид (см. подраздел I-5.2.5 в [1])

$$\Phi(F_4) = \left\{ \pm e^{(i)}; \pm e^{(i)} \pm e^{(j)} \quad (i \neq j); \frac{1}{2} (\pm e^{(1)} \pm e^{(2)} \pm e^{(3)} \pm e^{(4)}) \right\}, \quad (3.1.45)$$

где $i, j = 1, 2, 3, 4$ и знаки \pm могут выбираться независимо. Таким образом, с учетом размерности подалгебры Картана, равной 4, размерность алгебры F_4 равна: $\dim(\Phi(F_4)) + 4 = (8 + 24 + 2^4) + 4 = 52$.

3. Корневая система алгебры Ли E_6 .

Матрица Картана алгебры E_6 определяется по ее диаграмме Дынкина (см. Рис.3.1) и имеет вид

$$\|K_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.46)$$

Заметим, что, так же как и в предыдущем случае, стирание вершины 6 в диаграмме E_6 на Рис.3.1 дает нам диаграмму D_5 для алгебры $so(10, \mathbb{C})$, изображенную на Рис.3.1. Поэтому, алгебра $so(10, \mathbb{C})$ является подалгеброй в E_6 , и корневая система $\Phi(E_6)$ содержит в себе подсистему $\Phi(so(10, \mathbb{C}))$, которая определена в (3.1.25) и (3.1.27) для $r = 5$. В качестве первых пяти простых корней алгебры E_6 мы возьмем простые корни (3.1.27) для $so(10, \mathbb{C})$ и добавим к ним шестой корень $\alpha^{(6)} = \sum_{i=1}^6 a_i e^{(i)}$, который должен удовлетворять, согласно виду (3.1.46) матрицы Картана, уравнениям

$(\alpha^{(6)}, \alpha^{(i)}) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 5$), $(\alpha^{(6)}, \alpha^{(4)}) = -1$ и $(\alpha^{(6)})^2 = 2$. В результате (выбрав одно из двух решений для $\alpha^{(6)}$) мы получаем следующие простые корни для алгебры \mathbf{E}_6 :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= e^{(i)} - e^{(i+1)} \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \alpha_5 = e^{(4)} + e^{(5)}, \\ \alpha_6 &= -\frac{e'}{2} + e^{(5)} + \beta e^{(6)}, \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

где $e' = \sum_{i=1}^6 e^{(i)}$ и $\beta = (1 + \sqrt{3})/2$. Окончательно, вся система корней $\Phi(\mathbf{E}_6)$ имеет вид (см. подраздел **I-5.2.5** первой части книги):

$$\left\{ \pm(e^{(i)} - e^{(j)}); \pm(e^{(i)} + e^{(j)}); \pm\left(\frac{e'}{2} + (\beta - 1)e^{(6)} - e^{(i)} - e^{(j)}\right); \right. \\ \left. \pm\left(\frac{e'}{2} + (\beta - 1)e^{(6)}\right); \pm\left(-\frac{e'}{2} + e^{(i)} + \beta e^{(6)}\right) \right\}, \quad 1 \leq i < j \leq 5, \quad (3.1.48)$$

Число всех корней (3.1.48) алгебры \mathbf{E}_6 равно $\dim(\Phi(\mathbf{E}_6)) = 2(3C_5^2 + 1 + 5) = 72$, где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Поэтому $\dim(\mathbf{E}_6) = \dim(\Phi(\mathbf{E}_6)) + \text{rank}(\mathbf{E}_6) = 78$.

4. Корневые системы алгебр Ли \mathbf{E}_7 и \mathbf{E}_8 .

Сначала мы построим корневую систему $\Phi(\mathbf{E}_8)$, а затем покажем, как можно получить корневую систему $\Phi(\mathbf{E}_7)$ из корневой системы $\Phi(\mathbf{E}_8)$. Найдем простые корни алгебры \mathbf{E}_8 . Стирание вершины 8 в диаграмме \mathbf{E}_8 на Рис.3.1 дает нам диаграмму \mathbf{D}_7 (см. Рис.3.1) для алгебры $so(14, \mathbb{C})$. Поэтому естественно выбрать в качестве первых семи простых корней $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(7)}$ алгебры \mathbf{E}_8 простые корни (3.1.27) для $so(14, \mathbb{C})$: $\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)}$, ($i = 1, \dots, 6$) и $\alpha^{(7)} = e^{(6)} + e^{(7)}$. Как обычно, будем искать оставшийся простой корень в виде $\alpha^{(8)} = \sum_{i=1}^8 a_i e^{(i)}$. Матрица Картана для \mathbf{E}_8 , которая фиксируется диаграммой Дынкина Рис.3.1, имеет вид

$$\|K_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.49)$$

Отметим, что матрица Картана (3.1.46) для \mathbf{E}_6 получается из матрицы (3.1.49), если в ней удалить два первых столбца и две первые строки. Коэффициенты K_{i8} матрицы (3.1.49) диктуют нам следующие условия на корень $\alpha^{(8)}$:

$$(\alpha^{(i)}, \alpha^{(8)}) = 0 \quad (i = 1, \dots, 5, 7), \quad (\alpha^{(6)}, \alpha^{(8)}) = -1, \quad (\alpha^{(8)})^2 = 2, \quad (3.1.50)$$

которые приводят к уравнениям на коэффициенты a_i :

$$a_1 = \dots = a_6 \equiv a, \quad a_6 = -a_7, \quad a_6 - a_7 = -1, \quad 7a^2 + a_8^2 = 2.$$

Эти уравнения имеют два решения: $a_i = -1/2$ для ($i = 1, \dots, 6$), $a_7 = 1/2$ и $a_8 = \pm 1/2$. Обычно выбирают $a_8 = +1/2$ [3, 4]. Выбор $a_8 = -1/2$ эквивалентен зеркальному отражению корневой системы $\Phi(\mathbf{E}_8)$ относительно гиперплоскости, перпендикулярной

вектору $e^{(8)}$. Итак, простые корни для алгебры E_8 имеют вид:

$$\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)} \quad (i = 1, \dots, 6), \quad \alpha^{(7)} = e^{(6)} + e^{(7)}, \quad (3.1.51)$$

$$\alpha^{(8)} = \frac{1}{2} [-(e^{(1)} + \dots + e^{(6)}) + (e^{(7)} + e^{(8)})] = -\frac{e}{2} + e^{(7)} + e^{(8)},$$

где $e = \sum_{i=1}^8 e^{(i)}$. Далее, составляя по определенным правилам (см. раздел **I-5.2.5** в первой части книги) целочисленные комбинации простого корня $\alpha^{(8)}$ из (3.1.51) и корней (3.1.25) алгебры $so(14, \mathbb{C})$, можно построить всю корневую систему $\Phi(E_8)$:

$$\Phi(E_8) = \left\{ \pm(e^{(i)} - e^{(j)}); \pm(e^{(i)} + e^{(j)}); \pm\frac{e}{2}; \pm\left(\frac{e}{2} - (e^{(i)} + e^{(j)})\right); \left(\frac{e}{2} - (e^{(n)} + e^{(s)} + e^{(k)} + e^{(l)})\right) \right\}, \quad 1 \leq i < j \leq 8, \quad 1 \leq n < s < k < l \leq 8. \quad (3.1.52)$$

Число всех корней (3.1.52) алгебры E_8 равно:

$$\dim(\Phi(E_8)) = 2(C_8^2 + C_8^2 + 1 + C_8^2) + C_8^4 = 2(3 \cdot 28 + 1) + 70 = 240,$$

и поэтому $\dim(E_8) = 240 + \text{rank}(E_8) = 248$.

Перейдем теперь к построению корневой системы $\Phi(E_7)$. Заметим, что диаграмма Дынкина E_7 получается удалением вершины 1 в диаграмме Дынкина E_8 (см. Рис.3.1). Удалим простой корень $\alpha^{(1)}$, который соответствует вершине 1, из набора (3.1.51), в результате получаем набор простых корней для алгебры E_7 :

$$\alpha^{(i)} = e^{(i+1)} - e^{(i+2)}, \quad \alpha^{(6)} = e^{(6)} + e^{(7)}, \quad \alpha^{(7)} = -\frac{e}{2} + e^{(7)} + e^{(8)}, \quad (3.1.53)$$

где $i = 1, \dots, 5$ и $e = \sum_{k=1}^8 e^{(k)}$. В данном случае простые корни алгебры E_7 вложены в восьмимерное пространство \mathbb{R}^8 и принадлежат семимерной гиперплоскости V , перпендикулярной вектору $v = e^{(1)} + e^{(8)}$. Теперь можно воспользоваться замечательным утверждением $\Phi(E_7) = \Phi(E_8) \cap V$ (см. [4]) или действовать так же, как и в случае алгебры E_8 , и построить всю корневую систему $\Phi(E_7) \subset \mathbb{R}^8$ из простых корней (3.1.53) (см. раздел **I-5.2.5** в первой части книги). В результате получаем:

$$\Phi(E_7) = \left\{ \pm(e^{(8)} - e^{(1)}); \pm(e^{(i)} - e^{(j)}), \pm(e^{(i)} + e^{(j)}), \quad 2 \leq i < j \leq 7; \pm\left(\frac{e}{2} - e^{(k)} - e^{(8)}\right), \pm\left(\frac{e}{2} - e^{(1)} - e^{(k)}\right), \quad k = 2, \dots, 7; \pm\left(\frac{e}{2} - (e^{(i)} + e^{(j)} + e^{(k)} + e^{(8)})\right), \quad 2 \leq i < j < k \leq 7 \right\}. \quad (3.1.54)$$

Согласно (3.1.54) полное число корней алгебры E_7 равно

$$\dim(\Phi(E_7)) = 2(C_6^2 + C_6^2 + 1 + 6 + 6 + C_6^3) = 2(2 \cdot 15 + 1 + 12 + 20) = 126.$$

Добавляя к $\dim(\Phi(E_7))$ ранг алгебры E_7 , мы получаем, что размерность всей алгебры E_7 равна $\dim(E_7) = 126 + 7 = 133$.

- *Задача 73. Показать, что, удаляя корень $\alpha^{(1)}$ из набора (3.1.53) простых корней алгебры E_7 , мы получаем набор простых корней алгебры E_6 :*

$$\alpha^{(i)} = e^{(i+2)} - e^{(i+3)}, \quad \alpha^{(5)} = e^{(6)} + e^{(7)}, \quad \alpha^{(6)} = -\frac{e}{2} + e^{(7)} + e^{(8)}, \quad (3.1.55)$$

где $i = 1, \dots, 4$. Выделить корневую систему $\Phi(E_6)$ из корневой системы $\Phi(E_7)$, воспользовавшись утверждением $\Phi(E_6) = \Phi(E_7) \cap V'$ (см. [4]), где $V' \subset \mathbb{R}^8$ — векторное пространство, ортогональное векторам $v = e^{(1)} + e^{(8)}$ и $v' = e^{(1)} + e^{(2)} + 2e^{(8)}$.

3.1.3 Группа Вейля. Дуальные корневые системы

1. Группа Вейля.

Рассмотрим систему $\Phi(\mathcal{A})$ всех корней простой алгебры Ли \mathcal{A} . Для двух векторов α, β из корневого пространства \mathfrak{V}_r определим отражение вектора β относительно плоскости P_α , перпендикулярной вектору α :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha. \quad (3.1.56)$$

Для двух корней $\alpha, \beta \in \Phi(\mathcal{A})$, согласно общей теории (см. раздел **I-5.2.1** первой части книги), коэффициент $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ в (3.1.56) является целым числом, и отраженный корень $\sigma_\alpha(\beta)$ снова принадлежит $\Phi(\mathcal{A})$. Таким образом, корневая система $\Phi(\mathcal{A})$ остается инвариантной относительно всех отражений (3.1.56), а операторы σ_α , где $\alpha \in \Phi(\mathcal{A})$, называются отражениями Вейля и порождают группу W . Так как корневая система конечна, то группа W тоже конечна.

Определение 3.1.1. *Группа W , которая порождается всеми отражениями (3.1.56), где $\alpha \in \Phi(\mathcal{A})$, называется группой Вейля.*

Гиперплоскости P_α , перпендикулярные корням α , делят r -мерное корневое пространство \mathfrak{V}_r на неперекрывающиеся конусы, каждый из которых называется **камерой Вейля**. Группа W переводит одну камеру Вейля в другую и, следовательно, W действует на множестве камер Вейля, причем это действие транзитивно; последнее свойство — Следствие к Утверждению **3.4.3**.

- **Задача 74.** Доказать, что для отражений (3.1.56) справедливо тождество

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_{\sigma_\alpha(\beta)}.$$

Ниже мы докажем, что вся группа Вейля W порождается отражениями $\sigma_i := \sigma_{\alpha^{(i)}}$, где $\alpha^{(i)}$ — простые корни. Это можно пояснить следующим образом. Из формул $\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_{\sigma_\alpha(\beta)}$ и определения **3.1.1** следует, что группа W содержит все отражения σ_α , где вектора α получены всевозможными отражениями простых корней $\alpha^{(j)}$:

$$\alpha = \sigma_{i_1} \cdot \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_k}(\alpha^{(i)}), \quad (3.1.57)$$

причем эти вектора образуют всю корневую систему $\Phi(\mathcal{A})$ (а не ее часть), иначе алгебра \mathcal{A} не была бы простой. Последний факт не очевиден, поэтому ниже мы дадим другое доказательство полноты системы образующих σ_i , основанное на явном представлении группы W как группы преобразований в корневом пространстве \mathfrak{V}_r .

Утверждение 3.1.1. *Группа Вейля W корневой системы $\Phi(\mathcal{A})$ порождается отражениями $\sigma_i := \sigma_{\alpha^{(i)}}$, связанными с простыми корнями $\alpha^{(i)}$ алгебры \mathcal{A} . Образующие σ_i группы Вейля W удовлетворяют следующим структурным соотношениям*

$$\sigma_i^2 = e, \quad (\sigma_i \cdot \sigma_j)^{m_{ij}} = e, \quad (3.1.58)$$

где e — единичный элемент в W , а показатели m_{ij} определяются по диаграмме Дынкина \mathcal{D} алгебры \mathcal{A} (см. Рис.3.1): если вершины $\alpha^{(i)}$ и $\alpha^{(j)}$ диаграммы \mathcal{D} соединены $0, 1, 2, 3$ линиями, то $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$, соответственно.

Доказательство. Доказательство будет проведено только для алгебр Ли классических серий (рассмотрение случая исключительных алгебр Ли мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения).

1.) Начнем с рассмотрения группы Вейля для корневой системы $\Phi(\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}))$. Любой вектор μ корневого пространства $P_u \subset \mathbb{R}^{r+1}$ алгебры $\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$ (A_r -серия; см. Пункт **1** предыдущего подраздела **3.1.1**) можно разложить по базисным векторам $e^{(s)} \in \mathbb{R}^{r+1}$:

$$\mu = \sum_{s=1}^{r+1} m_s e^{(s)}, \quad (\mu, u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{s=1}^{r+1} m_s = 0. \quad (3.1.59)$$

Пользуясь формулой (3.1.56) и выражением (3.1.11) для корней $\alpha^{(ik)} \in \Phi(\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}))$, найдем отраженный вектор

$$\sigma_{\alpha^{(ik)}}(\mu) = \mu - (m_i - m_k)(e^{(i)} - e^{(k)}) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k, i}}^{r+1} m_s e^{(s)} + m_k e^{(i)} + m_i e^{(k)}. \quad (3.1.60)$$

Из сравнения (3.1.59) и (3.1.60) следует, что у векторов μ и $\sigma_{\alpha^{(ik)}}(\mu)$ координаты m_i и m_k поменялись местами и, следовательно, группа W , порожденная отражениями $\sigma_{\alpha^{(ik)}}$, изоморфна группе всех перестановок S_{r+1} компонент m_i вектора μ из (3.1.59). В силу (3.1.60) отражения $\sigma_i = \sigma_{\alpha^{(i)}}$ ($i = 1, \dots, r$), связанные с простыми корнями $\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)}$, являются соседними транспозициями

$$\sigma_i \cdot (m_1, \dots, m_i, m_{i+1}, \dots, m_{r+1}) = (m_1, \dots, m_{i+1}, m_i, \dots, m_{r+1}). \quad (3.1.61)$$

Соседние транспозиции σ_i порождают всю группу $W = S_{r+1}$ (см. раздел **I-1.1.4** в первой части книги) и называются **образующими Кокстера**. Определяющие соотношения для группы S_{r+1} в терминах образующих σ_i следуют из представления (3.1.61) и имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i &= \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, r-1), \\ \sigma_i \cdot \sigma_j &= \sigma_j \cdot \sigma_i, \quad (|i-j| > 1), \quad \sigma_i^2 = e, \quad (i = 1, \dots, r), \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

где e — тождественная перестановка. Соотношения (3.1.62) совпадают с соотношениями (3.1.58), записанными для случая алгебр Ли A_r -серии.

2.) Корневая система алгебры $\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$ (B_r -серия) состоит из корневых векторов (3.1.28) (см. пункт **2** в предыдущем подразделе **3.1.1**). Любой вектор μ в r -мерном корневом пространстве $\mathfrak{V}_r = \mathbb{R}^r$ разлагается по базисным векторам $e^{(s)}$:

$$\mu = \sum_{s=1}^r m_s e^{(s)} \in \mathfrak{V}_r. \quad (3.1.63)$$

Действие (3.1.56) на этот вектор элементов $\sigma_\alpha \in W$, соответствующих корням $\alpha = (e^{(i)} - e^{(k)}) \in \Phi(\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C}))$ определяется формулой, аналогичной (3.1.60), а для других корней $\{\pm(e^{(i)} + e^{(k)}), \pm e^{(i)}\} \in \Phi(\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C}))$ мы имеем

$$\sigma_{\pm(e^{(i)}+e^{(k)})}(\mu) = \mu - (m_i + m_k)(e^{(i)} + e^{(k)}) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k, i}}^r m_s e^{(s)} - m_k e^{(i)} - m_i e^{(k)}, \quad (3.1.64)$$

$$\sigma_{\pm e^{(i)}}(\mu) = \mu - 2\mathbf{m}_i e^{(i)} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^r \mathbf{m}_s e^{(s)} - \mathbf{m}_i e^{(i)}, \quad (3.1.65)$$

Таким образом, группа Вейля W алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$, изоморфна расширению группы S_r всех перестановок компонент \mathbf{m}_i за счет добавления к S_r операций, производящих любое число изменений знаков у \mathbf{m}_i . Отражения $\sigma_i = \sigma_{\alpha^{(i)}}$, соответствующие первым $(r-1)$ простым корням $\alpha^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i+1)}$, переставляют соседние координаты \mathbf{m}_i и \mathbf{m}_{i+1} у вектора μ :

$$\sigma_i \cdot (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+1}, \dots, \mathbf{m}_r) = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{i+1}, \mathbf{m}_i, \dots, \mathbf{m}_r), \quad (3.1.66)$$

$$i = 1, \dots, r-1,$$

и, таким образом, порождают подгруппу $S_r \subset W$, а отражение $\sigma_r := \sigma_{\alpha^{(r)}}$, соответствующее последнему простому корню $\alpha^{(r)} = e^{(r)}$, согласно формуле (3.1.65) меняет знак у последней компоненты \mathbf{m}_r :

$$\sigma_r \cdot (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{r-1}, \mathbf{m}_r) = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{r-1}, -\mathbf{m}_r), \quad (3.1.67)$$

что позволяет вместе с преобразованиями (3.1.66) поменять знаки у любого числа компонент вектора μ . Таким образом, образующие σ_i , соответствующие всем простым корням алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$, действительно порождают полную группу Вейля W этой алгебры. Структурные соотношения группы W в терминах образующих σ_i вытекают из представлений (3.1.66) и (3.1.67), и даются формулами (3.1.62) для первых $(r-1)$ образующих σ_i ($i = 1, \dots, r-1$) и соотношениями

$$\sigma_r \cdot \sigma_{r-1} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_{r-1} = \sigma_{r-1} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_{r-1} \cdot \sigma_r, \quad \sigma_r^2 = e, \quad (3.1.68)$$

для последней образующей $\sigma_r \in W$. Соотношения (3.1.68) и (3.1.62) для образующих σ_i ($i = 1, \dots, r-1$) совпадают с равенствами (3.1.58), записанными для случая алгебр Ли \mathbf{B}_r -серии.

3.) Корневая система алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ (\mathbf{C}_r -серия) состоит из векторов (3.1.35) (см. пункт **3** в подразделе **3.1.1**). Сравнивая корневые системы $\Phi(so(2r+1, \mathbb{C}))$ и $\Phi(sp(2r, \mathbb{C}))$, мы заключаем, что действие на вектор (3.1.63) отражений σ_α , которые соответствуют корням $\alpha = \pm(e^{(i)} \pm e^{(k)}) \in \Phi(sp(2r, \mathbb{C}))$, дают преобразования компонент \mathbf{m}_i вектора μ , аналогичные (3.1.60) и (3.1.64), а преобразования σ_α из (3.1.56), которые соответствуют корням $\alpha = \pm 2e^{(i)}$, совпадают с преобразованиями (3.1.65). Таким образом, группа Вейля W для алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ (\mathbf{C}_r -серия) изоморфна группе Вейля W для алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ (\mathbf{B}_r -серия). Образующие $\sigma_i = \sigma_{\alpha^{(i)}}$, соответствующие простым корням (3.1.38), действуют на вектор μ так же, как и в предыдущем случае, согласно формулам (3.1.66), (3.1.67), и также порождают всю группу Вейля W алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$. Структурные соотношения для образующих σ_i те же, что и в случае алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ и могут быть записаны в виде (3.1.58) для случая алгебр Ли \mathbf{C}_r -серии.

4.) Корневая система алгебр $so(2r, \mathbb{C})$ (\mathbf{D}_r -серия) дана в (3.1.25) (см. пункт **2** в подразделе **3.1.1**). Группа W в случае алгебр $so(2r, \mathbb{C})$ состоит из отражений σ_α , заданных в (3.1.56). Для корней $\alpha = (e^{(i)} - e^{(k)}) \in \Phi(so(2r, \mathbb{C}))$ отражение вектора μ из (3.1.63) определяется формулой, аналогичной (3.1.60), а для корней $\alpha = \pm(e^{(i)} + e^{(k)}) \in$

$\Phi(\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C}))$ эти отражения записываются в виде (3.1.64). Таким образом, группа Вейля W состоит из всех перестановок компонент \mathfrak{m}_i , а также из преобразований, при которых у четного числа компонент \mathfrak{m}_i меняются знаки. Отражения $\sigma_i = \sigma_{\alpha^{(i)}}$, где $\alpha^{(i)}$ простые корни (3.1.27) алгебры $\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$, для $i = 1, \dots, (r-1)$ соответствуют соседним транспозициям (3.1.66) и порождают подгруппу $S_r \subset W$, а отражение $\sigma_r := \sigma_{\alpha^{(r)}}$, соответствующее последнему простому корню $\alpha^{(r)} = e^{(r-1)} + e^{(r)}$, согласно формуле (3.1.64) представляется в виде:

$$\sigma_r \cdot (\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{r-2}, \mathfrak{m}_{r-1}, \mathfrak{m}_r) = (\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{r-2}, -\mathfrak{m}_{r-1}, -\mathfrak{m}_r), \quad (3.1.69)$$

что позволяет вместе с транспозициями (3.1.66) поменять знаки у любого четного числа компонент \mathfrak{m}_i . Поэтому, образующие σ_i , соответствующие простым корням, порождают всю группу Вейля W алгебры $\mathfrak{so}(2r, \mathbb{C})$. Структурные соотношения для образующих σ_i вытекают из представлений (3.1.66) и (3.1.69), и даются формулами (3.1.62) для образующих σ_i ($i = 1, \dots, r-1$) и соотношениями

$$\sigma_r \cdot \sigma_{r-1} = \sigma_{r-1} \cdot \sigma_r, \quad \sigma_r \cdot \sigma_{r-2} \cdot \sigma_r = \sigma_{r-2} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_{r-2}, \quad \sigma_r^2 = e, \quad (3.1.70)$$

для последней образующей $\sigma_r \in W$. Соотношения (3.1.70) и (3.1.62) для образующих σ_i ($i = 1, \dots, r-1$) совпадают с равенствами (3.1.58), записанными для случая алгебр Ли D_r -серии. ■

Утверждение 3.1.2. *Отражение $\sigma_{\alpha^{(i)}}$, действующее на корни α согласно формуле (3.1.56):*

$$\alpha \rightarrow \sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} \alpha^{(i)}, \quad (3.1.71)$$

переставляет между собой положительные корни α , не равные простому корню $\alpha^{(i)}$, а для $\alpha = \alpha^{(i)}$ мы имеем $\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha^{(i)}) = -\alpha^{(i)}$.

Доказательство. Пусть корень $\alpha = \sum_{j=1}^r m_j \alpha^{(j)}$ – положителен. Тогда из (3.1.71) мы получаем

$$\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha) = \left(m_i - \frac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} \right) \alpha^{(i)} + \sum_{j \neq i} m_j \alpha^{(j)}. \quad (3.1.72)$$

Так как $\alpha^{(j)}$ система простых корней, то все коэффициенты в разложении корня $\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha)$ по этой системе должны быть одного знака (см. обсуждение после формулы (3.1.6)). Если $m_i \geq \frac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}$, то все коэффициенты в разложении корня $\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha)$ не отрицательны (остальные $m_k \geq 0$ в силу положительности α) и следовательно корень $\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha)$ положителен, что доказывает перестановку положительных корней операцией $\sigma_{\alpha^{(i)}}$. Если же $m_i < \frac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}$, то остальные коэффициенты должны быть $m_k \leq 0$, и в силу предположения о положительности корня α мы имеем $m_k = 0$ ($\forall k \neq i$). Тогда $\alpha = \alpha^{(i)}$ ($m_i = 1$ так как кратные корни запрещены) и из (3.1.71) мы получаем $\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha^{(i)}) = -\alpha^{(i)}$. ■

2. Дуальные корневые системы. Ко-корни.

По корневой системе $\Phi(\mathcal{A})$ простой алгебры Ли \mathcal{A} можно определить новую корневую систему $\Phi(\mathcal{A}^\vee)$, состоящую из векторов α^\vee :

$$\alpha^\vee = \frac{\alpha}{\alpha^2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\alpha^\vee}{(\alpha^\vee)^2}, \quad (3.1.73)$$

где $\alpha \in \Phi(\mathcal{A})$. Очевидно, что если $|\alpha_1| > |\alpha_2|$, то $|\alpha_1^\vee| < |\alpha_2^\vee|$. Вектора α^\vee называются ко-корнями алгебры Ли \mathcal{A} . Нетрудно понять, что множество векторов α^\vee удовлетворяет всем свойствам корневой системы. Действительно, для любых $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi(\mathcal{A}^\vee)$ мы имеем

$$2 \frac{(\alpha^\vee, \beta^\vee)}{(\beta^\vee)^2} = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha)^2} \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.74)$$

В силу того, что направления корневых векторов α и α^\vee совпадают, то совпадают и камеры Вейля систем $\Phi(\mathcal{A})$ и $\Phi(\mathcal{A}^\vee)$. Кроме того, отражения Вейля для дуальных систем переходят друг в друга

$$\alpha \rightarrow \alpha - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta^2)} \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\vee \rightarrow \alpha^\vee - 2 \frac{(\alpha^\vee, \beta^\vee)}{(\beta^\vee)^2} \beta^\vee,$$

а это значит, что группы Вейля систем $\Phi(\mathcal{A})$ и $\Phi(\mathcal{A}^\vee)$ изоморфны. Сейчас мы убедимся, что корневая система $\Phi(\mathcal{A}^\vee)$ может быть ассоциирована с некоторой алгеброй Ли \mathcal{A}^\vee , которая называется *дуальной алгеброй Ли*. Ко-корни алгебры Ли \mathcal{A} являются корнями дуальной алгебры Ли \mathcal{A}^\vee и наоборот. Так как $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$, то $(\mathcal{A}^\vee)^\vee = \mathcal{A}$. Справедливо следующее утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Утверждение 3.1.3 *Имеют место следующие соотношения дуальности между простыми алгебрами Ли*

$$sl(r+1, \mathbb{C})^\vee = sl(r+1, \mathbb{C}), \quad so(2r, \mathbb{C})^\vee = so(2r, \mathbb{C}), \quad (3.1.75)$$

$$so(2r+1, \mathbb{C})^\vee = sp(2r, \mathbb{C}), \quad (3.1.76)$$

$$\mathbf{G}_2^\vee = \mathbf{G}_2, \quad \mathbf{F}_4^\vee = \mathbf{F}_4, \quad \mathbf{E}_r^\vee = \mathbf{E}_r \quad (r = 6, 7, 8), \quad (3.1.77)$$

то есть, все простые алгебры Ли самодуальны, за исключением серий алгебр $sp(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r+1, \mathbb{C})$, которые дуальны друг другу. Простые корни $\alpha^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) алгебры Ли \mathcal{A} переходят в простые корни $\alpha^{(i)\vee}$ алгебры \mathcal{A}^\vee с помощью преобразований дуальности (3.1.73):

$$(\alpha^{(i)})^\vee = \frac{\alpha^{(i)}}{(\alpha^{(i)})^2}. \quad (3.1.78)$$

Доказательство. Если все корни α алгебры Ли \mathcal{A} имеют одинаковую длину, то соответствующие ко-корни (3.1.73) тоже имеют одинаковую длину, а корневая система алгебры Ли \mathcal{A}^\vee получается из корневой системы алгебры Ли \mathcal{A} масштабным преобразованием (умножением всех корней на постоянный фактор $1/(\alpha)^2$). Следовательно, алгебра Ли \mathcal{A}^\vee тождественна алгебре Ли \mathcal{A} . Поэтому алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$, $so(2r, \mathbb{C})$ серий \mathbf{A}_r , \mathbf{D}_r а также алгебры Ли \mathbf{E}_6 , \mathbf{E}_7 и \mathbf{E}_8 , соответствующие диаграммам Дынкина, у которых имеются только одинарные связи между вершинами, являются самодуальными (у этих алгебр все корни имеют одинаковую длину, что можно проверить явно).

Осталось рассмотреть алгебры, корни которых имеют разную длину. Проверим соотношение дуальности (3.1.76). Все корни алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ приведены в (3.1.28) и соответствующие дуальные корни (3.1.73) имеют вид

$$\pm \frac{1}{\kappa} e^{(i)}, \quad \alpha_\pm^{(i,j)} = \frac{1}{2\kappa} (e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad -\alpha_\pm^{(i,j)} = -\frac{1}{2\kappa} (e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad i < j. \quad (3.1.79)$$

\mathcal{V} . Пусть далее $|\mu\rangle \in \mathcal{V}$ — собственный вектор всех коммутирующих между собой операторов $T(H_i)$:

$$T(H_i)|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (3.2.1)$$

Введем r -компонентный (вообще говоря, комплексный) вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$, который называется **весом** вектора $|\mu\rangle$, а также называется **весом** представления T алгебры \mathcal{A} . В дальнейшем мы будем опускать символ T в формулах и будем считать образующие Картана–Вейля $\{H_i, E_\alpha\}$ матрицами, действующими в соответствующем векторном пространстве \mathcal{V} представления T .

Для построения теории неприводимых представлений простых алгебр Ли важно знать свойства весов μ , которые задаются соотношениями (3.2.1). Перечислим эти свойства.

А. Каждое представление имеет хотя бы один вес. Действительно, оператор H_1 в пространстве представления \mathcal{V} имеет по крайней мере один собственный вектор, собственное значение которого обозначим за μ_1 . Подпространство собственных векторов $|\mu_1\rangle$: $H_1|\mu_1\rangle = \mu_1|\mu_1\rangle$ с собственным значением μ_1 обозначим за \mathcal{V}_1 . Так как

$$H_1H_2|\mu_1\rangle = H_2H_1|\mu_1\rangle = \mu_1H_2|\mu_1\rangle, \quad (3.2.2)$$

то $H_2|\mu_1\rangle \in \mathcal{V}_1$. Оператор H_2 имеет хотя бы один собственный вектор $|\mu_1, \mu_2\rangle \in \mathcal{V}_1$ такой, что $H_2|\mu_1, \mu_2\rangle = \mu_2|\mu_1, \mu_2\rangle$. Обозначим подпространство в \mathcal{V}_1 собственных векторов H_2 с собственным значением μ_2 за \mathcal{V}_2 . Продолжая этот процесс, мы придем к определению подпространства \mathcal{V}_r , которое составлено из собственных векторов $|\mu\rangle$ всех операторов H_1, H_2, \dots, H_r , соответствующих весу $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$.

В. В пространстве \mathcal{V} представления T собственные вектора $|\mu\rangle$ операторов Картана H_1, H_2, \dots, H_r , имеющие разные веса μ , линейно независимы. Для доказательства этого факта рассмотрим собственные вектора $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_\ell\rangle$:

$$H_i|u_k\rangle = \mu_i^{(k)}|u_k\rangle.$$

Пусть $|u\rangle$ — еще один собственный вектор с весом $\mu \neq \mu^{(k)}$ ($\forall k$) причем такой, что выполняется равенство $|u\rangle = \sum_k |u_k\rangle$. Подействуем на обе части этого равенства оператором $\prod_k \sum_i \xi^i (H_i - \mu_i^{(k)}) = (\sum_i \xi^i (H_i - \mu_i^{(1)})) \cdot (\sum_i \xi^i (H_i - \mu_i^{(2)})) \cdots$, где ξ^i — произвольные коэффициенты. Тогда в правой части мы получим нуль, а равенство нулю левой части эквивалентно (в силу произвольности коэффициентов ξ^i) равенству $|u\rangle = 0$. Это и доказывает линейную независимость собственных векторов с разными весами. Отсюда следует, что в данном представлении имеется не более $N = \dim \mathcal{V}$ различных весов.

Важно подчеркнуть, что веса могут быть вырожденными, то есть могут существовать несколько линейно независимых векторов с одним и тем же весом. В этом случае полезно иметь в виду следующее свойство. Пусть $|u_0\rangle, |u_1\rangle, \dots, |u_\ell\rangle \in \mathcal{V}$ — собственные вектора операторов $\{H_i\}$ с весами $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(\ell)}$, и пусть имеет место линейная зависимость

$$|u_0\rangle = |u_1\rangle + |u_2\rangle + \cdots + |u_\ell\rangle. \quad (3.2.3)$$

Тогда без ограничения общности можно считать, что каждый вектор в правой части (3.2.3) имеет тот же вес $\mu^{(0)}$, что и вектор $|u_0\rangle$ в левой части (3.2.3). То есть, мы имеем $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \cdots = \mu^{(0)}$. Действительно, так как вектора с разными весами

линейно независимы, то в правой части (3.2.3) обязательно должны быть вектора с весом $\mu^{(0)}$. Пусть это будут вектора $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_k\rangle$, где $k \leq \ell$. Перенесем их в левую часть (3.2.3)

$$|u_0\rangle - |u_1\rangle - \dots - |u_k\rangle = |u_{k+1}\rangle + |u_{k+2}\rangle + \dots + |u_\ell\rangle. \quad (3.2.4)$$

В левой части (3.2.4) возник новый вектор $|\mu^{(0)}\rangle \equiv |u_0\rangle - \sum_{i=1}^k |u_i\rangle$ с весом $\mu^{(0)}$. Так как в правой части (3.2.4) векторов с весом $\mu^{(0)}$ не осталось, то, согласно линейной независимости векторов с разными весами, левая и правая части (3.2.4) должны равняться нулю и поэтому мы имеем

$$|\mu^{(0)}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |u_0\rangle = |u_1\rangle + |u_2\rangle + \dots + |u_k\rangle, \quad (3.2.5)$$

где $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_k\rangle$ имеют тот же вес $\mu^{(0)}$, что и вектор $|u_0\rangle$.

В дальнейшем мы будем изучать **конечномерные неприводимые** представления простых комплексных алгебр Ли \mathcal{A} с определяющими соотношениями (3.1.1) – (3.1.3). Такие представления строятся как представления компактных вещественных форм алгебр Ли \mathcal{A} . Пользуясь данным фактом, в Разделе **I-5.1.2** (см. Замечание **2**) первой части книги было показано, что любое конечномерное представление алгебры Ли \mathcal{A} эквивалентно представлению T , в котором элементы базиса Картана–Вейля (взяты в нормировке, соответствующей структурным соотношениям (3.1.1) – (3.1.3)) реализуются операторами $T(H_i)$, $T(E_\alpha)$ (времененно восстановим обозначение T для представления образующих) такими, что

$$[T(E_\alpha)]^\dagger = T(E_{-\alpha}), \quad [T(H_j)]^\dagger = T(H_j). \quad (3.2.6)$$

Это означает, что в пространстве \mathcal{V} представления T задано эрмитово скалярное произведение:

$$\langle \psi | \phi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \langle \psi | = (|\psi\rangle)^\dagger, \quad |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{V}, \quad (3.2.7)$$

относительно которого мы имеем

$$(\langle \psi | T(E_\alpha) | \phi \rangle)^* = \langle \phi | T(E_{-\alpha}) | \psi \rangle, \quad (\langle \psi | T(H_j) | \phi \rangle)^* = \langle \phi | T(H_j) | \psi \rangle. \quad (3.2.8)$$

Подчеркнем, что формулы эрмитова сопряжения в (3.2.6) и (3.2.8) согласуются со структурными соотношениями в (3.1.1) – (3.1.3) в случае, если корневые вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ – вещественны.

Поскольку в рассматриваемом представлении T картановские образующие H_i эрмитовы, свойства **A** и **B** являются простыми следствиями общих свойств систем коммутирующих эрмитовых операторов. Более того, собственные вектора $|\psi\rangle$ операторов H_i (мы вновь пишем H_i вместо $T(H_i)$) образуют базис в пространстве \mathcal{V} и их веса $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ **вещественны**. Отметим, что корневые вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ простой алгебры Ли \mathcal{A} являются весами присоединенного представления этой алгебры. В связи с этим удобно считать все веса алгебры \mathcal{A} (то есть веса всех представлений этой алгебры) векторами корневого пространства \mathfrak{V}_r алгебры \mathcal{A} .

С. Если $|\mu\rangle \in \mathcal{V}$ – вектор с весом μ , то вектор $E_\alpha |\mu\rangle$, если он не равен нулю, имеет определенный вес $\mu + \alpha$. Действительно, мы имеем

$$H_i E_\alpha |\mu\rangle = [H_i, E_\alpha] |\mu\rangle + E_\alpha H_i |\mu\rangle = (\alpha_i + \mu_i) E_\alpha |\mu\rangle. \quad (3.2.9)$$

Поскольку представление T неприводимо, то, действуя на весовой вектор $|\mu\rangle \neq 0$ произведениями корневых операторов E_α :

$$\dots E_\delta E_\gamma E_\beta E_\alpha |\mu\rangle,$$

и беря линейные комбинации таких векторов, мы получаем все вектора пространства \mathcal{V} представления T (иначе таким способом мы построили бы инвариантное подпространство, и представление T было бы приводимым). Любой вектор $|\mu\rangle \in \mathcal{V}$, из которого указанным выше способом (действием образующих и их произведений) порождается все пространство \mathcal{V} , называется циклическим (само представление при этом тоже называется циклическим). Таким образом, для неприводимого представления любой вектор из пространства представления является циклическим. Из приведенного рассуждения, в частности, следует, что *все веса неприводимого представления T получаются друг из друга добавлением корней*, то есть для любых двух весов μ и λ представления T мы имеем

$$\mu = \lambda + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \alpha,$$

где сумма идет по всем корням α , которые входят в сумму с кратностью $m_{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Подчеркнем еще раз, что веса представления T могут быть вырожденными, то есть в \mathcal{V} могут существовать несколько линейно независимых векторов с одним и тем же весом. Например, пусть $(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, тогда весовой вектор $|\mu\rangle$ и вектор $E_{\alpha} E_{\beta} E_{\gamma} |\mu\rangle$ (если он ненулевой), вообще говоря, различны, но имеют один и тот же вес μ .

Определение 3.2.1. Число линейно-независимых векторов в \mathcal{V} с одним и тем же весом называется кратностью этого веса. Если кратность веса равна 1, то данный вес называется простым.

Пример. Для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, имеющей единственный корень, веса $m = -j, -j + 1, \dots, j$ любого конечномерного неприводимого представления со спином j – простые (см. раздел I-3.7.3 первой части книги, а также раздел 2.1).

- **Задача 75.** Показать, что у присоединенного представления простой алгебры Ли ранга $r > 1$ нулевой вес $\mu = 0$ всегда вырожден и его кратность равна r .

Д. Ключевым свойством весов является следующее.

Теорема 3.2.1. Для любого веса μ конечномерного неприводимого представления T алгебры Ли \mathcal{A} и корня α алгебры \mathcal{A} , число $2(\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ – целое:

$$\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.10)$$

а вектор

$$\sigma_{\alpha}(\mu) = \mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, \quad (3.2.11)$$

получающийся в результате отражения Вейля веса μ относительно плоскости P_{α} , перпендикулярной корню α , – снова вес представления T .

Напомним, что скалярное произведение в пространстве \mathfrak{V}_r положительно определено и задается с помощью метрики (3.1.4) по формуле (3.1.6).

Доказательство. Доказательство практически полностью повторяет доказательство Теоремы **I-5.2.1** из первой части книги (см. Раздел **I-5.2.1**), в которой были сформулированы основные свойства корней простых алгебр Ли. Различия в доказательствах проистекают из-за нюанса, связанного с тем, что веса, в отличие от корней, могут быть не простыми.

Итак, для каждого корня α алгебры Ли \mathcal{A} три элемента

$$H_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} (\alpha^i H_i), \quad \mathcal{E}_{+\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2}} E_\alpha, \quad \mathcal{E}_{-\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2}} E_{-\alpha} \in \mathcal{A}, \quad (3.2.12)$$

где $\alpha^2 \equiv (\alpha, \alpha)$, образуют подалгебру Ли $sl(2, \mathbb{C}) \subset \mathcal{A}$ с определяющими соотношениями (2.1.1)

$$[H_\alpha, \mathcal{E}_{\pm\alpha}] = \pm \mathcal{E}_{\pm\alpha}, \quad [\mathcal{E}_{+\alpha}, \mathcal{E}_{-\alpha}] = 2 H_\alpha, \quad (3.2.13)$$

которые следуют из (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3). Для весового вектора $|\mu\rangle$ из пространства \mathcal{V} конечномерного представления T мы имеем

$$H_\alpha |\mu\rangle = \frac{1}{\alpha^2} (\alpha^i \mu_i) |\mu\rangle. \quad (3.2.14)$$

Как было показано в Разделе **2.1**, для конечномерных представлений алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ с определяющими соотношениями (3.2.13) собственные значения элемента $H_\alpha \in sl(2, \mathbb{C})$ являются целыми или полуцелыми числами. Поэтому $(\alpha, \mu)/\alpha^2 \in \mathbb{Z}/2$, откуда следует (3.2.10).

Для доказательства того, что (3.2.11) – снова вес, рассмотрим весовой вектор $|u_0\rangle \in \mathcal{V}$ с весом μ' , такой, что $E_\alpha |u_0\rangle = 0$ (такой вектор существует, поскольку иначе имелось бы бесконечное число весовых векторов (3.2.9), что невозможно для конечномерного представления). Построим цепочку векторов

$$|u_1\rangle = E_{-\alpha} |u_0\rangle, \quad |u_2\rangle = E_{-\alpha} |u_1\rangle, \quad \dots, \quad |u_{k+1}\rangle = E_{-\alpha} |u_k\rangle, \dots, \quad (3.2.15)$$

и будем считать, что $|u_1\rangle = E_{-\alpha} |u_0\rangle \neq 0$; иначе мы приходим к тривиальному случаю, для которого $H_\alpha |u_0\rangle = [E_\alpha, E_{-\alpha}] |u_0\rangle = 0$, поэтому $(\alpha, \mu') = 0$, вектор α перпендикулярен μ' и $\sigma_\alpha(\mu') = \mu'$ – снова вес. Понятно, что на k -ом шаге в цепочке (3.2.15) мы имеем

$$H_i |u_k\rangle = (\mu'_i - k\alpha_i) |u_k\rangle, \quad (3.2.16)$$

то есть вес вектора $|u_k\rangle$ равен $\mu^{(k)} = \mu' - k\alpha$. Далее, докажем по индукции соотношение

$$E_\alpha |u_{k+1}\rangle = m_{k+1} |u_k\rangle, \quad (3.2.17)$$

(коэффициент m_{k+1} будет зафиксирован ниже), которое не вполне очевидно в силу возможной кратности весов. Предположим, что (3.2.17) справедливо для некоторого $(k-1)$, тогда используя (3.2.16), получаем

$$\begin{aligned} E_\alpha |u_{k+1}\rangle &= E_\alpha E_{-\alpha} |u_k\rangle = [E_\alpha, E_{-\alpha}] |u_k\rangle + E_{-\alpha} E_\alpha |u_k\rangle = \\ &= (\alpha^i H_i) |u_k\rangle + m_k E_{-\alpha} |u_{k-1}\rangle = ((\mu', \alpha) - k(\alpha, \alpha) + m_k) |u_k\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (3.2.17) справедливо для k , если оно справедливо для $(k-1)$, и мы имеем

$$m_{k+1} = (\mu', \alpha) - k(\alpha, \alpha) + m_k. \quad (3.2.18)$$

Так как $E_\alpha|u_0\rangle = 0$, равенство (3.2.17) выполняется для начальных значений $k = -1$ и $m_0 = 0$ (база индукции), поэтому (3.2.17) выполняется для всех $k > -1$.

Поскольку представление конечномерно, процедура (3.2.15) должна обрываться на некотором шаге $k = j$, то есть $|u_{j+1}\rangle = 0$. Тогда из (3.2.17) следует $m_{j+1} = 0$. Итак, решая уравнение (3.2.18) с граничными условиями $m_0 = 0 = m_{j+1}$, мы получаем решение:

$$m_k = k(\mu', \alpha) - \frac{k(k-1)}{2}(\alpha, \alpha), \quad \frac{2(\mu', \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = j, \quad (3.2.19)$$

где второе равенство получается из первого при $k = j + 1$. Тем самым мы доказали, что если α – корень, и весовой вектор $|u_0\rangle$, соответствующий весу μ' , удовлетворяет $E_\alpha|u_0\rangle = 0$, то в случае $(\alpha, \mu') \neq 0$ цепочка векторов (3.2.15) определяет последовательность (струну) весов

$$\mu', \mu' - \alpha, \dots, \mu' - j\alpha = \mu' - 2\frac{(\alpha, \mu')}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \quad (3.2.20)$$

где последний вес определяется вторым соотношением из (3.2.19) (в случае $(\alpha, \mu') = 0$ последовательность (3.2.20) состоит только из одного веса μ'). Последний вес $(\mu' - j\alpha)$ в (3.2.20) равен $\sigma_\alpha(\mu')$, где отражение σ_α определено в (3.2.11). Поскольку вес $(\mu' - j\alpha)$ получается из первого веса μ' отражением относительно плоскости P_α , перпендикулярной корню α , вся струна (3.2.20) симметрична при отражениях σ_α , и если вес μ принадлежит струне (3.2.20), то и вес $\sigma_\alpha(\mu)$ принадлежит струне (3.2.20).

Остается доказать, что любой вес μ представления T принадлежит какой-либо струне (3.2.20), симметричной относительно отражений σ_α . Пусть μ – произвольный вес и $|\mu\rangle$ – соответствующий весовой вектор. Будем многократно действовать на него оператором E_α и получать новые весовые вектора. Поскольку представление конечномерно, найдется такое q , что $(E_\alpha)^q|\mu\rangle = |u_0\rangle \neq 0$, а $(E_\alpha)^{q+1}|\mu\rangle = E_\alpha|u_0\rangle = 0$. Струна весов, построенная так же как и выше исходя из вектора $|u_0\rangle$ с весом $\mu' = \mu + q\alpha$, содержит вес μ ; соответствующий весовой вектор равен^{3.1} $(E_{-\alpha})^q|u_0\rangle$ (этот вектор, вообще говоря, может отличаться от $|\mu\rangle$ и пропорциональных ему векторов; см. по этому поводу следующий пункт **Е**) и симметрична относительно отражений σ_α . Отсюда следует, что вектор $\sigma_\alpha(\mu)$ в корневом пространстве, полученный из веса μ отражением (3.2.11) относительно плоскости P_α , будет также принадлежать этой струне и следовательно будет весом. ■

Следствие. С учетом формул (3.2.19), соотношение (3.2.17) переписывается в виде

$$E_\alpha E_{-\alpha}|u_k\rangle = \frac{(\alpha, \alpha)}{2}(k+1)(j-k)|u_k\rangle, \quad (k = 0, \dots, j), \quad (3.2.21)$$

где $E_\alpha|u_0\rangle = 0 = E_{-\alpha}|u_j\rangle$, $|u_k\rangle = (E_{-\alpha})^k|u_0\rangle$, а веса векторов $|u_k\rangle$ определены в (3.2.16). Подчеркнем, что формула (3.2.21) верна только для весовых векторов $|u_k\rangle$, полученных многократным действием оператора $E_{-\alpha}$ на вектор $|u_0\rangle$, который обладает свойством $E_\alpha|u_0\rangle = 0$.

^{3.1} Вектор $(E_{-\alpha})^q|u_0\rangle$ не равен нулю, поскольку $\langle\mu|(E_{-\alpha})^q|u_0\rangle = \langle u_0|u_0\rangle \neq 0$.

Замечание. Условие (3.2.10) является необходимым для того, чтобы вектор μ корневого пространства был весом конечномерного неприводимого представления T алгебры Ли \mathcal{A} . Вектора μ , удовлетворяющие условию (3.2.10), мы будем называть **разрешенными весами**. Оказывается, что это условие достаточно для того, чтобы вектор μ был весом некоторого представления T алгебры \mathcal{A} . Ниже (см. разделы 3.4.1 и 3.4.2) мы докажем достаточность условия (3.2.10) для простых алгебр Ли классических серий: $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$.

Е. Рассмотрим струну весов представления T вдоль корня α и пусть начальный вес $\mu' = \mu^{(0)}$ (вес вектора $|u_0\rangle$) в струне таков, что $(\mu' + \alpha)$ — не вес. Пусть среди весов $\mu^{(k)}$, соответствующих векторам $|u_k\rangle$ (3.2.15), $k > 0$, имеются не простые веса. Выберем наименьшее k , для которого вес $\mu^{(k)}$ имеет кратность больше 1. Тогда, кроме вектора $|u_k\rangle$ имеется линейно независимый к нему вектор $|v_k\rangle$ с тем же весом $\mu^{(k)}$ и такой, что $E_\alpha|v_k\rangle = 0$ (иначе вектор $E_\alpha|v_k\rangle$, линейно независимый к $|u_{k-1}\rangle$, имел бы вес $\mu^{(k-1)}$, так что вес $\mu^{(k-1)}$ был бы не простой, что противоречит выбору k и выбору начального веса $\mu' = \mu^{(0)}$). Таким образом, для вектора $|v_k\rangle$ мы можем повторить процедуру, изложенную при доказательстве Теоремы 3.2.1, и построить дополнительную струну весов (дополнительную струну весовых векторов) вдоль корня α , начинающуюся с веса $\mu^{(k)}$ и симметричную относительно плоскости P_α . Данную процедуру можно повторить для всех векторов, имеющих не простые веса $\mu^{(k)}$, и тем самым продемонстрировать полную симметричность системы весов с учетом их кратностей относительно гиперплоскости P_α . Это в частности означает, что веса $\mu^{(k)}$ и $\sigma_\alpha(\mu^{(k)}) = \mu^{(k)} - \frac{2(\mu^{(k)}, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$, симметричные относительно гиперплоскости P_α , имеют одинаковую кратность.

- **Задача 76.** Доказать, что любой весовой вектор $|\mu\rangle$ представления T является линейной комбинацией вида

$$|\mu\rangle = \sum_b (E_{-\alpha})^{k_b} |u_0^{(b)}\rangle \quad (3.2.22)$$

где вектора $|u_0^{(b)}\rangle$ (аналоги весовых векторов $|v_k\rangle$; см. пункт Е выше) обладают свойством $E_\alpha|u_0^{(b)}\rangle = 0$. Указание: докажите сначала, что все корневые вектора, принадлежащие построенной выше струне, можно выбрать ортогональными друг другу.

Определение 3.2.2. Веса представления T , которые получаются друг из друга отражениями (3.2.11) из группы W , и, таким образом, имеют одинаковую кратность, называются эквивалентными.

В дальнейшем важную роль будет играть набор **всех возможных весов всех неприводимых конечномерных представлений** той или иной простой комплексной алгебры Ли \mathcal{A} . Ниже в примерах, а также в разделе 3.3, будет показано, что этот набор имеет замечательное свойство: любые возможные веса всех конечномерных представлений простой алгебры Ли \mathcal{A} принадлежат в корневом пространстве \mathfrak{Q} , некоторой решетке Λ , которая инвариантна относительно преобразований (3.2.11) из группы W (группы Вейля), состоящей из отражений относительно гиперплоскостей P_α , проходящих через начало координат и перпендикулярных корням α алгебры \mathcal{A} .

Подчеркнем еще раз, что далее в примерах будет идти речь о некоторых общих свойствах множества *всех возможных весов всех представлений* конкретных простых алгебр Ли.

Пример 1. Рассмотрим систему весов алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ (A_r -серия). Поскольку в любом представлении картановские образующие (3.1.8) обладают свойством $\sum_{i=1}^{r+1} H_i = 0$, веса μ *всех* конечномерных представлений алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ лежат в корневом пространстве P_u , которое представляет собой r -мерную гиперплоскость в пространстве \mathbb{R}^{r+1} , перпендикулярную вектору $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{r+1}$ (см. пункт **1** в подразделе **3.1.1**). Таким образом, веса можно разложить по базисным векторам $e^{(s)} \in \mathbb{R}^{r+1}$:

$$\mu = \sum_{s=1}^{r+1} m_s e^{(s)}, \quad (3.2.23)$$

где $\sum_{s=1}^{r+1} m_s = 0$. Кроме того веса (3.2.23) должны удовлетворять условию (3.2.10), что, с учетом явного вида (3.1.11) корней алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, приводит к дополнительному соотношению на коэффициенты m_i :

$$\frac{2(\mu, e^{(i)} - e^{(k)})}{|e^{(i)} - e^{(k)}|^2} = m_i - m_k \in \mathbb{Z}, \quad \forall i \neq k. \quad (3.2.24)$$

В пункте **1** доказательства Утверждения **3.1.1** (см. подраздел **3.1.3**) было показано, что группа Вейля $W = S_{r+1}$ корневой системы алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ действует на весовой вектор (3.2.23) так, что переставляет его компоненты m_i и поэтому, сохраняет условие (3.2.24). Следовательно, группа Вейля W является группой симметрии решетки, образованной весами (3.2.23), (3.2.24) алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$.

В простейшем случае $r = 1$ у алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ имеется единственный простой корень $\alpha = (e^{(1)} - e^{(2)})$, а все веса (3.2.23) с учетом $m_1 + m_2 = 0$ и условия (3.2.24) записываются в виде $\mu = m(e^{(1)} - e^{(2)})$, где $m \in \mathbb{Z}/2$. Таким образом, все веса всех конечномерных представлений алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ образуют одномерную решетку и лежат на одной прямой, направленной вдоль корня α , как это показано на Рис.3.2. Преобразование (3.1.61) из группы Вейля W алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ сводится к отражению $\mu \rightarrow -\mu$, то есть группа W в данном случае, как и следовало ожидать, изоморфна $S_2 = \mathbb{Z}_2$. Отметим, что одномерная решетка на Рис.3.2 симметрична относительно отражения $\mu \rightarrow -\mu$.

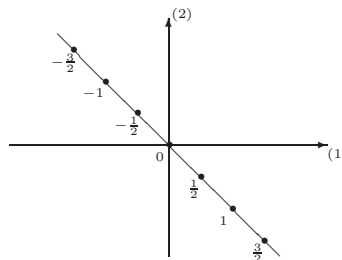


Рис. 3.2: Веса для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Числа $\dots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ соответствуют значениям m .

Случай $r = 2$ соответствует алгебре Ли $sl(3, \mathbb{C})$. Системы весов некоторых представлений алгебры $sl(3, \mathbb{C})$ и решетка весов для всех представлений алгебры $sl(3, \mathbb{C})$ будет рассмотрена в разделе 3.3.

Пример 2. Корневая система алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$ (B_r -серия) состоит из корневых векторов (3.1.28) (см. пункт 2 в подразделе 3.1.1). Разлагая веса μ по базисным векторам $e^{(s)}$ в r -мерном корневом пространстве

$$\mu = \sum_{s=1}^r m_s e^{(s)} \in \mathfrak{A}_r, \quad (3.2.25)$$

и подставляя эти веса в условия (3.2.10), где корневые вектора α даны в (3.1.28), мы получаем соотношения $(m_i \pm m_k) \in \mathbb{Z}$ и условие $2(\mu, e^{(i)}) = 2m_i \in \mathbb{Z}$. Следовательно компоненты любого веса (3.2.25) конечномерных представлений алгебры Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$ должны быть целыми или полуцелыми числами

$$m_i \in \mathbb{Z}/2. \quad (3.2.26)$$

Эквивалентные веса получаются при действии на весовой вектор (3.2.25) элементов из группы Вейля W . В пункте 2 доказательства Утверждения 3.1.1 (подраздел 3.1.3) было показано, что группа Вейля W корневой системы $\Phi(so(2r + 1, \mathbb{C}))$ изоморфна расширению группы S_r всех перестановок компонент m_i весового вектора (3.2.25) путем добавления к S_r операций, производящих любое число изменений знаков: $m_i \rightarrow -m_i$. Все эти преобразования из группы W сохраняют условие (3.2.26) и поэтому W является группой симметрии решетки, образованной весами (3.2.25), (3.2.26) алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$.

Пример 3. Для алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ (C_r -серия) корневая система имеет вид (3.1.35) (см. подраздел 3.1.1, пункт 3) поэтому для весов (3.2.25) к условиям $(m_i \pm m_k) \in \mathbb{Z}$ добавляется условие

$$2(\mu, 2e^{(i)})/(2e^{(i)}, 2e^{(i)}) = m_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.27)$$

Используя формулу (3.2.11) отражения весов (3.2.25) относительно плоскостей, перпендикулярных корневым векторам (3.1.35), нетрудно показать (см. пункт 3. в доказательстве утверждения 3.1.1, подраздел 3.1.3), что группа Вейля W для алгебр C_r -серии совпадает с группой W для алгебр B_r -серии (см. выше Пример 2.). Преобразования из этой группы сохраняют условие (3.2.27) и поэтому W является группой симметрии решетки весов алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$.

Пример 4. Для алгебр $so(2r, \mathbb{C})$ (D_r -серия) корни имеют вид (3.1.25) (см. подраздел 3.1.1, пункт 2). Условие (3.2.10) для весов (3.2.25) дает $m_i \pm m_k \in \mathbb{Z}$, где $i \neq k$, что эквивалентно (3.2.26). Следовательно веса те же, что и для представлений алгебр $so(2r + 1, \mathbb{C})$ (B_r -серия), но группа W в случае алгебр $so(2r, \mathbb{C})$ состоит (см. пункт 4. в доказательстве утверждения 3.1.1, подраздел 3.1.3) из всех перестановок компонент m_i вектора (3.2.25), а также из замен знаков у четного числа компонент m_i . При таких преобразованиях условие (3.2.26) сохраняется и поэтому указанная группа Вейля W является группой симметрии решетки, образованной весами алгебры $so(2r, \mathbb{C})$.

Замечание. Отражения из группы Вейля W можно реализовать на элементах алгебры Ли \mathcal{A} . Определим операторы

$$T_3(\alpha) = H_\alpha = \frac{\alpha^i H_i}{\alpha^2}, \quad T_2(\alpha) = \frac{1}{2i}(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_{-\alpha}), \quad T_1(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_{-\alpha}), \quad (3.2.28)$$

которые согласно (3.2.13) образуют алгебру углового момента

$$[T_k(\alpha), T_j(\alpha)] = i\varepsilon_{kjm} T_m(\alpha).$$

Рассмотрим поворот на угол π вокруг второй оси, который обслуживается оператором $e^{i\pi T_2(\alpha)}$ и приводит к отражению третьей оси $T_3(\alpha) \rightarrow -T_3(\alpha)$:

$$e^{i\pi T_2(\alpha)} \alpha^i H_i e^{-i\pi T_2(\alpha)} = -\alpha^i H_i. \quad (3.2.29)$$

Оператор $e^{i\pi T_2(\alpha)}$ и реализует вейлевское отражение, поскольку, как мы сейчас убедимся, справедливо

$$e^{i\pi T_2(\alpha)} H_i e^{-i\pi T_2(\alpha)} = [\sigma_\alpha(H)]_i, \quad (3.2.30)$$

где отражение σ_α определено в (3.2.11). В силу последнего равенства преобразованные элементы алгебры $e^{i\pi T_2(\alpha)} H_i e^{-i\pi T_2(\alpha)}$ имеют собственные значения $[\sigma_\alpha(\mu)]_i$, а это и означает, что автоморфизм алгебры: $\mathcal{A} \rightarrow e^{i\pi T_2(\alpha)} \mathcal{A} e^{-i\pi T_2(\alpha)}$ реализует отражение из группы Вейля.

Для доказательства (3.2.30) заметим, что если вектор ξ ортогонален α , то есть $(\xi, \alpha) = 0$, то $[\mathcal{E}_{\pm\alpha}, \xi^i H_i] = (\xi, \alpha) \mathcal{E}_{\pm\alpha} = 0$, и имеет место равенство

$$e^{i\pi T_2(\alpha)} (\xi, H) e^{-i\pi T_2(\alpha)} = (\xi, H) \quad (\forall \xi \perp \alpha). \quad (3.2.31)$$

Произвольный вектор x в евклидовом пространстве \mathfrak{V}_r можно представить как линейную комбинацию вектора, пропорционального вектору α , и ортогонального к нему вектора ξ . Тогда из (3.2.29), (3.2.31), мы получаем

$$e^{i\pi T_2(\alpha)} (x, H) e^{-i\pi T_2(\alpha)} = (\sigma_\alpha(x), H) = (x, \sigma_\alpha(H)), \quad (3.2.32)$$

откуда, в силу произвольности x , и следует (3.2.30). Во втором равенстве в (3.2.32) мы воспользовались тем, что для отражений (3.2.11) и двух любых векторов $\beta, \gamma \in \mathfrak{V}_r$ справедливо равенство

$$(\sigma_\alpha(\beta), \gamma) = (\beta, \sigma_\alpha(\gamma)). \quad (3.2.33)$$

Кроме всего прочего это означает, что образующие σ_α группы Вейля W реализуются несобственными ортогональными операторами по отношению к скалярному произведению $(\beta, \gamma) = \beta_i g^{ij} \gamma_j$. Следовательно для произвольного элемента $w \in W$, построенного как произведение образующих σ_α , мы получаем

$$(w \cdot \beta, \gamma) = (\beta, w^{-1} \cdot \gamma), \quad (3.2.34)$$

и имеем две возможности

$$\det(w) = +1, \quad \det(w) = -1, \quad (3.2.35)$$

в зависимости от того является ли $w \in W$ произведением четного или нечетного числа отражений σ_α .

- *Задача 77. Доказать, что для произвольной корневой образующей $E_\beta \in \mathcal{A}$ справедливо соотношение*

$$e^{i\pi T_2(\alpha)} E_\beta e^{-i\pi T_2(\alpha)} \propto E_{\sigma_\alpha(\beta)}. \quad (3.2.36)$$

3.3 Решетки весов

В предыдущем Разделе **3.2** было получено условие (3.2.10) целочисленности величины $2(\mu, \alpha)/\alpha^2$ для всех корней α простой алгебры \mathcal{A} и весов μ ее конечномерных представлений. Это условие является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы μ было весом конечномерного представления алгебры Ли \mathcal{A} . Мы не будем доказывать достаточность этого условия для *всех* простых алгебр Ли, а ограничимся классическими сериями $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$. В этом случае доказательство (см. Разделы **3.4.1** и **3.4.2**) будет основано на явном построении представления, для которого любой наперед заданный вектор μ , удовлетворяющий условию (3.2.10), будет весом. Здесь же мы будем считать, что все разрешенные (допустимые) веса, то есть вектора, удовлетворяющие (3.2.10), являются весами некоторых представлений.

Рассмотрим простые корни $\{\alpha^{(i)}\}$ алгебры \mathcal{A} . В соответствии с (3.2.10) для любого разрешенного веса μ мы имеем

$$\frac{2(\mu, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = m_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.3.1)$$

Эти уравнения являются частным случаем условий (3.2.10). Среди векторов μ , подчиняющихся (3.3.1), имеются специальные вектора $\lambda_{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$), удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{2(\lambda_{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = \delta_i^j. \quad (3.3.2)$$

Вектора $\lambda_{(i)}$, которые определены в (3.3.2), являются разрешенными весами, так как для них (и любых корней α) выполнены условия (3.2.10). Действительно, согласно (3.1.80) и (3.3.2) для любого корня α алгебры \mathcal{A} и векторов $\lambda_{(i)}$ мы получаем

$$\frac{2(\lambda_{(i)}, \alpha)}{(\alpha)^2} = \sum_{j=1}^r n_j \frac{2(\lambda_{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = n_i \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, в соответствии с уравнениями (3.3.2) каждому простому корню $\alpha^{(i)}$ однозначно сопоставляется вес $\lambda_{(i)}$, который называется **фундаментальным весом**. Пользуясь (3.3.1) и (3.3.2), мы находим

$$\left(\mu - \sum_{i=1}^r m_i \lambda_{(i)}, \alpha^{(j)}\right) / (\alpha^{(j)})^2 = 0. \quad (3.3.3)$$

Так как простые корни $\{\alpha^{(i)}\}$ образуют полную систему векторов в r -мерном корневом пространстве \mathfrak{V}_r и метрика g_{ij} в пространстве \mathfrak{V}_r евклидова (см. обсуждение после формулы (3.1.5)), то из (3.3.3) вытекает равенство

$$\mu = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_{(i)}, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.4)$$

и, следовательно, любой вес μ разлагается по фундаментальным весам с целочисленными коэффициентами. Такой “квантованный” спектр весов есть замечательное свойство конечномерных представлений простых комплексных алгебр Ли \mathcal{A} и всех их вещественных форм (включая компактную).

Равенство (3.3.4) показывает, что все разрешенные веса μ лежат на решетке Λ , которая определяется фундаментальными весами $\lambda_{(i)}$. Узлы этой решетки находятся в точках $\sum_{i=1}^r m_i \lambda_{(i)}$, где m_i — всевозможные целые числа. Решетка Λ , которая определяется по фундаментальным весам, называется **весовой решеткой**. Справедливо и обратное утверждение, которое формулируется следующим образом.

Утверждение 3.3.1. *Любая точка весовой решетки Λ соответствует некоторому разрешенному весу. Другими словами, пусть вектор μ равен*

$$\mu = \sum_{i=1}^r \ell_i \lambda_{(i)}, \quad (3.3.5)$$

где $\ell_i \in \mathbb{Z}$, и вектора $\lambda_{(i)}$ определены в (3.3.2), тогда μ — разрешенный вес.

Доказательство. Мы должны доказать, что для вектора (3.3.5) выполняется условие (3.2.10). Для каждого корня α определим ко-корень $\alpha^\vee = \frac{\alpha}{(\alpha)^2}$. Далее напомним, что ко-корни α^\vee могут быть записаны как целочисленные суммы (3.1.80) простых ко-корней $\frac{\alpha^{(i)}}{(\alpha^{(i)})^2}$. Тогда, используя разложения (3.3.5) и (3.1.80), для любого корня α мы имеем

$$\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha)^2} = \sum_{i,j=1}^r n_i \ell_j \frac{(2\lambda_{(j)}, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = \sum_{i=1}^r n_i \ell_i, \quad (3.3.6)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались (3.3.2). Правая часть (3.3.6) есть целое число, так как $n_i, \ell_j \in \mathbb{Z}$. Поэтому, согласно (3.2.10), вектор μ , заданный в (3.3.5), является разрешенным весом. ■

Так как корни алгебры Ли \mathcal{A} одновременно являются весами присоединенного представления алгебры \mathcal{A} , то они принадлежат весовой решетке Λ . Решетка Λ_r , образованная простыми корнями $\alpha^{(i)}$ так, что все вершины Λ_r соответствуют векторам

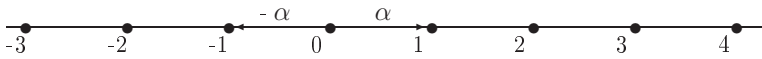
$$\alpha = \sum_i \alpha^{(i)} n_i, \quad (3.3.7)$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$, называется **корневой решеткой**. Множество вершин Λ_r формирует подрешетку в Λ , то есть $\Lambda_r \subset \Lambda$. Решетка Λ , образованная векторами (3.3.4), может рассматриваться как абелева группа сдвигов в r -мерном пространстве, а ее подрешетка Λ_r образует инвариантную подгруппу в Λ . Оказывается, что фактор группа Λ/Λ_r изоморфна центру $Z(\tilde{G})$ односвязной (накрывающей) группы \tilde{G} , имеющей в качестве алгебры Ли алгебру \mathcal{A} . Этот факт мы оставим без доказательства, но проиллюстрируем ниже на некоторых примерах. Корневая решетка Λ_r является подрешеткой в Λ , поэтому любые корни, включая простые, разлагаются по фундаментальным весам с целочисленными коэффициентами. Так как простые корни $\alpha^{(i)}$ образуют базис в корневом пространстве \mathfrak{V}_r , то и фундаментальные веса $\lambda_{(k)}$ образуют базис в \mathfrak{V}_r .

- **Задача 78.** ★ Доказать, что разложение простых корней $\alpha^{(i)}$ по фундаментальным весам $\lambda_{(k)}$ имеет вид $\alpha^{(i)} = \sum_{k=1}^r K_{ik} \lambda_{(k)}$, где $K_{ik} = 2(\alpha^{(i)}, \alpha^{(k)})/(\alpha^{(k)})^2$ — элементы матрицы Картана (см. раздел I-5.2.2 первой части книги). Доказать, что порядок группы Λ/Λ_r равен $\det \|K_{ik}\|$.

Для неприводимого (а потому циклического) представления T в пространстве \mathcal{V} , начиная с любого базисного вектора $|\mu\rangle \in \mathcal{V}$, мы можем получить любой другой вектор в \mathcal{V} , действуя на $|\mu\rangle$ корневыми образующими E_α и рассматривая линейные комбинации получившихся векторов. Вектор $E_\gamma \dots E_\beta E_\alpha |\mu\rangle \in \mathcal{V}$ согласно свойству **C** из Раздела 3.2 имеет вес $(\mu + \alpha + \beta + \dots + \gamma)$. Таким образом все веса неприводимого представления T алгебры \mathcal{A} отличаются от некоторого фиксированного веса μ этого представления только целочисленной суммой корней, или другими словами все эти веса принадлежат одному и тому же смежному классу из Λ/Λ_r .

Пример 1. Для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ корневое пространство одномерно (см. Пример 1. Раздела 3.2), и мы можем отождествить его с вещественной осью \mathbb{R} , а единственный простой корень α выбрать в виде $\alpha = 1 \in \mathbb{R}$. Корневая решетка Λ_r состоит из трансляций в \mathbb{R} на единичный шаг, то есть $\Lambda_r = \mathbb{Z}$:



Фундаментальный вес λ должен удовлетворять соотношению (3.3.2):

$$\frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha)^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \tag{3.3.8}$$

Следовательно весовая решетка задается полуцелыми шагами, или $\Lambda = \mathbb{Z}/2$; см. Рис.3.3. Данная весовая решетка уже была построена нами в Примере 1 в конце

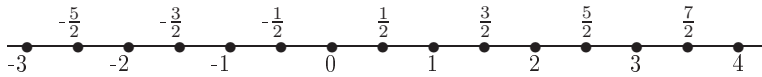


Рис. 3.3: Весовая решетка Λ алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$.

предыдущего Раздела 3.2 (см. Рис. 3.2). Ясно, что $\Lambda_r \subset \Lambda$ и $\Lambda/\Lambda_r = \mathbb{Z}_2$. Последний факт следует из того, что в Λ имеется только 2 неэквивалентных смежных класса: $\bar{0} = \{0 + \Lambda_r\} = \{\Lambda_r\}$ и $\bar{\frac{1}{2}} = \{\frac{1}{2} + \Lambda_r\}$, таблица умножения которых очевидно совпадает с таблицей умножения группы \mathbb{Z}_2 . С другой стороны известно, что группа $\mathbb{Z}_2 = \{I_2, -I_2\}$ образует центр в группе $SU(2)$ и следовательно центр группы $SU(2)$ действительно изоморфен фактор-группе Λ/Λ_r .

Пример 2. Выберем базис Картана–Вейля алгебры Ли $sl(3, \mathbb{C})$ в определяющем представлении следующим образом (см. Раздел I-5.2.1 в первой части книги)

$$\begin{aligned} H_1 &= e_{11} - e_{22}, & H_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e_{11} + e_{22} - 2e_{33}), \\ E_{\alpha^{(1)}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}e_{12}, & E_{\alpha^{(2)}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}e_{23}, & E_{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}e_{13}, \\ E_{-\alpha^{(1)}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}e_{21}, & E_{-\alpha^{(2)}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}e_{32}, & E_{-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)})} &= \frac{1}{\sqrt{6}}e_{31}, \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

где e_{ij} – (3×3) матричные единицы, H_1 и H_2 – образующие подалгебры Картана, и $E_{\alpha^{(1)}}$, $E_{\alpha^{(2)}}$ – образующие, соответствующие простым корням

$$\alpha^{(1)} = (2, 0), \quad \alpha^{(2)} = (-1, \sqrt{3}). \tag{3.3.10}$$

Нормировочные коэффициенты у корневых образующих в (3.3.9) выбраны так, чтобы выполнялось второе соотношение в (3.1.5). Корни (3.3.10) легко находятся с помощью коммутационных соотношений $[H_i, E_{\alpha^{(k)}}] = \alpha_i^{(k)} E_{\alpha^{(k)}}$ (сравните со вторым соотношением из (3.1.1)). Корневое пространство \mathfrak{A}_2 для алгебры Ли $sl(3, \mathbb{C})$ двумерно, и корневая решетка Λ_r образуется, согласно (3.3.7), с помощью двух простых корней (3.3.10). Соответствующие фундаментальные веса можно получить, решая уравнения (3.3.2)

$$2 \frac{(\alpha^{(i)}, \lambda_{(j)})}{(\alpha^{(i)})^2} = \delta_j^i \quad \Rightarrow \quad (\alpha^{(i)}, \lambda_{(j)}) = 2 \delta_j^i. \quad (3.3.11)$$

Здесь мы воспользовались метрикой $g^{ij} = \kappa \delta^{ij}$ в пространстве \mathfrak{A}_2 , пропорциональной $\text{Tr}(H_i H_j) = 2 \delta_{ij}$, и для простоты зафиксировали масштабный параметр $\kappa = 1$, учитывая то, что левые части (3.2.10) и (3.3.2) не зависят от этого параметра. Подставляя в уравнения (3.3.11) простые корни (3.3.10) мы находим фундаментальные веса

$$\lambda_{(1)} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \lambda_{(2)} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad (3.3.12)$$

которые вместе с корнями (3.3.10) алгебры $sl(3, \mathbb{C})$ образуют систему весов, изображенную на Рис. 3.4. На этом рисунке $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ – простые корни, а $\lambda_{(1)}$ и $\lambda_{(2)}$ – фундаментальные веса.

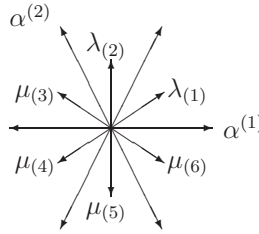


Рис. 3.4: Система весов для определяющего и ко-определяющего представлений алгебры Ли $sl(3, \mathbb{C})$.

Заметим, что веса

$$\lambda_{(1)}, \quad \mu_{(3)} = \lambda_{(1)} - \alpha^{(1)} = (-1, 1/\sqrt{3}), \quad \mu_{(5)} = \lambda_{(1)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} = (0, -2/\sqrt{3}),$$

изображенные на Рис. 3.4, соответствуют фундаментальному триплету (определяющему представлению), а веса

$$\lambda_{(2)}, \quad \mu_{(6)} = \lambda_{(2)} - \alpha^{(2)}, \quad \mu_{(4)} = \lambda_{(2)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}$$

– фундаментальному анти-триплету, то есть представлению, контраградиентному к определяющему (ко-определяющему представлению). Действительно, пользуясь определением (3.3.9) корневых образующих E_α , все базисные вектора в пространстве \mathcal{V}_3 определяющего представления алгебры $sl(3, \mathbb{C})$ можно построить следующим образом

$$|\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu'\rangle = E_{-\alpha^{(1)}} |\mu\rangle \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu''\rangle = E_{-\alpha^{(2)}} E_{-\alpha^{(1)}} |\mu\rangle \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.13)$$

Подчеркнем, что первый вектор $|\mu\rangle$ обладает важным свойством

$$E_{\alpha^{(i)}} |\mu\rangle = 0, \quad (3.3.14)$$

то есть уничтожается образующими, которые соответствуют положительным корням. Далее, действуя на вектора (3.3.13) образующими H_i подалгебры Картана в определяющем представлении (3.3.9), мы получаем, что эти вектора имеют в точности веса $\mu = \lambda_{(1)}$, $\mu' = \mu_{(3)}$ и $\mu'' = \mu_{(5)}$, которые были указаны выше.

- **Задача 79.** Показать, что веса $\lambda_{(2)}$, $\mu_{(6)}$ и $\mu_{(4)}$ соответствуют фундаментальному анти-триплету (ко-представлению), то есть трем базисным векторам в пространстве \bar{V}_3 представления, контраградиентного к определяющему.

Фундаментальные веса $\lambda_{(1)}$ и $\lambda_{(2)}$, изображенные на Рис. 3.4, порождают всю решетку весов алгебры Ли $sl(3, \mathbb{C})$, представленную на Рис. 3.5. Из этого рисунка

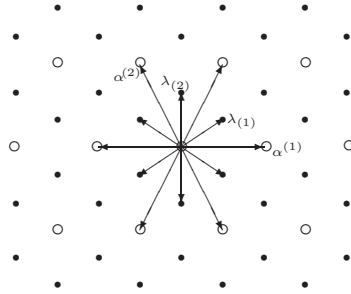


Рис. 3.5: Весовая решетка Λ алгебры Ли $sl(3, \mathbb{C})$. Белыми вершинами выделена подрешетка корней Λ_r .

в частности видно, что решетка весов Λ , построенная по векторам $\lambda_{(i)}$, содержит подрешетку корней Λ_r , и фактор группа $\Lambda/\Lambda_r = \mathbb{Z}_3$. Действительно, мы имеем только три разных смежных класса Λ_r , $\bar{\lambda}_{(1)} = \lambda_{(1)} + \Lambda_r$, $\bar{\lambda}_{(2)} = \lambda_{(2)} + \Lambda_r$, и таблица умножения этих классов совпадает с таблицей умножения для группы \mathbb{Z}_3 , в чем легко убедиться, заметив (см. (3.3.10) и (3.3.12)), что $2\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} + \alpha^{(1)} \in \bar{\lambda}_{(2)}$, $3\lambda_{(1)} = 2\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \in \Lambda_r$, $\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \in \Lambda_r$, $2\lambda_{(2)} = \lambda_{(1)} + \alpha^{(2)} \in \bar{\lambda}_{(1)}$, $3\lambda_{(2)} = \alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} \in \Lambda_r$, то есть

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{(1)} + \bar{\lambda}_{(1)} &= \bar{\lambda}_{(2)}, & \bar{\lambda}_{(2)} + \bar{\lambda}_{(2)} &= \bar{\lambda}_{(1)}, \\ \bar{\lambda}_{(1)} + \bar{\lambda}_{(1)} + \bar{\lambda}_{(1)} &= \bar{\lambda}_{(2)} + \bar{\lambda}_{(2)} + \bar{\lambda}_{(2)} &= \bar{\lambda}_{(1)} + \bar{\lambda}_{(2)} &= \Lambda_r. \end{aligned}$$

Напомним, что центр в группе $SU(3)$ образован тремя элементами $\{I_3, e^{i\frac{2\pi}{3}} I_3, e^{i\frac{4\pi}{3}} I_3\}$ и изоморфен группе \mathbb{Z}_3 , то есть изоморфен фактор группе Λ/Λ_r .

Замечание. В некоторых задачах теории представлений алгебр Ли необходимо вводить решетку весов для дуальных алгебр Ли \mathcal{A}^\vee , которые были определены в конце Раздела 3.1. Фундаментальные веса $\lambda_{(i)}^\vee$ для дуальной алгебры Ли \mathcal{A}^\vee определяются соотношениями

$$2 \frac{(\lambda_{(i)}^\vee, \alpha^{(j)\vee})}{(\alpha^{(j)\vee})^2} = 2 \delta_j^i \quad \Rightarrow \quad (\lambda_{(i)}^\vee, \alpha^{(j)}) = \delta_j^i. \quad (3.3.15)$$

Сравнивая (3.3.2) со вторым соотношением в (3.3.15), мы получаем выражения для фундаментальных весов дуальной алгебры Ли \mathcal{A}^\vee

$$\lambda_{(i)}^\vee = \frac{\lambda_{(i)}}{(\alpha^{(i)})^2}. \quad (3.3.16)$$

Весы (3.3.16) называются фундаментальными ко-весами алгебры Ли \mathcal{A} .

3.4 Классификация неприводимых конечномерных представлений

3.4.1 Представления со старшим весом

Определение 3.4.1. *Вес λ представления T простой алгебры Ли \mathcal{A} называется старшим, если $\lambda + \alpha$ не является весом представления T для всех положительных корней α алгебры \mathcal{A} . Представление T , имеющее старший вес, называется **представлением со старшим весом**.*

Вектор $|\lambda\rangle$ в пространстве представления T , соответствующий старшему весу λ , называется старшим вектором. Необходимым условием того, чтобы вектор $|\lambda\rangle$ был старшим, служит равенство $E_\alpha|\lambda\rangle = 0$ для всех положительных корней α . Если старший вес λ — простой (не кратный), а мы вскоре увидим, что для неприводимых представлений T так оно и есть, то это условие является и достаточным. То есть определение 3.4.1 (в случае, если T — неприводимо) эквивалентно тому, что $|\lambda\rangle$ — старший вектор тогда и только тогда, когда $E_\alpha|\lambda\rangle = 0$ для всех положительных корней α . Подчеркнем, что **любое конечномерное представление T алгебры Ли \mathcal{A} является представлением со старшим весом**. Действительно, из конечномерности T следует, что у представления T обязательно должен существовать вес λ такой, что $(\lambda + \alpha)$ не вес для всех положительных корней α .

- **Задача 80.** Доказать, что вес λ неприводимого представления T алгебры Ли \mathcal{A} — старший, то есть $E_\alpha|\lambda\rangle = 0$ ($\forall \alpha > 0$), если $\lambda + \alpha^{(i)}$ не является весом представления T для любого простого корня $\alpha^{(i)}$ алгебры \mathcal{A} . Указание: воспользоваться тем, что образующая $E_\alpha \in \mathcal{A}$, где α — любой положительный корень, представляется в виде многократного коммутатора образующих $E_{\alpha^{(i)}}$.

Пример. Из соотношений (3.3.14) следует, что вектор $|\mu\rangle$, заданный в (3.3.13), является старшим вектором для определяющего (фундаментального) представления алгебры $sl(3, \mathbb{C})$. Старший вес этого вектора равен фундаментальному весу $\lambda_{(1)}$.

Теорема 3.4.1. 1.) Если представление T со старшим весом неприводимо, то его старший вес простой. 2.) Для данного неприводимого представления T старший вес — единственный.

Доказательство. 1.) Пусть $|\mu^{(0)}\rangle$ — вектор со старшим весом $\mu^{(0)}$ в пространстве \mathcal{V} неприводимого представления T . Так как любой вектор в пространстве \mathcal{V} , включая $|\mu^{(0)}\rangle$ — циклический, то в соответствии с пунктами **В.** и **С.** раздела 3.2 нам необходимо доказать, что любой вектор пространства \mathcal{V} вида

$$\dots E_\delta E_\gamma E_\beta E_\alpha |\mu^{(0)}\rangle, \quad (3.4.1)$$

с тем же весом $\mu^{(0)}$ может быть записан как $k|\mu^{(0)}\rangle$, где k – константа^{3.2}. Как мы увидим, эта константа — полином от компонент старшего веса $\mu^{(0)}$ с коэффициентами, зависящими от последовательности корней $\dots, \delta, \gamma, \beta, \alpha$. Из пункта **С.** раздела **3.2** также следует, что $\dots + \delta + \gamma + \beta + \alpha = 0$. Поэтому по крайней мере один из корней должен быть положительным. Пусть первый справа положительный корень будет, скажем, корнем γ . Заменяя $E_\gamma E_\beta$ на $[E_\gamma, E_\beta] + E_\beta E_\gamma$ и так далее, до тех пор пока E_γ не подействует на $|\mu^{(0)}\rangle$ и вспоминая, что $E_\gamma|\mu^{(0)}\rangle = 0$, мы получаем сумму векторов с тем же весом $\mu^{(0)}$, но с меньшим числом корневых образующих E чем в (3.4.1) (поскольку $[E_\gamma, E_\beta]$ — линейная комбинация операторов E_α и H_i). Продолжая этот процесс до тех пор, пока более не останется операторов E с положительными корнями, мы придем к сумме произведений H_i , действующих на $|\mu^{(0)}\rangle$, что в конечном итоге превращается в полином от компонент $\mu^{(0)}$, умноженный на $|\mu^{(0)}\rangle$. Коэффициенты этого полинома очевидно зависят от набора корней $\dots, \delta, \gamma, \beta, \alpha$.

2.) Пусть старший вес данного неприводимого представления T не единственный, то есть существуют два старших веса $\mu^{(0)}$ и $\lambda^{(0)}$, которые не равны друг другу и соответствуют двум старшим векторам $|\mu^{(0)}\rangle$ и $|\lambda^{(0)}\rangle$. Любой вектор неприводимого представления — циклический, поэтому в соответствии с пунктами **В.** и **С.** раздела **3.2** существует последовательность корней $\delta, \gamma, \dots, \alpha$ такая, что^{3.3}

$$|\lambda^{(0)}\rangle = E_\delta E_\gamma \dots E_\alpha |\mu^{(0)}\rangle, \quad (3.4.2)$$

где $\delta + \dots + \alpha \neq 0$. В соответствии с рассуждениями, изложенными при доказательстве первого пункта, без ограничения общности мы можем считать все корни $\delta, \gamma, \dots, \alpha$ отрицательными. Подействуем на обе части соотношения (3.4.2) положительным корнем $E_{-\delta}$. В результате в левой части мы получаем нуль, а в правой части получаем ненулевой вектор. Последнее утверждение следует из того факта, что если $E_\delta|\psi\rangle \neq 0$, то $E_{-\delta}E_\delta|\psi\rangle \neq 0$, поскольку в силу (3.2.6) мы имеем: $\langle\psi|E_{-\delta}E_\delta|\psi\rangle = \langle\psi|E_\delta^\dagger E_\delta|\psi\rangle > 0$.

■

Замечание. При доказательстве первого пункта Утверждения было показано, что если $|\mu^{(0)}\rangle \in \mathcal{V}$ — вектор со старшим весом $\mu^{(0)}$, то любой вектор пространства \mathcal{V} с весом μ может быть записан в виде линейной комбинации векторов (3.4.1) с отрицательными корнями $\dots, \delta, \gamma, \beta, \alpha$. Другими словами, любой вес $\mu \neq \mu^{(0)}$ представления T получается вычитанием из старшего веса $\mu^{(0)}$ положительных корней и следовательно мы имеем

$$\mu = \mu^{(0)} - \sum_i n_i \alpha^{(i)}, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (3.4.3)$$

где $\alpha^{(i)}$ — простые корни алгебры \mathcal{A} .

Теорема 3.4.2. *Два неприводимых конечномерных представления T и T' алгебры Ли \mathcal{A} эквивалентны тогда и только тогда, когда их старшие веса равны.*

^{3.2}Отсюда следует, что и любая линейная комбинация векторов (3.4.1), имеющая вес $\mu^{(0)}$, может быть записана как $k|\mu^{(0)}\rangle$, где k – константа.

^{3.3}Вообще говоря вектор $|\lambda^{(0)}\rangle$ в (3.4.2) может равняться линейной комбинации векторов $E_\delta \dots E_\alpha |\mu^{(0)}\rangle$, каждый из которых (в силу свойства, обсуждавшегося в пункте **В**) имеет вес $\lambda^{(0)}$. Тогда все эти вектора в силу первого пункта данного Утверждения пропорциональны друг другу, иначе старший вес $\lambda^{(0)}$ был бы не простой, и мы приходим к (3.4.2).

Доказательство. Будем различать два представления T и T' , используя нештрихованные обозначения для объектов из T и штрихованные для T' . В соответствии с этим соглашением обозначим пространства представлений T и T' как \mathcal{V} и \mathcal{V}' . Необходимость условия равенства старших весов для эквивалентных представлений доказывается следующим образом. Для эквивалентных представлений имеется обратимый оператор S , устанавливающий взаимнооднозначное соответствие между пространствами \mathcal{V} и \mathcal{V}' и все матрицы эквивалентных представлений связаны преобразованием $T'(X) = S \cdot T(X) \cdot S^{-1}$ ($\forall X \in \mathcal{A}$), а старший вектор $|u_0\rangle'$ получается из старшего вектора $|u_0\rangle$ по формуле $|u_0\rangle' = S|u_0\rangle$ и имеет тот же вес.

Докажем теперь достаточность условия равенства старших весов для эквивалентности представлений. Пусть $|u_0\rangle$ и $|u_0\rangle'$ — старшие вектора из \mathcal{V} и \mathcal{V}' с одинаковым старшим весом $\mu^{(0)}$ для обоих представлений. Все вектора в пространствах \mathcal{V} и \mathcal{V}' представляют собой линейные комбинации векторов вида

$$E_{-\alpha_k} E_{-\alpha_{k-1}} \dots E_{-\alpha_1} |u_0\rangle, \quad E'_{-\alpha_k} E'_{-\alpha_{k-1}} \dots E'_{-\alpha_1} |u_0\rangle', \quad (3.4.4)$$

соответственно. Здесь мы использовали краткую форму записи E_α и E'_α для $T(E_\alpha)$ и $T'(E_\alpha)$. В соответствии с Замечанием к Теореме 3.4.1 можно считать, что в качестве α_i в (3.4.4) выступают *положительные* корни. Эквивалентность T и T' будет доказана, если мы покажем, что любое линейное соотношение для нештрихованных векторов будет соответствовать такому же линейному соотношению (с теми же коэффициентами) для штрихованных векторов, и наоборот. Это означает, что между пространствами \mathcal{V} и \mathcal{V}' имеется взаимнооднозначное соответствие. Иначе говоря, пусть в пространстве \mathcal{V} имеется соотношение

$$\sum_k \sum_\alpha \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} E_{-\alpha_k} E_{-\alpha_{k-1}} \dots E_{-\alpha_1} |u_0\rangle = 0. \quad (3.4.5)$$

Нам требуется доказать что выполнено то же соотношение, но со штрихами, $\sum_k \sum_\alpha \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} E'_{-\alpha_k} E'_{-\alpha_{k-1}} \dots E'_{-\alpha_1} |u_0\rangle' = 0$, и наоборот. Без ограничения общности можно считать, что все вектора в сумме (3.4.5) имеют одинаковый вес, иначе соотношение (3.4.5) разбилось бы на несколько независимых соотношений. Для дальнейшего также полезно заметить, что в рассматриваемом случае конечномерных представлений сумма в (3.4.5) конечна.

Прежде чем мы дадим общее доказательство взаимнооднозначного соответствия между пространствами \mathcal{V} и \mathcal{V}' , рассмотрим для иллюстрации частный пример. Напомним, что мы имеем соответствие между старшими векторами $|u_0\rangle \in \mathcal{V}$ и $|u_0\rangle' \in \mathcal{V}'$. Далее рассмотрим вектора $E_{-\alpha}|u_0\rangle \in \mathcal{V}$ и $E'_{-\alpha}|u_0\rangle' \in \mathcal{V}'$, где α — положительный корень. Эти вектора, если они ненулевые, имеют одинаковые веса $(\mu^{(0)} - \alpha)$ и мы можем установить соответствие между ними. Покажем, что если $E'_{-\alpha}|u_0\rangle' \neq 0$, то $E_{-\alpha}|u_0\rangle \neq 0$, и наоборот. Для ненулевого вектора $E'_{-\alpha}|u_0\rangle'$ мы получаем $\langle u_0|' E'_\alpha E'_{-\alpha} |u_0\rangle' \neq 0$ и поэтому

$$E'_\alpha E'_{-\alpha} |u_0\rangle' = [E'_\alpha, E'_{-\alpha}] |u_0\rangle' = \alpha^i H'_i |u_0\rangle' = (\alpha, \mu^{(0)}) |u_0\rangle' \neq 0,$$

то есть $(\alpha, \mu^{(0)}) \neq 0$. Аналогичная выкладка для нештрихованных величин дает соотношение $E_\alpha E_{-\alpha} |u_0\rangle = (\alpha, \mu^{(0)}) |u_0\rangle$, откуда с учетом неравенства $(\alpha, \mu^{(0)}) \neq 0$ следует $E_{-\alpha} |u_0\rangle \neq 0$. Поэтому действительно имеется соответствие не только между старшими векторами $|u_0\rangle$ и $|u_0\rangle'$, имеющими одинаковые веса, но и между ненулевыми

векторами $E_{-\alpha}|u_0\rangle$ и $E'_{-\alpha}|u_0\rangle'$, где α – положительные корни. В принципе данную процедуру пошагового установления соответствия между всеми векторами пространств \mathcal{V} и \mathcal{V}' можно продолжить и далее.

Вернемся к общему доказательству взаимнооднозначного соответствия между пространствами \mathcal{V} и \mathcal{V}' , которое мы начали до рассмотрения частного примера. Будем действовать от противного. Пусть выполнено (3.4.5) и при этом

$$\sum_k \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} E'_{-\alpha_k} E'_{-\alpha_{k-1}} \dots E'_{-\alpha_1} |u_0\rangle' \equiv |\Psi\rangle' \neq 0. \quad (3.4.6)$$

Поскольку представление T' неприводимо, вектор $|\Psi\rangle'$ является, как и все вектора, циклическим в \mathcal{V}' . В частности, существует элемент \mathcal{O}' обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ в представлении T' , который переводит $|\Psi\rangle'$ в исходный старший вектор $|u_0\rangle'$. Другими словами мы имеем

$$|u_0\rangle' = \mathcal{O}'|\Psi\rangle',$$

где оператор \mathcal{O}' — линейная комбинация произведений образующих алгебры \mathcal{A} в представлении T' . В полной аналогии с рассуждениями, использованными в доказательстве первой части Теоремы 3.4.1, действие оператора \mathcal{O}' на левую часть (3.4.6) сводится к операциям коммутации, позволяющим переместить картановские образующие и корневые образующие с положительными корнями α направо в произведениях образующих, и действию указанных образующих на вектор $|u_0\rangle'$ (что дает $\mu_i^{(0)}|u_0\rangle'$, в случае действия H_i , и нулевой вектор, в случае действия E_{α}). Существенно, что эти операции используют только коммутационные соотношения алгебры \mathcal{A} и тот факт, что $|u_0\rangle'$ является вектором старшего веса $\mu^{(0)}$. В результате конечного числа таких операций (в силу конечности суммы в (3.4.6)) мы и получим вектор $|u_0\rangle'$.

Рассмотрим теперь оператор \mathcal{O} , отличающийся от \mathcal{O}' только тем, что у символов образующих убраны штрихи. При действии этим оператором на левую часть (3.4.5) мы применим в точности те же операции, что в штрихованном случае, и получим вектор $|u_0\rangle$. Это противоречит тому, что вектор (3.4.5) равен нулю. Мы заключаем, что одновременное выполнение (3.4.5) и (3.4.6) невозможно, и, следовательно, имеется взаимнооднозначное соответствие между пространствами \mathcal{V} и \mathcal{V}' . Действие образующих на вектора вида (3.4.4) полностью определяется коммутационными соотношениями в алгебре \mathcal{A} и старшим весом $\mu^{(0)}$, одинаковым для представлений T и T' , поэтому указанное соответствие является изоморфизмом этих представлений. Теорема доказана. ■

Напомним (см. Раздел I-5.2.2 первой части книги), что вектор x лежит в положительной камере Вейля (включая ее граничные гиперплоскости), если $(x, \alpha) \geq 0$ для всех положительных корней α . Примем соглашение, согласно которому веса представлений могут быть частично упорядочены. Для этого зафиксируем некоторый вектор x в положительной камере Вейля и пусть μ и λ — два веса представления T . Будем считать, что $\lambda \geq \mu$, если $(\lambda, x) \geq (\mu, x)$. Если разность двух весов $\lambda - \mu = \sum_i \alpha_i$ дается суммой положительных корней $\alpha_i > 0$, то $\lambda \geq \mu$ независимо от выбора вектора x . Если λ — старший вес представления T , а μ — любой вес этого представления, то в силу (3.4.3) мы имеем $\lambda \geq \mu$. Введенное здесь упорядочение весов будет существенно использоваться нами ниже в Разделе 3.5.

Для фиксированного представления T вес μ' называется доминантным, если он лежит в положительной камере Вейля. Напомним, что группа Вейля W действует

на множестве камер Вейля.

Утверждение 3.4.3 *Для любого веса μ существует элемент $w \in W$ такой, что эквивалентный вес $\mu' = w(\mu)$, является доминантным.*

Доказательство. Выберем вектор x , который лежит внутри положительной камеры Вейля и не попадает на ее граничные гиперплоскости, то есть $(x, \alpha) > 0$ для всех положительных корней α . Будем упорядочивать веса по отношению к этому вектору x . Пусть вес μ не доминантный (не лежит в положительной камере Вейля), то есть существует положительный корень α такой, что $(\mu, \alpha) < 0$. Тогда для эквивалентного веса $\sigma_\alpha(\mu) = (\mu - 2\frac{(\mu, \alpha)}{\alpha^2}\alpha)$ мы имеем $(\sigma_\alpha(\mu), x) > (\mu, x)$, то есть $\sigma_\alpha(\mu) > \mu$. Пусть вес $\sigma_\alpha(\mu)$ не доминантный и существует положительный корень β такой, что $(\sigma_\alpha(\mu), \beta) < 0$, тогда $\sigma_\beta(\sigma_\alpha(\mu)) > \sigma_\alpha(\mu) > \mu$. Если вес $\sigma_\beta(\sigma_\alpha(\mu))$ не доминантный, то применяя указанную выше процедуру далее, мы в конце концов (так как группа W конечна и данная процедура должна оборваться) для некоторого $w \in W$ получим эквивалентный вес $w(\mu) = \mu'$, для которого будем иметь $(\mu', \alpha) \geq 0$ для всех $\alpha > 0$ и который таким образом будет доминантным. ■

Следствие. Так как группа W переставляет камеры Вейля, то построенный в доказательстве Утверждения элемент $w \in W$ переведет камеру Вейля, которая содержала вес μ , в положительную камеру Вейля. Рассуждение, использованное в доказательстве Утверждения 3.4.3, применимо для произвольного вектора μ (не обязательно веса), лежащего в любой неположительной камере Вейля. Отсюда следует, что для любой камеры Вейля существует элемент w группы W , который переведет ее в положительную камеру Вейля и, соответственно, обратный элемент $w^{-1} \in W$ переведет положительную камеру Вейля в любую камеру Вейля. Отсюда следует, что группа W действует на множестве камер Вейля транзитивно.

- *Задача 81. Доказать, что если вес μ' — доминантный, то $\mu' \geq \sigma(\mu')$ для любого элемента $\sigma \in W$.*

Еще раз подчеркнем, что мы обсуждаем случай простых алгебр Ли, для которых метрика g_{ij} корневого пространства является евклидовой.

Утверждение 3.4.4. *Старший вес λ конечномерного и неприводимого представления T автоматически является доминантным.*

Доказательство. Пусть λ — старший вес представления T , тогда согласно Теореме 3.2.1 его вейлевское отражение

$$\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

тоже вес представления T , причем, если α положительный корень, то должно выполняться неравенство

$$\frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0, \quad (3.4.7)$$

иначе вес $\sigma_\alpha(\lambda)$ был бы суммой веса λ и некоторого количества положительных корней α , что противоречило бы определению старшего веса. Таким образом, мы имеем

$(\lambda, \alpha) \geq 0$ для всех положительных корней α и следовательно λ лежит в положительной камере Вейля. ■

Подставим в (3.4.7) в качестве положительного корня α простые корни $\alpha^{(i)}$. Тогда для старшего веса λ имеем

$$\frac{2(\lambda, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = n_i \geq 0, \quad (3.4.8)$$

где n_i – целые неотрицательные числа. Пользуясь формулами (3.3.1) и (3.3.4) мы согласно (3.4.8) получаем разложение старшего веса любого неприводимого конечномерного представления по фундаментальным весам

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)} \quad (n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (3.4.9)$$

Подмножество в Λ , состоящее из весов (3.4.9), обозначается как Λ^+ . Далее, для краткости мы будем называть подмножество Λ^+ подрешеткой, хотя с математической точки зрения это не вполне корректно.

Вышесказанное приводит к формулировке следующей важной теоремы.

Теорема 3.4.5. *Каждый вес λ весовой решетки Λ , находящийся в положительной камере Вейля, есть старший вес, которому соответствует единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое конечномерное представление алгебры Ли \mathcal{A} , то есть, неприводимые конечномерные представления \mathcal{A} могут быть пронумерованы точками подрешетки $\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \text{ для всех положительных корней } \alpha > 0\}$.*

Доказательство. Достаточно установить, что каждый фундаментальный вес $\lambda_{(f)}$ ($f = 1, \dots, r$) есть старший вес, которому соответствует неприводимое конечномерное представление $T_{(f)}$ алгебры Ли \mathcal{A} , действующее в пространстве $\mathcal{V}_{(f)}$. Если этот факт установлен, то, как мы сейчас увидим, неприводимое представление $T^{(n_1, \dots, n_r)}$ с любым старшим весом (3.4.9) строится как подпредставление в прямом произведении представлений $T_{(f)}$:

$$\bar{T} := T_{(1)}^{\otimes n_1} \otimes T_{(2)}^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes T_{(r)}^{\otimes n_r}, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.4.10)$$

Прямое произведение представлений (3.4.10) действует в пространстве

$$\bar{\mathcal{V}} := \mathcal{V}_{(1)}^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{V}_{(2)}^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_{(r)}^{\otimes n_r}, \quad (3.4.11)$$

и в общем случае является приводимым. Элементы $X \in \mathcal{A}$ в представлении (3.4.10) записываются как операторы

$$\bar{T}(X) = \sum_{f=1}^r \left(I_{(1)}^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes I_{(f-1)}^{\otimes n_{f-1}} \otimes T_{(f)}^{\otimes n_f}(X) \otimes I_{(f+1)}^{\otimes n_{f+1}} \otimes \dots \otimes I_{(r)}^{\otimes n_r} \right), \quad (3.4.12)$$

действующие в пространстве (3.4.11), где операторы

$$T_{(f)}^{\otimes n_f}(X) = \sum_{k=1}^{n_f} \left(I_{(f)}^{\otimes k-1} \otimes T_{(f)}(X) \otimes I_{(f)}^{\otimes (n_f-k)} \right),$$

действуют в $\mathcal{V}_{(f)}^{\otimes n_f}$ и $I_{(f)}$ – единичные операторы в $\mathcal{V}_{(f)}$. Пусть $|\lambda_{(f)}\rangle$ – старшие вектора представлений $T_{(f)}$ в пространствах $\mathcal{V}_{(f)}$ с весами, равными фундаментальным весам

$$T_{(f)}(H_i)|\lambda_{(f)}\rangle = (\lambda_{(f)})_i |\lambda_{(f)}\rangle, \quad T_{(f)}(E_\alpha)|\lambda_{(f)}\rangle = 0 \quad (\forall \alpha > 0). \quad (3.4.13)$$

Рассмотрим специальный вектор в пространстве (3.4.11):

$$|\vec{n}\rangle = |\lambda_{(1)}\rangle^{\otimes n_1} \otimes |\lambda_{(2)}\rangle^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes |\lambda_{(r)}\rangle^{\otimes n_r}, \quad (3.4.14)$$

Здесь мы ввели краткое обозначение $\vec{n} = (n_1, \dots, n_r)$. Так как вектор (3.4.14) построен как прямое произведение старших векторов $|\lambda_{(i)}\rangle$ представлений $T_{(i)}$, то, во-первых, для всех положительных корней α , пользуясь представлением (3.4.12) и вторым уравнением в (3.4.13), мы имеем

$$\bar{T}(E_\alpha)|\vec{n}\rangle = 0, \quad (3.4.15)$$

а во-вторых, снова пользуясь представлением (3.4.12) и первым уравнением из (3.4.13), мы получаем, что вектор (3.4.14) – собственный для операторов $\bar{T}(H_i)$:

$$\bar{T}(H_i)|\vec{n}\rangle = \lambda_i^{(\vec{n})} |\vec{n}\rangle, \quad (3.4.16)$$

и его вес равен $\lambda^{(\vec{n})} = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)}$, где $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Отсюда следует, что вектор $|\vec{n}\rangle$ является старшим вектором для неприводимого представления (обозначим это представление как $T^{(\vec{n})}$) со старшим весом, равным (3.4.9) и принадлежащим подрешетке Λ^+ . Инвариантное подпространство $\mathcal{V}^{(\vec{n})} \subset \bar{\mathcal{V}}$ неприводимого подпредставления $T^{(\vec{n})}$ в \bar{T} конечномерно и порождается согласно пункту **С**. из Раздела **3.2** как линейная оболочка векторов

$$\dots \bar{T}(E_\gamma) \cdot \bar{T}(E_\beta) \cdot \bar{T}(E_\alpha) |\vec{n}\rangle, \quad (3.4.17)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – любые отрицательные корни алгебры \mathcal{A} (см. рассуждение в доказательстве первой части Теоремы **3.4.1**).

Для завершения доказательства Теоремы **3.4.5** остается убедиться в том, что каждый фундаментальный вес $\lambda_{(f)}$ простой алгебры Ли \mathcal{A} действительно является старшим весом, которому соответствует единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое конечномерное представление $T_{(f)}$ алгебры \mathcal{A} . Здесь мы не будем доказывать это утверждение. В следующем Разделе **3.4.2** для алгебр Ли классических серий $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$ мы явно построим эти представления $T_{(f)}$ (со старшими весами $\lambda_{(f)}$) и тем самым установим справедливость Теоремы **3.4.5** для алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$. ■

Следствие 1. Пусть w – элемент группы Вейля W . Согласно Теореме **3.2.1**, если μ – вес, то вектор $w \cdot \mu$ тоже вес. Из Теоремы **3.4.5** следует, что все вектора (3.4.9), находящиеся в положительной камере Вейля, являются весами (старшими весами). Так как группа Вейля действует на множестве камер Вейля транзитивно, то есть любую камеру Вейля V можно получить из положительной камеры Вейля действием некоторого элемента $w \in W$, то любой вектор (3.3.5), принадлежащий полной весовой решетке Λ и лежащий в V , можно получить из некоторого старшего веса действием элемента $w \in W$. Таким образом, все разрешенные веса μ , удовлетворяющие (3.2.10), действительно являются весами и условие (3.2.10) – достаточное условие того, чтобы μ был весом.

Следствие 2. Из Теоремы 3.4.5 и из формулы (3.4.9) следует, что старшие веса конечномерных неприводимых представлений $T^{(\vec{n})}$ простой алгебры Ли \mathcal{A} ранга r характеризуются набором r положительных целых чисел n_i ($i = 1, \dots, r$), которые указывают кратность вхождения веса $\lambda_{(i)}$ в сумму (3.4.9). Поскольку имеется взаимнооднозначное соответствие между фундаментальными весами $\lambda_{(i)}$ и простыми корнями $\alpha_{(i)}$, эти целые числа можно приписать вершинам диаграммы Дынкина алгебры \mathcal{A} . Соответствующая весовая диаграмма Дынкина будет обозначать неприводимое представление алгебры \mathcal{A} со старшим весом (3.4.9). Например, все неприводимые представления алгебры $sl(3, \mathbb{C})$ можно обозначить диаграммой $\overset{n_1}{\circ} \text{---} \overset{n_2}{\circ}$. В частности, определяющее и ко-определяющее представления алгебры $sl(3, \mathbb{C})$, рассмотренные в Примере 2, раздела 3.3 (см. Рис. 3.4), обозначаются соответственно следующим образом

$$\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \alpha^{(1)} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 0 \\ \circ \\ \alpha^{(2)} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} 0 \\ \circ \\ \alpha^{(1)} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \alpha^{(2)} \end{array} \quad . \quad (3.4.18)$$

То есть, старшим весом λ для определяющего представления является фундаментальный вес $\lambda_{(1)}$, а старшим весом для ко-определяющего представления — фундаментальный вес $\lambda_{(2)}$. Отметим, что неотрицательные целые числа n_i , задающие старший вес (3.4.9) и приписываемые вершинам диаграммы Дынкина, иногда называют **индексами Дынкина**.

В литературе также используют следующие обозначения для матриц элементов $X \in \mathcal{A}$ в неприводимом представлении $T^{(\vec{n})}$:

$$D_{\mu, \mu'}^{(\lambda)}(X) = D_{\mu, \mu'}^{(n_1, \dots, n_r)}(X) = \langle \mu | T^{(\vec{n})}(X) | \mu' \rangle , \quad (3.4.19)$$

где старший вес λ записывается согласно (3.4.9) в виде набора индексов Дынкина (n_1, \dots, n_r) , а μ и μ' нумеруют все базисные вектора в пространстве представления, то есть пробегают все возможные веса (с учетом их вырождения) данного представления со старшим весом λ .

3.4.2 Фундаментальные веса и классификация представлений алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$

В данном разделе мы укажем фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ для алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$ и построим представления $T_{(f)}$, для которых эти фундаментальные веса будут старшими весами. В определенном смысле (см. доказательство Теоремы 3.4.5) представления $T_{(f)}$ оказываются фундаментальными строительными блоками, из которых в соответствии с формулами (3.4.16) и (3.4.17) можно (рассматривая прямые произведения представлений $T_{(f)}$) сконструировать любое неприводимое конечномерное представление со старшим весом (3.4.9). Таким образом, знание фундаментальных весов простой комплексной алгебры Ли \mathcal{A} позволяет классифицировать все ее неприводимые конечномерные представления, каждое из которых соответствует старшему весу (3.4.9), или вершине подрешетки Λ^+ .

Подчеркнем еще раз, что в данной Главе речь идет о **комплексных** неприводимых конечномерных представлениях простых алгебр Ли.

Отметим, что веса (3.4.21) автоматически подчиняются условию доминантности (3.4.20); для дальнейшего нам удобно записать их единым образом:

$$\lambda_{(f)} = \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_f - \frac{f}{r+1}(1, 1, \dots, 1), \quad f = 1, \dots, r. \quad (3.4.22)$$

- *Задача 82.* В случае алгебры $sl(3, \mathbb{C})$ подобрать базис на двумерной плоскости P_u так, чтобы в этом базисе компоненты простых корней и фундаментальных весов, найденные в (3.1.14) и (3.4.21) (все — двумерные вектора) имели вид (3.3.10) и (3.3.12), соответственно.

Докажем теперь, что фундаментальные веса (3.4.21), (3.4.22) действительно являются старшими весами специальных неприводимых конечномерных представлений алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. Для этого мы построим эти представления явно.

Обозначим определяющее представление алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ как $T_{(1)}$ и пусть $\epsilon_{(i)}$ ($i = 1, \dots, r+1$) — единичные базисные вектора^{3.4} в $(r+1)$ -мерном комплексном пространстве \mathcal{V}_{r+1} представления $T_{(1)}$. Тогда, тензорные произведения $(\epsilon_{(i_1)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(i_f)})$ образуют базис в пространстве $\mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}$, элементами которого являются тензоры ранга f :

$$\Psi = \Psi^{i_1 \dots i_f} \cdot (\epsilon_{(i_1)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(i_f)}) \in \mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}, \quad (3.4.23)$$

где $\Psi^{i_1 \dots i_f} \in \mathbb{C}$ — компоненты тензора Ψ . Элемент X алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ действует в пространстве $\mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}$ представления $T_{(1)}^{\otimes f}$ стандартным образом:

$$T_{(1)}^{\otimes f}(X) = \sum_{k=1}^f (I_{r+1})^{\otimes(k-1)} \otimes T_{(1)}(X) \otimes (I_{r+1})^{\otimes(f-k)}, \quad (3.4.24)$$

где матрицы $T_{(1)}(X)$ элементов $X \in sl(r+1, \mathbb{C})$ в определяющем представлении даются (после разложения X по базису Картана) формулами (3.1.7) и (3.1.8) для образующих $H_i, E_\alpha \in sl(r+1, \mathbb{C})$. Отметим, что представление $T_{(1)}^{\otimes f}$ в общем случае приводимо.

Рассмотрим теперь подпространство в $\mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}$, состоящее из полностью антисимметричных тензоров $\Psi_{(a)}$, у которых компоненты $\Psi_{(a)}^{i_1 \dots i_f}$ в разложении (3.4.23) антисимметричны по всем своим индексам. Это подпространство обозначается как

$$\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f} \equiv \underbrace{\mathcal{V}_{r+1} \wedge \mathcal{V}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathcal{V}_{r+1}}_f \subset \mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}, \quad (3.4.25)$$

и его элементы записываются следующим образом

$$\Psi_{(a)} = \Psi_{(a)}^{i_1 \dots i_f} \cdot \epsilon_{(i_1)} \wedge \epsilon_{(i_2)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{(i_f)}, \quad (3.4.26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{(i_1)} \wedge \epsilon_{(i_2)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{(i_f)} &:= \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in S_f} (-1)^{p(\sigma)} \epsilon_{(i_{\sigma_1})} \otimes \epsilon_{(i_{\sigma_2})} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(i_{\sigma_f})} = \\ &= \epsilon_{(j_1)} \otimes \epsilon_{(j_2)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(j_f)} A^{j_1 \dots j_f}_{i_1 \dots i_f} = A \cdot (\epsilon_{(i_1)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(i_f)}), \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

^{3.4}Чтобы не путать базисные вектора пространства \mathcal{V}_{r+1} определяющего представления с базисными векторами $(r+1)$ -мерного вещественного пространства, в которое вложено корневое пространство $\mathfrak{R}_r = P_u$, мы обозначаем эти вектора по разному (соответственно как $\epsilon_{(i)}$ и $e^{(i)}$).

где сумма идет по всем перестановкам $\sigma: (1, 2, \dots, f) \rightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_f)$ из группы перестановок S_f , $p(\sigma)$ – четность перестановки σ , а оператор (проектор) A называется антисимметризатором ранга f и его матрица определяется следующим образом

$$A_{i_1 \dots i_f}^{j_1 \dots j_f} = \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in S_f} (-1)^{p(\sigma)} \delta_{i_{\sigma_1}}^{j_1} \dots \delta_{i_{\sigma_f}}^{j_f} \Rightarrow A^2 = A. \quad (3.4.28)$$

Элементы $\epsilon_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{(i_f)}$, которые даны в (3.4.27), образуют базис в $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$. Из формулы (3.4.24) непосредственно следует, что действие любого элемента X алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ в представлении $T_{(1)}^{\otimes f}$ коммутирует с действием антисимметризатора (3.4.28)

$$T_{(1)}^{\otimes f}(X) \cdot A = A \cdot T_{(1)}^{\otimes f}(X), \quad (3.4.29)$$

и таким образом $T_{(1)}^{\otimes f}(X)$ переводит полностью антисимметричный тензор (3.4.26) снова в полностью антисимметричный тензор. Поэтому, $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$ – инвариантное подпространство в $\mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}$, а представление $T_{(1)}^{\otimes f}$, ограниченное на подпространство (3.4.25) полностью антисимметричных тензоров (3.4.26), является неприводимым и обозначается $T_{(1)}^{\wedge f}$. Неприводимость представлений $T_{(1)}^{\wedge f}$ будет подробно обсуждаться в Главе 4. В частности, там будет показано, что представление $T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ неприводимо, так как неприводимо соответствующее представление $T_{(1)}^{\wedge f}$ группы Ли $SL(r+1, \mathbb{C})$. В свою очередь, неприводимость представления $T_{(1)}^{\wedge f}$ группы Ли $SL(r+1, \mathbb{C})$ следует из Утверждения 4.2.4 (см. конец раздела 4.2), а также из рассмотрения, проведенного в подразделе 4.4.1.

- *Задача 83. Доказать, что $\dim(\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}) = \frac{(r+1)!}{(r+1-f)!f!}$.*

Теперь мы готовы предъявить неприводимые конечномерные представления $T_{(f)}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, старшие веса которых равны фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$, указанным в (3.4.21).

Утверждение 3.4.6 *Фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ из (3.4.22) равны старшим весам неприводимых конечномерных представлений $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, которые действуют в пространствах (3.4.25) полностью антисимметричных тензоров (3.4.26) ранга f . В частности, первый фундаментальный вес $\lambda_{(1)}$ из (3.4.21) равен старшему весу определяющего представления $T_{(1)}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $f = 1$ и покажем, что фундаментальный вес $\lambda_{(1)}$ действительно равен старшему весу определяющего представления алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{V}_{r+1} . Выберем в \mathcal{V}_{r+1} ортонормированный базис, состоящий из единичных векторов $|\mu^{(k)}\rangle \equiv \epsilon_{(k)}$ с компонентами $(\epsilon_{(k)})_j = \delta_{kj}$, $(k, j = 1, \dots, r+1)$. Действуя на эти базисные вектора образующими H_i подалгебры Каргана, которые в определяющем представлении $T_{(1)}$ имеют вид диагональных матриц (3.1.8), находим все веса $\mu^{(k)}$ определяющего представления (они понадобятся нам далее):

$$H_i |\mu^{(k)}\rangle = \mu_i^{(k)} |\mu^{(k)}\rangle \Rightarrow \mu^{(k)} = e^{(k)} - \frac{1}{r+1} u, \quad k = 1, \dots, r+1 \quad (3.4.30)$$

где $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{r+1}$ и для краткости мы пишем H_i вместо $T_{(1)}(H_i)$. Веса $\mu^{(k)}$ из (3.4.30) и корни (3.1.11) связаны соотношениями $\mu^{(k)} + \alpha^{(ik)} = \mu^{(i)}$. Поэтому для $i < k$, когда корень $\alpha^{(ik)}$ – положительный, вес $\mu^{(k)}$ – не старший. Отсюда следует, что старший вес определяющего представления $T_{(1)}$ равен

$$\mu^{(1)} = e^{(1)} - \frac{1}{r+1} u = (1, 0, \dots, 0) - \frac{1}{r+1} (1, \dots, 1) \equiv \lambda_{(1)}, \quad (3.4.31)$$

то есть равен первому фундаментальному весу $\lambda_{(1)}$, который указан в (3.4.21); см. также формулу (3.4.22) при $f = 1$.

Соответствующий весу $\mu^{(1)} = \lambda_{(1)}$ старший вектор – это вектор $\epsilon_{(1)} \in \mathcal{V}_{r+1}$. В том, что $\epsilon_{(1)} = |\mu^{(1)}\rangle \in \mathcal{V}_{r+1}$ – действительно старший вектор определяющего представления алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, можно убедиться явно, проверив условия

$$E_{\alpha^{(i)}} |\mu^{(1)}\rangle = e_{i+1} \cdot \epsilon_{(1)} = 0. \quad (3.4.32)$$

Здесь использовано определяющее представление (3.1.7) корневых образующих $E_{\alpha^{(i)}}$. Условия (3.4.32) справедливы для всех i , то есть для всех простых корней $\alpha^{(i)}$, перечисленных в (3.1.14).

Итак, первый фундаментальный вес $\lambda_{(1)}$ равен старшему весу определяющего представления $T_{(1)}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. Рассмотрим теперь представление $T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. Возьмем в пространстве $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$ специальный вектор (сравните с (3.4.27))

$$|\lambda_{(f)}\rangle = \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in S_f} (-1)^{p(\sigma)} \epsilon_{(\sigma_1)} \otimes \epsilon_{(\sigma_2)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(\sigma_f)} = \epsilon_{(1)} \wedge \epsilon_{(2)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{(f)}, \quad (3.4.33)$$

где, так же как и в (3.4.27), сумма идет по всем перестановкам $\sigma \in S_f$ и $p(\sigma)$ – четность перестановки σ . Вектор (3.4.33) построен как внешнее (антисимметризованное) произведение первых f базисных векторов $\{\epsilon_{(1)}, \dots, \epsilon_{(f)}\}$ из набора всех базисных векторов $\epsilon_{(1)}, \dots, \epsilon_{(r+1)} \in \mathcal{V}_{r+1}$. Этот вектор удовлетворяет условиям

$$T_{(1)}^{\otimes f}(E_{\alpha^{(i)}}) |\lambda_{(f)}\rangle = 0, \quad (3.4.34)$$

для всех простых корней $\alpha^{(i)}$ и, как мы увидим ниже, оказывается собственным для образующих H_i подалгебры Картана в представлении (3.4.24), то есть для операторов $T_{(1)}^{\otimes f}(H_i)$.

• **Задача 84.** ★ Доказать, что вектор (3.4.33) удовлетворяет условиям (3.4.34).

Таким образом, (3.4.33) – старший вектор в инвариантном подпространстве $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f} \subset \mathcal{V}_{r+1}^{\otimes f}$ неприводимого представления $T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. Соответственно, вес вектора (3.4.33) является старшим весом неприводимого представления $T_{(1)}^{\wedge f}$. Для того, чтобы найти этот вес, подействуем на вектор (3.4.33) операторами $T_{(1)}^{\otimes f}(H_i)$ и воспользуемся формулой (3.4.30) для всех весов $\mu^{(k)}$ определяющего представления $T_{(1)}$. В результате для каждого $f \leq r$ мы получаем

$$T_{(1)}^{\otimes f}(H_i) |\lambda_{(f)}\rangle = \left(\sum_{k=1}^f T_{r+1}^{\otimes(k-1)} \otimes T_{(1)}(H_i) \otimes T_{r+1}^{\otimes(f-k)} \right) |\lambda_{(f)}\rangle = \left(\sum_{k=1}^f \mu_i^{(k)} \right) |\lambda_{(f)}\rangle, \quad (3.4.35)$$

где $i = 1, \dots, (r+1)$. Таким образом, вес старшего вектора $|\lambda_{(f)}\rangle \in \mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$, (старший вес представления $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$) равен

$$\sum_{k=1}^f \mu^{(k)} = \sum_{k=1}^f e^{(k)} - \frac{f}{r+1} u,$$

и совпадает с фундаментальным весом $\lambda_{(f)}$ из (3.4.22). \blacksquare

Итак, мы доказали, что фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$, заданные в (3.4.22), выступают в качестве старших весов неприводимых конечномерных представлений $T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ в пространствах $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$. Тем самым мы завершили доказательство Теоремы 3.4.5 для случая алгебр $sl(r+1, \mathbb{C})$.

Согласно Теореме 3.4.5 и ее доказательству, старшие веса всех конечномерных неприводимых представлений алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ определяются в (3.4.9) и принадлежат подмножеству Λ^+ , которое порождается фундаментальными весами (3.4.21), (3.4.22) и характеризуется векторами $\vec{n} = (n_1, \dots, n_r)$, где $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, в результате мы получаем [5]

$$\lambda^{(\vec{n})} = \sum_{f=1}^r n_f \cdot \lambda_{(f)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}) - \frac{n}{r+1} (1, 1, \dots, 1), \quad (3.4.36)$$

где $n_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda_{r+1} = 0$ и

$$\lambda_k - \lambda_{k+1} = n_k \Rightarrow \lambda_k = \sum_{f=k}^r n_f, \quad n = \sum_{k=1}^r \lambda_k = \sum_{f=1}^r f \cdot n_f \equiv |\lambda|. \quad (3.4.37)$$

Соответствующее неприводимое представление $T^{(\vec{n})}$ реализуется как подпредставление, вложенное в тензорное произведение (напомним, что $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$)

$$T_{(1)}^{\otimes n_1} \otimes T_{(2)}^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes T_{(r)}^{\otimes n_r}, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (3.4.38)$$

которое действует в пространстве

$$\mathcal{V}_{r+1}^{\otimes n_1} \otimes (\mathcal{V}_{r+1}^2)^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes (\mathcal{V}_{r+1}^r)^{\otimes n_r}. \quad (3.4.39)$$

Действительно, в пространстве (3.4.39) имеется старший вектор подпредставления $T^{(\vec{n})}$ со старшим весом (3.4.36) — это тензорное произведение старших векторов представлений $T_{(f)}$:

$$|\vec{n}\rangle = |\lambda_{(1)}\rangle^{\otimes n_1} \otimes |\lambda_{(2)}\rangle^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes |\lambda_{(r)}\rangle^{\otimes n_r}. \quad (3.4.40)$$

Все инвариантное подпространство $\mathcal{V}^{(\vec{n})}$ (в пространстве (3.4.39)) неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ со старшим весом (3.4.36) порождается (см. пункт С. Раздела 3.2 и Теорему 3.4.5) как линейная оболочка векторов

$$\dots T^{(\vec{n})}(E_\gamma) T^{(\vec{n})}(E_\beta) T^{(\vec{n})}(E_\alpha) |\vec{n}\rangle, \quad (3.4.41)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — отрицательные корни (3.1.13) алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, а операторы $T^{(\vec{n})}(E_\alpha)$ определены в соответствии с правилом (3.4.12) для тензорного произведения (3.4.38). Все вышесказанное приводит нас к следующему утверждению.

Утверждение 3.4.7 Любое конечномерное неприводимое представление $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ нумеруется старшим весом (3.4.36), или набором r неотрицательных целых чисел n_f , и строится как подпредставление в прямом произведении (3.4.38) представлений $T_{(f)}$ со старшими весами, равными фундаментальным весам (3.4.21), (3.4.22).

Согласно формулам для старших весов (3.4.9) и (3.4.36) целые числа n_i сопоставляются фундаментальным весам $\lambda_{(i)}$. В свою очередь, фундаментальные веса $\lambda_{(i)}$ в силу их определения (3.3.2) находятся во взаимнооднозначном соответствии с простыми корнями $\alpha^{(i)}$. Учитывая эти соответствия, представления $T^{(\vec{n})}$ со старшими весами (3.4.9), (3.4.36) изображаются в виде весовой диаграммы Дынкина, как это показано на Рис. 3.6 (сравните с (3.4.18)).

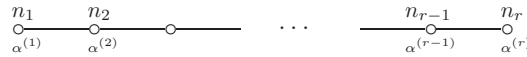


Рис. 3.6: Весовая диаграмма Дынкина для представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ со старшим весом (3.4.36).

Так как любое фундаментальное представление^{3.5} $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ согласно Утверждению 3.4.6 строится как подпредставление в прямом произведении f определяющих представлений $T_{(1)}$, а любое неприводимое конечномерное представление $T^{(\vec{n})}$ строится как подпредставление в прямом произведении (3.4.38) фундаментальных представлений $T_{(f)}$, то мы имеем еще одно важное утверждение, которое понадобится нам в следующей Главе 4.

Утверждение 3.4.8 Любое конечномерное неприводимое представление $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ со старшим весом (3.4.36) строится как подпредставление в прямом произведении $T_{(1)}^{\otimes n}$ определяющих представлений $T_{(1)}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$, где степень n дается формулой $n = \sum_{f=1}^r f \cdot n_f$; см. (3.4.37).

Замечание 1. Старший вес (3.4.36) неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ определяется набором целых чисел λ_i ($i = 1, \dots, r$), которые согласно (3.4.37) упорядочены $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$, а их сумма равна n . Набор $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ целых неотрицательных чисел с указанными свойствами называется разбиением числа n и обозначается как $\Lambda \vdash n$. Таким образом, каждому старшему весу $\lambda^{(\vec{n})} \in \Lambda^+$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ (или неприводимому конечномерному представлению $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$) сопоставляется разбиение $\Lambda \vdash n$, или диаграмма Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ с n клетками, у которой первая строка состоит из λ_1 клеток, вторая – из λ_2 клеток и т.д., и последняя r -я строка состоит из λ_r клеток. Разбиения и диаграммы Юнга рассматривались нами при обсуждении группы перестановок в Разделе I-1.1.4 первой части книги (см. также Замечание 2 и Разделы 4.3, 4.4 ниже). Целые числа $\lambda_k \geq 0$, определяющие вид диаграммы Юнга, и целые числа

^{3.5}Мы используем терминологию, принятую в математической литературе, и называем фундаментальным представление, в котором старший вес является фундаментальным. В физической литературе фундаментальным называют только одно из фундаментальных представлений, а именно определяющее представление.

$n_f \geq 0$, фиксирующие старший вес (3.4.9) неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ (приписанные вершинам диаграммы Дынкина на Рис. 3.6), связаны соотношениями (3.4.37). В частности для старших весов, равных фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$, сравнивая (3.4.22) и (3.4.36), мы имеем

$$n_i = \delta_{if} \iff \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r] = \underbrace{[1, \dots, 1, 0, \dots, 0]}_f \equiv [1^f].$$

Таким образом, неприводимым представлениям $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$, старшие веса которых равны фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$, и которые действуют в пространствах полностью антисимметричных тензоров (3.4.26) ранга f , сопоставляется диаграмма Юнга, состоящая из одного столбца высотой f :

$$T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f} \iff [1^f] = \left. \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} f. \quad (3.4.42)$$

Клеткам диаграммы в правой части (3.4.42), начиная с верхней клетки, можно приписать индексы (i_1, \dots, i_f) антисимметричных компонент $\Psi_{(a)}^{i_1 \dots i_k}$ и считать, что получившаяся таблица соответствует полностью антисимметричному тензору (3.4.26), пространство которых есть пространство неприводимого представления $T_{(1)}^{\wedge f}$.

Замечание 2. Пространство $\mathcal{V}^{(\vec{n})}$ неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$ со старшим весом (3.4.36), которое порождается из старшего вектора $|\vec{n}\rangle$ как линейная оболочка векторов (3.4.41), является пространством тензоров ранга $n = \sum_{f=1}^r f \cdot n_f$. Симметрия этих тензоров (см. ниже Раздел 4.4.1) определяется диаграммой Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ с $n = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i$ клетками. Поясним это утверждение.

Запишем тензорное произведение (3.4.38) в обратном порядке, и при этом воспользуемся графическим представлением (3.4.42). В результате получаем равенство, которое дано на Рис. 3.7. Приводимое представление \bar{T} алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$, которое изображено на Рис. 3.7, реализуется в пространстве тензоров Ψ ранга $n = \sum_f f \cdot n_f$. Приписывая индексы (i_1, \dots, i_n) компонент $\Psi^{i_1 \dots i_n}$ тензора Ψ клеткам диаграмм, изоб-

$$\bar{T} = T_{(r)}^{\otimes n_r} \otimes \dots \otimes T_{(2)}^{\otimes n_2} \otimes T_{(1)}^{\otimes n_1} = r \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}^{\otimes n_r} \otimes (r-1) \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}^{\otimes n_{r-1}} \otimes \dots \otimes \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}^{\otimes n_2} \otimes \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}^{\otimes n_1}$$

Рис. 3.7: Графическое изображение для представления (3.4.38) алгебры Ли $sl(r + 1, \mathbb{C})$.

раженным в правой части Рис. 3.7 (там имеется n_r столбцов высотой r , n_{r-1} столбцов высотой $(r - 1)$ и т.д.), мы видим, что пространство $\bar{\mathcal{V}}$ представления \bar{T} образовано тензорами Ψ с компонентами $\Psi^{i_1 \dots i_n}$, обладающими определенной антисимметрией по перестановке индексов, а именно компоненты $\Psi^{i_1 \dots i_n}$ будут антисимметричны по перестановкам тех индексов, которые попали в один и тот же столбец в правой части Рис. 3.7. При выделении из $\bar{\mathcal{V}}$ инвариантного подпространства неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$, которое порождается из старшего вектора (тензора) (3.4.40) как

линейная оболочка векторов (3.4.41), антисимметрия компонент тензоров Ψ по перестановкам индексов, располагающихся в столбцах, вообще говоря не сохранится, а действие операторов $T^{(\vec{n})}(E_\alpha)$ в (3.4.41) будет приводить к симметризации индексов компонент $\Psi^{i_1 \dots i_n}$, попавших в разные столбцы в правой части Рис. 3.7. В результате диаграмма Юнга, определяющая указанную только что симметрию тензоров, которые образуют пространство неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$, получается из Рис. 3.7 склейкой столбцов, как это изображено на Рис. 3.8

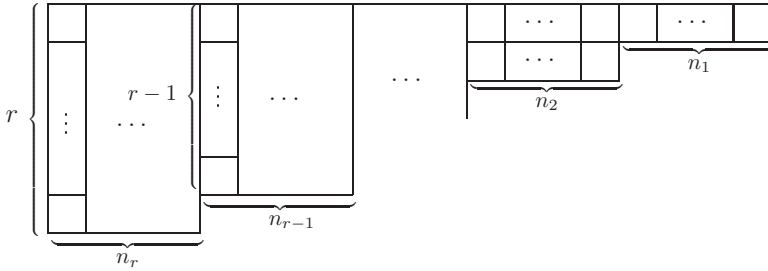


Рис. 3.8: Диаграмма Юнга Λ , состоящая из n_r столбцов высоты r , n_{r-1} столбцов высоты $(r - 1)$ и так далее. У диаграммы Λ первая строка имеет длину $\lambda_1 = n_r + \dots + n_2 + n_1$, вторая строка имеет длину $\lambda_2 = n_r + \dots + n_2$ и так далее, до последней строки, которая имеет длину $\lambda_r = n_r$, то есть $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$.

Получившаяся диаграмма Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ совпадает с диаграммой Юнга, о которой шла речь выше в Замечании 1. (см. равенства (3.4.37)). Эта диаграмма определяет симметрию тензоров Ψ ранга n , которые образуют пространство неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$. Как именно диаграммы Юнга связаны с симметрией тензоров из пространств неприводимых представлений группы $SL(r + 1, \mathbb{C})$ (алгебры Ли $sl(r + 1, \mathbb{C})$), мы обсудим в подразделе 4.4.1.

2.1 Конечномерные неприводимые представления алгебры $gl(r + 1, \mathbb{C})$.

Ниже в разделе 3.5.2, который посвящен выводу явных формул для характеров представлений линейных групп, а также в конце раздела 4.6.5 при обсуждении базиса Гельфанда–Цетлина в пространствах представлений алгебр Ли, нам понадобятся некоторые факты о представлениях со старшим весом непростых алгебр $gl(r + 1, \mathbb{C})$ и $u(r + 1)$.

Все построения неприводимых комплексных представлений алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$, которые обсуждались выше, легко переносятся на случай представлений алгебры $gl(r + 1, \mathbb{C})$ (и ее вещественной компактной формы $u(r + 1)$). Базис в алгебре $gl(r + 1, \mathbb{C})$ задается в определяющем представлении теми же корневыми образующими (3.1.7) и картановскими элементами (сравните с (3.1.8))

$$H_i^j \equiv e_{ii} \quad (i = 1, \dots, r + 1), \tag{3.4.43}$$

которые уже не удовлетворяют sl -условию (3.1.9). Таким образом, подалгебра Картана в $gl(r + 1, \mathbb{C})$ является расширением (за счет добавления к ней единичной матрицы) подалгебры Картана в $sl(r + 1, \mathbb{C})$ и пространство \mathfrak{A}_{r+1} весов алгебры $gl(r + 1, \mathbb{C})$

имеет размерность, равную $(r+1)$, так как определяется как пространство векторов $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$ с компонентами μ_i такими, что

$$H'_i |\mu\rangle = \mu_i |\mu\rangle,$$

где $|\mu\rangle$ – вектора из пространства некоторого представления алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$.

Так как корневые образующие (3.1.7) алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ совпадают с корневыми образующими алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$, а подалгебра Картана алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ вложена в подалгебру Картана алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$ (сравните базисные элементы (3.1.8) и (3.4.43)), то корневые вектора $\alpha^{(kl)}$ алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$, которые определяются теми же коммутационными соотношениями (3.1.10) (элементы H_i отличаются от H'_i сдвигом на оператор, пропорциональный единичному), совпадают с корневыми векторами (3.1.11) алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ и следовательно будут совпадать их корневые пространства. Напомним, что корневое пространство алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ – это r -мерная гиперплоскость P_u в \mathfrak{V}_{r+1} , которая ортогональна вектору $u = (1, \dots, 1)$. Таким образом, в отличие от простых алгебр Ли, у непростых алгебр Ли $gl(r+1, \mathbb{C})$ и $u(r+1)$ корневое пространство не совпадает с пространством весов \mathfrak{V}_{r+1} (корневое пространство вложено в \mathfrak{V}_{r+1} как подпространство).

Из всего сказанного выше следует, что, во-первых, у алгебр $sl(r+1, \mathbb{C})$ и $gl(r+1, \mathbb{C})$ совпадают группы Вейля, а во-вторых, если мы оставим в стороне одномерные представления, то старшие вектора в пространствах неприводимых представлений алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ одновременно будут и старшими векторами в пространствах неприводимых представлений алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$, поэтому у этих алгебр имеется взаимнооднозначное соответствие (с точностью до умножения на одномерные представления) между неприводимыми представлениями со старшим весом. В частности, старшие вектора $|\lambda_{(f)}\rangle$ в пространствах фундаментальных представлений алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, которые определялись в (3.4.33), могут рассматриваться в качестве старших векторов в пространствах фундаментальных представлений $T_{(f)}$ алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$. Представления $T_{(f)}$ ($f = 1, \dots, r, r+1$) алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$ действуют в тех же пространствах $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$ полностью антисимметричных тензоров ранга f , что и фундаментальные представления алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. Здесь $\mathcal{V}_{r+1} = \mathbb{C}^{r+1}$ – пространство определяющего представления алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$, которое отождествляется с пространством определяющего представления алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. Отметим, однако, что в gl -случае имеется дополнительное нетривиальное одномерное фундаментальное представление $T_{(r+1)}$ (имеет старший вес, равный вектору $u = (1, \dots, 1)$), которое в sl -случае – тривиально (имеет старший вес, равный нулю) и поэтому оно не возникло в предыдущем рассмотрении. Кроме того, в силу различий в определении образующих подалгебр Картана (3.1.8) и (3.4.43), старшие веса $\lambda_{(f)}$ представлений $T_{(f)}$ алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$, соответствующие векторам $|\lambda_{(f)}\rangle$, будут отличаться от старших весов (3.4.22) представлений $T_{(f)}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$. А именно, имеет место следующий аналог Утверждения 3.4.6.

Утверждение 3.4.9 *Веса $\lambda_{(f)} \in \mathfrak{V}_{r+1}$ неприводимых конечномерных представлений $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$ (алгебры $u(r+1)$), которые действуют в пространствах $\mathcal{V}_{r+1}^{\wedge f}$ полностью антисимметричных тензоров ранга f , равны (сравните с (3.4.22))*

$$\lambda_{(f)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_f, 0, \dots, 0), \quad f = 1, \dots, r+1. \quad (3.4.44)$$

Доказательство. Необходимо доказать соотношения $H'_i |\lambda_{(f)}\rangle = (\lambda_{(f)})_i |\lambda_{(f)}\rangle$, где $(\lambda_{(f)})_i$ — компоненты весов (3.4.44). Эти соотношения вытекают из соотношений (3.4.35), если в них учесть связь $H_i = H'_i - \frac{1}{r+1}I_{r+1}$ образующих (3.1.8) и (3.4.43). ■

Согласно общей теории все конечномерные неприводимые представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$ будут характеризоваться старшими весами (3.4.9):

$$\lambda^{(\vec{n})} = \sum_{f=1}^{r+1} n_f \lambda_{(f)} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}) \in \mathfrak{A}_{r+1} \quad (n_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad (3.4.45)$$

где $\lambda_k = \sum_{f=k}^{r+1} n_f$ и соответственно мы имеем

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{r+1} \geq 0. \quad (3.4.46)$$

Такой вес можно представить графически в виде диаграммы Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}]$, то есть в виде диаграммы, изображенной на Рис.3.8, к которой слева необходимо добавить n_{r+1} столбцов высотой $(r+1)$ (что соответствует умножению представления с диаграммой $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ на n_{r+1} одномерных представлений $T_{(r+1)}$). Таким образом, неприводимые конечномерные представления алгебры $gl(r+1, \mathbb{C})$, а также ее компактной вещественной формы $u(r+1)$, классифицируются с помощью диаграмм Юнга, которые имеют не более $(r+1)$ строк.

3. Конечномерные неприводимые представления алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ (серия D_r).

Корни алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ приведены в (3.1.25), а система простых корней этой алгебры определена в (3.1.27) (см. Раздел 3.1). Подставим простые корни (3.1.27) в равенства (3.3.2). В результате мы получаем систему линейных уравнений на координаты $(\lambda_{(i)})_j$ ($i, j = 1, \dots, r$) фундаментальных весов $\lambda_{(i)} \in \mathfrak{A}_r$. Решая эту систему, мы получаем, что фундаментальные веса $\lambda_{(i)}$ алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$, как вектора в r -мерном корневом пространстве \mathfrak{A}_r , записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} &= (1, 0, 0, \dots, 0) = e^{(1)}, \quad \lambda_{(2)} = (1, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \\ \lambda_{(r-2)} &= (1, 1, \dots, 1, 0, 0), \quad \lambda_{(r-1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \lambda_{(r)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

Пусть $f = 1, \dots, r-2$. Построим неприводимые конечномерные представления $T_{(f)}$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ со старшими весами, равными фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$ из (3.4.47). Веса $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$ пока рассматривать не будем.

Сначала покажем, что старший вес определяющего представления $T_{(1)}$ алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ равен фундаментальному весу $\lambda_{(1)} = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Выберем в пространстве \mathcal{V}_{2r} определяющего представления алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ ортонормированные базисные вектора $\epsilon^{(k)} = |\mu^{(k)}\rangle$ ($k = 1, \dots, 2r$). Эти вектора согласно явному виду (3.1.18) образующих H_i ($i = 1, \dots, r$) подалгебры Картана в определяющем представлении соответствуют весам

$$\mu^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k')} \in \mathfrak{A}_r, \quad k = 1, \dots, 2r, \quad (3.4.48)$$

что вытекает из формулы ($m = 1, \dots, 2r$)

$$(H_i \epsilon^{(k)})_m = (e_{ii} - e_{i'i'})_{m\ell} \epsilon_\ell^{(k)} = (\delta_{ik} - \delta_{i'k}) \epsilon_m^{(k)} \Rightarrow \mu_i^{(k)} = e_i^{(k)} - e_i^{(k')},$$

где $i = 1, \dots, r$ и мы учли, что координаты векторов $\epsilon_\ell^{(k)}$ равны $\epsilon_\ell^{(k)} = \delta_\ell^k$. Веса (3.4.48) и корни (3.1.25) алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ связаны соотношениями

$$\mu^{(k)} - \mu^{(\ell)} = \alpha_-^{(k,\ell)} \quad (k, \ell \leq r), \quad \mu^{(k)} - \mu^{(\ell)} = \alpha_+^{(k,\ell')} \quad (k \leq r, \ell > r).$$

Для $k < \ell \leq r$ и $k \leq r < \ell$ корни $\alpha_-^{(k,\ell)}$ и $\alpha_+^{(k,\ell')}$ положительны (в обоих случаях $k < \ell$). Отсюда следует, что старший вес определяющего представления алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ равен

$$\mu_i^{(1)} = e_i^{(1)} - e_i^{(2r)} = \delta_{1i} \Rightarrow \mu^{(1)} = (1, 0, \dots, 0) \equiv \lambda_{(1)}.$$

Таким образом, старший вес $\mu^{(1)}$ определяющего представления $T_{(1)}$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ равен первому фундаментальному весу $\lambda_{(1)}$ из (3.4.47).

Теперь, так же как и в случае алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, представления $T_{(f)}$ алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ со старшими весами, равными фундаментальному весам $\lambda_{(f)}$ ($f = 2, \dots, r-2$), перечисленным в (3.4.47), строятся как прямое произведение определяющих представлений $T_{(1)}$ в пространстве

$$\underbrace{\mathcal{V}_{2r} \wedge \mathcal{V}_{2r} \wedge \dots \wedge \mathcal{V}_{2r}}_f \equiv (\mathcal{V}_{2r})^{\wedge f}, \quad (3.4.49)$$

со старшими векторами (3.4.33). Действие образующих подалгебры Картана в представлении (3.4.24), где H_i определены в (3.1.18), на вектора (3.4.33) дает веса, равные фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$ ($f = 2, \dots, r-2$).

- *Задача 85. Доказать последние утверждения.*

Представления $T_{(r-1)}$ и $T_{(r)}$ со старшими весами, равными фундаментальным весам $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$, которые указаны в списке (3.4.47), не могут быть получены из прямого произведения определяющих представлений $T_{(1)}$, так как в определяющем представлении у операторов H_i имеются только два собственных значения $+1$ и -1 , и получить координаты весов, равные $1/2$, невозможно. Однако, представления $T'_{(r-1)}$ и $T'_{(r)}$ со старшими весами

$$\begin{aligned} \lambda'_{(r-1)} &= \lambda_{(r-1)} + \lambda_{(r)} = (1, 1, \dots, 1, 0), \\ \lambda'_{(r)} &= 2\lambda_{(r)} = (1, 1, \dots, 1), \end{aligned} \quad (3.4.50)$$

строятся как антисимметризованные прямые произведения определяющих представлений $T_{(1)}$, действующие в пространствах (3.4.49) для $f = r-1$ и $f = r$, соответственно.

Представления $T_{(r-1)}$ и $T_{(r)}$ со старшими весами $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$ называются спинорными представлениями алгебры $so(2r, \mathbb{C})$. Эти представления неэквивалентны и будут обсуждаться ниже в разделе 5.4.1, а также в разделах 6.2.2 и 6.4.1. В частности в Разделе 6.4.1 (см. Задачу 200) будет показано, что определяющее представление $T_{(1)}$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ можно построить как подпредставление в прямом произведении двух спинорных представлений $T_{(r-1)} \otimes T_{(r)}$ при четном r и $T_{(r-1)} \otimes T_{(r-1)}$ (а

также $T_{(r)} \otimes T_{(r)}$ при нечетном r . Отсюда, и из утверждения о том, что все конечномерные неприводимые представления простой алгебры \mathcal{A} строятся как подпредставления в прямом произведении (3.4.10) представлений $T_{(f)}$ (см. доказательство Теоремы 3.4.5), следует, что все конечномерные неприводимые представления алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ строятся как подпредставления в прямом произведении $T_{(r-1)}^{\otimes N_1} \otimes T_{(r)}^{\otimes N_2}$ спинорных представлений $T_{(r-1)}$ и $T_{(r)}$, где $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

4. Конечномерные неприводимые представления алгебр $so(2r + 1, \mathbb{C})$ (серия B_r).

Все корни алгебры Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$ перечислены в (3.1.28), а система простых корней дана в (3.1.29) (см. Раздел 3.1). Решетка весов Λ для всех конечномерных представлений алгебры Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$ и симметрия решетки Λ относительно вейлевских отражений рассматривались в Примере 2. раздела 3.2; см. формулы (3.2.25) и (3.2.26). Фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ ($f = 1, \dots, r$) алгебры Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$, как вектора в r -мерном корневом пространстве \mathfrak{A}_r , определяются соотношениями (3.3.2). Подставляя в эти соотношения простые корни (3.1.29) и решая получившиеся уравнения, мы находим

$$\lambda_{(1)} = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \lambda_{(2)} = (1, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \lambda_{(r-1)} = (1, 1, \dots, 1, 0), \quad (3.4.51)$$

$$\lambda_{(r)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right).$$

Покажем, что фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ ($f = 1, \dots, r-1$) из (3.4.51) равны старшим весам специальных неприводимых конечномерных представлений $T_{(f)}$ алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$ (отметим, что пока мы оставляем в стороне последний вес $\lambda_{(r)}$). Действительно, как и в случае представлений алгебр Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ и $so(2r, \mathbb{C})$, представления $T_{(f)}$ ($f = 1, \dots, r-1$) алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$ со старшими весами, равными $\lambda_{(f)}$, строятся как подпредставления в прямом произведении определяющих представлений $T_{(1)}$, и действуют в пространствах $\mathcal{V}_{2r+1}^{\wedge f} \subset \mathcal{V}_{2r+1}^{\otimes f}$ антисимметричных тензоров ранга f . Здесь \mathcal{V}_{2r+1} — $(2r + 1)$ -мерное пространство определяющего представления $T_{(1)}$ алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$. В частности, представление со старшим весом $\lambda_{(1)}$ эквивалентно определяющему представлению $T_{(1)}$ алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{V}_{2r+1} .

- **Задача 86.** Введем в пространстве \mathcal{V}_{2r+1} стандартный ортонормированный базис векторов $\epsilon_{(a)}$ ($a = 1, \dots, 2r + 1$) с координатами $(\epsilon_{(a)})_b = \delta_{ab}$. Пользуясь явным видом (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21), образующих H_i и E_α алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$ в определяющем представлении, показать, что $\epsilon_{(1)}$ — старший вектор в пространстве \mathcal{V}_{2r+1} определяющего представления $T_{(1)}$ со старшим весом, равным $\lambda_{(1)}$. Показать, что тензоры (сравните с (3.4.33))

$$|\lambda_{(f)}\rangle = \epsilon_{(1)} \wedge \epsilon_{(2)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{(f)}, \quad f = 1, \dots, r-1, \quad (3.4.52)$$

где $\epsilon_{(a)}$ — базисные вектора в \mathcal{V}_{2r+1} , являются старшими векторами в пространствах $\mathcal{V}_{2r+1}^{\wedge f}$ неприводимых представлений $T_{(f)}$ со старшими весами, равными фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$ ($f = 1, \dots, r-1$) из списка (3.4.51).

Последний фундаментальный вес $\lambda_{(r)}$ в (3.4.51) равен старшему весу специального неприводимого представления $T_{(r)}$, которое называется спинорным и не может

быть получено как подпредставление в прямом произведении $T_{(1)}^{\otimes N}$ определяющих представлений $T_{(1)}$. Это следует из того факта, что собственными значениями образующих H_i в определяющем представлении (3.1.18) являются числа ± 1 , так что компоненты $1/2$ веса $\lambda_{(r)}$ как собственные значения образующих H_i в представлении $T_{(1)}^{\otimes N}$ получены быть не могут. Однако, так же как и в случае алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, представление $T'_{(r)}$ со старшим весом

$$\lambda'_{(r)} = 2\lambda_{(r)} = (1, 1, \dots, 1), \quad (3.4.53)$$

строится как антисимметризованное подпредставление в $T_{(1)}^{\otimes r}$, действующее в пространстве $\mathcal{V}_{2r+1}^{\wedge r}$. Старший вектор для этого представления с весом (3.4.53) дается формулой (3.4.52) для $f = r$ (см. Задачу 86).

Отметим, что для алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ мы имеем только *одно* спинорное представление, в отличие от алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, у которой имеется *два* неэквивалентных спинорных представления со старшими весами $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$ (см. (3.4.47)). Спинорное представление $T_{(r)}$ алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ будет рассмотрено ниже, в Разделах 5.4.2, 6.2.2 и 6.4.1. В частности, там будет показано, что определяющее представление $T_{(1)}$ алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ можно выделить в прямом произведении спинорных представлений $T_{(r)} \otimes T_{(r)}$. Тогда, пользуясь утверждением о том, что любое конечномерное неприводимое представление простой алгебры \mathcal{A} строится как подпредставление в прямом произведении (3.4.10) представлений $T_{(f)}$ (см. доказательство Теоремы 3.4.5), мы получаем, что любое конечномерное неприводимое представление алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ выделяется как подпредставление в прямом произведении $T_{(r)}^{\otimes M}$ спинорных представлений, где показатель M равен $M = 2 \sum_{f=1}^{r-1} f \cdot n_f + r \cdot n_r$.

В заключение этого пункта сделаем общее замечание, касающееся представлений алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r+1, \mathbb{C})$.

Замечание 3. Рассуждая так же как и в случае алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ (см. конец пункта 3 выше), мы получаем, что все неэквивалентные представления алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r+1, \mathbb{C})$, которые выделяются из прямого произведения определяющих представлений, вкладываются в

$$\begin{aligned} \bar{T} &= T'_{(r)}{}^{\otimes n_r} \otimes T'_{(r-1)}{}^{\otimes n_{r-1}} \otimes \dots \otimes T_{(2)}{}^{\otimes n_r} \otimes T_{(1)}{}^{\otimes n_r} \quad (\text{для } so(2r, \mathbb{C})), \\ \bar{T} &= T'_{(r)}{}^{\otimes n_r} \otimes T'_{(r-1)}{}^{\otimes n_{r-1}} \otimes \dots \otimes T_{(2)}{}^{\otimes n_r} \otimes T_{(1)}{}^{\otimes n_r} \quad (\text{для } so(2r+1, \mathbb{C})), \end{aligned}$$

(представления $T'_{(r-1)}$, $T'_{(r)}$ со старшими весами (3.4.50) и (3.4.53) не являются фундаментальными). При этом, так же как и в случае алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, старшие веса равны

$$\lambda = \sum_{i=1}^{r-2} n_i \lambda_{(i)} + n_{r-1} \lambda'_{(r-1)} + n_r \lambda'_{(r)} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathfrak{Y}_r \quad (n_k, \lambda_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad (3.4.54)$$

и

$$\lambda = \sum_{i=1}^{r-1} n_i \lambda_{(i)} + n_r \lambda'_{(r)} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathfrak{Y}_r \quad (n_k, \lambda_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad (3.4.55)$$

для представлений алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r+1, \mathbb{C})$, соответственно. Старшие веса (3.4.54) и (3.4.55) можно ассоциировать с диаграммой Юнга $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$ (см. Рис.3.8), у которой число строк не превышает r .

5. Конечномерные неприводимые представления алгебр $sp(2r, \mathbb{C})$ (серия C_r).

Корни алгебры Ли $sp(2r, \mathbb{C})$ перечислены в (3.1.35), а система простых корней дана в (3.1.38) (см. Раздел 3.1). С учетом явного вида простых корней (3.1.38), уравнения (3.3.2) дают следующую систему фундаментальных весов для алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} &= (1, 0, 0, \dots, 0) = e^{(1)}, \quad \lambda_{(2)} = (1, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \\ \lambda_{(r-1)} &= (1, 1, \dots, 1, 0), \quad \lambda_{(r)} = (1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned} \tag{3.4.56}$$

Все представления $T_{(f)}$ алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ со старшими весами, равными фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$, которые перечислены в (3.4.56), действуют в пространствах (3.4.49) и реализуются как антисимметричные тензорные произведения определяющего представления $T_{(1)}$ с весом $\lambda_{(1)}$. Отсюда и из формулы (3.4.9) следует, что все конечномерные неприводимые представления алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ можно построить как подпредставления в прямом произведении определяющих представлений $T_{(1)}$ алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$. Все эти неприводимые представления, имеющие старшие веса (3.4.9):

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathfrak{Y}_r \quad (n_k, \lambda_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \tag{3.4.57}$$

будут строиться как неприводимое подпредставление в

$$\bar{T} = T_{(r)}^{\otimes n_r} \otimes T_{(r-1)}^{\otimes n_{r-1}} \otimes \dots \otimes T_{(2)}^{\otimes n_2} \otimes T_{(1)}^{\otimes n_1}.$$

При этом, так же как и в случае алгебр $sl(r+1, \mathbb{C})$, $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r+1, \mathbb{C})$, старший вес (3.4.57) можно ассоциировать с диаграммой Юнга на Рис.3.8, у которой число строк, не превышает ранг r алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$.

Итак, в пунктах 2. – 5. этого раздела мы продемонстрировали, что фундаментальные веса алгебр $sl(r+1, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$ действительно равны старшим весам неприводимых конечномерных представлений $T_{(f)}$ этих алгебр. Все представления $T_{(f)}$ были построены явно, за исключением спинорных представлений алгебр $so(n, \mathbb{C})$, о которых речь пойдет ниже, в разделе 5.4. Тем самым мы завершили доказательство Теоремы 3.4.5 для случая простых алгебр Ли классических серий.

6. Примеры.

Приведем три конкретных примера, связанных со "случайными" изоморфизмами (см. раздел I-2.2.12 первой части книги): $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$, $so(5, \mathbb{C}) = sp(4, \mathbb{C})$ и $so(6, \mathbb{C}) = sl(4, \mathbb{C})$, и обсудим соответствие между представлениями с фундаментальными весами этих алгебр.

Пример 1: $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$.

Для алгебры $so(4, \mathbb{C})$, рассматривая ее как частный случай общей алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ (см. выше пункт 3 данного раздела), согласно (3.4.47) мы имеем следующие фундаментальные веса $\lambda_{(1)} = (1/2, -1/2)$ и $\lambda_{(2)} = (1/2, 1/2)$, которые, как было указано выше в пункте 3, должны соответствовать двум неэквивалентным спинорным представлениям алгебры $so(4, \mathbb{C})$. У полупростой алгебры $sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$ корневое пространство $\mathfrak{Y}_2 = \mathbb{R}^2$ также двумерно (прямая сумма двух одномерных корневых

пространств слагаемых $sl(2, \mathbb{C})$) и, как следует из Примера 1 Раздела 3.3 и пункта 1 данного раздела, имеется два простых корня $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и соответственно два фундаментальных веса $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$. Алгебры $so(4, \mathbb{C})$ и $sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$ изоморфны друг другу, поэтому два неприводимых представления $so(4, \mathbb{C})$, со старшими весами, равными фундаментальным весам $\lambda_{(1)} = (1/2, -1/2)$ и $\lambda_{(2)} = (1/2, 1/2)$, должны быть эквивалентны двум фундаментальным представлениям алгебры $sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$ с весами $\lambda'_{(1)} = (\frac{1}{2}, 0)$ и $\lambda'_{(2)} = (0, \frac{1}{2})$, которые, таким образом, играют роль спинорных представлений^{3.6} для $so(4, \mathbb{C})$. Отметим, что здесь из формулы (3.4.9) естественно возникает стандартное обозначение:

$$(j_1, j_2) \equiv n_1 \lambda'_{(1)} + n_2 \lambda'_{(2)} = \left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2} \right), \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

для неприводимых представлений полупростой алгебры $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$, где $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$ — веса (спины) представлений первой и второй подалгебр $sl(2, \mathbb{C})$, соответственно.

Пример 2: $so(5, \mathbb{C}) = sp(4, \mathbb{C})$.

Для алгебры $so(5, \mathbb{C})$ согласно (3.4.51) мы имеем фундаментальные веса $\lambda_{(1)} = (1, 0)$ и $\lambda_{(2)} = (1/2, 1/2)$, которые являются старшими весами определяющего и (единственного) спинорного представлений. Для алгебры $sp(4, \mathbb{C})$ мы получаем фундаментальные веса $\lambda'_{(1)} = (1, 0)$ и $\lambda'_{(2)} = (1, 1)$, которые соответственно равны старшему весу определяющего четырехмерного представления в пространстве \mathcal{V}_4 и старшему весу антисимметричного **неприводимого** представления алгебры $sp(4, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathcal{V}_4^{\wedge 2}$. Так как антисимметричное представление алгебры $sp(4, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathcal{V}_4^{\wedge 2}$ приводимо и содержит одномерное подпредставление, то антисимметричное **неприводимое** представление с весом $\lambda'_{(2)} = (1, 1)$ алгебры $sp(4, \mathbb{C})$ имеет размерность $4 \cdot 3/2 - 1 = 5$, которая равна размерности определяющего представления алгебры $so(5, \mathbb{C})$ с весом $\lambda_{(1)} = (1, 0)$. В силу совпадения размерностей представление $\lambda'_{(2)} = (1, 1)$ алгебры $sp(4, \mathbb{C})$ должно быть отождествлено с определяющим представлением $\lambda_{(1)} = (1, 0)$ алгебры $so(5, \mathbb{C})$, а оставшееся определяющее четырехмерное представление (со старшим весом $\lambda'_{(1)} = (1, 0)$) алгебры $sp(4, \mathbb{C})$ отождествляется со спинорным представлением алгебры $so(5, \mathbb{C})$, у которого старший вес равен $\lambda_{(2)} = (1/2, 1/2)$.

Пример 3: $so(6, \mathbb{C}) = sl(4, \mathbb{C})$.

Для двух изоморфных алгебр $so(6, \mathbb{C})$ и $sl(4, \mathbb{C})$ мы имеем соответственно следующие фундаментальные веса

$$\begin{aligned} so(6, \mathbb{C}) : \quad & \lambda_{(1)} = (1, 0, 0), \quad \lambda_{(2)} = (1/2, 1/2, -1/2), \quad \lambda_{(3)} = (1/2, 1/2, 1/2), \\ sl(4, \mathbb{C}) : \quad & \lambda'_{(1)} = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{4}u, \quad \lambda'_{(2)} = (1, 1, 0, 0) - \frac{2}{4}u, \quad \lambda'_{(3)} = (1, 1, 1, 0) - \frac{3}{4}u, \end{aligned}$$

где $u = (1, 1, 1, 1)$. Антисимметричное представление алгебры $sl(4, \mathbb{C})$ со старшим весом $\lambda'_{(2)}$ (действующее в пространстве $\mathcal{V}_4^{\wedge 2}$) имеет размерность $4 \cdot 3/2 = 6$, которая равна размерности определяющего представления $T_{(1)}$ алгебры $so(6, \mathbb{C})$ со старшим весом $\lambda_{(1)}$. Поэтому антисимметричное представление $\lambda'_{(2)}$ алгебры $sl(4, \mathbb{C})$ отождествляется с определяющим представлением $\lambda_{(1)}$ алгебры $so(6, \mathbb{C})$. Оставшиеся два

^{3.6}В физической литературе элементы пространств этих двумерных представлений называются вейлевскими спинорами, а в математической — полуспинорами.

четырёхмерных представления алгебры $sl(4, \mathbb{C})$ — определяющее представление со старшим весом $\lambda'_{(1)}$ и контраградиентное к нему представление со старшим весом $\lambda'_{(3)}$ (действующее в пространстве \mathcal{V}_4^3) — отождествляются с двумя неэквивалентными спинорными представлениями со старшими весами $\lambda_{(2)} = (1/2, 1/2, -1/2)$ и $\lambda_{(3)} = (1/2, 1/2, 1/2)$ алгебры $so(6, \mathbb{C})$.

- *Задача 87. Пользуясь формулой (3.3.2), найти фундаментальные веса $\lambda_{(i)}$, соответствующие системам простых корней (3.1.41), (3.1.44), (3.1.51), (3.1.53), (3.1.55) исключительных алгебр Ли (сравните с весами из [4]):*

$$G_2 : \quad \lambda_{(1)} = (0, -1, 1), \quad \lambda_{(2)} = (-1, -1, 2);$$

$$F_4 : \quad \lambda_{(1)} = (1, 0, 0, 1), \quad \lambda_{(2)} = (1, 1, 0, 2), \quad \lambda_{(3)} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 3), \\ \lambda_{(4)} = (0, 0, 0, 1);$$

$$E_6 : \quad \lambda_{(1)} = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0, 0, 0, \frac{1}{3}), \quad \lambda_{(2)} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1, 0, 0, \frac{2}{3}), \\ \lambda_{(3)} = (-1, -1, 1, 1, 1, 0, 0, 1), \quad \lambda_{(4)} = (-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}), \\ \lambda_{(5)} = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad \lambda_{(6)} = \frac{2}{3}(-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1);$$

$$E_7 : \quad \lambda_{(1)} = (-\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}), \quad \lambda_{(2)} = (-1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1), \\ \lambda_{(3)} = (-\frac{3}{2}, 1, 1, 1, 0, 0, \frac{3}{2}), \quad \lambda_{(4)} = (-2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 2), \\ \lambda_{(5)} = \frac{1}{2}(-3, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 3), \quad \lambda_{(6)} = \frac{1}{2}(-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2); \\ \lambda_{(7)} = (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1);$$

$$E_8 : \quad \lambda_{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \lambda_{(2)} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2), \\ \lambda_{(3)} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 3), \quad \lambda_{(4)} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 4), \\ \lambda_{(5)} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 5), \quad \lambda_{(6)} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 7); \\ \lambda_{(7)} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5), \quad \lambda_{(8)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2);$$

3.4.3 Квадратичный оператор Казимира

Пусть элементы X_a ($a = 1, \dots, \dim \mathcal{A}$) образуют базис простой алгебры Ли \mathcal{A} с определяющими соотношениями $[X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d$ и \mathbf{g}^{ab} — метрика, обратная к метрике Киллинга в выбранном базисе. Как было показано в первой части книги (см. раздел **I-3.7.2**), оператор $\hat{C}_2 = X_a \mathbf{g}^{ab} X_b$ коммутирует со всеми образующими $X_a \in \mathcal{A}$ и называется квадратичным оператором Казимира. Выберем нормировку образующих $\{H_i, E_\alpha\}$ базиса Картана – Вейля алгебры Ли \mathcal{A} так, чтобы метрика Киллинга в этом базисе имела вид (3.1.4) и (3.1.5), а квадратичный оператор Казимира записывался с помощью этой метрики следующим образом

$$\hat{C}_2 = X_a \mathbf{g}^{ab} X_b = \sum_{i,j=1}^r H_i g^{ij} H_j + \sum_{\alpha} E_{\alpha} E_{-\alpha}, \quad (3.4.58)$$

где сумма \sum_{α} идет по всем корням α .

- *Задача 88. Доказать, что оператор Казимира (3.4.58), записанный в базисе Картана–Вейля, коммутирует со всеми образующими $\{H_i, E_{\alpha}\}$ алгебры Ли \mathcal{A} . Указание: воспользоваться тождеством $C_{ab}^f \mathbf{g}_{fd} = -C_{ad}^f \mathbf{g}_{fb}$, которое в базисе Картана–Вейля дает условие $N_{\alpha-\beta, \beta} = -N_{-\alpha, \beta}$.*

Так как оператор \hat{C}_2 коммутирует со всеми образующими алгебры Ли, то согласно Лемме Шура \hat{C}_2 пропорционален единичному оператору в любом неприводимом комплексном представлении T . Коэффициент пропорциональности, обозначим его $c_2^{(T)}$, характеризует данное неприводимое представление. Таким образом, для любого вектора $|u\rangle$ в пространстве неприводимого представления $T^{(\lambda)}$ со старшим весом λ мы имеем $\hat{C}_2|u\rangle = c_2^{(\lambda)}|u\rangle$. В частности для старшего вектора $|\lambda\rangle$ выполняется

$$\begin{aligned} \hat{C}_2|\lambda\rangle &= \left(\sum_{i,j=1}^r H_i g^{ij} H_j + \sum_{\alpha>0} (E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha) \right) |\lambda\rangle = \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^r \lambda_i g^{ij} \lambda_j + \sum_{\alpha>0} [E_\alpha, E_{-\alpha}] \right) |\lambda\rangle = \left((\lambda, \lambda) + (\lambda, \sum_{\alpha>0} \alpha) \right) |\lambda\rangle, \end{aligned} \quad (3.4.59)$$

где мы учли условие $E_\alpha|\lambda\rangle = 0$ для всех положительных корней α . В равенствах (3.4.59) образующие H_i, E_α следует понимать как операторы $T^{(\lambda)}(H_i), T^{(\lambda)}(E_\alpha)$, действующие в пространстве представления $T^{(\lambda)}$. Соответственно, элемент \hat{C}_2 в представлении $T^{(\lambda)}$ пропорционален единичной матрице с коэффициентом пропорциональности:

$$c_2^{(\lambda)} = (\lambda, \lambda + 2\delta) = (\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta), \quad (3.4.60)$$

где мы использовали стандартное обозначение

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \alpha. \quad (3.4.61)$$

Пример. Для алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ (или ее вещественной формы $su(2)$), которая имеет единственный положительный корень, равный $\alpha = 1$ (в нормировке, в которой веса целые или полуцелые числа), мы получаем $\delta = 1/2$ и собственное значение $c_2^{(\lambda)}$ элемента \hat{C}_2 равно $\lambda(\lambda + 1)$, где $\lambda \in \mathbb{Z}_+/2$ (см. пункт 1 раздела 3.4.2).

Итак, мы видим, что старший вес λ определяет значение (3.4.60) квадратичного оператора Казимира в представлении $T^{(\lambda)}$, однако обратное утверждение (о том, что $c_2^{(\lambda)}$ определяет старший вес λ) в общем случае не верно^{3.7}. То есть, значение (3.4.60) одного оператора $\hat{C}_2 = \mathbf{g}^{ab} X_a X_b$ в представлении $T^{(\lambda)}$ не фиксирует полностью старший вес $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, а значит не может в общем случае однозначно различить неэквивалентные неприводимые представления алгебры \mathcal{A} . В частности, собственное значение (3.4.60) квадратичного оператора Казимира будет одинаковым как для представления $T^{(\lambda)}$, так и для контраградиентного к нему представления $\bar{T}^{(\lambda)}$, в котором образующие имеют вид $\bar{T}^{(\lambda)}(X_a) = -T^{(\lambda)}(X_a)^\top$ и поэтому $\bar{T}^{(\lambda)}(\hat{C}_2) = T^{(\lambda)}(\hat{C}_2)^\top$. Для того, чтобы различать неэквивалентные представления $T^{(\lambda)}$ и зафиксировать старший вес $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, необходимо для простой алгебры Ли \mathcal{A} ранга $r > 1$ определить набор дополнительных независимых операторов Казимира (см. раздел I-3.7.2 первой части книги)

$$\hat{C}_k = d^{a_1 \dots a_k} X_{a_1} \dots X_{a_k}, \quad d^{a_1 \dots a_k} = \mathbf{g}^{a_1 b_1} \dots \mathbf{g}^{a_k b_k} \text{Tr}(T_{b_1} \dots T_{b_k}), \quad (3.4.62)$$

^{3.7}Исключение составляет, например, алгебра Ли $sl(2, \mathbb{C})$, для которой вес λ фиксируется значением $c_2^{(\lambda)} = \lambda(\lambda + 2\delta)$ с точностью до преобразования отражения $\lambda + \delta \rightarrow -(\lambda + \delta)$, а с учетом $\lambda \in \mathbb{Z}_+/2$ вес λ фиксируется однозначно.

где $k = 2, 3, \dots$ и во второй формуле мы использовали матрицы $(T_a)_d^b = C_{ad}^b = \text{ad}(X_a)_d^b$ – образующих $X_a \in \mathcal{A}$ в присоединенном представлении. Как было показано в первой части книги (см. раздел **I-3.7.2**), среди центральных элементов (3.4.62) есть зависимые, а число независимых операторов Казимира в этом наборе равно рангу r простой алгебры Ли \mathcal{A} . Таким образом, зафиксировав собственные значения r независимых операторов Казимира (3.4.62), мы получаем r уравнений на r неизвестных компонент старшего веса λ . Отметим однако (см. [5]), что собственные значения $c_k^{(\lambda)}$ операторов (3.4.62), будучи функциями от векторов $\lambda + \delta$, фиксируют старшие веса λ лишь с точностью до преобразований Вейля $(\lambda + \delta) \rightarrow \sigma_\alpha(\lambda + \delta)$. Действительно, преобразования Вейля реализуются в алгебре Ли как преобразования эквивалентности (3.2.32), (3.2.36), которые не меняют собственные значения операторов \hat{C}_k из (3.4.62). Для однозначной фиксации решений заметим, что преобразования Вейля переводят доминантные веса в недоминантные, поэтому функции $c_k^{(\lambda)}$ будут однозначно фиксировать старшие веса λ , если мы дополнительно, согласно Утверждению **3.4.4**, наложим на λ условие доминантности.

Замечание 1. Выберем нормировку образующих X_a в соответствии со вторым равенством в (3.4.58). Пусть Tr_λ обозначает след в пространстве представления $T^{(\lambda)}$. Для простых алгебр Ли имеет место равенство (см. раздел **I-3.7.2** первой части книги)

$$\text{Tr}_\lambda(T^{(\lambda)}(X_a)T^{(\lambda)}(X_b)) = c_\lambda \mathbf{g}_{ab} , \quad (3.4.63)$$

где \mathbf{g}_{ab} – метрика Киллинга и константа c_λ называется индексом представления $T^{(\lambda)}$. Вычислим константу c_λ . Для этого заметим, что

$$\text{Tr}_\lambda(T^{(\lambda)}(X_a)T^{(\lambda)}(X_b)) \mathbf{g}^{ab} = \text{Tr}_\lambda(T^{(\lambda)}(C_2)) = (\lambda, \lambda + 2\delta) \cdot \dim(T^{(\lambda)}) , \quad (3.4.64)$$

где мы учли (3.4.60). С другой стороны, из (3.4.63) следует соотношение

$$\text{Tr}_\lambda(T^{(\lambda)}(X_a)T^{(\lambda)}(X_b)) \mathbf{g}^{ab} = c_\lambda \cdot \dim(\mathcal{A}) .$$

Сравнивая это соотношение и (3.4.64), в итоге получаем, что индекс представления $T^{(\lambda)}$ равен

$$c_\lambda = \frac{\dim(T^{(\lambda)})}{\dim(\mathcal{A})} (\lambda, \lambda + 2\delta) .$$

Замечание 2. Для вектора δ , заданного в (3.4.61), имеет место замечательное тождество, которое понадобится нам в следующем разделе:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha = \sum_{f=1}^r \lambda_{(f)} \quad \Rightarrow \quad \delta = \sum_{f=1}^r \lambda_{(f)} , \quad (3.4.65)$$

где $\lambda_{(f)}$ – фундаментальные веса алгебры \mathcal{A} . Для доказательства (3.4.65) рассмотрим отражение $\sigma_{\alpha^{(i)}}$ вектора $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$, соответствующее любому простому корню $\alpha^{(i)}$. Согласно Утверждению **3.1.2** отражение $\sigma_{\alpha^{(i)}}$ переставляет все положительные корни, кроме простого корня $\alpha^{(i)}$, для которого мы имеем $\sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha^{(i)}) = -\alpha^{(i)}$. Поэтому мы получаем

$$\sigma_{\alpha^{(i)}}(\delta) = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha^{(i)}} \left(\sum_{\alpha > 0} \alpha - \alpha^{(i)} \right) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha^{(i)}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha > 0} \alpha - \alpha^{(i)} \right) - \frac{1}{2} \alpha^{(i)} = \delta - \alpha^{(i)} . \quad (3.4.66)$$

Так как фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ образуют базис в корневом пространстве, то мы можем записать вектор δ в виде $\delta = \sum_{f=1}^r n_f \lambda_{(f)}$ и затем, используя это представление, вычислить действие на него отражения $\sigma_{\alpha^{(i)}}$:

$$\sigma_{\alpha^{(i)}}(\delta) = \sum_f n_f \sigma_{\alpha^{(i)}}(\lambda_{(f)}) = \sum_f n_f (\lambda_{(f)} - \delta_{fi} \alpha^{(i)}) = \delta - n_i \alpha^{(i)}, \quad (3.4.67)$$

где мы применили формулы (3.2.11) и (3.3.2). Сравнивая правые части (3.4.66) и (3.4.67), мы получаем $n_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, r$, и следовательно выполняется (3.4.65), что и требовалось доказать.

- *Задача 89.* Проверить тождество (3.4.65) для простых алгебр $sl(r+1, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$, $sp(2r, \mathbb{C})$, используя явные выражения для соответствующих корней (3.1.13), (3.1.25), (3.1.28), (3.1.35) и фундаментальных весов (3.4.22), (3.4.47), (3.4.51), (3.4.56).

3.5 Формула Вейля для характеров представлений компактных простых групп Ли

3.5.1 Знаменатель Вейля и формула Вейля для характеров

Неприводимые представления компактных групп Ли G связаны с неприводимыми представлениями соответствующих алгебр Ли $\mathcal{A}(G)$. Для накрывающих групп Ли эта связь взаимнооднозначна, см. разделы I-2.2.13 и I-4.3 первой части книги. В теории компактных групп Ли много полезной информации о неприводимых представлениях $T^{(\lambda)}$ со старшим весом λ извлекается из явного вида характеров, которые определяются как функции на группе G

$$\hat{\chi}_\lambda(g) = \text{Tr}_\lambda(T^{(\lambda)}(g)) = \sum_\mu D_{\mu\mu}^{(\lambda)}(g) \quad (\forall g \in G). \quad (3.5.1)$$

Здесь мы использовали обозначения (3.4.19); в частности, мы нумеруем матрицы $D_{\mu\mu'}^{(\lambda)}$ представления $T^{(\lambda)}$ их старшими весами λ , и суммирование идет по всем **весовым векторам**^{3.8} представления $T^{(\lambda)}$. Подчеркнем, что $\hat{\chi}_\lambda(g) = \hat{\chi}_\lambda(h g h^{-1})$ ($\forall h \in G$), то есть характер $\hat{\chi}_\lambda$ – функция на классах сопряженных элементов группы G .

Для **компактных связных** групп Ли G экспоненциальное отображение действует из алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$ **на всю** группу G (см. [31], §102). Это означает, что любой элемент g компактной связной группы G представим в виде одной экспоненты $g = \exp(A)$, где $A \in \mathcal{A}(G)$.

Утверждение 3.5.1 Пусть G – простая компактная связная группа, $\mathcal{A}(G)$ – ее алгебра Ли ранга r и \mathcal{H} – подалгебра Картана в $\mathcal{A}(G)$. Для любого элемента $A \in \mathcal{A}(G)$ существует элемент $h \in G$ такой, что

$$\text{ad}(h^{-1}) \cdot A \equiv h^{-1} \cdot A \cdot h = \theta^i H_i \in \mathcal{H}, \quad (3.5.2)$$

где $\{H_1, \dots, H_r\}$ – образующие подалгебры \mathcal{H} и θ^i – параметры.

^{3.8}Весы μ представления $T^{(\lambda)}$ могут быть вырожденными, поэтому говорить, что суммирование в (3.5.1) идет по всем весам μ , в общем случае было бы не правильно.

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{A}(G)$ и $(A, B)_{\mathcal{A}}$ — невырожденное инвариантное скалярное произведение^{3.9} в $\mathcal{A}(G)$. Рассмотрим функцию на группе G :

$$f(U) = (A, U \cdot y \cdot U^{-1})_{\mathcal{A}},$$

где $U \in G$ и $y \in \mathcal{H}$. Так как группа G — компактна, то функция $f(U)$ — ограничена и достигает своего максимума (минимума) при некотором $U = h \in G$. Рассмотрим элемент $h \cdot e^{tB}$, полученный из точки экстремума h правым сдвигом вдоль произвольного вектора $B \in \mathcal{A}(G)$ и близкий к h (параметр t — мал). Тогда, в силу того, что h — точка экстремума функции $f(U)$, мы имеем

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t f(h \cdot e^{tB})|_{t=0} &= \partial_t (A, h \cdot e^{tB} \cdot y \cdot e^{-tB} \cdot h^{-1})_{\mathcal{A}}|_{t=0} = (h^{-1} \cdot A \cdot h, [B, y])_{\mathcal{A}} = \\ &= ([y, h^{-1} \cdot A \cdot h], B)_{\mathcal{A}} \Rightarrow [y, h^{-1} \cdot A \cdot h] = 0. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Элемент $y \in \mathcal{H}$ пока не зафиксирован. Заметим, что для любой простой алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$ всегда найдется элемент $y \in \mathcal{H}$ такой, что условие $[y, x] = 0$ для $x \in \mathcal{A}(G)$ влечет $x \in \mathcal{H}$. Действительно, выберем вектор $\vec{y} = (y^1, \dots, y^r)$ из корневого пространства алгебры $\mathcal{A}(G)$ так, чтобы $(y, \alpha) \equiv (y^i \alpha_i) \neq 0$ для всех корней α алгебры $\mathcal{A}(G)$ (вектор \vec{y} лежит внутри какой-либо из камер Вейля). Тогда для любого корневого элемента $E_{\alpha} \in \mathcal{A}(G)$, мы имеем $[y, E_{\alpha}] = (y^i \alpha_i) E_{\alpha} \neq 0$. Подставим в условие $[y, x] = 0$ произвольный элемент $x = x^i H_i + \sum_{\alpha} c_{\alpha} E_{\alpha} \in \mathcal{A}(G)$, где сумма идет по всем корням α . В результате получаем

$$\sum_{\alpha} (y, \alpha) c_{\alpha} E_{\alpha} = 0,$$

откуда в силу $(y, \alpha) \neq 0$ и линейной независимости образующих E_{α} следует $c_{\alpha} = 0$ ($\forall \alpha$), то есть $x \in \mathcal{H}$. Фиксируя такой $y \in \mathcal{H}$ в (3.5.3), мы получаем, что элемент $(h^{-1} \cdot A \cdot h)$ также принадлежит подалгебре Картана \mathcal{H} и может быть разложен по базису $H_i \in \mathcal{H}$. ■

Замечание. В разделе I-4.2 первой части книги было показано, что всякая компактная алгебра Ли \mathcal{A} представима единственным образом в виде конечной прямой суммы некоторого количества абелевых подалгебр $u(1)$ и простых компактных подалгебр Ли $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$:

$$\mathcal{A} = u(1) + \dots + u(1) + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots \quad (3.5.4)$$

Учитывая этот факт, Утверждение 3.5.1 можно распространить на случай любых (не только простых) компактных связных групп Ли G .

Из формулы (3.5.2) вытекает, что классы сопряженных элементов для компактных групп Ли G параметризуются набором r параметров θ^i ($i = 1, \dots, r$), поскольку произвольный элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = \exp(A)$ и согласно (3.5.2) мы имеем

$$g = h \cdot \exp(\theta^i H_i) \cdot h^{-1}, \quad (\theta^i)^* = -\theta^i, \quad h \in G, \quad (3.5.5)$$

где образующие $H_i \in \mathcal{H}$ в любом унитарном представлении являются (если выбрать параметры θ^i чисто мнимыми числами) эрмитовыми операторами. В такой параметризации характер $\hat{\chi}_{\lambda}(g)$ записывается следующим образом

$$\hat{\chi}_{\lambda}(g) = \text{Tr}_{\lambda} \left(T^{(\lambda)}(e^{\theta^i H_i}) \right) = \sum_{\mu} \text{mult}_{\lambda}(\mu) \cdot \exp(\theta, \mu) \equiv \chi_{\lambda}(\theta), \quad (3.5.6)$$

^{3.9}Для матричных групп можно считать, что $(A, B)_{\mathcal{A}} := \text{Tr}(A \cdot B)$.

где $(\theta, \mu) = (\theta^i \mu_i) = g^{ki} \theta_k \mu_i$ — скалярное произведение (3.1.6), сумма в (3.5.6) берется по всем весам μ представления $T^{(\lambda)}$ и $\text{mult}_\lambda(\mu)$ — кратность вырождения веса μ . Заметим, что хотя параметры θ^i в (3.5.2) определяются для фиксированного элемента A однозначно, параметризация классов сопряженных элементов группы G с помощью параметров θ^i не однозначна: различные наборы θ^i могут отвечать одному и тому же классу сопряженных элементов. Например, наборы θ и $\sigma_\alpha(\theta)$ отвечают одному и тому же классу сопряженных элементов, так как согласно (3.2.32) мы имеем

$$S_\alpha \exp(\theta^i H_i) S_\alpha^{-1} = \exp(\sigma_\alpha(\theta), H), \quad (3.5.7)$$

где $S_\alpha = \exp(i\pi T_2(\alpha))$ — оператор вейлевского отражения, связанный с корнем α . Отсюда, а также из того факта, что эквивалентные веса имеют одинаковую кратность $\text{mult}_\lambda(\mu) = \text{mult}_\lambda(\sigma_\alpha(\mu))$ (см. Определение 3.2.2), следует, что характер (3.5.6) обладает инвариантностью относительно вейлевских отражений $\chi_\lambda(\theta) = \chi_\lambda(\sigma_\alpha(\theta))$.

Формула (3.5.6) не очень удобна для вычисления характеров и использования в приложениях, так как для работы с этой формулой необходимо знать кратности $\text{mult}_\lambda(\mu)$ для всех весов μ представления $T^{(\lambda)}$. С другой стороны, если нам известен явный вид характера $\chi_\lambda(\theta)$, то кратности $\text{mult}_\lambda(\mu)$ сразу же находятся из его разложения (3.5.6) по всем весам μ представления $T^{(\lambda)}$.

Для получения явных формул для характеров (3.5.1) и (3.5.6) введем в рассмотрение пространство \mathbf{F} функций вида

$$f(\theta) = \sum_{\mu \in \Lambda} a(\mu) e^{(\mu, \theta)}, \quad (3.5.8)$$

где суммирование идет по всем узлам μ весовой решетки Λ , вектор $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, умноженный на мнимую единицу, принадлежит корневому пространству, а $a(\mu)$ — коэффициенты, зависящие от веса μ . Будем считать, что $a(\mu) \neq 0$ только для конечного набора весов $\mu \in \Lambda$, тогда сумма в (3.5.8) конечна и, в силу разложения (3.3.4) любого веса по фундаментальным весам, эта сумма — полином от $2r$ переменных $x_i^{\pm 1} = e^{\pm(\lambda(i), \theta)}$. Таким образом, по определению, пространство \mathbf{F} — это **пространство полиномов от переменных $x_i^{\pm 1}$** . Пространство \mathbf{F} можно рассматривать как алгебру $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}]$, порожденную коммутирующими элементами x_i и x_i^{-1} ($i = 1, \dots, r$). Отметим, что функции характеров (3.5.6) являются элементами этого пространства полиномов $\mathbf{F} = \mathbb{C}[x_i, x_i^{-1}]$.

Определим действие группы Вейля в пространстве \mathbf{F} следующим образом

$$S_w \cdot f(\theta) = f(w^{-1} \cdot \theta) = \sum_{\mu \in \Lambda} a(\mu) \exp(w \cdot \mu, \theta), \quad (3.5.9)$$

где w — произвольный элемент группы Вейля W , и в последнем равенстве мы воспользовались формулой (3.5.8) и ортогональностью $(\mu, w^{-1} \cdot \theta) = (w \cdot \mu, \theta)$ оператора w по отношению к скалярному произведению (3.1.6). Формула (3.5.9) определяет представление группы Вейля W в пространстве \mathbf{F} , так как $S_w S_{w'} = S_{w \cdot w'}$, $\forall w, w' \in W$. Для образующих $w = \sigma_\alpha \in W$, заданных в (3.2.11), мы имеем

$$S_{\sigma_\alpha} \cdot f(\theta) = f(\sigma_\alpha(\theta)) = \sum_{\mu \in \Lambda} a(\mu) e^{(\sigma_\alpha(\mu), \theta)} = \sum_{\mu \in \Lambda} a(\sigma_\alpha(\mu)) e^{(\mu, \theta)}, \quad S_{\sigma_\alpha}^2 = 1, \quad (3.5.10)$$

где мы учли тождество $\sigma_\alpha^2 = 1$, а также воспользовались инвариантностью решетки Λ относительно отражений $\sigma_\alpha \in W$.

Определение 3.5.1. Функция $f(\theta) \in \mathbb{F}$ называется симметрической, если $S_w \cdot f(\theta) = f(\theta)$ для всех $w \in W$, и кососимметрической, если $S_w \cdot f(\theta) = \det(w) f(\theta)$ для всех $w \in W$. Здесь $\det(w) = +1$, или $\det(w) = -1$, в зависимости от того является ли w произведением четного, или нечетного, числа вейлевских отражений (см. (3.2.35)).

Введем обозначение $S_i = S_{\sigma_{\alpha^{(i)}}}$, где $\alpha^{(i)}$ — простые корни. Для того, чтобы функция $f(\theta) \in \mathbb{F}$ была симметрической, или кососимметрической, необходимо и достаточно чтобы $S_i \cdot f(\theta) = f(\theta)$, или $S_i \cdot f(\theta) = -f(\theta)$, для всех $i = 1, \dots, r$. Действительно, согласно Утверждению 3.1.1 (см. подраздел 3.1.3) симметрии S_i порождают действие всей группы W на пространстве функций (3.5.8), поэтому указанные условия эквивалентны тем, которые перечислены в Определении 3.5.1.

Пусть α — фиксированный корень и функция $f(\theta) \in \mathbb{F}$ такова, что $S_{\sigma_\alpha} f(\theta) = -f(\theta)$. Тогда $f(\theta)$ представляется в виде линейной комбинации элементов

$$f_\mu(\theta) = e^{(\mu, \theta)} - S_{\sigma_\alpha} \cdot e^{(\mu, \theta)} = e^{(\mu, \theta)} - e^{(\sigma_\alpha(\mu), \theta)} = e^{(\mu, \theta)} (1 - e^{-\mathfrak{n}(\alpha, \mu)(\alpha, \theta)}),$$

каждый из которых делится^{3.10} на $(1 - e^{-(\alpha, \theta)})$, так как $\mathfrak{n}(\alpha, \mu) = 2 \frac{(\alpha, \mu)}{\alpha^2}$ — целые числа. Поэтому, если $f(\theta) \in \mathbb{F}$ — кососимметрическая функция, то она, как полином от переменных $x_i^{\pm 1} = e^{\pm(\lambda^{(i)}, \theta)}$, одновременно делится на все функции $(1 - e^{-(\alpha, \theta)})$, где α пробегает весь набор положительных корней.

- **Задача 90.** Доказать, что для всех $\alpha > 0$ функции $(1 - e^{-(\alpha, \theta)})$, как полиномы от переменных $x_i^{\pm 1}$, — взаимно просты. Указание: учесть то, что корень α не может быть кратным другому корню β .

В силу того, что полиномы $(1 - e^{-(\alpha, \theta)})$ для всех корней $\alpha > 0$ являются взаимно простыми, любой кососимметрический полином $f(\theta) \in \mathbb{F}$ делится на произведение факторов $(1 - e^{-(\alpha, \theta)})$, то есть на полином

$$e^{(\delta, \theta)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-(\alpha, \theta)}) = \prod_{\alpha > 0} (e^{(\alpha, \theta)/2} - e^{-(\alpha, \theta)/2}) \equiv D_\delta(\theta), \quad (3.5.11)$$

где произведение идет по всем положительным корням, вектор δ определяется в (3.4.65) и фактор $e^{(\delta, \theta)} = \prod_{i=1}^r x_i$ введен^{3.11} в левой части (3.5.11) для дальнейшего удобства. Функция $D_\delta(\theta) \in \mathbb{F}$ (полином от переменных $x_i^{\pm 1}$) играет ключевую роль в дальнейших построениях и называется **знаменателем Вейля** (название обусловлено тем, что функция $D_\delta(\theta)$ появляется в знаменателе формулы Вейля для характеров; см. ниже равенство (3.5.18)).

Утверждение 3.5.2 Имеет место следующая формула для знаменателя Вейля (3.5.11):

$$D_\delta(\theta) \equiv e^{(\delta, \theta)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-(\alpha, \theta)}) = \sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta), \theta), \quad (3.5.12)$$

где в правой части стоит конечная сумма по всем элементам σ группы Вейля W , и $\epsilon(\sigma) \equiv \det(\sigma) = \pm 1$ (см. формулу (3.2.35)), в зависимости от того является

^{3.10}Под делением здесь понимается стандартное определение деления двух полиномов. Полином P_1 делится на полином P_2 , если существует полином P_3 такой, что $P_1 = P_2 \cdot P_3$.

^{3.11}Фактор $e^{(\delta, \theta)}$ не мешает делению полиномов из $\mathbb{C}[x_i, x_i^{-1}]$, так как он всего лишь домножает результат деления на моном $x_1^{-1} \dots x_r^{-1}$.

ли σ четным или нечетным произведением вейлевских отражений σ_α (α – корни алгебры \mathcal{A}).

Доказательство. Сумма в правой части (3.5.12) – кососимметрическая функция. Действительно, рассмотрим оператор $A = \sum_{w \in W} \epsilon(w) S_w$, действующий в пространстве \mathbb{F} , для которого мы имеем

$$S_{\sigma_\alpha} \cdot A = \sum_{w \in W} \epsilon(w) S_{\sigma_\alpha \cdot w} = \sum_{w \in W} \epsilon(\sigma_\alpha^{-1} \cdot w) S_w = \det(\sigma_\alpha^{-1}) A = -A, \quad (3.5.13)$$

где мы воспользовались инвариантностью суммирования по конечной группе относительно левых сдвигов и тем, что $\det(\sigma_\alpha) = -1$. Согласно (3.5.13) оператор A , который называется антисимметризатором, переводит любую функцию $f(\theta) \in \mathbb{F}$ в кососимметрическую функцию $A \cdot f(\theta) \in \mathbb{F}$. Так как сумма в правой части (3.5.12) записывается в виде

$$\sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta), \theta) = A \cdot \exp(\delta, \theta),$$

то эта сумма является кососимметрической функцией и, как было показано выше, она должна делиться на знаменатель Вейля (3.5.11). То есть мы имеем

$$\sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta), \theta) = b(\theta) e^{(\delta, \theta)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-(\alpha, \theta)}), \quad (3.5.14)$$

где множитель $b(\theta) \in \mathbb{F}$ – полином от переменных $x_i^{\pm 1}$, который записывается в виде суммы (3.5.8) по конечному набору весов μ . Напомним, что вектор δ – доминантный вес, поэтому в левой части (3.5.14) в показателе экспонент $\exp(\sigma(\delta), \theta)$ могут появляться только веса $\mu = \sigma(\delta)$, которые заключены в интервале^{3.12} $-\delta \leq \mu \leq \delta$. То же самое можно сказать и про знаменатель Вейля, стоящий в правой части (3.5.14). Действительно, для него имеются две эквивалентные формы записи в виде двух конечных произведений по положительным корням:

$$e^{(\delta, \theta)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-(\alpha, \theta)}) = e^{-(\delta, \theta)} \prod_{\alpha' > 0} (e^{(\alpha', \theta)} - 1),$$

разложение которых в виде суммы, например,

$$e^{(\delta, \theta)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-(\alpha, \theta)}) = \left(e^{(\delta, \theta)} - \sum_{\alpha > 0} e^{(\delta - \alpha, \theta)} + \sum_{\alpha > 0, \beta > 0} e^{(\delta - \alpha - \beta, \theta)} + \dots \right),$$

дает функцию типа (3.5.8), где суммирование идет по весам $\mu = \delta - \sum \alpha = -\delta + \sum \alpha'$, причем α, α' – положительные корни. Таким образом, мы имеем сумму по весам, которые заключены в интервале: $-\delta \leq \mu \leq \delta$. Сравнивая коэффициенты при старших членах $e^{(\delta, \theta)}$ в левой и правой части (3.5.14), мы получаем $b(\theta) = 1$ и формула (3.5.14) переходит в (3.5.12). ■

Замечание 1. Для любой кососимметрической функции $f(\theta) \in \mathbb{F}$ мы имеем

$$A \cdot f(\theta) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) S_w \cdot f(\theta) = \left(\sum_{w \in W} \det^2(w) \right) f(\theta) = \text{ord}(W) f(\theta).$$

^{3.12}Напомним (см. раздел 3.4.1), что на множестве весов представлений простой алгебры Ли всегда можно ввести частичное упорядочение следующим образом. Выберем некоторый вектор x , лежащий в положительной камере Вейля. Тогда для двух весов μ' и μ будем считать, что $\mu' \leq \mu$, если $(\mu', x) \leq (\mu, x)$.

Поэтому любая кососимметрическая функция $f(\theta) \in \mathbb{F}$ типа (3.5.8) записывается в виде

$$f(\theta) = \frac{1}{\text{ord}(W)} A \cdot f(\theta) = \sum_{\mu \in \Lambda} b(\mu) A \cdot e^{(\mu, \theta)}, \quad b(\mu) \equiv \frac{a(\mu)}{\text{ord}(W)}, \quad (3.5.15)$$

и следовательно разлагается в сумму по линейно независимым элементам $A \cdot e^{(\theta, \mu)} \in \mathbb{F}$, где $\mu \in \Lambda$.

Замечание 2. В правой части тождества (3.5.12) стоит кососимметрическая функция. Поэтому функция (3.5.11), стоящая в левой части, также должна быть кососимметрической. Действительно, согласно Утверждению 3.1.1 отражения $\sigma_{\alpha^{(i)}}$ порождают всю группу W , а согласно Утверждению 3.1.2 отражения $\sigma_{\alpha^{(i)}}$ переставляют все положительные корни α , за исключением самого корня $\alpha^{(i)}$, у которого меняется знак. Соответственно, факторы $(e^{(\alpha, \theta)/2} - e^{-(\alpha, \theta)/2})$ в (3.5.11), для которых $\alpha \neq \alpha^{(i)}$, будут меняться местами, а фактор $(e^{(\alpha^{(i)}, \theta)/2} - e^{-(\alpha^{(i)}, \theta)/2})$ поменяет знак, поэтому мы имеем

$$S_i \cdot \prod_{\alpha > 0} (e^{(\alpha, \theta)/2} - e^{-(\alpha, \theta)/2}) = - \prod_{\alpha > 0} (e^{(\alpha, \theta)/2} - e^{-(\alpha, \theta)/2}), \quad \forall i.$$

Замечание 3. Формула (3.5.12) замечательна во многих отношениях. Например, она говорит о том, что произведение по положительным корням в левой части формулы (3.5.11) зависит только от векторов $\sigma(\delta)$, полученных из вектора δ с помощью действия на него элементов σ из группы Вейля W . Формула (3.5.12) замечательна еще и тем, что применима в случае бесконечномерных алгебр Каца-Мууди, для которых число корней бесконечно, хотя число r простых корней конечно, а компоненты весов $\lambda_{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) все еще дискретны и вещественны. В этом случае формула (3.5.12) связывает бесконечную сумму и бесконечное произведение. Для $su(2)$ -алгебры Каца-Мууди это соотношение есть не что иное как хорошо известное тождество Якоби для эллиптических θ -функций. Для других алгебр Каца-Мууди получаются обобщения этих тождеств. Для явного вывода этих обобщений, однако, приходится производить подходящую регуляризацию расходящихся бесконечных сумм, возникающих в правых частях соотношения (3.5.12).

Рассмотрим теперь функцию

$$D_{\delta+\lambda}(\theta) = \sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta + \lambda), \theta) = A \cdot \exp(\delta + \lambda, \theta) \in \mathbb{F}, \quad (3.5.16)$$

которая зависит от старшего веса λ некоторого представления $T^{(\lambda)}$ простой компактной группы Ли G (и ее алгебры Ли). Так как эта функция кососимметрическая (получена действием антисимметризатора A на экспоненту $\exp(\delta + \lambda, \theta)$), то она должна делиться на знаменатель Вейля (3.5.12). Ниже мы докажем, что результат деления равен характеру (3.5.6) представления $T^{(\lambda)}$. А именно, мы докажем тождество

$$D_{\delta}(\theta) \chi_{\lambda}(\theta) = D_{\delta+\lambda}(\theta), \quad (3.5.17)$$

откуда следует знаменитая **формула Вейля для характеров**

$$\chi_{\lambda}(\theta) = \frac{D_{\delta+\lambda}(\theta)}{D_{\delta}(\theta)} = \frac{\sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta + \lambda), \theta)}{\prod_{\alpha > 0} (e^{(\alpha, \theta)/2} - e^{-(\alpha, \theta)/2})}. \quad (3.5.18)$$

Для функции, стоящей в знаменателе (3.5.18), иногда полезно использовать представление (3.5.12) в виде альтернированной суммы по элементам группы Вейля. Интересно отметить, что тождество (3.5.12) для знаменателя Вейля получается из формулы характеров (3.5.18) в частном случае, когда в качестве представления $T^{(\lambda)}$ выбирается тривиальное представление: $\lambda = 0$ и $\chi_\lambda(\theta)|_{\lambda=0} = 1$.

Перейдем к доказательству формулы Вейля (3.5.18). Сначала докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.5.3 *Характер (3.5.6) представления $T^{(\lambda)}$ простой группы G (и ее алгебры Ли \mathcal{A}), удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*

$$\left(\partial_\theta^2 + \sum_{\alpha > 0} \frac{(e^{(\theta, \alpha)} + 1)}{(e^{(\theta, \alpha)} - 1)} (\alpha^i \partial_{\theta^i}) \right) \chi_\lambda(\theta) = ((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta)) \chi_\lambda(\theta), \quad (3.5.19)$$

где $\partial_\theta^2 \equiv g^{ij} \partial_{\theta^i} \partial_{\theta^j}$, в левой части сумма идет по всем положительным корням α алгебры \mathcal{A} , а вектор δ определен в (3.4.61). Произведение $X_{\delta+\lambda}(\theta) \equiv (\chi_\lambda(\theta) D_\delta(\theta))$ знаменателя Вейля (3.5.12) и характера $\chi_\lambda(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\theta^2 X_{\delta+\lambda}(\theta) = (\delta + \lambda, \delta + \lambda) X_{\delta+\lambda}(\theta). \quad (3.5.20)$$

Доказательство. Используя формулы (3.4.59) и (3.4.60) для квадратичного оператора Казимира и определение (3.5.1), (3.5.6) характера представления $T^{(\lambda)}$, мы получаем следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} ((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta)) \chi_\lambda(\theta) &= \text{Tr}_\lambda \left(\hat{C}_2 \cdot e^{\theta^i H_i} \right) = \\ &= \text{Tr}_\lambda \left(\left(\sum_{i,j=1}^r H_i g^{ij} H_j + \sum_{\alpha} E_\alpha E_{-\alpha} \right) \cdot e^{\theta^i H_i} \right) = \\ &= \partial_\theta^2 \text{Tr}_\lambda \left(e^{\theta^i H_i} \right) + \text{Tr}_\lambda \left(\left(\sum_{\alpha} E_\alpha E_{-\alpha} \right) \cdot e^{\theta^i H_i} \right) = \\ &= \left(\partial_\theta^2 + \sum_{\alpha} \frac{e^{(\theta, \alpha)}}{(e^{(\theta, \alpha)} - 1)} (\alpha^i \partial_{\theta^i}) \right) \text{Tr}_\lambda \left(e^{\theta^i H_i} \right), \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

где все образующие $\{H_i, E_\alpha\}$ алгебры \mathcal{A} реализованы в представлении $T^{(\lambda)}$. В последнем равенстве (3.5.21) мы учли соотношение

$$\text{Tr}_\lambda \left(E_\alpha E_{-\alpha} \cdot e^{\theta^i H_i} \right) = \frac{e^{(\theta, \alpha)}}{(e^{(\theta, \alpha)} - 1)} (\alpha^i \partial_{\theta^i}) \text{Tr}_\lambda \left(e^{\theta^i H_i} \right),$$

которое получается с использованием равенств (3.1.1) и (3.1.3) следующим образом

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\lambda \left(E_\alpha \cdot E_{-\alpha} \cdot e^{\theta^i H_i} \right) &= \text{Tr}_\lambda \left(E_{-\alpha} \cdot e^{\theta^i H_i} \cdot E_\alpha \right) = \\ &= \text{Tr}_\lambda \left(E_{-\alpha} \cdot E_\alpha \cdot e^{\theta^i (H_i + \alpha_i)} \right) = \text{Tr}_\lambda \left(([E_{-\alpha}, E_\alpha] + E_\alpha \cdot E_{-\alpha}) \cdot e^{\theta^i (H_i + \alpha_i)} \right) = \\ &= \text{Tr}_\lambda \left((-\alpha^i H_i + E_\alpha \cdot E_{-\alpha}) \cdot e^{\theta^i (H_i + \alpha_i)} \right). \end{aligned}$$

Переписывая сумму по всем корням в правой части (3.5.21) как сумму по положительным корням $\alpha > 0$ и сравнивая левую и правую части (3.5.21), мы получаем уравнение (3.5.19).

Для знаменателя Вейля $D_\delta(\theta)$, записанного в факторизованном виде (3.5.11), имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} D_\delta(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta^i} \prod_{\alpha > 0} (e^{(\alpha, \theta)/2} - e^{-(\alpha, \theta)/2}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha_i \frac{(e^{(\alpha, \theta)} + 1)}{(e^{(\alpha, \theta)} - 1)} D_\delta(\theta). \quad (3.5.22)$$

Кроме того, пользуясь тем, что элементы группы Вейля $\sigma \in W$ являются ортогональными преобразованиями: $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, для правой части (3.5.12) мы выводим

$$\partial_\theta^2 D_\delta(\theta) = (\partial_\theta, \partial_\theta) \sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta), \theta) = (\delta, \delta) D_\delta(\theta). \quad (3.5.23)$$

Поддействуем на произведение $X_{\delta+\lambda}(\theta) = (\chi_\lambda(\theta) D_\delta(\theta))$ оператором ∂_θ^2 и воспользуемся формулами (3.5.19), (3.5.22) и (3.5.23). В результате получаем

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2 (\chi_\lambda(\theta) D_\delta(\theta)) &= D_\delta(\theta) (\partial_\theta^2 \chi_\lambda(\theta)) + 2(\partial_\theta, \chi_\lambda(\theta)) \partial_\theta D_\delta(\theta) + \chi_\lambda(\theta) (\partial_\theta^2 D_\delta(\theta)) = \\ &= D_\delta(\theta) \left((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta) - \sum_{\alpha > 0} \frac{(e^{(\theta, \alpha)} + 1)}{(e^{(\theta, \alpha)} - 1)} (\alpha^i \partial_{\theta^i}) \right) \chi_\lambda(\theta) + \\ &+ (\partial_\theta, \chi_\lambda(\theta)) \sum_{\alpha > 0} \alpha_i \frac{(e^{(\alpha, \theta)} + 1)}{(e^{(\alpha, \theta)} - 1)} D_\delta(\theta) + (\delta, \delta) \chi_\lambda(\theta) D_\delta(\theta) = (\lambda + \delta, \lambda + \delta) \chi_\lambda(\theta) D_\delta(\theta), \end{aligned}$$

что совпадает с уравнением (3.5.20). ■

Следствие. Воспользуемся разложением $e^{-(\theta, \alpha)}(1 - e^{-(\theta, \alpha)})^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\theta, \alpha)}$ и перепишем левую часть уравнения (3.5.19) следующим образом

$$\left(\partial_\theta^2 + \sum_{\alpha > 0} \frac{1 + e^{-(\theta, \alpha)}}{1 - e^{-(\theta, \alpha)}} (\alpha, \partial_\theta) \right) \chi_\lambda(\theta) = \left(\partial_\theta^2 + 2(\delta, \partial_\theta) + 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\theta, \alpha)} (\alpha, \partial_\theta) \right) \chi_\lambda(\theta).$$

Тогда уравнение (3.5.19) приобретает вид

$$\left((\partial_\theta^2 + (2\delta, \partial_\theta) - c_2^{(\lambda)}) + 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\theta, \alpha)} (\alpha, \partial_\theta) \right) \chi_\lambda(\theta) = 0, \quad (3.5.24)$$

где $c_2^{(\lambda)} = (\lambda + \delta)^2 - (\delta)^2$ и мы воспользовались краткой формой записи $(\mu)^2 = (\mu, \mu)$. Подставим в уравнение (3.5.24) формулу для характера (3.5.6) в виде суммы по весам. В результате получаем соотношение

$$((\lambda + \delta)^2 - (\mu + \delta)^2) n_\lambda(\mu) = 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha, \mu + k\alpha) n_\lambda(\mu + k\alpha), \quad (3.5.25)$$

где $n_\lambda(\mu) = \text{mult}_\lambda(\mu)$ – кратность вырождения веса μ представления $T^{(\lambda)}$. Соотношение (3.5.25) называется **формулой Фрейденталя для кратностей**.

Напомним, что упорядочение весов и понятие доминантного веса были введены в Разделе 3.4.1 (см. также доказательство Утверждения 3.5.2). Далее нам понадобится следующая Лемма.

Лемма 3.5.4 1) Каждый вес μ представления $T^{(\lambda)}$ эквивалентен доминантному весу μ' , для которого выполнено $(\lambda)^2 \geq (\mu')^2 = (\mu)^2$. 2) Если μ – вес представления $T^{(\lambda)}$, то для любого $\sigma \in W$ мы имеем $(\lambda + \delta)^2 \geq (\mu + \sigma(\delta))^2$, причем равенство реализуется только в случае $\mu = \sigma(\lambda)$.

Доказательство. 1) Докажем первую часть Леммы. То, что каждый вес μ эквивалентен доминантному весу μ' было доказано в Утверждении 3.4.3. Для доминантного веса μ' представления $T^{(\lambda)}$ в силу (3.4.3) мы имеем $\mu' = \lambda - \sum_i \mathbf{m}_i \alpha^{(i)}$, где $\mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда, полагая $\beta = \sum_i \mathbf{m}_i \alpha^{(i)}$, мы получаем

$$(\lambda)^2 = (\mu')^2 + 2 \sum_i \mathbf{m}_i (\mu', \alpha^{(i)}) + (\beta)^2,$$

где $(\beta)^2 \geq 0$ и так как μ' — доминантный вес, то $(\mu', \alpha^{(i)}) \geq 0$. Поэтому $(\lambda)^2 \geq (\mu')^2 = (\mu)^2$.

2) Пусть σ — любой элемент группы W . Для веса $\sigma^{-1}(\mu)$, эквивалентного весу μ представления $T^{(\lambda)}$, в силу (3.4.3) имеет место формула: $\sigma^{-1}(\mu) = \lambda - \sum_i \mathbf{m}_i \alpha^{(i)}$, где $\mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\lambda + \delta)^2 - (\mu + \sigma(\delta))^2 &= (\lambda)^2 - (\mu)^2 + 2(\delta, \lambda - \sigma^{-1}(\mu)) = \\ &= (\lambda)^2 - (\mu)^2 + 2 \sum_i \mathbf{m}_i (\delta, \alpha^{(i)}) = (\lambda)^2 - (\mu)^2 + \sum_i \mathbf{m}_i (\alpha^{(i)})^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

где мы воспользовались формулой $2 \frac{(\delta, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = 1$, которая получена с учетом (3.3.2) и (3.4.65), а также воспользовались утверждением 1) данной Леммы. Отметим, что правая часть в (3.5.26) может равняться нулю только в случае $(\lambda)^2 = (\mu)^2$ и $\mathbf{m}_i = 0$, что равносильно $\mu = \sigma(\lambda)$. ■

Заметим, что функция $D_{\delta+\lambda}(\theta)$, заданная в (3.5.16), удовлетворяет тому же уравнению (3.5.20), что и произведение $X_{\delta+\lambda}(\theta) \equiv (\chi_\lambda(\theta) D_\delta(\theta))$:

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2 D_{\delta+\lambda}(\theta) &= \partial_{\theta^i} \partial_{\theta_i} \sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) \exp(\sigma(\delta + \lambda), \theta) = \\ &= \sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) (\sigma(\delta + \lambda), \sigma(\delta + \lambda)) \exp(\sigma(\delta + \lambda), \theta) = (\delta + \lambda, \delta + \lambda) D_{\delta+\lambda}(\theta). \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

Кроме того, так же как и $D_{\delta+\lambda}(\theta)$, функция $X_{\delta+\lambda}(\theta) \in \mathbb{F}$ — кососимметрическая, так как она является произведением кососимметрической функции $D_\delta(\theta)$ и симметрической функции $\chi_\lambda(\theta)$. Все это указывает на то, что функции $X_{\delta+\lambda}(\theta)$ и $D_{\delta+\lambda}(\theta)$ связаны друг с другом. Действительно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5.5 Для функций $D_\delta(\theta)$ и $D_{\delta+\lambda}(\theta)$, заданных в (3.5.12) и (3.5.16) имеет место тождество

$$D_\delta(\theta) \chi_\lambda(\theta) = D_{\delta+\lambda}(\theta), \quad (3.5.28)$$

которое эквивалентно формуле Вейля (3.5.18) для характера $\chi_\lambda(\theta)$.

Доказательство. Так как левая часть (3.5.28) — кососимметрическая функция в \mathbb{F} , то согласно (3.5.15) мы имеем

$$D_\delta(\theta) \chi_\lambda(\theta) = \sum_{\mu' \in \Lambda} b(\mu') A \cdot e^{(\mu', \theta)}. \quad (3.5.29)$$

Функция $D_\delta(\theta)$ является суммой экспонент $e^{(\sigma(\delta), \theta)}$, где $\sigma \in W$, а функция $\chi_\lambda(\theta)$ представима в виде суммы экспонент $e^{(\mu, \theta)}$, где μ — веса представления $T^{(\lambda)}$. Поэтому в правой части (3.5.29) суммирование идет по векторам $\mu' = \mu + \sigma(\delta)$. Заметим, что

$\partial_\theta^2(A \cdot e^{(\mu', \theta)}) = (\mu', \mu') A \cdot e^{(\mu', \theta)}$. Сравнивая это уравнение с уравнением (3.5.20), мы заключаем, что сумма в правой части (3.5.29) идет по весам $\mu' = \mu + \sigma(\delta)$ таким, что

$$(\mu', \mu') = (\mu + \sigma(\delta), \mu + \sigma(\delta)) = (\delta + \lambda, \delta + \lambda).$$

Согласно второй части Леммы 3.5.4 данное равенство может реализоваться только в случае $\mu = \sigma(\lambda)$. Поэтому $\mu' = \sigma(\lambda + \delta)$ и сумма по μ' в (3.5.29) превращается в сумму по элементам $\sigma \in W$. В результате формула (3.5.29) переписывается в виде

$$\begin{aligned} D_\delta(\theta) \chi_\lambda(\theta) &= \sum_{\sigma \in W} b(\sigma(\lambda + \delta)) A \cdot e^{(\sigma(\lambda + \delta), \theta)} = \\ &= \sum_{\sigma \in W} b(\sigma(\lambda + \delta)) \sum_{w \in W} \det(w) e^{(w \cdot \sigma(\lambda + \delta), \theta)} = \tilde{b}(\lambda + \delta) D_{\delta + \lambda}(\theta), \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

где $\tilde{b}(\lambda + \delta) = \sum_{\sigma \in W} b(\sigma(\lambda + \delta)) \det(\sigma)$. Сравнивая коэффициенты при старших экспонентах $e^{(\lambda + \delta, \theta)}$ в левой и правой частях соотношения (3.5.30), мы получаем $\tilde{b}(\lambda + \delta) = 1$, то есть (3.5.30) эквивалентно (3.5.28). ■

3.5.2 Приложения. Явные формулы для характеров и размерностей представлений групп $SU(r + 1)$, $SO(n)$ и $USp(2r)$

В качестве приложения формулы Вейля (3.5.18) получим из нее формулу для размерности представления $T^{(\lambda)}$ со старшим весом λ . Для этого заметим, что $\dim(T^{(\lambda)}) = \chi_\lambda(0)$. Так как в правой части (3.5.18) в пределе $\theta \rightarrow 0$ (в силу тождества $\sum_{\sigma \in W} \epsilon(\sigma) = 0$) получается неопределенность $0/0$, то этот предел необходимо вычислять аккуратно. Положим $\theta = t\delta$. В этом случае, применяя равенство (3.2.34), мы получаем для числителя в формуле Вейля равенство $D_{\delta + \lambda}(t\delta) = D_\delta(t(\lambda + \delta))$, после чего, используя и в знаменателе и в числителе факторизованное представление (3.5.11), мы записываем характер (3.5.18) в виде

$$\chi_\lambda(t\delta) = \frac{D_{\delta + \lambda}(t\delta)}{D_\delta(t\delta)} = \frac{D_\delta(t(\lambda + \delta))}{D_\delta(t\delta)} = \prod_{\alpha > 0} \frac{\text{sh}(\frac{t}{2}(\alpha, \delta + \lambda))}{\text{sh}(\frac{t}{2}(\alpha, \delta))},$$

где теперь устремим $t \rightarrow 0$. В результате получаем формулу Вейля для размерности представления $T^{(\lambda)}$ со старшим весом λ :

$$\dim(T^{(\lambda)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \chi_\lambda(t\delta) = \lim_{t \rightarrow 0} \prod_{\alpha > 0} \frac{\text{sh}(\frac{t}{2}(\alpha, \delta + \lambda))}{\text{sh}(\frac{t}{2}(\alpha, \delta))} = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\lambda + \delta, \alpha)}{(\delta, \alpha)}. \quad (3.5.31)$$

Получим теперь, пользуясь общей формулой Вейля для характеров (3.5.18), явные формулы для характеров компактных групп $SU(n)$, $SO(n)$ и $USp(2r)$.

Пример 1. Для компактной алгебры Ли $su(2)$ (или ее комплексификации $sl(2, \mathbb{C})$), имеющей единственный положительный корень, равный $\alpha = 1$ в нормировке, в которой старшие веса $\lambda \equiv j$ целые или полуцелые числа, мы имеем $\delta = 1/2$ и формула Вейля (3.5.18), с учетом того, что $W = \mathbb{Z}_2$ (см. Пример 1 в разделе 3.2), принимает вид

$$\chi_\lambda(\theta) = \frac{D_{\delta + \lambda}(\theta)}{D_\delta(\theta)} = \frac{e^{(\theta, \delta + \lambda)} - e^{-(\theta, \delta + \lambda)}}{e^{(\theta, \delta)} - e^{-(\theta, \delta)}} = \frac{e^{i\psi(1/2 + \lambda)} - e^{-i\psi(1/2 + \lambda)}}{e^{i\psi/2} - e^{-i\psi/2}}, \quad (3.5.32)$$

где мы положили $\theta = i\psi$, $\psi \in \mathbb{R}$, для случая $SU(2)$. Формула (3.5.32) совпадает с формулой в правой части (2.4.9) (см. раздел 2.4.1), которую мы получили, вычисляя сумму по весам в соответствии с определением (3.5.6).

Пример 2. Найдем характер группы $SU(r+1)$ для представления ее алгебры Ли $su(r+1)$, которое нумеруется диаграммой Юнга $[\lambda_1, \dots, \lambda_r] \vdash |\lambda|$ и соответствует представлению алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ со старшим весом $\lambda^{(\bar{n})}$ из (3.4.36). Напомним, что в качестве корневого пространства алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ (или ее вещественной формы $su(r+1)$) мы выбираем гиперплоскость $P_u \subset \mathbb{R}^{r+1}$, перпендикулярную вектору $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{r+1}$. Согласно (3.4.65) мы имеем

$$\delta = \sum_{f=1}^r \lambda_{(f)} = \sum_{i=1}^{r+1} \left(\frac{r}{2} - i + 1 \right) e^{(i)}, \quad (3.5.33)$$

где $\lambda_{(f)} = \left(\sum_{i=1}^f e^{(i)} - \frac{f}{r+1} u \right)$ — фундаментальные веса (3.4.22) алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$ (или $su(r+1)$). Напомним (см. пункт 1. из доказательства Утверждения 3.1.1 в подразделе 3.1.3), что группа Вейля W корневой системы алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ (алгебры $su(r+1)$) изоморфна группе перестановок S_{r+1} и действие любого элемента $\sigma \in W = S_{r+1}$ может быть реализовано как перестановка $\theta^i \rightarrow \theta^{\sigma(i)}$ координат вектора $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1}$. При этом, функция $\epsilon(\sigma)$ из (3.5.16) принимает вид $\epsilon(\sigma) = \det(\sigma) = (-1)^{p(\sigma)}$, где $p(\sigma)$ — четность перестановки $\sigma \in S_{r+1} = W$. Теперь, используя выражения (3.4.36) и (3.5.33) для $\lambda^{(\bar{n})}$ и δ , запишем числитель (3.5.16) правой части формулы Вейля (3.5.18) в случае представления $T^{(\lambda^{(\bar{n})})}$ следующим образом

$$\begin{aligned} D_{\delta+\lambda^{(\bar{n})}}(\theta) &= \sum_{\sigma^{-1} \in W} \epsilon(\sigma^{-1}) \exp(\lambda^{(\bar{n})} + \delta, \sigma(\theta)) = \sum_{\sigma \in W} (-1)^{p(\sigma)} \exp(\lambda^{(\bar{n})} + \delta, \sigma(\theta)) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_{r+1}} (-1)^{p(\sigma)} \exp\left(\sum_{i=1}^{r+1} (\lambda_i^{(\bar{n})} + \delta_i) \theta^{\sigma(i)}\right) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_{r+1}} (-1)^{p(\sigma)} \exp\left(\sum_{i=1}^{r+1} \left(\lambda_i - \frac{|\lambda|}{r+1} + \frac{r}{2} - i + 1\right) \theta^{\sigma(i)}\right) = \\ &= c_{|\lambda|} \sum_{\sigma \in S_{r+1}} (-1)^{p(\sigma)} \prod_{i=1}^{r+1} x_{\sigma(i)}^{\lambda_i + r - i + 1} = c_{|\lambda|} \det(x_i^{\lambda_j + (r+1) - j}), \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

где $x_i = e^{\theta^i}$, $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ и $c_{|\lambda|}$ — нормировочный множитель

$$c_{|\lambda|} = \exp\left(\left(-\frac{|\lambda|}{r+1} - \frac{r}{2}\right) \sum_{i=1}^{r+1} \theta^i\right). \quad (3.5.35)$$

Отметим, что множитель (3.5.35) равен единице для элементов $g \in SU(r+1)$, так как условие $\det(g) = 1$ эквивалентно $\sum_i \theta^i = (\theta, u) = 0$, то есть вектор $(\theta^1, \dots, \theta^{r+1})$ принадлежит корневому пространству P_u алгебры $su(r+1)$. Тем не менее, здесь и далее мы рассматриваем общий случай^{3.13} $\sum_i \theta^i \neq 0$, что позволит нам ниже обобщить формулу характеров группы $SU(r+1)$ на случай группы $U(r+1)$. В последнем равенстве в (3.5.34) мы использовали определение детерминанта матрицы $\|A_{ij}\|_{i,j=1, \dots, r+1}$

^{3.13}В этом случае вектор $(\theta^1, \dots, \theta^{r+1})$ принадлежит корневому пространству алгебры $u(r+1)$, см. пункт 2.1 в разделе 3.4.2.

(см. раздел **I-1.2.2** первой части книги):

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_{r+1}} (-1)^{p(\sigma)} A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(r+1)r+1}.$$

Наконец, для функции знаменателя (3.5.11), используя явный вид положительных корней (3.1.13), мы имеем

$$\begin{aligned} D_\delta(\theta) &= \prod_{i < j} (e^{(e^{(i)} - e^{(j)}, \theta)/2} - e^{(e^{(j)} - e^{(i)}, \theta)/2}) = \\ &= e^{-\sum_{i < j} (e^{(i)} + e^{(j)}, \theta)/2} \prod_{i < j} (e^{(e^{(i)}, \theta)} - e^{(e^{(j)}, \theta)}) = \exp\left(-\frac{r}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \theta^i\right) \prod_{i < j} (x_i - x_j), \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

где мы также учли равенство $\sum_{i < j} (e^{(i)} + e^{(j)}, \theta)/2 = (r/2)(u, \theta) = (r/2) \sum_{i=1}^{r+1} \theta^i$. Правая часть (3.5.36) с точностью до множителя $c_0 = \exp(-\frac{r}{2}(\theta, u))$ равна определителю Вандермонда (см. Раздел **I-1.2.2** первой части книги)

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) = \det(x_i^{r+1-j}). \quad (3.5.37)$$

- **Задача 91.** Доказать формулу (3.5.37) с помощью тождества (3.5.12) для знаменателя Вейля в случае алгебры $u(r+1)$, корневая система которой описана в пункте **2.1** раздела **3.4.2**.

Заметим теперь, что однородный полином $\det(x_i^{\lambda_j + (r+1) - j})$ в (3.5.34) антисимметричен относительно перестановки любой пары переменных x_k и x_j . Поэтому при $x_k = x_j$ полином $\det(x_i^{\lambda_j + (r+1) - j})$ в (3.5.34), как и определитель Вандермонда (3.5.37), равен нулю и таким образом должен делиться на минимальный полином (3.5.37), обладающий указанным свойством. Результат деления равен характеру (3.5.18) представления группы $SU(r+1)$ со старшим весом $\lambda^{(\bar{n})}$:

$$\chi_{\lambda^{(\bar{n})}}(\theta) = e^{-\frac{|\lambda| \sum_i \theta^i}{r+1}} \cdot \frac{\det(x_i^{\lambda_j + (r+1) - j})}{\det(x_i^{(r+1) - j})} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + (r+1) - j})}{\det(x_i^{(r+1) - j})}. \quad (3.5.38)$$

Здесь во втором равенстве мы учли то, что для группы $SU(r+1)$ множитель $e^{-\frac{|\lambda| \sum_i \theta^i}{r+1}} = c_{|\lambda|}/c_0$ равен единице в силу условия $\sum_i \theta^i = 0$, эквивалентного условию

$$\prod_i x_i = 1. \quad (3.5.39)$$

В числителе и знаменателе правой части (3.5.38) стоят антисимметрические по переменным x_k полиномы, поэтому их отношение является однородным симметрическим полиномом по переменным x_k , который зависит от диаграммы Юнга (разбиения) $[\lambda_1, \dots, \lambda_r] \vdash |\lambda|$ и называется **симметрическим полиномом Шура**.

Покажем теперь, как первое равенство в (3.5.38) можно применить для вычисления характеров (3.5.6) определенного класса представлений группы $U(r+1)$. Алгебра Ли $u(r+1)$ является центральным расширением алгебры $su(r+1)$ и получается добавлением к $su(r+1)$ генератора, равного единичной матрице I_{r+1} . Соответственно,

диагональные картановские образующие $H_i \in su(r+1)$, введенные в (3.1.8), заменяются на элементы $H'_i \in u(r+1)$ (см. (3.4.43)):

$$H_i = e_{ii} - \frac{1}{r+1} I_{r+1} \Rightarrow H'_i = e_{ii}, \quad (3.5.40)$$

где e_{ii} — диагональные матричные единицы. Если оператор $H_i \in su(r+1)$ в определяющем представлении имеет собственные значения μ_i , то собственные значения оператора $H'_i \in u(r+1)$ в определяющем представлении, согласно (3.5.40), будут равны $\mu'_i = \mu_i + u_i/(r+1)$, где $u_i = 1$ — компоненты вектора $u = (1, 1, \dots, 1)$. Классификация всех неприводимых конечномерных представлений алгебры $u(r+1)$ была дана в пункте 2.1 раздела 3.4.2. Класс представлений алгебры $u(r+1)$, о котором идет речь здесь — это неприводимые представления $T^{(\bar{n})}$ со старшим весом $\lambda^{(\bar{n})}$, заданным в (3.4.45), где мы фиксируем $n_{r+1} = 0$. Такие представления $T^{(\bar{n})}$ нумеруются диаграммами Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$, у которых число строк не превосходит r , и $T^{(\bar{n})}$ строятся как подпредставления в тензорном произведении фундаментальных представлений $T_{(f)}$, где $f = 1, \dots, r$, см. Рис.3.7 (в этом тензорном произведении отсутствуют нетривиальные одномерные представления $T_{(r+1)}$). То есть мы рассматриваем класс представлений $T^{(\bar{n})}$ алгебры $u(r+1)$, которые однозначно соответствуют представлениям алгебры $su(r+1)$. В этом случае связь между значениями весов будет даваться соотношением $\mu'_i = \mu_i + |\lambda| u_i/(r+1)$, где $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$. Если учесть эту связь между весами μ'_i и μ_i представлений $u(r+1)$ и $su(r+1)$ то, пользуясь определением (3.5.6), легко получить соотношение между характерами для указанных представлений групп $U(r+1)$ и $SU(r+1)$:

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda^{(\bar{n})'}}(\theta) &= \text{Tr}_\lambda \left(T^{(\lambda)}(e^{\theta_i H'_i}) \right) = \sum_{\mu'} \text{mult}_\lambda(\mu') \cdot \exp(\theta, \mu') = \\ &= \sum_\mu \text{mult}_\lambda(\mu) \cdot \exp(\theta, \mu + |\lambda| u/(r+1)) = \exp\left(\frac{|\lambda|}{r+1}(\theta, u)\right) \cdot \chi_{\lambda^{(\bar{n})}}(\theta), \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

где характеры $\chi_{\lambda^{(\bar{n})'}}(\theta)$ неприводимых представлений группы $U(r+1)$ нумеруются старшими весами (3.4.45) с $\lambda_{r+1} = 0$:

$$\lambda^{(\bar{n})'} = \lambda^{(\bar{n})} + \frac{|\lambda|}{r+1} u = \sum_{f=1}^r n_f \cdot \lambda_{(f)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0), \quad n_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.5.42)$$

Здесь во втором равенстве мы воспользовались формулой (3.4.36) и фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ определены в (3.4.44). Веса (3.5.42), как и веса $\lambda^{(\bar{n})}$, соответствуют диаграммам Юнга $[\lambda_1, \dots, \lambda_r] \vdash |\lambda|$. Используя в первом равенстве (3.5.38) связь характеров (3.5.41), мы получаем, что характер группы $U(r+1)$ в представлении со старшим весом (3.5.42) также дается полиномом Шура

$$\chi_{\lambda^{(\bar{n})'}}(\theta) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + (r+1)-j})}{\det(x_i^{(r+1)-j})}, \quad (3.5.43)$$

где $x_i = e^{\theta_i}$ — собственные значения элемента $g \in U(r+1)$ в определяющем представлении (см. формулу (3.5.5)). При этом ограничений на x_i нет (в отличие от случая группы $SU(r+1)$, когда выполняется условие (3.5.39), эквивалентное требованию $\det(g) = 1$). Формула характеров (3.5.43), определяющая симметрические полиномы Шура, называется **формулой Якоби-Труди**.

В заключение данного примера найдем явный вид формулы Вейля (3.5.31) для размерностей неприводимых представлений алгебры Ли $su(r+1)$ (группы $SU(r+1)$) со старшим весом $\lambda^{(\vec{n})}$ из (3.4.36), который соответствует диаграмме Юнга $[\lambda_1, \dots, \lambda_r] \vdash |\lambda|$. Пользуясь явными выражениями (3.5.33), (3.4.36) и (3.1.13) для вектора δ , старшего веса $\lambda^{(\vec{n})}$ и положительных корней $\alpha_+^{(ij)}$ алгебры $su(r+1)$, мы имеем

$$\begin{aligned} (\delta, \alpha_+^{(ij)}) &= \left(\sum_{k=1}^{r+1} (r/2 - k + 1)e^{(k)}, e^{(i)} - e^{(j)} \right) = j - i, \\ (\lambda^{(\vec{n})}, \alpha_+^{(ij)}) &= \left(\sum_{k=1}^{r+1} \left(\lambda_k - \frac{|\lambda|}{r+1} \right) e^{(k)}, e^{(i)} - e^{(j)} \right) = \lambda_i - \lambda_j. \end{aligned} \quad (3.5.44)$$

Подставляя эти выражения в формулу Вейля (3.5.31), мы получаем

$$\dim(T^{\lambda^{(\vec{n})}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}, \quad (3.5.45)$$

где $N = r + 1$.

В следующих примерах мы выведем формулы для размерностей и характеров неприводимых представлений групп $USp(2r)$ и $SO(n)$ (аналогичный способ получения этих формул изложен в [27]).

Пример 3. Фундаментальные веса $\lambda_{(f)}$ представлений алгебры Ли $usp(2r)$ определены в (3.4.56). Для вычисления знаменателя Вейля (3.5.12) в случае алгебры Ли $usp(2r)$ необходимо найти соответствующий вектор δ :

$$\delta = \sum_{i=1}^r \lambda_{(i)} = (r, r-1, \dots, 2, 1) = \sum_{i=1}^r (r+1-i)e^{(i)}, \quad (3.5.46)$$

где мы воспользовались формулой (3.4.65). Группа Вейля W алгебры $usp(2r)$ реализуется (см. пункт **3.** из доказательства Утверждения **3.1.1** в подразделе **3.1.3**) как расширение группы S_r всех перестановок координат θ_i вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, за счет добавления к этой группе операций, меняющих знаки у координат θ_i . Эти дополнительные операции можно представить в виде действия $\theta \rightarrow \epsilon \cdot \theta$ на вектор θ диагональной матрицы $\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$, где $\epsilon_i = \pm 1$. Теперь для знаменателя Вейля (3.5.12) с учетом (3.5.46) мы имеем

$$\begin{aligned} D_\delta(\theta) &= \sum_{w \in W} \det(w) \exp(\delta, w(\theta)) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \det(\sigma) \sum_{\epsilon} \det(\epsilon) \exp\left(\sum_i (r+1-i)\epsilon_i \theta^{\sigma(i)}\right), \end{aligned} \quad (3.5.47)$$

где $\det(\epsilon) = \epsilon_1 \cdots \epsilon_r$ и $\sum_{\epsilon} = \sum_{\epsilon_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\epsilon_r = \pm 1}$. Далее воспользуемся формулой

$$\sum_{\epsilon} \det(\epsilon) \exp\left(\sum_i \epsilon_i \mu_i\right) = \prod_{i=1}^r \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_i \exp(\epsilon_i \mu_i) = \prod_{i=1}^r (e^{\mu_i} - e^{-\mu_i}), \quad (3.5.48)$$

и перепишем правую часть (3.5.47) в виде

$$D_\delta(\theta) = \sum_{\sigma \in S_r} \det(\sigma) \prod_{i=1}^r (x_{\sigma(i)}^{r+1-i} - x_{\sigma(i)}^{-(r+1-i)}) = \det\left(x_j^{r+1-i} - x_j^{-(r+1-i)}\right), \quad (3.5.49)$$

где $x_j = e^{\theta^j}$. Действуя аналогично, мы можем записать числитель (3.5.16) формулы Вейля для представлений алгебры $usp(2r)$ следующим образом

$$D_{\delta+\lambda}(\theta) = \det\left(x_j^{\lambda_i+r+1-i} - x_j^{-(\lambda_i+r+1-i)}\right), \quad (3.5.50)$$

где λ_i — компоненты старшего веса (3.4.9):

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \\ \lambda_k &= \sum_{j=k}^r n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r. \end{aligned} \quad (3.5.51)$$

Окончательно формула Вейля (3.5.18) дает

$$\chi_\lambda(\theta) = \sum_{\mu} \text{mult}_{\lambda}(\mu) \cdot \exp(\theta, \mu) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i+r-i+1} - x_j^{-(\lambda_i+r-i+1)})}{\det(x_j^{r-i+1} - x_j^{-(r-i+1)})}, \quad (3.5.52)$$

где $x_i = e^{\theta^i}$, и сумма идет по всем весам μ представления алгебры $usp(2r)$ со старшим весом λ .

Пользуясь явными выражениями (3.5.46), (3.4.57), (3.5.51) и (3.1.37) для вектора δ , старшего веса λ и положительных корней алгебры $usp(2r)$, мы имеем

$$\begin{aligned} (\delta, e^{(i)} \pm e^{(j)}) &= \left(\sum_{k=1}^r (r-k+1)e^{(k)}, e^{(i)} \pm e^{(j)}\right) = (r-i+1) \pm (r-j+1), \\ (\lambda, e^{(i)} \pm e^{(j)}) &= \left(\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k e^{(k)}, e^{(i)} \pm e^{(j)}\right) = \lambda_i \pm \lambda_j. \end{aligned} \quad (3.5.53)$$

Подставляя эти выражения в формулу Вейля (3.5.31), мы получаем формулу для размерности представления $T^{(\lambda)}$:

$$\dim(T^{(\lambda)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \prod_{1 \leq i \leq j \leq r} \frac{\lambda_i + \lambda_j + 2r + 2 - i - j}{2r + 2 - i - j}. \quad (3.5.54)$$

Пример 4. Рассмотрим теперь случай группы $SO(2r+1)$. Фундаментальные веса $\lambda_{(i)}$ для алгебры $so(2r+1)$ даны в (3.4.51). С помощью формулы (3.4.65) мы находим в рассматриваемом случае вектор δ :

$$\delta = \sum_{i=1}^r \lambda_{(i)} = \left(r - \frac{1}{2}, r - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^r \left(r + \frac{1}{2} - i\right) e^{(i)}. \quad (3.5.55)$$

Группа Вейля корневой системы алгебры $so(2r+1)$ изоморфна группе Вейля корневой системы алгебры $usp(2r+1)$ (см. пункты **2.** и **3.** из доказательства Утверждения **3.1.1** в подразделе **3.1.3**). Поэтому знаменатель и числитель формулы Вейля для характеров вычисляются точно так же, как и в предыдущем примере, и мы имеем

$$D_{\delta}(\theta) = \det\left(x_j^{r+1/2-i} - x_j^{-(r+1/2-i)}\right), \quad (3.5.56)$$

$$D_{\delta+\lambda}(\theta) = \det\left(x_j^{\lambda_i+r+1/2-i} - x_j^{-(\lambda_i+r+1/2-i)}\right), \quad (3.5.57)$$

где $x_j = e^{\theta_j}$ и λ_i — компоненты старшего веса (3.4.9):

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \quad \lambda_k = \sum_{j=k}^{r-1} n_j + \frac{n_r}{2}, \quad n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (3.5.58)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0.$$

Окончательно формула Вейля (3.5.18) для группы $SO(2r+1)$ записывается в виде

$$\chi\lambda(\theta) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i+r-i+1/2} - x_j^{-(\lambda_i+r-i+1/2)})}{\det(x_j^{r-i+1/2} - x_j^{-(r-i+1/2)})}. \quad (3.5.59)$$

Пользуясь явными выражениями (3.5.55), (3.4.55), (3.5.58) и (3.1.28) для вектора δ , старшего веса λ и положительных корней алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$, мы имеем

$$\begin{aligned} (\delta, e^{(i)} \pm e^{(j)}) &= \left(\sum_{k=1}^r (r-k+\frac{1}{2})e^{(k)}, e^{(i)} \pm e^{(j)} \right) = (r-i+\frac{1}{2}) \pm (r-j+\frac{1}{2}), \\ (\lambda, e^{(i)} \pm e^{(j)}) &= \left(\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k e^{(k)}, e^{(i)} \pm e^{(j)} \right) = \lambda_i \pm \lambda_j, \\ (\delta, e^{(i)}) &= (r-i+\frac{1}{2}), \quad (\lambda, e^{(i)}) = \lambda_i. \end{aligned} \quad (3.5.60)$$

Подставляя эти выражения в формулу Вейля (3.5.31), мы получаем формулу для размерности представления $T^{(\lambda)}$ группы $SO(2r+1)$:

$$\dim(T^{(\lambda)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{(j - i)} \frac{(\lambda_i + \lambda_j + 2r + 1 - i - j)}{(2r + 1 - i - j)} \prod_{1 \leq i \leq r} \frac{(\lambda_i + r - i + \frac{1}{2})}{(r - i + \frac{1}{2})}. \quad (3.5.61)$$

Пример 5. Рассмотрим наконец случай группы $SO(2r)$. Фундаментальные веса $\lambda_{(i)}$ для алгебры $so(2r)$ даны в (3.4.47) и с помощью формулы (3.4.65) мы находим вектор δ :

$$\delta = \sum_{i=1}^r \lambda_{(i)} = (r-1, r-2, \dots, 1, 0) = \sum_{i=1}^r (r-i)e^{(i)}. \quad (3.5.62)$$

Группа Вейля корневой системы алгебры $so(2r)$ генерируется (см. пункт 4. из доказательства Утверждения 3.1.1 в подразделе 3.1.3) всеми перестановками $\sigma \in S_r$ координат θ_i вектора $\theta \in i\mathfrak{V}_r$, и операциями изменения знаков у произвольного четного числа координат θ_i . Такое изменение знаков можно описать действием $\theta \rightarrow \epsilon \cdot \theta$ на вектор θ матрицы $\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$, у которой $\epsilon_i = \pm 1$ и число отрицательных диагональных элементов $\epsilon_i = -1$ чётно. В этом случае вместо формулы (3.5.48) мы имеем соотношение

$$\sum_{\epsilon} (\epsilon_1 \cdots \epsilon_r) \exp\left(\sum_i \epsilon_i \mu_i\right) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^r (e^{\mu_i} + e^{-\mu_i}) + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^r (e^{\mu_i} - e^{-\mu_i}), \quad (3.5.63)$$

которое легко проверяется, если разложить произведения в правой части в сумму и собрать все подобные члены. Отметим, что второе слагаемое в правой части (3.5.63) равно нулю, если равна нулю хотя бы одна из компонент μ_i . Пользуясь формулами

(3.5.12), (3.5.16), (3.5.62) и (3.5.63), для знаменателя и числителя формулы Вейля (3.5.18) мы получаем

$$\begin{aligned} D_\delta(\theta) &= \frac{1}{2} \det \left(x_j^{r-i} + x_j^{-(r-i)} \right), \\ D_{\delta+\lambda}(\theta) &= \frac{1}{2} \det \left(x_j^{\lambda_i+r-i} + x_j^{-(\lambda_i+r-i)} \right) + \frac{1}{2} \det \left(x_j^{\lambda_i+r-i} - x_j^{-(\lambda_i+r-i)} \right), \end{aligned} \quad (3.5.64)$$

где $x_j = e^{\theta_j}$ и λ_i — компоненты старшего веса (3.4.9):

$$\begin{aligned} \lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)} &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \quad \lambda_k = \sum_{j=k}^{r-2} n_j + \frac{n_{r-1} + n_r}{2}, \quad (1 \leq k \leq r-1), \\ \lambda_r &= \frac{n_{r-1} - n_r}{2}, \quad n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r. \end{aligned} \quad (3.5.65)$$

Окончательно формула Вейля (3.5.18) для группы $SO(2r)$ принимает вид

$$\chi_\lambda(\theta) = \frac{\det \left(x_j^{\lambda_i+r-i} + x_j^{-(\lambda_i+r-i)} \right) + \det \left(x_j^{\lambda_i+r-i} - x_j^{-(\lambda_i+r-i)} \right)}{\det \left(x_j^{r-i} + x_j^{-(r-i)} \right)}. \quad (3.5.66)$$

Пользуясь явными выражениями (3.5.62), (3.4.54), (3.5.65) и (3.1.25) для вектора δ , старшего веса λ и положительных корней $\alpha_\pm^{(i,j)}$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, мы имеем

$$\begin{aligned} (\delta, e^{(i)} \pm e^{(j)}) &= \left(\sum_{k=1}^r (r-k) e^{(k)}, e^{(i)} \pm e^{(j)} \right) = (r-i) \pm (r-j), \\ (\lambda, e^{(i)} \pm e^{(j)}) &= \left(\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k e^{(k)}, e^{(i)} \pm e^{(j)} \right) = \lambda_i \pm \lambda_j. \end{aligned} \quad (3.5.67)$$

Подставляя эти выражения в формулу Вейля (3.5.31), мы получаем формулу для размерности представления $T^{(\lambda)}$ группы $SO(2r)$:

$$\dim(T^{(\lambda)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2r - i - j)}{(j - i)(2r - i - j)} = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\ell_i^2 - \ell_j^2)}{(m_i^2 - m_j^2)}, \quad (3.5.68)$$

где $\ell_i = \lambda_i + r - i$ и $m_i = r - i$.

Глава 4

Конечномерные представления алгебр $sl(N, \mathbb{C})$ и $su(N)$ и групп $SU(N)$ и $SL(N, \mathbb{C})$

Мы уже видели (см. Утверждение 3.4.8, раздел 3.4.2), что все конечномерные неприводимые комплексные представления алгебр Ли $sl(N, \mathbb{C})$ и $su(N)$, а следовательно и соответствующие представления группы $SU(N)$, содержатся в тензорных произведениях $T^{\otimes r}$ их определяющих представлений T . Анализ таких представлений удобнее вести в терминах группы $SL(N, \mathbb{C})$. При этом, однако, необходимо помнить, что рассматриваемый нами класс представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, которые вложены в тензорное произведение ее определяющих представлений T , ограничен и не включает представления, построенные из комплексно сопряженных представлений T^* .

В этой Главе мы убедимся, что рассматриваемые конечномерные неприводимые представления классифицируются с помощью неприводимых представлений группы перестановок (симметрической группы) S_r . В свою очередь, неприводимые представления группы S_r нумеруются с помощью диаграмм Юнга, которые, таким образом, используются и при классификации всех конечномерных неприводимых представлений группы $SU(N)$ и ограниченного класса таких представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$. То, что конечномерные неприводимые представления алгебр Ли $sl(N, \mathbb{C})$ и $su(N)$ нумеруются диаграммами Юнга, мы уже отмечали в Замечании 2 в Разделе 3.4.2. Указанное соответствие между неприводимыми конечномерными представлениями групп Ли $SU(N)$ (и алгебр $sl(N, \mathbb{C})$, $su(N)$) и неприводимыми представлениями симметрической группы называется *дуальностью Шура–Вейля*.

4.1 Предварительные замечания

Группа $SL(N, \mathbb{C})$ определяется (см. разделы I-1.1 и I-1.2 в первой книге) как множество комплексных $N \times N$ матриц с детерминантом, равным единице. Компактная подгруппа $SU(N) \subset SL(N, \mathbb{C})$ — это подмножество матриц $U \in SL(N, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию унитарности $U^\dagger U = I_N$. Алгебра Ли $\mathcal{A}(SL(N, \mathbb{C}))$ группы $SL(N, \mathbb{C})$ определялась нами как касательное пространство (в единичном элементе) к группе $SL(N, \mathbb{C})$, рассматриваемой как вещественное многообразие. Таким образом, по построению, $\mathcal{A}(SL(N, \mathbb{C}))$ — вещественная алгебра Ли, которая является овецеств-

лением комплексной алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$ — комплексного векторного пространства комплексных бесследовых $N \times N$ матриц.

Алгебра Ли $su(N)$ является вещественной формой алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$, поэтому в $sl(N, \mathbb{C})$ имеется базис, который одновременно является базисом и для $su(N)$. Отсюда следует, что по каждому конечномерному представлению $sl(N, \mathbb{C})$ строится представление базисных элементов алгебры $su(N)$ и тем самым строится конечномерное комплексное представление самой $su(N)$. И наоборот, тем же способом (с помощью комплексификации) по представлению $su(N)$ строится представление $sl(N, \mathbb{C})$. Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между всеми комплексными неприводимыми конечномерными представлениями алгебр $su(N)$ и $sl(N, \mathbb{C})$ (см. аналогичное рассуждение по поводу связи между представлениями алгебр $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$ в начале раздела 2.1). Далее, так как все конечномерные неприводимые представления $su(N)$ содержатся в регулярном представлении $su(N)$, что следует из Утверждения **I-3.6.5**, то все конечномерные неприводимые представления $sl(N, \mathbb{C})$ содержатся, в силу указанного выше соответствия, в регулярном представлении $sl(N, \mathbb{C})$.

Замечание. Снова подчеркнем, что хотя мы интересуемся алгебрами $su(N)$, $sl(N, \mathbb{C})$ и группой $SU(N)$, часто удобно вести анализ в терминах группы $SL(N, \mathbb{C})$. При этом мы рассматриваем только те представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, которые принадлежат подклассу, описанному для случая $N = 2$ в Замечании 3 в конце раздела 2.1. Опишем этот подкласс для произвольных N . Элементы g группы $SL(N, \mathbb{C})$ вблизи единицы можно записать в виде $g = I_N + t \cdot A + t^2 \dots$, где $A \in sl(N, \mathbb{C})$, и t — малый параметр^{4.1}. Тогда любое представление T_{SL} группы $SL(N, \mathbb{C})$ из рассматриваемого класса порождается представлением T_{sl} алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ посредством соотношения $T_{SL}(g) = I_N + t \cdot T_{sl}(A) + t^2 \dots$. Такие представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ и далее мы будем использовать одинаковые обозначения для соответствующих представлений алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ и группы $SL(N, \mathbb{C})$. Так как все конечномерные неприводимые комплексные представления алгебр Ли $sl(N, \mathbb{C})$ содержатся в тензорных произведениях $T^{\otimes r}$ их определяющих представлений T , то соответствующий класс конечномерных неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ — это только те представления, которые вложены в прямое произведение определяющих представлений^{4.2}. В этом случае рассмотрение группы $SL(N, \mathbb{C})$ вместо алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ удобно, так как приводит к заметному упрощению вида формул.

Утверждение (см. раздел 3.4.2 и, в частности, Утверждение 3.4.8) о том, что вся-

^{4.1}Отметим, что равенство $g = I_N + t \cdot A + t^2 \dots$ — это соотношение между комплексными матрицами из $SL(N, \mathbb{C})$ и $sl(N, \mathbb{C})$. Это равенство нельзя буквально воспринимать как соотношение между группой Ли $SL(N, \mathbb{C})$, рассматриваемой как вещественное многообразие, и ее вещественной алгеброй Ли $\mathcal{A}(SL(N, \mathbb{C}))$. Как мы уже обсуждали, комплексная алгебра Ли $sl(N, \mathbb{C})$ не является (вещественной) алгеброй Ли $\mathcal{A}(SL(N, \mathbb{C}))$ группы Ли $SL(N, \mathbb{C})$, рассматриваемой как вещественное многообразие.

^{4.2}Соотношение $T_{SL}(g) = I_N + t \cdot T_{sl}(A) + t^2 \dots$ не выполняется, например, для представления T^* группы $SL(N, \mathbb{C})$, комплексно сопряженного определяющему представлению T (комплексная алгебра Ли не имеет комплексно сопряженных представлений). Таким образом, в рассматриваемый класс не входят неприводимые представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, содержащиеся в прямом произведении $T^{\otimes r_1} \otimes (T^*)^{\otimes r_2}$, где $r_2 > 0$. Это вновь показывает, что мы имеем дело лишь с ограниченным классом представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$.

кое конечномерное неприводимое представление $T^{(\lambda)}$ алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ (или $su(N)$) содержится в каком-нибудь тензорном произведении $T^{\otimes r}$ определяющих представлений T этой алгебры, может быть получено без обращения к теории весов. Это позволяет сделать рассмотрение регулярного представления.

Для регулярного представления (2.2.21) группы $SL(N, \mathbb{C})$, связаного с правыми сдвигами на группе, рассмотрим сдвиг на элемент $g = I_N + \epsilon + \dots \in SL(N, \mathbb{C})$, который близок к единичному:

$$[\tilde{T}^{(R)}(g)]\alpha(h) = \alpha(h \cdot g) = \alpha(h + h\epsilon + \dots) = \alpha(h) + \epsilon_{ij} h_{ki} \frac{\partial}{\partial h_{kj}} \alpha(h) + \dots \quad (4.1.1)$$

Здесь $h, g \in SL(N, \mathbb{C})$, $\alpha(h)$ – функция на группе, элементы бесследовой матрицы ϵ малы, и точками обозначены члены следующего порядка малости по ϵ_{ij} . Формула (4.1.1) задает правое регулярное представление $\tilde{T}^{(R)}$ алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ на функциях $\alpha(h)$ на группе $SL(N, \mathbb{C})$:

$$\tilde{T}^{(R)} : A \rightarrow A_{ij} h_{ki} \frac{\partial}{\partial h_{kj}}, \quad A \in sl(N, \mathbb{C}). \quad (4.1.2)$$

- *Задача 92. Проверить, что (4.1.2) определяет представление алгебры $sl(N, \mathbb{C})$, то есть проверить, что операторы*

$$E_{ij} = h_{ki} \partial_{h_{kj}} - \frac{\delta_{ij}}{N} h_{k\ell} \partial_{h_{k\ell}}, \quad (4.1.3)$$

(здесь $\partial_{h_{ki}} = \frac{\partial}{\partial h_{ki}}$, и по повторяющимся индексам идет суммирование) удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры $sl(N, \mathbb{C})$:

$$[E_{ij}, E_{k\ell}] = \delta_{jk} E_{i\ell} - \delta_{i\ell} E_{kj}.$$

Замечание. Для описания более широкого класса неприводимых представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, включающих комплексно сопряженные представления, необходимо рассмотреть обобщенные регулярные представления T_R^{gen} , которые определены на пространстве неаналитических функций $\alpha(h, h^*)$ (сравните с (2.2.21)):

$$[T_R^{gen}(g) \cdot \alpha](h, h^*) = \alpha(h \cdot g, h^* \cdot g^*) \quad g, h \in SL(N, \mathbb{C}). \quad (4.1.4)$$

Мы, однако, этот общий класс далее не обсуждаем и всегда рассматриваем только ограниченный класс неприводимых представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, которые вкладываются в тензорное произведение ее определяющих представлений и получаются из регулярного представления (2.2.21).

Рассмотрим в пространстве \mathcal{F} всех функций $\alpha(h)$ на группе $SL(N, \mathbb{C})$ конечномерные подпространства $\mathcal{F}^{(r)}$ однородных полиномов степени r по переменным h_{ki} . Очевидно, что в силу явного вида представления (4.1.2), которое сохраняет степень полинома по h_{ki} , такие подпространства являются инвариантными относительно действия алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ в регулярном представлении $\tilde{T}^{(R)}$. Отсюда следует, что каждое конечномерное **неприводимое** представление, которое содержится в регулярном

представлении, реализуется только на полиномах одной определенной степени однородности.

Заметим теперь, что правое регулярное представление (2.2.21) группы $SL(N, \mathbb{C})$, рассматриваемое на подпространстве $\mathcal{F}^{(1)}$ однородных полиномов **первого порядка**, составленных из элементов k -й строки $(h_{k1}, h_{k2}, \dots, h_{kN})$ матрицы $h \in SL(N, \mathbb{C})$, эквивалентно определяющему представлению T группы $SL(N, \mathbb{C})$

$$[\tilde{T}^{(R)}(g)]h_{ki} = h_{kj} g_{ji} \quad (k = 1, \dots, N) \Leftrightarrow \quad (4.1.5)$$

$$T(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j g_{ji}, \quad (4.1.6)$$

где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N)$ – базисные вектора в пространстве \mathcal{V} определяющего представления. Другими словами, определяющее представление $SL(N, \mathbb{C})$ реализуется как подпредставление в регулярном представлении на пространствах $\mathcal{F}_k^{(1)}$ однородных полиномов первого порядка по переменным h_{kj} (k фиксировано) и мы имеем $\mathcal{F}^{(1)} = \sum_k \mathcal{F}_k^{(1)}$. Аналогично, пространство $\mathcal{F}^{(r)}$ однородных полиномов степени r есть сумма подпространств $\mathcal{F}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(r)}$ ($k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r$), базисными элементами которых являются мономы

$$h_{k_1 i_1} h_{k_2 i_2} \cdots h_{k_r i_r} \quad (k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r)$$

(k_1, k_2, \dots, k_r фиксированы), преобразующиеся при действии $SL(N, \mathbb{C})$ в регулярном представлении так же, как и базисные элементы

$$(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r}), \quad (4.1.7)$$

в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ представления $T^{\otimes r}$ прямого произведения r определяющих представлений (4.1.5):

$$\begin{aligned} [\tilde{T}^{(R)}(g)](h_{k_1 i_1} \cdots h_{k_r i_r}) &= (h_{k_1 j_1} \cdots h_{k_r j_r}) g_{j_1 i_1} \cdots g_{j_r i_r} \Rightarrow \\ T^{\otimes r}(g) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_r}) g_{j_1 i_1} \cdots g_{j_r i_r}. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Из изложенного ясно, что **все** неприводимые конечномерные представления $T^{(\lambda)}$ алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ (а они все содержатся в правом регулярном представлении (4.1.2)) должны реализоваться на подпространствах $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ в введенных выше пространствах однородных полиномов $\mathcal{F}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(r)} \subset \mathcal{F}^{(r)} \subset \mathcal{F}$. Регулярное представление, действующее на $\mathcal{F}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(r)}$, эквивалентно $T^{\otimes r}$, и следовательно каждое конечномерное неприводимое представление $T^{(\lambda)}$ алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ (или группы $SU(N)$) содержится в каком-нибудь тензорном произведении $T^{\otimes r}$ определяющих представлений T этих групп. Так мы вновь приходим к результату, полученному в разделе 3.4.2 (см. Утверждение 3.4.8).

Далее возникает проблема – как выделять неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ из, вообще говоря, приводимых представлений $T^{\otimes r}$? Один из способов решения этой проблемы, как мы указывали в предыдущей Главе, состоит в применении метода построения представлений со старшим весом. В данной Главе, однако, мы изложим другой способ решения этой проблемы. А именно, мы покажем, что неприводимые представления $SL(N, \mathbb{C})$ из рассматриваемого подкласса (или неприводимые представления $SU(N)$), содержащиеся в представлениях $T^{\otimes r}$, выделяются с помощью специальных проекторов, которые соответствуют неприводимым представлениям группы перестановок (симметрической группы) S_r .

4.2 Действие группы S_r в пространстве тензорного произведения определяющих представлений

Пусть T — определяющее представление группы $SL(N, \mathbb{C})$, действующее в N -мерном комплексном векторном пространстве $\mathcal{V} \cong \mathbb{C}^N$. Выберем в \mathcal{V} базис $\{\vec{e}_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) и запишем действие элемента $g = \|g^i_j\|$ группы $SL(N, \mathbb{C})$ в определяющем представлении в пространстве \mathcal{V} стандартным образом согласно (4.1.6):

$$T(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_k g^k_i. \quad (4.2.1)$$

Здесь и далее нам удобно размещать "входящие" (соответствующие строкам) индексы у матриц сверху, а "исходящие" (соответствующие столбцам) — снизу. Соответственно на координатах вектора $\vec{\psi} = \psi^i \vec{e}_i \in \mathcal{V}$ действие (4.2.1) записывается в виде

$$\psi^i \rightarrow \psi'^i = [T(g) \cdot \vec{\psi}]^i = g^i_j \psi^j. \quad (4.2.2)$$

Рассмотрим теперь тензорное произведение $T^{\otimes r} := T \otimes \dots \otimes T$ некоторого числа r определяющих представлений T группы $SL(N, \mathbb{C})$. Это представление согласно определению тензорного произведения представлений (данному в разделе **I-3.3.1** первой части книги) сопоставляет каждому элементу $g = \|g^i_j\| \in SL(N, \mathbb{C})$ оператор

$$T^{\otimes r}(g) := \underbrace{T(g) \otimes \dots \otimes T(g)}_r, \quad (4.2.3)$$

который действует в тензорном произведении $\mathcal{V}^{\otimes r}$ N -мерных векторных пространств следующим образом

$$\begin{aligned} (T^{\otimes r}(g)) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) g^{j_1}_{i_1} \dots g^{j_r}_{i_r}, \\ \psi^{i_1 \dots i_r} \rightarrow \psi'^{i_1 \dots i_r} &= [(T^{\otimes r}(g)) \cdot \Psi]^{i_1 \dots i_r} = g^{i_1}_{j_1} \dots g^{i_r}_{j_r} \cdot \psi^{j_1 \dots j_r}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где $\Psi = \psi^{j_1 \dots j_r} (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) \in \mathcal{V}^{\otimes r}$ — тензор r -го ранга, а $\psi^{j_1 \dots j_r}$ — его компоненты. Единичный оператор $I_N^{\otimes r}$ в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ имеет вид

$$\begin{aligned} (I_N^{\otimes r}) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) \delta^{j_1}_{i_1} \dots \delta^{j_r}_{i_r}, \\ \psi^{i_1 \dots i_r} \rightarrow \psi'^{i_1 \dots i_r} &= [(I_N^{\otimes r}) \cdot \Psi]^{i_1 \dots i_r} = \delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_r}_{j_r} \psi^{j_1 \dots j_r}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Введем теперь набор операторов $s(\sigma)$, которые производят перестановку факторов $\vec{v}_a \in \mathcal{V}$ в элементе $(\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes \dots \otimes \vec{v}_r) \in \mathcal{V}^{\otimes r}$:

$$s(\sigma) \cdot (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes \dots \otimes \vec{v}_r) = (\vec{v}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \vec{v}_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{\sigma^{-1}(r)}), \quad (4.2.6)$$

где σ обозначает соответствующую перестановку r элементов $(1, 2, \dots, r)$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix} \in S_r, \quad (4.2.7)$$

а σ^{-1} — перестановка, обратная к σ . Группа перестановок (симметрическая группа) была определена и подробно обсуждалась в разделе **I-1.1.1** первой части книги.

Напомним правило произведения двух перестановок $\mu, \sigma \in S_r$, которым мы будем пользоваться ниже

$$\begin{aligned} \mu \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \mu(1) & \dots & \mu(r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(r) \\ \mu(\sigma(1)) & \dots & \mu(\sigma(r)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \mu(\sigma(1)) & \dots & \mu(\sigma(r)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Согласно определению (4.2.6) матричное представление для операторов $\mathbf{s}(\sigma)$ в базисе (4.1.7), имеет вид (сравните с (4.2.5)):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\sigma) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \vec{e}_{i_{\sigma^{-1}(2)}} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_{\sigma^{-1}(r)}}) = \\ &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) \delta_{i_1}^{j_{\sigma(1)}} \cdot \delta_{i_2}^{j_{\sigma(2)}} \cdot \dots \cdot \delta_{i_r}^{j_{\sigma(r)}} \equiv (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) [\mathbf{s}(\sigma)]_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\psi^{i_1 \dots i_r} \rightarrow \psi'^{i_1 \dots i_r} = [\mathbf{s}(\sigma) \cdot \Psi]^{i_1 \dots i_r} = \delta_{j_1}^{i_{\sigma(1)}} \dots \delta_{j_r}^{i_{\sigma(r)}} \psi^{j_1 \dots j_r} = \psi^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}. \quad (4.2.10)$$

Утверждение 4.2.1 Формула (4.2.6) задает отображение \mathbf{s} из группы перестановок S_r в множество линейных операторов, действующих в $\mathcal{V}^{\otimes r}$. Отображение \mathbf{s} является гомоморфизмом и, таким образом, определяет представление группы S_r в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$.

Доказательство. Необходимо доказать, что $\mathbf{s}(\mu) \cdot \mathbf{s}(\sigma) = \mathbf{s}(\mu \cdot \sigma)$. Данное утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mu) \cdot \mathbf{s}(\sigma) \cdot (\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_r) &= \mathbf{s}(\mu) \cdot (\vec{v}'_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}'_r) = (\vec{v}'_{\mu^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \vec{v}'_{\mu^{-1}(r)}) = \\ &= (\vec{v}_{\sigma^{-1}(\mu^{-1}(1))} \otimes \dots \otimes \vec{v}_{\sigma^{-1}(\mu^{-1}(r))}) = \mathbf{s}(\mu \cdot \sigma) \cdot (\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_r), \end{aligned}$$

где мы применили (4.2.6) и ввели обозначение $\vec{v}'_i = \vec{v}_{\sigma^{-1}(i)}$. ■

- **Задача 93.** Проверить свойство гомоморфизма $\mathbf{s}(\mu) \cdot \mathbf{s}(\sigma) = \mathbf{s}(\mu \cdot \sigma)$, используя матричное представление (4.2.9), (4.2.10). Иначе говоря, проверить условие $[\mathbf{s}(\mu) \cdot [\mathbf{s}(\sigma) \cdot \Psi]]^{i_1 \dots i_r} = \Psi^{i_{\mu(\sigma(1))} \dots i_{\mu(\sigma(r))}}$.

Пример 1. В качестве иллюстрации к Утверждению 4.2.1 и Задаче 93 проверим условие гомоморфизма $\mathbf{s}(\mu) \cdot \mathbf{s}(\sigma) = \mathbf{s}(\mu \cdot \sigma)$ для случая двух транспозиций $\sigma = (13)$ и $\mu = (12)$. Применяя (4.2.10) последовательно, сначала для $\mu = (12)$, а потом для $\sigma = (13)$ мы имеем

$$[\mathbf{s}(\mu) \cdot [\mathbf{s}(\sigma) \cdot \Psi]]^{i_1 i_2 i_3} = [\mathbf{s}(\sigma) \cdot \Psi]^{i_2 i_1 i_3} = \psi^{i_3 i_1 i_2}. \quad (4.2.11)$$

С другой стороны, согласно определению (4.2.8) мы получаем $\mu \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому $[\mathbf{s}(\mu \cdot \sigma) \cdot \Psi]^{i_1 i_2 i_3} = \psi^{i_3 i_1 i_2}$, что совпадает с (4.2.11). Отметим, что в общем случае результат последовательного действия (4.2.10) двух перестановок $\sigma, \mu \in S_r$ на тензор ранга r достаточно просто вывести, применяя графическое представление перестановок, которое обсуждалось в разделе **I-1.1.4** первой части книги.

Таким образом, представление \mathbf{s} каждому элементу $\sigma \in S_r$ сопоставляет линейный оператор $\mathbf{s}(\sigma)$, действующий согласно (4.2.6) – (4.2.10) в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ тензоров ранга r . В частности, формула (4.2.10) показывает, что оператор $\mathbf{s}(\sigma)$ переставляет индексы у компонент тензора $\Psi \in \mathcal{V}^{\otimes r}$.

Примером оператора типа (4.2.6), (4.2.9) для $r = 2$ служит оператор перестановки P , действующий по правилу $P(\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1$:

$$P(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2}) = (\vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2}) P_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}, \quad P_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_1}^{j_2}. \quad (4.2.12)$$

Обобщение этого оператора для $r > 2$ дается операторами $\mathfrak{s}(\sigma_a)$, реализованными в стандартном базисе (4.1.7) матрицами

$$(\mathfrak{s}(\sigma_a))_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} = \delta_{k_1}^{j_1} \cdot \delta_{k_2}^{j_2} \cdots \delta_{k_{a-1}}^{j_{a-1}} \cdot \delta_{k_{a+1}}^{j_a} \delta_{k_a}^{j_{a+1}} \cdot \delta_{k_{a+2}}^{j_{a+2}} \cdots \delta_{k_r}^{j_r}, \quad (4.2.13)$$

где σ_a – соседняя транспозиция, которая переставляет в (4.2.6) только вектора \vec{v}_a и \vec{v}_{a+1} , а остальные вектора оставляет на своих местах. Очевидно, что матрица (4.2.13) соответствует оператору в $\mathcal{V}^{\otimes r}$:

$$\mathfrak{s}(\sigma_a) = \underbrace{I_N \otimes \cdots \otimes I_N}_{a-1} \otimes P \otimes \underbrace{I_N \otimes \cdots \otimes I_N}_{r-a-1}. \quad (4.2.14)$$

где P – оператор перестановки двух векторов.

Снова, пусть T – определяющее представление группы $SL(N, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{V} . Будем говорить, что X является $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантным оператором в $\mathcal{V}^{\otimes r}$, если он коммутирует с действием группы $SL(N, \mathbb{C})$ в представлении $T^{\otimes r}$:

$$X \cdot (T^{\otimes r}(g)) = (T^{\otimes r}(g)) \cdot X, \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}). \quad (4.2.15)$$

Утверждение 4.2.2 *Любой $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантный оператор X , действующий в $\mathcal{V}^{\otimes r}$, представляется в виде линейной комбинации операторов (4.2.9), (4.2.10):*

$$X = \sum_{\sigma \in S_r} x_\sigma \mathfrak{s}(\sigma), \quad (4.2.16)$$

где x_σ – комплексные коэффициенты, и сумма идет по всем $r!$ перестановкам $\sigma \in S_r$. Любой оператор (4.2.16) является $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантным оператором, то есть удовлетворяет условию (4.2.15).

Доказательство. Инвариантность оператора (4.2.16), или, другими словами, его коммутативность (4.2.15) с действием группы $SL(N, \mathbb{C})$ в представлении $T^{\otimes r}$, следует из инвариантности каждого из слагаемых в (4.2.16), то есть из инвариантности операторов $\mathfrak{s}(\sigma)$ для всех σ . Чтобы доказать это, рассмотрим какой-либо набор операторов A_i ($i = 1, \dots, r$) в \mathcal{V} и построим оператор $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$, который действует в $\mathcal{V}^{\otimes r}$. Тогда из определения (4.2.6) следует правило коммутирования $\mathfrak{s}(\sigma)$ и $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$:

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_r) \cdot \mathfrak{s}(\sigma) = \mathfrak{s}(\sigma) \cdot (A_{\sigma(1)} \otimes A_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma(r)}). \quad (4.2.17)$$

после чего инвариантность операторов $\mathfrak{s}(\sigma)$ ($\forall \sigma \in S_r$) становится очевидной:

$$\mathfrak{s}(\sigma) \cdot (T(g) \otimes T(g) \otimes \cdots \otimes T(g)) = (T(g) \otimes T(g) \otimes \cdots \otimes T(g)) \cdot \mathfrak{s}(\sigma). \quad (4.2.18)$$

Докажем теперь, что любой оператор X , удовлетворяющий (4.2.15), представляется в виде (4.2.16). Без ограничения общности при рассмотрении (4.2.15) мы можем

заменить $g \in SL(N, \mathbb{C})$ на $g \in GL(N, \mathbb{C})$ (так как любая матрица $g \in GL(N, \mathbb{C})$ получается из матрицы $g \in SL(N, \mathbb{C})$ умножением на число). Возьмем в качестве элемента g в (4.2.15) диагональную матрицу $g = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$, где a_i — произвольные комплексные параметры. Тогда соотношение (4.2.15) переписывается в виде

$$(a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_r} - a_{k_1} \cdot a_{k_2} \cdots a_{k_r}) X_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} = 0, \quad (4.2.19)$$

(суммирования по повторяющимся индексам нет). Так как a_i произвольны, то из (4.2.19) следует, что общее решение для коэффициентов оператора X записывается в виде суммы по всем перестановкам $\sigma \in S_r$ частных решений:

$$X_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} = x_\sigma^{k_1 \dots k_r} \delta_{k_1}^{i_{\sigma(1)}} \cdots \delta_{k_r}^{i_{\sigma(r)}}, \quad (4.2.20)$$

где $x_\sigma^{k_1 \dots k_r} \in \mathbb{C}$. Подставим (4.2.20) в (4.2.15) и не будем ограничиваться диагональными матрицами g^i_k . В результате получаем уравнение

$$(x_\sigma^{k_1 \dots k_r} - x_\sigma^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}) g_{k_1}^{i_{\sigma(1)}} \cdots g_{k_r}^{i_{\sigma(r)}} = 0,$$

которое должно выполняться для всех значений индексов i_s и k_p . Так как g^i_k произвольны, то мы имеем $x_\sigma^{k_1 \dots k_r} = x_\sigma^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}$. Полагая здесь все индексы $i_\ell = 1$, мы получаем, что коэффициенты $x_\sigma^{k_1 \dots k_r}$ в (4.2.20) не зависят от индексов $(k_1 \dots k_r)$ и равны некоторой константе $x_\sigma = x_\sigma^{1 \dots 1}$, а выражение в (4.2.20) приобретает вид $x_\sigma \cdot s(\sigma)$. Суммируя все такие частные решения по всевозможным перестановкам σ , мы приходим к (4.2.16). \blacksquare

- *Задача 94. Доказать (4.2.18), используя матричные представления (4.2.4), (4.2.9) и (4.2.10).*

Итак, из Утверждения 4.2.2 следует, что имеется матрица (4.2.16), не пропорциональная единичной и коммутирующая со всеми матрицами представления $T^{\otimes r}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$. Поэтому представление $T^{\otimes r}$, согласно Лемме Шура, приводимо и в нем можно выделить неприводимые представления.

Пример 2. Рассмотрим тензорное произведение двух определяющих представлений $T \otimes T$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, то есть рассмотрим случай $r = 2$. Согласно Утверждению 4.2.2 в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ существует нетривиальный оператор X , для которого имеет место соотношение

$$X \cdot (T(g) \otimes T(g)) = (T(g) \otimes T(g)) \cdot X, \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}), \quad (4.2.21)$$

и который согласно (4.2.16) представляется в виде

$$X = x_0 I_N \otimes I_N + x_1 P, \quad (4.2.22)$$

где $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, $I_N \otimes I_N$ — единичный оператор и P — оператор перестановки в $\mathcal{V}^{\otimes 2} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$. Построим два проектора

$$P^+ = \frac{1}{2}(I_N \otimes I_N + P), \quad P^- = \frac{1}{2}(I_N \otimes I_N - P), \quad (4.2.23)$$

которые представляют собой частные случаи оператора (4.2.22) и поэтому коммутируют с действием группы $SL(N, \mathbb{C})$. Операторы P^+ и P^- образуют полную систему взаимно ортогональных проекторов

$$P^+ P^- = P^- P^+ = 0, \quad (P^\pm)^2 = P^\pm, \quad P^+ + P^- = I_N \otimes I_N, \quad (4.2.24)$$

и, будучи $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантными операторами, они разбивают пространство $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ представления $T^{\otimes 2} = T \otimes T$ на два нетривиальных инвариантных подпространства

$$\mathcal{V}^{(+)} = P^+ \mathcal{V}^{\otimes 2}, \quad \mathcal{V}^{(-)} = P^- \mathcal{V}^{\otimes 2}.$$

Таким образом, представление $T^{\otimes 2}$ приводимо. Инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(+)}$ и $\mathcal{V}^{(-)}$ являются подпространствами симметричных и антисимметричных тензоров в $\mathcal{V}^{\otimes 2}$, так как согласно (4.2.10), (4.2.12) и (4.2.23) мы имеем

$$[P^\pm \cdot \Psi]^{i_1 i_2} = \frac{1}{2} (\psi^{i_1 i_2} \pm \psi^{i_2 i_1}). \quad (4.2.25)$$

Обозначим соответствующие подпредставления в $T^{\otimes 2}$ как $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$.

Утверждение 4.2.3 *Представления $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ неприводимы.*

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Пусть, например, представление $T^{(+)}$ приводимо (рассуждение для $T^{(-)}$ аналогично), то есть в его пространстве $\mathcal{V}^{(+)}$ имеется нетривиальное инвариантное подпространство $\mathcal{V}^{(+)}$ такое, что $\mathcal{V}^{(+)}$ не состоит из одного нулевого вектора и $\mathcal{V}^{(+)}$ \neq $\mathcal{V}^{(+)}$. Определим оператор $P^{+'}$, действующий в $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ и проектирующий на подпространство $\mathcal{V}^{(+)}$ \subset $\mathcal{V}^{(+)}$. Так как $\mathcal{V}^{(+)}$ инвариантно, то оператор $P^{+'}$ должен коммутировать с действием группы в представлении $T^{\otimes 2}$, то есть удовлетворять соотношениям (4.2.21), и в то же время действовать в подпространстве $\mathcal{V}^{(+)}$ нетривиально, чтобы спроектировать на нетривиальное подпространство $\mathcal{V}^{(+)}$ \subset $\mathcal{V}^{(+)}$. В силу Утверждения 4.2.2 оператор $P^{+'}$ должен строиться из единичного оператора и оператора перестановки, однако эти операторы действуют на подпространство $\mathcal{V}^{(+)}$ тривиально (тождественно) и поэтому не могут составить оператор $P^{+'}$. ■

Пример выделения неприводимых представлений $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ из $T^{\otimes 2}$ подсказывает общий метод выделения неприводимых представлений из тензорного произведения $T^{\otimes r}$ определяющих представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ для произвольного r . А именно, среди операторов вида (4.2.16), коммутирующих с $T^{\otimes r}(g)$ ($\forall g \in SL(N, \mathbb{C})$), необходимо найти проекторы P_α (индекс α перечисляет эти проекторы). Каждый из этих проекторов должен быть **примитивным**, то есть таким, что его нельзя представить в виде суммы других проекторов вида (4.2.16). Тогда с помощью каждого проектора P_α выделяется неприводимое представление $T^{(\alpha)}$ в $T^{\otimes r}$, действующее в пространстве

$$\mathcal{V}^{(\alpha)} = P_\alpha \cdot \mathcal{V}^{\otimes r}. \quad (4.2.26)$$

Поскольку проектор P_α коммутирует с $T^{\otimes r}(g)$ для всех $g \in SL(N, \mathbb{C})$, инвариантность подпространства $\mathcal{V}^{(\alpha)}$ следует из цепочки равенств

$$T^{\otimes r}(g) \cdot \mathcal{V}^{(\alpha)} = T^{\otimes r}(g) \cdot P_\alpha \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} = P_\alpha \cdot T^{\otimes r}(g) \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} \subset \mathcal{V}^{(\alpha)}, \quad (4.2.27)$$

а представление $T^{(\alpha)}$ (гомоморфное отображение группы $SL(N, \mathbb{C})$ в группу линейных операторов в $\mathcal{V}^{\otimes r}$) определяется как $T^{(\alpha)}(g) = P_\alpha \cdot T^{\otimes r}(g) \cdot P_\alpha$. Доказательство того, что $T^{(\alpha)}$ неприводимо, вполне аналогично доказательству неприводимости в Утверждении 4.2.3 и основывается на том, что проектор P_α примитивен и имеет вид (4.2.16).

Таким образом, примитивный проектор P_α задает неприводимое представление $T^{(\alpha)}$, вложенное в $T^{\otimes r}$. Более амбициозная, хотя и связанная задача — разложение тензорного произведения $T^{\otimes r}$ в прямую сумму неприводимых представлений. Общий подход к ее решению состоит в нахождении полного набора примитивных ортогональных проекторов $\{P_\alpha\}$, таких, что

$$P_\alpha P_\beta = P_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha P_\alpha = I_N^{\otimes r}. \quad (4.2.28)$$

Тогда пространство $\mathcal{V}^{\otimes r}$ раскладывается в прямую сумму инвариантных пространств

$$\mathcal{V}^{\otimes r} = \sum_\alpha \mathcal{V}^{(\alpha)},$$

что и требуется.

В дальнейшем мы рассматриваем вторую, более сложную задачу разложения $T^{\otimes r}$ в прямую сумму неприводимых представлений, имея в виду, что промежуточным результатом при решении этой задачи будет нахождение примитивных проекторов, не обязательно составляющих полную ортогональную систему. Согласно Утверждению 4.2.1 операторы $\mathfrak{s}(\sigma)$, фигурирующие в (4.2.16) и заданные в (4.2.6), определяют представление \mathfrak{s} симметрической группы S_r , которое действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$. Отметим, что операторы (4.2.16) являются *линейными комбинациями* матриц $\mathfrak{s}(\sigma)$, каждая из которых является представлением элемента σ симметрической группы S_r . Поэтому, строго говоря, операторы (4.2.16) и (4.2.23) следует рассматривать как представления элементов групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ группы S_r . Понятие групповой алгебры группы G было дано в разделе I-3.6.2 (см. Определение I-3.5.1) первой части книги. Напомним, что групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ конечной группы G — это векторное пространство линейных комбинаций

$$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \alpha_g \in \mathbb{C},$$

с законом умножения элементов $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[G]$, который диктуется композицией в группе G :

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h (g \cdot h) = \sum_{g \in G} \gamma_g g,$$

где $\gamma_g = \sum_{h \in G} \alpha_{g \cdot h^{-1}} \beta_h \in \mathbb{C}$. Подчеркнем, что любое представление T группы G можно всегда распространить на групповую алгебру как линейный гомоморфизм

$$T(\alpha) = \sum_{g \in G} \alpha_g T(g).$$

Поэтому, *любое представление группы G одновременно определяет и представление ее групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$, и наоборот, любое представление групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ задает представление группы G .*

- *Задача 95. Доказать последнее утверждение. Доказать, что представление s , заданное формулами (4.2.9), является точным представлением групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$.*

Согласно (4.2.16) проекторы P_α являются образами $P_\alpha = s(e_\alpha)$ некоторых элементов e_α групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$. Так как s – точное представление, то в силу свойств (4.2.28) элементы e_α должны удовлетворять соотношениям

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \quad e = \sum_{\alpha=1}^s e_\alpha, \quad (4.2.29)$$

где e – единичный элемент в $\mathbb{C}[S_r]$.

Определение 4.2.1 Элементы e_α в любой ассоциативной алгебре \mathcal{A} с единицей e , удовлетворяющие соотношению $e_\alpha^2 = e_\alpha$ называются *идемпотентами*^{4.3}. Идемпотент e_α называется **примитивным**, если его нельзя разложить в сумму других идемпотентов из \mathcal{A} . Идемпотенты, удовлетворяющие первому соотношению в (4.2.29), называются **взаимно ортогональными**, а если идемпотенты подчиняются второму соотношению, то говорят, что они образуют **полную систему идемпотентов**.

Ниже, в разделе 4.5.1, мы покажем, что если конечномерная ассоциативная алгебра \mathcal{A} (с единичным элементом) обладает полной системой примитивных идемпотентов, то такая система идемпотентов определяет структуру алгебры \mathcal{A} , а сами идемпотенты e_α оказываются основными объектами для построения всех неприводимых представлений этой алгебры.

Таким образом, элементы $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$, связанные с примитивными проекторами $P_\alpha = s(e_\alpha)$ образуют полную систему взаимно ортогональных **примитивных идемпотентов** в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$ и, таким образом, определяют полностью структуру алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ и ее неприводимые представления. С другой стороны, как мы показали выше, представления этих идемпотентов $P_\alpha = s(e_\alpha)$ используются для выделения из $T^{\otimes r}$ конечномерных неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$. Итак, все сказанное выше приводит нас к формулировке следующего утверждения.

Утверждение 4.2.4 Пусть e_α – примитивный идемпотент в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$ и \mathcal{V} – пространство определяющего представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ (и $SU(N)$). Тогда проектор $P_\alpha = s(e_\alpha)$ выделяет в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ инвариантное подпространство неприводимого конечномерного представления. Если элементы e_α образуют полную систему взаимно ортогональных примитивных идемпотентов в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$, то набор проекторов P_α определяет разложение представления $T^{\otimes r}$ на неприводимые представления $T^{(\alpha)}$.

Для явного построения элементов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$ и соответствующих проекторов $P_\alpha = s(e_\alpha)$ нам потребуются некоторые дополнительные сведения о группе перестановок S_r (первоначальная информация о группе S_r была дана в разделе I-1.1.4 в первой части книги).

^{4.3}Термин "идемпотент" происходит от латинских слов *idem* ("тот же самый") и *potens* ("способный"). Этот термин был предложен американским математиком Бенджаминем Пирсом (Benjamin Peirce) в статьях, написанных в 1870-х годах.

4.3 Представления группы перестановок I. Симметризаторы Юнга

В данном разделе мы изложим стандартную схему построения примитивных идемпотентов e_α для алгебры $\mathbb{C}[S_r]$, которая была разработана Юнгом и Фробениусом. Мы покажем (см. также раздел 4.5.1), что примитивные идемпотенты e_α позволяют выделять неприводимые представления группы S_r из ее регулярного представления. Кроме того, важность идемпотентов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$ обусловлена тем, что по ним (см. предыдущий раздел) строятся проекторы $P_\alpha = s(e_\alpha)$, действующие в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ и необходимые для выделения неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$ из представления $T^{\otimes r}$.

4.3.1 Таблицы Юнга. Конструкция симметризаторов Юнга

Прежде всего напомним (см. раздел I-1.1.4 и в частности Утверждение I-1.1.3 в первой части книги), что все классы сопряженных элементов в группе S_r нумеруются разбиениями $\lambda \vdash r$ числа r , которые графически представляются в виде диаграмм Юнга с r клетками (см. ниже (4.3.1); см. также Рис. 3.8, где изображена диаграмма Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r] \vdash |\lambda|$ с r строками и $|\lambda| = \sum_{k=1}^r \lambda_k$ клетками). Далее, число классов сопряженных элементов в конечной группе совпадает с числом неэквивалентных неприводимых представлений этой группы (см. Утверждение I-3.6.4). Поэтому естественно предположить, что имеется взаимнооднозначное соответствие и каждому неэквивалентному неприводимому представлению группы S_r однозначно сопоставляется определенный класс сопряженных элементов, или некоторая диаграмма Юнга λ с r клетками. В данном разделе мы покажем, что это действительно так. А именно, мы покажем, что каждой диаграмме Юнга λ сопоставляется некоторый специальный набор примитивных идемпотентов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$, которые, как мы увидим, порождают *эквивалентные* неприводимые представления группы S_r , и наоборот, каждому примитивному идемпотенту e_α , сопоставляется определенная диаграмма Юнга λ , причем, если диаграммы – разные, то соответствующие идемпотенты порождают *неэквивалентные* представления S_r .

Рассмотрим диаграмму Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \vdash r$ (с m строками) и расставим во всех ее r клетках числа $(1, 2, \dots, r)$, как показано на рисунке:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_{k_1} \\ \hline a_{k_1+1} & a_{k_1+2} & \dots & \dots & a_{k_2} & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \hline a_{k_{m-1}+1} & \dots & a_{k_m} & & & \\ \hline \end{array} \equiv T_\lambda, \tag{4.3.1}$$

где $k_1 = \lambda_1$, $k_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, \dots , $k_m = \lambda_1 + \dots + \lambda_m = r$ и (a_1, \dots, a_r) – некоторая перестановка чисел $(1, 2, \dots, r)$. Диаграмма Юнга λ с такой расстановкой чисел в клетках называется *таблицей Юнга* и обозначается T_λ . Если таблица Юнга T_λ получена расстановкой чисел в клетках в диаграмме λ , то в дальнейшем мы будем говорить, что таблица T_λ имеет форму диаграммы λ .

Определение 4.3.1 Таблица Юнга \tilde{T}_λ называется *дуальной к таблице Юнга T_λ* , если строки таблицы T_λ являются столбцами таблицы \tilde{T}_λ , а столбцы T_λ являются

ся строками $\tilde{T}_{\tilde{\lambda}}$. Соответственно, диаграмма Юнга $\tilde{\lambda}$ (форма таблицы $\tilde{T}_{\tilde{\lambda}}$) называется дуальной к диаграмме Юнга λ (форме таблицы T_{λ}).

Например, две таблицы T_{λ} и $\tilde{T}_{\tilde{\lambda}}$:

$$T_{\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 8 & 10 & 7 & 4 \\ \hline 2 & 9 & 3 & 6 & \\ \hline 11 & 1 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \tilde{T}_{\tilde{\lambda}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 11 \\ \hline 8 & 9 & 1 \\ \hline 10 & 3 & \\ \hline 7 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array},$$

являются дуальными друг другу. Соответствующие диаграммы Юнга $\lambda = [5, 4, 2]$ и $\tilde{\lambda} = [3, 3, 2, 1]$ также дуальны друг другу.

Мы будем воспринимать таблицы Юнга T_{λ} в первую очередь как удобное обозначение для специальных линейных комбинаций перестановок (то есть специальных элементов групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$). При этом диаграммы Юнга с r клетками соответствуют случаю группы S_r . Для того, чтобы описать, какая линейная комбинация перестановок соответствует данной таблице Юнга, нам требуется дать вспомогательные определения.

Пусть T_{λ} — таблица Юнга, где $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ — диаграмма Юнга с m строками и пусть $H(T_{\lambda})$ — множество горизонтальных перестановок $p \in S_r$, которые переставляют числа, находящиеся в каждой из строк таблицы T_{λ} , но не переставляют между собой числа из разных строк. Очевидно, что $H(T_{\lambda})$ — подгруппа в группе S_r . Так как перестановки чисел, находящихся в какой-то одной из строк длиной λ_k , образуют группу S_{λ_k} , то мы имеем

$$H(T_{\lambda}) = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_m} \subset S_r, \quad \text{ord}(H(T_{\lambda})) = \lambda_1! \dots \lambda_m!. \quad (4.3.2)$$

Подгруппа $H(T_{\lambda})$ называется *строчным стабилизатором*.

Аналогично можно определить подгруппу $V(T_{\lambda}) \subset S_r$ всех вертикальных перестановок, то есть таких перестановок $q \in S_r$, которые переставляют числа, находящиеся в каждом столбце таблицы T_{λ} , но не переставляют числа из разных столбцов. Таким образом, мы имеем

$$V(T_{\lambda}) = S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \dots \times S_{\lambda'_{m'}}, \quad \text{ord}(V(T_{\lambda})) = \lambda'_1! \dots \lambda'_{m'}!, \quad (4.3.3)$$

где $[\lambda'_1, \dots, \lambda'_{m'}]$ — длины всех m' столбцов диаграммы λ . Подгруппа $V(T_{\lambda})$ называется *столбцовым стабилизатором*.

Образует теперь из элементов p подгруппы $H(T_{\lambda})$ и элементов q подгруппы $V(T_{\lambda})$ два оператора

$$P = \sum_{p \in H(T_{\lambda})} p \in \mathbb{C}[H(T_{\lambda})], \quad (4.3.4)$$

$$Q = \sum_{q \in V(T_{\lambda})} \delta_q q \in \mathbb{C}[V(T_{\lambda})], \quad (4.3.5)$$

где δ_q — четность перестановки q ($\delta_q = +1$, если перестановка q четная, и $\delta_q = -1$, если перестановка q нечетная). В (4.3.4) сумма берется по всем горизонтальным перестановкам из $H(T_{\lambda})$, а в (4.3.5) сумма берется по всем вертикальным перестановкам из $V(T_{\lambda})$. Оба оператора P и Q являются элементами групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$

и называются, соответственно, горизонтальным симметризатором и вертикальным антисимметризатором, соответствующим таблице T_λ . Очевидно, что горизонтальный симметризатор P и вертикальный антисимметризатор Q , согласно (4.3.3) и (4.3.2), представляются в виде произведений

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdots P_m, \quad Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_{m'},$$

где $P_i = \sum_{p \in S_{\lambda_i}} p$ – симметризатор для i -й строки T_λ , а $Q_k = \sum_{q \in S_{\lambda'_k}} \delta_q q$ – антисимметризатор для k -го столбца T_λ .

В качестве примера рассмотрим операторы P и Q для таблицы Юнга

$$T_{[2,2]} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (4.3.6)$$

Симметризаторы P_1 и P_2 равны (e – единичный элемент в S_4)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e + (12),$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = e + (34),$$

а оператор P – это их произведение:

$$P(T_{[2,2]}) = (e + (12)) \cdot (e + (34)) = e + (12) + (34) + (12) \cdot (34). \quad (4.3.7)$$

Аналогично

$$Q(T_{[2,2]}) = (e - (13)) \cdot (e - (24)) = e - (13) - (24) + (13) \cdot (24). \quad (4.3.8)$$

Для дальнейшего полезно подчеркнуть, что здесь в произведениях используются только перестановки p и q , построенные по исходной таблице Юнга T_λ (более развернутый комментарий по этому поводу дан после формулы (4.3.11)).

Из определений (4.3.4) и (4.3.5) для операторов $P \in \mathbb{C}[H(T_\lambda)]$ и $Q \in \mathbb{C}[V(T_\lambda)]$ следуют соотношения

$$p \cdot P = P \cdot p = P, \quad q \cdot Q = Q \cdot q = \delta_q Q, \\ \forall p \in H(T_\lambda), \quad \forall q \in V(T_\lambda). \quad (4.3.9)$$

Эти соотношения означают, что горизонтальные симметризаторы P совпадают для всех таблиц T_λ , которые получаются друг из друга перестановками номеров в строках (иначе говоря, связаны горизонтальными перестановками p), и, соответственно, вертикальные антисимметризаторы Q совпадают для таблиц, которые связаны вертикальными перестановками q (в последнем случае мы имеем $Q \rightarrow q \cdot Q \cdot q^{-1} = \delta_q^2 Q = Q$; см. формулу (4.3.19) ниже).

- *Задача 96. Пользуясь (4.3.9), доказать, что операторы P и Q пропорциональны идемпотентам $E_P = \alpha^{-1}P$ и $E_Q = \beta^{-1}Q$, а именно*

$$P \cdot P = \alpha P, \quad Q \cdot Q = \beta Q \Rightarrow E_P^2 = E_P, \quad E_Q^2 = E_Q, \quad (4.3.10)$$

где $\alpha = \text{ord}(H(T_\lambda))$ и $\beta = \text{ord}(V(T_\lambda))$.

Рассмотрим произведение операторов (4.3.4) и (4.3.5), вычисленных для одной и той же таблицы T_λ ,

$$Y(T_\lambda) = Q(T_\lambda) \cdot P(T_\lambda) = \sum_{q \in V(T_\lambda)} \sum_{p \in H(T_\lambda)} \delta_q q \cdot p. \quad (4.3.11)$$

Оператор $Y(T_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$ называется *симметризатором Юнга* таблицы T_λ . Подчеркнем еще раз, что в правой части (4.3.11) фигурируют произведения перестановок q и p , построенных по исходной таблице Юнга^{4.4} T_λ . Например, симметризатором Юнга таблицы (4.3.6) служит произведение операторов (4.3.7) и (4.3.8). Важность симметризаторов Юнга заключается в том, что, как мы покажем ниже, эти симметризаторы пропорциональны примитивным идемпотентам в $\mathbb{C}[S_r]$. Отметим, что из формул (4.3.9) вытекают равенства

$$\begin{aligned} q \cdot Y(T_\lambda) &= Y(T_\lambda) \delta_q, & Y(T_\lambda) \cdot p &= Y(T_\lambda), \\ \forall q \in V(T_\lambda), & \forall p \in H(T_\lambda), \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

которые понадобятся нам ниже.

Пример. Найдем явный вид, выраженный в терминах образующих Кокстера $\sigma_i = (i, i + 1) \in S_r$ (соседних транспозиций), симметризаторов $Y(T_\lambda)$ для следующих таблиц Юнга:

$$\begin{aligned} T_{[2]} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, & T_{[1^2]} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & (r = 2), \\ T_{[3]} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, & T_{[1^3]} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, & T_{[2,1]} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}, & T_{[2,1]_2} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix}, & (r = 3). \end{aligned}$$

Напомним, что определяющие соотношения для группы S_r , записанные в терминах образующих Кокстера, имеют вид (см. соотношения (3.1.62) из раздела **3.1.3**):

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i &= \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}, & (i = 1, \dots, r - 2), \\ \sigma_i \cdot \sigma_j &= \sigma_j \cdot \sigma_i, & (|i - j| > 1), & \sigma_i^2 = e, & (i = 1, \dots, r - 1), \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

где e — тождественная перестановка. Пользуясь формулой (4.3.11), получаем

$$Y(T_{[2]}) = (1 + \sigma_1), \quad Y(T_{[1^2]}) = (1 - \sigma_1), \quad (4.3.14)$$

$$\begin{aligned} Y(T_{[3]}) &= (1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2)(1 + \sigma_1), & Y(T_{[1^3]}) &= (1 - \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2)(1 - \sigma_1), \\ Y(T_{[2,1]_1}) &= (1 - \sigma_2)(1 + \sigma_1), & Y(T_{[2,1]_2}) &= (1 - \sigma_1)(1 + \sigma_2). \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Здесь и далее для простоты вместо единичного элемента e мы пишем 1. В первой строчке в (4.3.15) мы воспользовались замечательной факторизованной формулой

$$\begin{aligned} E_{P[r]} &= \frac{1}{r!} (1 + \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2} \sigma_{r-1} + \sigma_{r-3} \sigma_{r-2} \sigma_{r-1} + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-1}) \cdot \\ & (1 + \sigma_{r-2} + \sigma_{r-3} \sigma_{r-2} + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-2}) \dots (1 + \sigma_1) = \frac{1}{r!} Y(T_{[r]}), \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

^{4.4}Это замечание связано с тем, что перестановку p в произведении $q \cdot p$ и соответственно в выражении (4.3.11) можно воспринимать и как операцию над таблицей T_λ , см. ниже. В этом случае возникает соблазн рассматривать перестановку q как вертикальную перестановку, соответствующую таблице $p \cdot T_\lambda$, а не T_λ . Это неверно: вертикальные перестановки, соответствующие таблице $p \cdot T_\lambda$, в излагаемом построении не участвуют.

для полного симметризатора $E_{P[r]}$, удовлетворяющего равенству $E_{P[r]}^2 = E_{P[r]}$ и соответствующего таблице Юнга, состоящей из одной строки длиной r

$$T_{[r]} = \boxed{1 \mid 2 \mid \dots \mid r}.$$

- *Задача 97. ★ Доказать тождество (4.3.16) для полного симметризатора.*

Формула для $Y(T_{[3]})$ в (4.3.15) следует из формулы для $Y(T_{[3]})$, если воспользоваться тем, что выражение для полного антисимметризатора $E_{Q[1^r]} = \frac{1}{r!} Y(T_{[1^r]})$, соответствующего таблице Юнга, состоящей из одного столбца высотой r , получается из выражения (4.3.16) для $E_{P[r]}$ с помощью автоморфизма $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$ (см. ниже). Заметим, что элемент $Y(T_{[r]})$ в (4.3.16), после раскрытия скобок, равен сумме всех элементов группы S_r , или, другими словами, равен сумме всех $r!$ перестановок номеров $(1, 2, \dots, r)$ в строке $T_{[r]}$.

- *Задача 98. ★ Доказать, что полный антисимметризатор $E_{Q[1^r]}$ получается из полного симметризатора $E_{P[r]}$ заменой $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$. Проверить, что $Y(T_{[r]})$ в (4.3.16) это сумма всех $r!$ элементов из группы перестановок S_r .*

Отметим, что можно получить другой набор симметризаторов Юнга, если строить их в виде произведений $\tilde{Y}(T_\lambda) = P \cdot Q$ (сравните с (4.3.11)). Такой способ построения привел бы, вообще говоря, к другому базису примитивных идемпотентов в $\mathbb{C}[S_r]$. Следует однако отметить, что принятое нами построение набора идемпотентов (4.3.11) (и дальнейшее исследование этих идемпотентов) по существу без изменений может быть выполнено и для набора $\tilde{Y}(T_\lambda)$. Дело в том, что симметризаторы для дуальных таблиц Юнга \tilde{T}_λ связаны с симметризаторами (4.3.11) с помощью автоморфизма ϕ в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$, при котором любая перестановка $\sigma \in S_r$ заменяется на эту же перестановку, умноженную на ее четность: $\sigma \rightarrow \sigma \delta_\sigma$. Для образующих Кокстера (соседних транспозиций) этот автоморфизм записывается в виде $\phi(\sigma_i) = -\sigma_i$ и очевидно сохраняет определяющие соотношения (4.3.13) для группы S_r . Данный автоморфизм ϕ переводит симметризатор P для таблицы T_λ в антисимметризатор \tilde{Q} для дуальной таблицы \tilde{T}_λ , а антисимметризатор Q для T_λ — в симметризатор \tilde{P} для \tilde{T}_λ . Соответственно для симметризаторов Юнга мы получаем

$$\phi(P \cdot Q) = \tilde{Q} \cdot \tilde{P} \quad \Rightarrow \quad \phi(\tilde{Y}(T_\lambda)) = Y(\tilde{T}_\lambda).$$

Итак, рассмотрение множества симметризаторов Юнга типа $\tilde{Y}(T_\lambda)$ ничем не отличается от рассмотрения набора симметризаторов (4.3.11). В дальнейшем мы будем изучать только набор симметризаторов (4.3.11).

Удобно ввести в рассмотрение действие группы перестановок на таблицах Юнга. Рассмотрим множество \mathcal{M}_λ всех таблиц T_λ , соответствующих одной и той же диаграмме Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \vdash r$, то есть имеющих одну и ту же форму λ (число таких таблиц равно $r!$, поскольку имеется $r!$ способов распределения r чисел $(1, 2, \dots, r)$ в клетках диаграммы λ) и определим на нем действие группы перестановок S_r следующим образом. Перестановка $\sigma \in S_r$, заданная в (4.2.7), действует на таблицу T_λ так, что ставит в клетку, в которой находится число $i \in \{1, \dots, r\}$, новое число $\sigma(i)$, см. Рис. 4.1. При этом таблица T_λ переходит в новую таблицу $\sigma \cdot T_\lambda = T'_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$.

Подчеркнем, что все аксиомы для действия группы, изложенные в разделе **I-1.3.4** первой части книги, в данном случае выполнены. Поэтому в таблице $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot T_\lambda$, в той

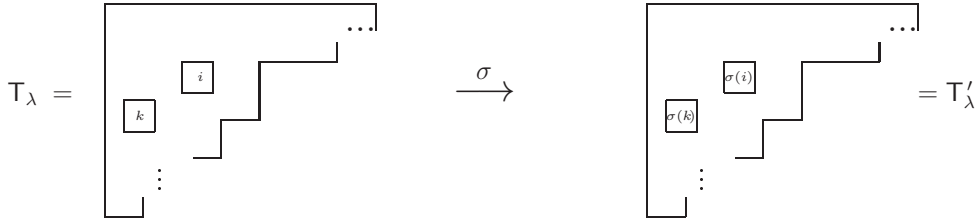


Рис. 4.1: Действие перестановки σ на таблицу Юнга: $T_\lambda \rightarrow \sigma \cdot T_\lambda$.

клетке таблицы T_λ , где находилось число i , стоит число $\sigma_1(\sigma_2(i))$. При этом следует помнить, что элементы $\sigma \in S_r$ переставляют числа в таблице Юнга, а не ее клетки.

В качестве иллюстрации последнего замечания, найдем действие произведения $q \cdot p$ на таблицу $T_{[2,1]_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Здесь $p = \sigma_2$ и $q = \sigma_1$ — соответственно горизонтальная и вертикальная перестановки таблицы $T_{[2,1]_2}$. В результате мы имеем

$$p \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies q \cdot p \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (4.3.17)$$

То есть вертикальная перестановка q не равна перестановке (13) — вертикальной перестановке, соответствующей таблице, возникшей в правой части первого равенства в (4.3.17).

Ясно, что горизонтальные перестановки $p \in H(T_\lambda)$, построенные по таблице Юнга T_λ и действующие на T_λ , переставляют числа в строках этой таблицы, а вертикальные перестановки $q \in V(T_\lambda)$ — в столбцах таблицы T_λ . Если таблица T'_λ получается из таблицы T_λ с помощью перестановки $\sigma \in S_r$: $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$, то элементы $p \in H(T_\lambda)$ и $q \in V(T_\lambda)$ связаны с соответствующими элементами $p' \in H(T'_\lambda)$ и $q' \in V(T'_\lambda)$ равенствами

$$p = \sigma^{-1} \cdot p' \cdot \sigma \implies p' = \sigma \cdot p \cdot \sigma^{-1} \implies H(T'_\lambda) = H(\sigma \cdot T_\lambda) = \sigma \cdot H(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}, \quad (4.3.18)$$

$$q = \sigma^{-1} \cdot q' \cdot \sigma \implies q' = \sigma \cdot q \cdot \sigma^{-1} \implies V(T'_\lambda) = V(\sigma \cdot T_\lambda) = \sigma \cdot V(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}. \quad (4.3.19)$$

Поясним соотношение (4.3.18) для подгруппы $H(T_\lambda)$ (для строчного стабилизатора). Возьмем любую, например k -ую, строку в таблице T_λ , в которой располагаются числа $(i_1, i_2, \dots, i_{\lambda_k})$. После применения перестановки $\sigma \in S_r$ к таблице T_λ мы получим таблицу $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$, в k -й строке которой будут стоять числа $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{\lambda_k}))$. Перестановка $p \in H(T_\lambda)$ действует на k -ую строку таблицы T_λ следующим образом

$$(i_1, \dots, i_{\lambda_k}) \rightarrow (i_{p(1)}, \dots, i_{p(\lambda_k)}), \quad p = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{\lambda_k} \\ i_{p(1)} & i_{p(2)} & \dots & i_{p(\lambda_k)} \end{pmatrix}. \quad (4.3.20)$$

Соответствующий элемент $p' \in H(T'_\lambda)$ переставляет числа $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{\lambda_k}))$ и имеет вид

$$p' = \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_{\lambda_k}) \\ \sigma(i_{p(1)}) & \sigma(i_{p(2)}) & \dots & \sigma(i_{p(\lambda_k)}) \end{pmatrix}. \quad (4.3.21)$$

Пользуясь (4.3.20), (4.3.21) и правилом умножения (4.2.8), находим

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \cdot p' \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \dots & \sigma(i_{\lambda_k}) \\ i_1 & \dots & i_{\lambda_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \dots & \sigma(i_{\lambda_k}) \\ \sigma(i_{p(1)}) & \dots & \sigma(i_{p(\lambda_k)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\lambda_k} \\ \sigma(i_1) & \dots & \sigma(i_{\lambda_k}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\lambda_k} \\ i_{p(1)} & \dots & i_{p(\lambda_k)} \end{pmatrix} = p. \end{aligned}$$

Так как в качестве k -й строки была выбрана любая из m строк таблицы T_λ , а перестановки в разных строках независимы, то мы получаем, что любая перестановка $p \in H(T_\lambda)$ связана с соответствующей перестановкой $p' \in H(T'_\lambda)$, где $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$, с помощью соотношений $p = \sigma^{-1} \cdot p' \cdot \sigma$, то есть мы имеем $H(T'_\lambda) = \sigma \cdot H(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}$.

- *Задача 99.* Выписать операторы P и Q для таблицы Юнга $T'_{[2,2]} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} =$

(23) · $T_{[2,2]}$. Проверить, что (см. (4.3.18), (4.3.19))

$$P(T'_{[2,2]}) = (23) \cdot P(T_{[2,2]}) \cdot (23)^{-1}, \quad Q(T'_{[2,2]}) = (23) \cdot Q(T_{[2,2]}) \cdot (23)^{-1}.$$

Так как разные таблицы T_λ и T'_λ , имеющие одну и ту же форму λ , связаны друг с другом некоторой перестановкой σ чисел в клетках: $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$, то в силу соотношений (4.3.18), (4.3.19) соответствующие симметризаторы Юнга выражаются друг через друга с помощью преобразования эквивалентности

$$Y(T'_\lambda) = \sigma \cdot Y(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}. \quad (4.3.22)$$

- *Задача 100.* Пользуясь определением (4.3.11), показать, что по двум таблицам

$$T_{[2,1]} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = \sigma_1 \cdot T_{[2,1]_1}, \quad T'_{[2,1]} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} = \sigma_1 \cdot T_{[2,1]_2},$$

строятся симметризаторы Юнга, связанные с $Y(T_{[2,1]_1})$ и $Y(T_{[2,1]_2})$ из (4.3.15), формулами (сравните с (4.3.22))

$$\begin{aligned} Y(T_{[2,1]}) &= \sigma_1 \cdot Y(T_{[2,1]_1}) \cdot \sigma_1 = (1 - (13))(1 + (12)), \\ Y(T'_{[2,1]}) &= \sigma_1 \cdot Y(T_{[2,1]_2}) \cdot \sigma_1 = (1 - (12))(1 + (13)), \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

где в правых частях мы использовали стандартные обозначения (ij) для транспозиций: $\sigma_1 = (12)$ и $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = (13)$.

Утверждение 4.3.1 Пусть T_λ и $T'_{\lambda'}$ — две таблицы Юнга, соответствующие диаграммам $\lambda \vdash r$ и $\lambda' \vdash r$, причем имеются два числа из набора $(1, 2, \dots, r)$, которые находятся в одной строке $T'_{\lambda'}$ и в одном столбце T_λ . Согласно (4.3.11) запишем

$$Y(T_\lambda) = Q \cdot P, \quad Y(T'_{\lambda'}) = Q' \cdot P'. \quad (4.3.24)$$

Тогда

$$P' \cdot Q = 0, \quad Q \cdot P' = 0, \quad (4.3.25)$$

и

$$Y(T'_{\lambda'}) \cdot Y(T_\lambda) = 0. \quad (4.3.26)$$

Доказательство. В таблицах $T'_{\lambda'}$ и T_λ имеются два различных числа, скажем s и k , которые находятся в одной строке $T'_{\lambda'}$ и в одном столбце T_λ . Поэтому транспозиция (s, k) принадлежит одновременно и $H(T'_{\lambda'})$ и $V(T_\lambda)$. Тогда, учитывая тождество $(s, k)^2 = e$ и соотношения (4.3.9), а также четность $\delta_{(s,k)} = -1$, мы получаем

$$P' \cdot Q = P' \cdot (s, k)^2 \cdot Q = [P' \cdot (s, k)] [(s, k) \cdot Q] = -P' \cdot Q, \quad (4.3.27)$$

откуда следует первое равенство в (4.3.25), из которого с учетом представления (4.3.24), сразу же вытекает условие (4.3.26). Второе равенство в (4.3.25) доказывается с помощью выкладки, аналогичной (4.3.27). ■

- *Задача 101. Для симметризаторов Юнга, соответствующих таблицам*

$$T_{[2,1]} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad T_{[2,1]_2} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array},$$

проверить непосредственно, что

$$Y(T_{[2,1]}) \cdot Y(T_{[2,1]_2}) = 0, \quad Y(T_{[2,1]_2}) \cdot Y(T_{[2,1]}) \neq 0.$$

Пусть $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ и $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_k]$ — две диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$ и $\mu \vdash r$. Рассмотрим последовательность чисел $(\mu_1 - \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \dots)$. Будем писать $\mu > \lambda$, если первая не равная нулю разность $\mu_h - \lambda_h$ положительна. Будем также говорить, что диаграмма λ включена в диаграмму μ и писать $\lambda \subset \mu$, если λ получается из μ отбрасыванием некоторых клеток. Отметим, что $\mu > \lambda$ не означает, что диаграмма λ может быть включена в диаграмму μ . Например, пусть $\mu = (3, 1)$ и $\lambda = (2, 2)$, тогда $\mu > \lambda$, но $\lambda \not\subset \mu$.

Сформулируем теперь основную комбинаторную Лемму.

Лемма 4.3.2 Пусть T_λ и $T_{\lambda'}$ — две таблицы Юнга, имеющие соответственно форму

$$\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \vdash r, \quad \lambda' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_k] \vdash r,$$

и пусть $\lambda' > \lambda$ или $\lambda' = \lambda$ (записываем $\lambda' \geq \lambda$). Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:

- 1.) Существуют два различных числа, которые находятся в одной строке $T_{\lambda'}$ и в одном столбце T_λ .
- 2.) $\lambda = \lambda'$ и существуют элементы $p \in H(T_\lambda)$ и $q \in V(T_\lambda)$, для которых^{4.5}

$$T_{\lambda'} \equiv T_{\lambda'} = (q \cdot p) \cdot T_\lambda. \tag{4.3.28}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение 1.) не выполняется. Тогда все числа, находящиеся в клетках первой строки таблицы $T_{\lambda'}$, должны располагаться в разных столбцах таблицы T_λ . Поэтому существует элемент $q_1 \in V(T_\lambda)$ такой, что эти числа будут располагаться в первой строке таблицы $q_1 \cdot T_\lambda$ и следовательно $\lambda_1 \geq \lambda'_1$. Так как $\lambda' \geq \lambda$ (то есть $\lambda'_1 \geq \lambda_1$), то $\lambda'_1 = \lambda_1$. Числа, находящиеся в клетках второй строки таблицы $T_{\lambda'}$ должны снова располагаться в разных столбцах таблицы T_λ и соответственно в разных столбцах таблицы $q_1 \cdot T_\lambda$. Поэтому существует элемент $q_2 \in V(q_1 \cdot T_\lambda) = V(T_\lambda)$, который не трогает числа в первой строке $q_1 \cdot T_\lambda$ и располагает все числа второй строки $T_{\lambda'}$ во второй строке таблицы $q_2 \cdot q_1 \cdot T_\lambda$. Таким образом, мы имеем $\lambda_2 \geq \lambda'_2$. Опять же, из условия $\lambda' \geq \lambda$ (с учетом $\lambda'_1 = \lambda_1$) мы получаем $\lambda'_2 = \lambda_2$. Продолжая эту процедуру до последней строки λ' , мы находим элемент $q_k \cdots q_2 \cdot q_1$ такой, что числа последней k -й строки таблицы $T_{\lambda'}$ будут располагаться в k -й строке таблицы $q_k \cdots q_1 \cdot T_\lambda$ и $\lambda'_k = \lambda_k$. Это последняя строка таблицы T_λ , иначе $\lambda > \lambda'$, что противоречит $\lambda' \geq \lambda$. Таким образом, $m = k$ и мы имеем равенство $\lambda = \lambda'$, которое отправляет нас к случаю 2. Итак, k — число строк в диаграмме $\lambda = \lambda'$ и пусть $q = q_k \cdots q_2 \cdot q_1$, тогда таблицы $q \cdot T_\lambda$ и $T_{\lambda'} \equiv T'_\lambda$ имеют те же числа в каждой строке

^{4.5}Подчеркнем еще раз, что здесь вертикальная перестановка q принадлежит $V(T_\lambda)$, то есть определяется по таблице T_λ , и не имеет никакого отношения к перестановкам, определяемым по таблице $p \cdot T_\lambda$.

и следовательно имеется элемент $p' \in H(T'_\lambda)$ такой, что $p' \cdot T'_\lambda = q \cdot T_\lambda$. Применим теперь к таблице $T'_\lambda = (p')^{-1} \cdot (q \cdot T_\lambda)$ формулу (4.3.18), где положим $\sigma = (p')^{-1} \cdot q$. Согласно этой формуле, существует элемент $p^{-1} \in H(T_\lambda)$ такой, что

$$p' = ((p')^{-1} \cdot q) \cdot p^{-1}((p')^{-1} \cdot q)^{-1} \Rightarrow p' = q \cdot p^{-1} \cdot q^{-1}.$$

Таким образом, мы получаем $T'_\lambda = (p')^{-1} \cdot q \cdot T_\lambda = q \cdot p \cdot T_\lambda$. ■

Следствие 1. Если $\lambda' \vdash r$, $\lambda \vdash r$ — две диаграммы Юнга и $\lambda' \neq \lambda$, то

$$Y(T'_{\lambda'}) \cdot Y(T_\lambda) = 0. \quad (4.3.29)$$

Для доказательства рассмотрим случай $\lambda' > \lambda$. Тогда существуют два числа, которые находятся в одной строке таблицы $T'_{\lambda'}$ и в одном столбце таблицы T_λ , и, согласно Утверждению 4.3.1, мы имеем (4.3.29). Докажем теперь, что в рассматриваемом случае ($\lambda' > \lambda$) также справедливо тождество $Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_{\lambda'}) = 0$ (это будет эквивалентно равенству (4.3.29) и в случае $\lambda > \lambda'$). Действительно, мы имеем второе тождество в (4.3.25), которое справедливо для любой таблицы $T'_{\lambda'}$, имеющей форму $\lambda' > \lambda$, в том числе и для $\sigma \cdot T'_{\lambda'}$ ($\forall \sigma \in S_r$). В силу (4.3.18) горизонтальный симметризатор для $\sigma \cdot T'_{\lambda'}$ равен $\sigma \cdot P' \cdot \sigma^{-1}$, и поэтому выполняется равенство

$$Q \cdot \sigma \cdot P' \cdot \sigma^{-1} = 0 \implies Q \cdot \sigma \cdot P' = 0 \quad (\forall \sigma \in S_r), \quad (4.3.30)$$

где Q и P' определены в (4.3.24). Умножая обе части второго равенства в (4.3.30) на произвольную функцию $a(\sigma) \in \mathbb{C}$, и суммируя по всем $\sigma \in S_r$, мы получаем

$$Q \cdot a \cdot P' = 0, \quad \forall a = \sum_{\sigma} a(\sigma) \sigma \in \mathbb{C}[S_r]. \quad (4.3.31)$$

Отсюда, в частности, следует тождество $Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_{\lambda'}) = Q \cdot (P \cdot Q') \cdot P' = 0$ (когда $\lambda' > \lambda$), что эквивалентно (4.3.29) в случае $\lambda > \lambda'$.

- *Задача 102.* Обобщить тождество (4.3.29), то есть доказать, что если $\lambda' \neq \lambda$, то $\forall a \in \mathbb{C}[S_r]$ мы имеем

$$Y(T'_{\lambda'}) \cdot a \cdot Y(T_\lambda) = 0. \quad (4.3.32)$$

Указание: записать тождество (4.3.29) в виде $Y(T'_{\lambda'}) \cdot \sigma \cdot Y(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1} = 0$, где σ — произвольный элемент S_r .

Следствие 2. Пусть T_λ и T'_λ — две разные таблицы, имеющие одну и ту же форму λ и связанные друг с другом некоторой перестановкой $g \in S_r$: $T'_\lambda = g \cdot T_\lambda$. Тогда согласно Лемме 4.3.2 либо элемент $g \in S_r$ представим в виде $g = q \cdot p$, где $q \in V(T_\lambda)$ и $p \in H(T_\lambda)$, либо в таблицах T_λ и T'_λ имеются два числа, которые находятся в одной строке T'_λ и в одном столбце T_λ . В последнем случае, в силу Утверждения 4.3.1, выполняется тождество $Y(T'_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = 0$. Аналогично можно доказать, меняя местами в рассуждении строки и столбцы, что либо g может быть представлен в виде $g = p \cdot q$, либо существуют два различных числа, которые находятся в одном столбце T'_λ и в одной строке T_λ и, соответственно, в последнем случае мы имеем $Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_\lambda) = 0$.

- *Задача 103.* Непосредственно убедиться в том, что если таблица T'_λ получается из таблицы T_λ действием перестановки $q \cdot p = p' \cdot q$, как указано в (4.3.28), то два числа из одного столбца в T_λ не могут попасть в одну строку T'_λ .

4.3.2 Симметризаторы Юнга и идемпотенты. Неприводимые представления группы S_r и их размерности

Прежде чем перейти к формулировке дальнейших утверждений, касающихся симметризаторов Юнга в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$, отметим следующее (более подробно все это будет излагаться в разделе 4.5.1). Любая ассоциативная алгебра \mathcal{A} действует на себя (как на векторное пространство) левыми и правыми умножениями. Возникающие при этом представления алгебры \mathcal{A} называются соответственно *левыми* и *правыми регулярными*. Пусть \mathcal{A} — конечномерная алгебра (нам потребуется только этот случай) с единичным элементом e и пусть в алгебре \mathcal{A} можно выделить полную систему идемпотентов $\{e_\alpha\}$, см. Определение 4.2.1 в конце раздела 4.2. Пользуясь условием полноты для идемпотентов e_α (второе соотношение в (4.2.29)), алгебру \mathcal{A} можно разложить в сумму ее левых \mathcal{L}_α (или правых \mathcal{R}_α) подпространств

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{A} \cdot e_\alpha = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_\alpha, \quad \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s e_\alpha \cdot \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{R}_\alpha. \quad (4.3.33)$$

Каждое подпространство $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{A} \cdot e_\alpha$ (или $\mathcal{R}_\alpha = e_\alpha \cdot \mathcal{A}$) образует инвариантное подпространство в \mathcal{A} по отношению к левому (или, соответственно, правому) действию алгебры \mathcal{A} . То есть, для любого $v \in \mathcal{L}_\alpha$ и любого $v' \in \mathcal{R}_\alpha$ и для всех $a \in \mathcal{A}$ мы имеем

$$a \cdot v \in \mathcal{L}_\alpha, \quad v' \cdot a \in \mathcal{R}_\alpha, \quad (4.3.34)$$

причем подпространства \mathcal{L}_α и \mathcal{L}_β (\mathcal{R}_α и \mathcal{R}_β), порожденные взаимно ортогональными идемпотентами e_α и e_β ($\alpha \neq \beta$), не пересекаются (равенство $a \cdot e_\alpha = b \cdot e_\beta$ противоречиво для $\alpha \neq \beta$, так как $a \cdot e_\alpha \cdot e_\alpha = a \cdot e_\alpha$ и $b \cdot e_\beta \cdot e_\alpha = 0$). Инвариантные подпространства \mathcal{L}_α (\mathcal{R}_α) образуют подалгебры в \mathcal{A} и, более того, являются левыми (правыми) идеалами в алгебре \mathcal{A} (это вытекает из (4.3.34)). Кроме того, подпространства \mathcal{L}_α (\mathcal{R}_α), будучи инвариантными, оказываются пространствами левых (правых) подпредставлений в соответствующих регулярных представлениях алгебры \mathcal{A} , а формулы (4.3.33) показывают, как алгебра \mathcal{A} , как векторное пространство, разлагается в прямую сумму пространств своих левых и правых регулярных подпредставлений.

Утверждение 4.3.3 *Симметризатор Юнга (4.3.11), построенный по таблице T_λ , имеющей форму $\lambda \vdash r$, пропорционален идемпотенту в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$. То есть, для $Y(T_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$ справедливо соотношение*

$$Y(T_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_\lambda Y(T_\lambda), \quad (4.3.35)$$

где α_λ — константа, которая равна

$$\alpha_\lambda = \frac{r!}{f(\lambda)}, \quad (4.3.36)$$

и $f(\lambda)$ — размерность левого идеала (размерность инвариантного подпространства в регулярном представлении группы S_r), порожденного элементом $Y(T_\lambda)$.

Доказательство. Заметим, что из (4.3.12) вытекает тождество $q \cdot Y(\Gamma_\lambda) \cdot p = Y(\Gamma_\lambda) \delta_q$ для всех $p \in H(\Gamma_\lambda)$ и $q \in V(\Gamma_\lambda)$. Обратно, пусть имеется элемент $a \in \mathbb{C}[S_r]$ такой, что

$$q \cdot a \cdot p \delta_q = a, \quad (4.3.37)$$

для всех $p \in H(\Gamma_\lambda)$ и $q \in V(\Gamma_\lambda)$. Покажем, что в этом случае $a = \alpha Y(\Gamma_\lambda)$, где α – некоторая константа. Любой элемент $a \in \mathbb{C}[S_r]$ записывается в виде

$$a = \sum_{g \in S_r} a(g) g, \quad a(g) \in \mathbb{C}, \quad (4.3.38)$$

и если для него выполняются соотношения (4.3.37), то мы имеем:

$$a = \sum_{g \in S_r} \delta_q a(g) q \cdot g \cdot p = \sum_{g \in S_r} \delta_q a(q^{-1} \cdot g \cdot p^{-1}) g. \quad (4.3.39)$$

Сравнивая коэффициенты при g в правых частях (4.3.38) и (4.3.39), мы получаем соотношение

$$a(g) = a(q^{-1} \cdot g \cdot p^{-1}) \delta_q, \quad (4.3.40)$$

справедливое для всех $p \in H(\Gamma_\lambda)$, $q \in V(\Gamma_\lambda)$ и $g \in S_r$. В частном случае, полагая $g = q \cdot p$, мы получаем

$$a(q \cdot p) = a(e) \delta_q, \quad (4.3.41)$$

и все коэффициенты $a(g)$, возникающие в сумме (4.3.38), для которых $g = q \cdot p$, совпадают друг с другом с точностью до знака δ_q . Пусть g не представимо в виде $q \cdot p$, докажем, что в этом случае $a(g) = 0$. Рассмотрим таблицы Γ_λ и $g \cdot \Gamma_\lambda$. Так как $g \neq q \cdot p$, то согласно Следствию 2 к Лемме 4.3.2 имеются два числа j и k , которые располагаются в одной строке $g \cdot \Gamma_\lambda$ и в одном столбце Γ_λ , поэтому для транспозиции $t = (j, k)$ мы имеем $t \in H(g \cdot \Gamma_\lambda)$ и $t \in V(\Gamma_\lambda)$, а из соотношений (4.3.18) мы получаем $g^{-1} \cdot t \cdot g \in H(\Gamma_\lambda)$. Положим $q_0 = t$, $p_0^{-1} = g^{-1} \cdot t \cdot g$, при этом $q_0^{-1} \cdot g \cdot p_0^{-1} = g$, и учтем знак $\delta_{q_0} = \delta_t = -1$ в формуле (4.3.40):

$$a(g) = a(q_0^{-1} \cdot g \cdot p_0^{-1}) \delta_{q_0} = -a(g).$$

Отсюда и следует, что если $g \neq q \cdot p$, то $a(g) = 0$. С учетом этого факта и соотношения (4.3.41), формула (4.3.38) переписывается в виде

$$a = \sum_{g \in S_r} a(g) g = \sum_{q \in V(\Gamma_\lambda)} \sum_{p \in H(\Gamma_\lambda)} \delta_q a(e) q \cdot p = \alpha Y(\Gamma_\lambda), \quad (4.3.42)$$

где $\alpha = a(e)$.

Для любого элемента $x \in \mathbb{C}[S_r]$ рассмотрим произведение $a = Y(\Gamma_\lambda) \cdot x \cdot Y(\Gamma_\lambda)$. Для этого произведения в силу соотношений (4.3.12) выполняется условие (4.3.37), поэтому a пропорционально $Y(\Gamma_\lambda)$ и мы имеем

$$Y(\Gamma_\lambda) \cdot x \cdot Y(\Gamma_\lambda) = \alpha_\lambda(x) Y(\Gamma_\lambda). \quad (4.3.43)$$

где $\alpha_\lambda(x)$ – некоторая линейная числовая функция на $\mathbb{C}[S_r]$, зависящая от диаграммы $\lambda \vdash r$. В частности для $x = e$ мы получаем (4.3.35), где $\alpha_\lambda = \alpha_\lambda(e)$, и следовательно элемент $E(\Gamma_\lambda) = \alpha_\lambda^{-1} Y(\Gamma_\lambda)$ является идемпотентом $E(\Gamma_\lambda)^2 = E(\Gamma_\lambda)$.

Остается показать, что константа α_λ в (4.3.35) дается формулой (4.3.36). Левый идеал \mathcal{L}_{T_λ} алгебры $\mathbb{C}[S_r]$, который порождается идемпотентом $E(T_\lambda)$ (или, что тоже самое, оператором $Y(T_\lambda)$), состоит из всех элементов $\mathbb{C}[S_r]$ вида

$$x \cdot Y(T_\lambda), \quad \forall x \in \mathbb{C}[S_r]. \quad (4.3.44)$$

Обозначим размерность \mathcal{L}_{T_λ} как $f(\lambda)$. Выберем полный набор базисных векторов ϵ_ℓ ($\ell = 1, \dots, r!$) в $\mathbb{C}[S_r]$ так, чтобы первые $f(\lambda)$ векторов образовывали базис в \mathcal{L}_{T_λ} , а остальные вектора ϵ_m ($m > f(\lambda)$) не принадлежали \mathcal{L}_{T_λ} . Любые вектора в \mathcal{L}_{T_λ} , в том числе и базисные вектора ϵ_a ($a \leq f(\lambda)$), должны представляться как произведения (4.3.44), поэтому существуют элементы $x_a \in \mathbb{C}[S_r]$ ($a \leq f(\lambda)$) такие, что

$$\epsilon_a = x_a \cdot Y(T_\lambda), \quad 1 \leq a \leq f(\lambda). \quad (4.3.45)$$

Теперь перепишем произведение $\epsilon_\ell \cdot Y(T_\lambda)$ двумя способами. С одной стороны, рассмотрим произведение $\epsilon_\ell \cdot Y(T_\lambda)$ как действие элемента $Y(T_\lambda)$ справа на базисный элемент $\epsilon_\ell \in \mathbb{C}[S_r]$ (сравните с левым действием (2.1.7) на базисный вектор):

$$\epsilon_\ell \cdot Y(T_\lambda) = \sum_{\ell'=1}^{r!} D_{\ell\ell'}(Y(T_\lambda)) \epsilon_{\ell'}, \quad (4.3.46)$$

где $\|D_{\ell\ell'}(Y(T_\lambda))\|$ — матрица элемента $Y(T_\lambda)$ в правом регулярном представлении $\mathbb{C}[S_r]$. Заметим, что симметризатор Юнга (4.3.11) разлагается следующим образом

$$Y(T_\lambda) = \sum_{g \in S_r} a(g) g = e + \sum_{g \neq e} a(g) g,$$

то есть коэффициент $a(e)$ при единичном элементе e равен 1, что следует из определения (4.3.11) для симметризатора $Y(T_\lambda)$. Поэтому, вспоминая (см. раздел **I-3.6.2** первой части книги) формулы $\chi_R(e) = \text{ord}(G)$ и $\chi_R(g) = 0$ ($\forall g \in G, g \neq e$) для характера регулярного представления конечной группы G , мы получаем

$$\text{Tr}(D(Y(T_\lambda))) = \text{Tr}(D(e)) = r!, \quad (4.3.47)$$

где след берется по $r!$ -мерному пространству регулярного представления. С другой стороны, так как $\epsilon_\ell \cdot Y(T_\lambda) \in \mathcal{L}_{T_\lambda}$, то суммирование в правой части (4.3.46) содержит только члены с $\ell' \leq f(\lambda)$, поэтому

$$D_{\ell\ell'}(Y(T_\lambda)) = 0, \quad \forall \ell' > f(\lambda). \quad (4.3.48)$$

Используя формулу (4.3.45), для $\ell \leq f(\lambda)$ мы имеем

$$\epsilon_\ell \cdot Y(T_\lambda) = x_\ell \cdot Y(T_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_\lambda x_\ell \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_\lambda \epsilon_\ell. \quad (4.3.49)$$

Таким образом, из сравнения соотношений (4.3.46) и (4.3.49) следует равенство $D_{\ell\ell'}(Y(T_\lambda)) = \alpha_\lambda \delta_{\ell\ell'}$ для всех $\ell \leq f(\lambda)$, что с учетом (4.3.48) дает

$$\text{Tr}(D(Y(T_\lambda))) = \alpha_\lambda f(\lambda). \quad (4.3.50)$$

Сравнивая (4.3.47) и (4.3.50), мы получаем (4.3.36). ■

Следствие. Идемпотент

$$E(\mathbb{T}_\lambda) = \alpha_\lambda^{-1} Y(\mathbb{T}_\lambda) \quad (4.3.51)$$

– примитивен. Докажем это от противного. Пусть идемпотент $E(\mathbb{T}_\lambda)$ не примитивен. Тогда существуют идемпотенты $e_1, e_2 \in \mathbb{C}[S_r]$ такие, что $E(\mathbb{T}_\lambda) = e_1 + e_2$ и

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = 0 = e_2 \cdot e_1.$$

Отсюда следуют равенства

$$E(\mathbb{T}_\lambda) \cdot e_1 = e_1 \cdot E(\mathbb{T}_\lambda) = e_1 \quad \Rightarrow \quad E(\mathbb{T}_\lambda) \cdot e_1 \cdot E(\mathbb{T}_\lambda) = e_1.$$

С другой стороны, согласно (4.3.43), мы имеем $E(\mathbb{T}_\lambda) \cdot e_1 \cdot E(\mathbb{T}_\lambda) = \beta E(\mathbb{T}_\lambda)$, где β – некоторая константа. Поэтому $e_1 = \beta E(\mathbb{T}_\lambda)$ и, возводя обе части этого тождества в квадрат, мы получаем $\beta = \beta^2$. Таким образом, либо $\beta = 1$, либо $\beta = 0$, то есть, либо $e_2 = 0$, либо $e_1 = 0$, и следовательно идемпотент $E(\mathbb{T}_\lambda)$ – примитивен.

- *Задача 104.* Проверить явным вычислением, что симметризаторы Юнга, построенные в (4.3.14) для $\mathbb{C}[S_2]$ и в (4.3.15) для $\mathbb{C}[S_3]$ пропорциональны идемпотентам и являются взаимно ортогональными. Указание: воспользоваться решением Задач 97, 98.

Утверждение 4.3.4 Пусть симметризаторы Юнга $Y(\mathbb{T}_\lambda), Y(\mathbb{T}'_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$ построены по разным таблицам \mathbb{T}_λ и \mathbb{T}'_λ , которые имеют одну и ту же форму $\lambda \vdash r$. Тогда левые регулярные представления алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ в пространствах ее левых идеалов, порожденных операторами $Y(\mathbb{T}_\lambda)$ и $Y(\mathbb{T}'_\lambda)$, эквивалентны. Аналогичное утверждение имеет место и для правых регулярных представлений.

Доказательство. Доказательство эквивалентности для правых регулярных представлений такое же, как и для левых регулярных представлений. Поэтому здесь мы приведем только доказательство эквивалентности левых регулярных представлений. Рассмотрим пространство левого идеала $\mathcal{L}_{\mathbb{T}_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(\mathbb{T}_\lambda)$, и пусть элементы ϵ_a ($a = 1, \dots, f(\lambda)$) образуют базис в пространстве $\mathcal{L}_{\mathbb{T}_\lambda}$. Так как таблицы \mathbb{T}_λ и \mathbb{T}'_λ имеют одну и ту же форму λ , то существует перестановка $\sigma \in S_r$ такая, что $\mathbb{T}'_\lambda = \sigma \cdot \mathbb{T}_\lambda$ и соответствующие симметризаторы Юнга связаны соотношением (4.3.22). Тогда любой элемент в пространстве

$$\mathcal{L}_{\mathbb{T}'_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(\mathbb{T}'_\lambda) = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(\mathbb{T}_\lambda) \cdot \sigma^{-1},$$

левого идеала, порожденного оператором $Y(\mathbb{T}'_\lambda)$, представляется в виде линейной комбинации элементов $\epsilon'_a = \epsilon_a \cdot \sigma^{-1}$, которые таким образом образуют базис в пространстве $\mathcal{L}_{\mathbb{T}'_\lambda}$. Линейная независимость векторов $\{\epsilon'_a\}$ следует из линейной независимости векторов $\{\epsilon_a\}$. Рассмотрим левое регулярное представление ρ в пространстве $\mathcal{L}_{\mathbb{T}_\lambda}$. Матрица элемента $x \in \mathbb{C}[S_r]$ в представлении ρ будет, согласно стандартной процедуре (2.1.7), определяться следующим образом $x \cdot \epsilon_a = \epsilon_b \rho_{ba}(x)$. Аналогично определяется матрица элемента $x \in \mathbb{C}[S_r]$ в левом регулярном представлении ρ' в пространстве $\mathcal{L}_{\mathbb{T}'_\lambda}$: $x \cdot \epsilon'_a = \epsilon'_b \rho'_{ba}(x)$. С другой стороны мы имеем

$$x \cdot \epsilon'_a = x \cdot \epsilon_a \cdot \sigma^{-1} = (\epsilon_b \rho_{ba}(x)) \cdot \sigma^{-1} = \epsilon'_b \rho_{ba}(x) \quad \Rightarrow \quad \rho'_{ba}(x) = \rho_{ba}(x).$$

Таким образом, в пространстве $\mathcal{L}_{T'_\lambda}$ существует специальный базис ($\epsilon'_a = \epsilon_a \cdot \sigma^{-1}$) такой, что матрица $\rho'(x)$ представления любого элемента $x \in \mathbb{C}[S_r]$ в этом базисе совпадает с матрицей $\rho(x)$ в представлении ρ . Следовательно, левые регулярные представления ρ и ρ' , порожденные симметризаторами Юнга $Y(T_\lambda)$ и $Y(T'_\lambda)$ (которые построены по таблицам, имеющим одну и ту же форму λ), являются эквивалентными. ■

Из только что доказанного утверждения следует, что неприводимые подпредставления регулярного представления симметрической группы S_r , реализованные в пространствах левых идеалов $\mathcal{L}_{T_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(T_\lambda)$, эквивалентны для всех таблиц Юнга T_λ , имеющих одну и ту же форму $\lambda \vdash r$. Неэквивалентные представления S_r могут быть построены только по таблицам T_λ , которые имеют форму разных диаграммам Юнга $\lambda \vdash r$.

Утверждение 4.3.5 Пусть симметризаторы Юнга $Y(T_\lambda)$ и $Y(T'_{\lambda'})$ построены по таблицам T_λ и $T'_{\lambda'}$, которые имеют разную форму $\lambda \neq \lambda'$ ($\lambda, \lambda' \vdash r$). Тогда левые регулярные представления алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ в пространствах левых идеалов, порожденных симметризаторами $Y(T_\lambda)$ и $Y(T'_{\lambda'})$, неэквивалентны. Аналогичное утверждение имеет место и для правых регулярных представлений.

Доказательство. Введем обозначения $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ для левых регулярных представлений алгебры $\mathbb{C}[S_r]$, порожденных симметризаторами Юнга $Y(T_\lambda)$ и $Y(T'_{\lambda'})$ и действующих в пространствах \mathcal{L}_{T_λ} и $\mathcal{L}_{T'_{\lambda'}}$, соответственно. Докажем наше утверждение от противного. Пусть $\lambda \neq \lambda'$ и пусть представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ эквивалентны. Тогда существует обратимый оператор U такой, что $U \cdot \mathcal{L}_{T_\lambda} = \mathcal{L}_{T'_{\lambda'}}$ и для любого $a \in \mathbb{C}[S_r]$ мы имеем

$$U^{-1} \cdot T^{(\lambda')}(a) \cdot U = T^{(\lambda)}(a).$$

Рассмотрим действие оператора $T^{(\lambda)}(Y(T_\lambda))$ в пространстве \mathcal{L}_{T_λ} и учтем (4.3.43)

$$T^{(\lambda)}(Y(T_\lambda)) \cdot \mathcal{L}_{T_\lambda} = Y(T_\lambda) \cdot \mathcal{L}_{T_\lambda} = \mathbb{C} \cdot Y(T_\lambda), \quad (4.3.52)$$

где параметр \mathbb{C} зависит от выбора элемента в \mathcal{L}_{T_λ} и, вообще говоря, не равен нулю. С другой стороны, левую часть (4.3.52) можно переписать в виде

$$U^{-1} \cdot T^{(\lambda')}(Y(T_\lambda)) \cdot U \cdot \mathcal{L}_{T_\lambda} = U^{-1} \cdot T^{(\lambda')}(Y(T_\lambda)) \cdot \mathcal{L}_{T'_{\lambda'}} = U^{-1} \cdot Y(T_\lambda) \cdot \mathcal{L}_{T'_{\lambda'}} = 0, \quad (4.3.53)$$

где мы воспользовались (4.3.32). Сравнивая (4.3.52) и (4.3.53), мы видим, что пришли к противоречию. Поэтому представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ для $\lambda \neq \lambda'$ не могут быть эквивалентными. Доказательство неэквивалентности для правых регулярных представлений проводится аналогично. ■

Далее нам потребуется следующее определение таблиц Юнга специального типа, которые играют ключевую роль в теории представлений группы S_r (алгебры $\mathbb{C}[S_r]$).

Определение 4.3.2 Таблицы Юнга T_λ , в которых числа в клетках возрастают в каждой строке слева направо и в каждом столбце сверху вниз, называются стандартными таблицами.

Рассмотрим в качестве примера три таблицы Юнга, имеющие одну и ту же форму $[6, 5, 4, 3] \vdash 18$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 17 & 18 & 13 & 15 & 10 \\ \hline 6 & 16 & 2 & 12 & 8 & \\ \hline 14 & 3 & 1 & 7 & & \\ \hline 11 & 9 & 4 & & & \\ \hline \end{array} , \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 10 & 13 & 15 & 17 & 18 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 12 & 16 & \\ \hline 1 & 3 & 7 & 14 & & \\ \hline 4 & 9 & 11 & & & \\ \hline \end{array} , \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 & 12 & 16 & 18 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 14 & 17 & \\ \hline 4 & 9 & 11 & 15 & & \\ \hline 5 & 10 & 13 & & & \\ \hline \end{array} . \tag{4.3.54}$$

Первые две таблицы не стандартны, а последняя — стандартна.

Напомним, что число неэквивалентных неприводимых представлений группы S_r равно числу классов сопряженных элементов в S_r (см. Утверждение **I-3.6.4** в Разделе **I-3.6.2** первой части книги) и соответственно равно числу различных диаграмм Юнга $\lambda \vdash r$. Поэтому неэквивалентные неприводимые представления $\mathbb{C}[S_r]$, которые содержатся в левом (правом) регулярном представлении $\mathbb{C}[S_r]$ и порождаются симметризаторами Юнга $Y(T_\lambda)$ для разных диаграмм $\lambda \vdash r$ (см. Утверждение **4.3.5**) исчерпывают все неприводимые неэквивалентные представления $\mathbb{C}[S_r]$. Таким образом, левое (аналогично, правое) регулярное представление алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ разлагается на неэквивалентные представления $T^{(\lambda)}$, которые характеризуются различными диаграммами Юнга $\lambda \vdash r$. Как было показано в разделе **I-3.6.2** первой части книги, кратность вхождения каждого неэквивалентного представления $T^{(\lambda)}$ в регулярное представление равняется размерности $f_{(\lambda)}$ этого представления. С другой стороны, предполагая полноту системы симметризаторов Юнга (это предположение выполняется, см. подраздел **4.5.2**) и вспоминая разложение (4.3.33), мы заключаем, что каждое неэквивалентное представление, соответствующее диаграмме Юнга $\lambda \vdash r$, входит в регулярное представление столько раз, сколько имеется таблиц T_λ , имеющих форму $\lambda \vdash r$ и определяющих симметризаторы $Y(T_\lambda)$, которые порождают **несовпадающие** левые (правые) идеалы в $\mathbb{C}[S_r]$. Эти симметризаторы характеризуются не всеми $r!$ таблицами, имеющими форму $\lambda \vdash r$, а только **стандартными** таблицами $T_{a,\lambda}$ ($a = 1, \dots, f_{(\lambda)}$) (см. определение **4.3.2**), и число таких стандартных таблиц равно размерности представления $f_{(\lambda)}$. Таким образом, левые и правые разложения (4.3.33) для алгебры $\mathcal{A} = \mathbb{C}[S_r]$, построенные с помощью идемпотентов, пропорциональных симметризаторам Юнга, записываются следующим образом

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f_{(\lambda)}} \mathcal{A} \cdot Y(T_{a,\lambda}) \equiv \sum_{\lambda,a} \mathcal{L}_{T_{a,\lambda}} , \quad \mathcal{A} = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f_{(\lambda)}} Y(T_{a,\lambda}) \cdot \mathcal{A} \equiv \sum_{\lambda,a} \mathcal{R}_{T_{a,\lambda}} , \tag{4.3.55}$$

где $\sum_{\lambda \vdash r}$ — обозначает сумму по всем возможным разбиениям числа r (по всем диаграммам Юнга с r клетками), а $\sum_{a=1}^{f_{(\lambda)}}$ — сумму по всем стандартным таблицам. Справедливость разложений (4.3.55) означает полноту системы симметризаторов Юнга, построенных по стандартным таблицам. Мы будем обсуждать стандартные таблицы Юнга $T_{a,\lambda}$ ($a = 1, \dots, f_{(\lambda)}$), полноту системы соответствующих симметризаторов Юнга и свойства разложений (4.3.55) более подробно ниже, в разделе **4.5.2**.

В заключение этого раздела приведем две полезные формулы для вычисления размерности $f_{(\lambda)}$ (см. формулу (4.3.36)) неприводимого представления $T^{(\lambda)}$ группы перестановок S_r , соответствующего диаграмме Юнга $\lambda \vdash r$ и реализованного на левом идеале, порожденном симметризатором $Y(T_\lambda)$.

Первая формула для $f(\lambda)$, которую мы приводим, была получена сравнительно недавно, в 1954 году (Дж.Фрэйм, Дж.Робинсон и Р.Тролл [41]), и называется формулой крюков. Крюком клетки (i, j) в диаграмме λ (где i — номер строки и j — номер столбца) называется набор клеток в λ , расположенных правее клетки (i, j) в строке i и ниже клетки (i, j) в столбце j , включая саму клетку (i, j) . Формула крюков имеет вид:

$$f(\lambda) = \frac{r!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{(i,j)}}. \tag{4.3.56}$$

Здесь в знаменателе стоит произведение по всем клеткам (i, j) диаграммы λ , а $h_{(i,j)}$ — длина крюка в диаграмме λ для клетки (i, j) , то есть число клеток в крюке клетки (i, j) . Вторая формула была получена ранее Фробениусом и имеет вид

$$f(\lambda) = \frac{r!}{(h_1! \dots h_m!)} \prod_{i < j} (h_i - h_j), \tag{4.3.57}$$

где m — число строк в диаграмме λ , $h_i = h_{(i,1)}$ ($i = 1, \dots, m$) длины крюков для клеток в первом столбце λ и $r = (\sum_i h_i - \frac{(m-1)m}{2})$ — число клеток в диаграмме λ . В качестве примера вычисления длин крюков рассмотрим диаграмму $\mu = [6, 5, 3, 3] \vdash 17$ и поставим в каждой ее клетке вместо стандартных чисел $(1, 2, \dots, 17)$ соответствующие длины крюков, в результате получим таблицу $\tilde{\mu}$:

$$\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & 6 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \tilde{\mu} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 9 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & \\ \hline 4 & 3 & 2 & & & \\ \hline 3 & 2 & 1 & & & \\ \hline \end{array}. \tag{4.3.58}$$

Утверждение 4.3.6 Формула крюков (4.3.56) и формула Фробениуса (4.3.57) эквивалентны.

Доказательство. Вычислим произведение длин крюков первой строки диаграммы $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \vdash r$. Получаем

$$h_{1,1} \cdot h_{1,2} \cdots h_{1,\lambda_1} = \frac{(\lambda_1 + m - 1)!}{(\lambda_1 - \lambda_m + m - 1)(\lambda_1 - \lambda_{m-1} + m - 2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)}. \tag{4.3.59}$$

Действительно, длина крюка первой клетки равна $(\lambda_1 + m - 1)$, второй клетки равна $(\lambda_1 + m - 2)$ и так далее до клетки λ_m , которая имеет крюк длины $(\lambda_1 - \lambda_m + m)$. Следующая клетка имеет крюк длины $(\lambda_1 - \lambda_m + m - 2)$, если $\lambda_m < \lambda_{m-1}$; отсюда и возникает отсутствующий множитель $(\lambda_1 - \lambda_m + m - 1)$, который стоит первым в знаменателе в выражении (4.3.59). Если же мы имеем $\lambda_m = \lambda_{m-1} = \dots = \lambda_{m-k} < \lambda_{m-k-1}$, то длина крюка следующей клетки равна $(\lambda_1 - \lambda_m + m - k - 2)$, что приводит к добавлению в знаменатель (4.3.59) множителей

$$(\lambda_1 - \lambda_m + m - 1) \cdot (\lambda_1 - \lambda_{m-1} + m - 2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_{m-k} + m - k - 1).$$

И так вдоль всей первой строки, при этом множители в знаменателе (4.3.59) появляются тогда, когда уменьшается высота столбца, к которому принадлежит следующая клетка первой строки диаграммы λ . Аналогично вычисляется произведение

длин всех крюков для второй строки диаграммы λ и так далее до последней m -ой строки. Окончательно для произведения длин всех крюков диаграммы λ мы имеем

$$\prod_{(k,i) \in \lambda} h_{k,i} = \prod_{k=1}^m (\lambda_k + m - k)! \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j + i - j)} \right). \quad (4.3.60)$$

Заметим, что $(\lambda_k + m - k) = h_k$ — длины крюков для клеток $(k, 1)$ первого столбца в диаграмме λ . Тогда $(\lambda_i - \lambda_j + i - j) = h_i - h_j$ и формула (4.3.60) переписывается в виде

$$\prod_{(k,i) \in \lambda} h_{(k,i)} = \prod_{i=1}^m h_i! \prod_{i < j} \frac{1}{(h_i - h_j)}, \quad (4.3.61)$$

что и доказывает эквивалентность равенств (4.3.56) и (4.3.57). \blacksquare

Итак, в силу Утверждения 4.3.6 достаточно доказать только одну из формул (4.3.56) и (4.3.57). Докажем формулу Фробениуса (4.3.57) (доказательство формул (4.3.56) и (4.3.57) можно также найти в книгах [44], [40] и обзоре [42]).

Утверждение 4.3.7 Число стандартных таблиц, имеющих форму диаграммы Юнга λ с r клетками, дается формулой Фробениуса (4.3.57).

Доказательство. Будем доказывать формулу (4.3.57) по индукции. Легко проверить, что равенство (4.3.57) справедливо для всех диаграмм Юнга с тремя и четырьмя клетками. Длины крюков h_i для клеток первого столбца диаграммы Юнга λ и число клеток λ_i в i -ой строке связаны соотношениями $h_i = \lambda_i + m - i$, поэтому диаграмма Юнга λ однозначно определяется длинами крюков $\{h_1, \dots, h_m\}$. Обозначим функцию $f_{(\lambda)}$, которая определяет число стандартных таблиц, имеющих форму диаграммы λ , как $F(h_1, \dots, h_m)$. Пусть диаграмма Юнга λ' с $(r-1)$ -ой клеткой получается из диаграммы Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ удалением клетки, располагающейся в любом внутреннем угле диаграммы λ . Стандартные таблицы с r клетками, имеющие форму диаграммы Юнга λ получаются из стандартных таблиц с $(r-1)$ клеткой, имеющих форму диаграмм Юнга λ' добавлением клетки с номером r в соответствующий внешний угол диаграммы λ' . Отсюда следует, что функция $F(h_1, \dots, h_m)$, определяющая число стандартных таблиц, имеющих форму λ , где $\lambda_1 > \dots > \lambda_m$, должна удовлетворять равенству

$$F(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m F(h_1, \dots, h_i - 1, \dots, h_m), \quad (4.3.62)$$

где сумма идет по всем строкам диаграммы λ . Пусть функция, которая стоит в правой части (4.3.57), дает правильное число стандартных таблиц для всех диаграмм Юнга с $(r-1)$ -ой клеткой. Тогда соотношение (4.3.62) будет выполняться не только для случая $\lambda_1 > \dots > \lambda_m$, но и для диаграмм λ с r клетками, у которых имеются строки с одинаковой длиной. Действительно, пусть $\lambda_{i+1} = \lambda_i$. В этом случае удаление клетки в i -ой строке приводит к "неправильной" диаграмме Юнга λ' (так как $\lambda'_{i+1} > \lambda'_i$) и в сумме (4.3.62) слагаемое с номером i должно отсутствовать. Действительно, в этом случае имеем $h_{i+1} = h_i - 1$, поэтому функция $F(h_1, \dots, h_i - 1, h_{i+1}, \dots, h_m)$, соответствующая "неправильной" диаграмме λ' с $(r-1)$ -й клеткой и имеющая, согласно предположению индукции, вид (4.3.57), равна нулю

и не дает вклада в сумму в правой части (4.3.62). Таким образом, достаточно доказать, что функция в правой части (4.3.57) удовлетворяет соотношению (4.3.62), тогда согласно предположению индукции это будет доказательством формулы Фробениуса (4.3.57). Проверку тождества (4.3.62) для функций (4.3.57) мы оставляем читателю для самостоятельного упражнения.

- *Задача 105.* ★ Доказать тождество (4.3.62) для функций (4.3.57).

■

В разделе **I-3.6.2** первой части книги для любой конечной группы G было доказано замечательное соотношение (которое в литературе иногда называют *тождеством Бернсайда*)

$$N = \sum_{\rho=1}^h N_{\rho}^2, \tag{4.3.63}$$

где $N = \text{ord}(G)$ и N_{ρ} — размерности всех неприводимых неэквивалентных представлений $T^{(\rho)}$ ($\rho = 1, \dots, h$) группы G . Соотношение (4.3.63) применимо и для любой ассоциативной *простой* и *полупростой* конечномерной алгебры \mathcal{A} (см. подраздел 4.5.1 ниже). В этом случае N в левой части (4.3.63) обозначает размерность алгебры \mathcal{A} . Например, для случая групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ (для случая конечной группы S_r), в силу всего сказанного выше, равенство (4.3.63) записывается в виде достаточно нетривиального комбинаторного тождества

$$r! = \sum_{\lambda \vdash r} (f_{(\lambda)})^2, \tag{4.3.64}$$

(сумма идет по всем диаграммам λ , имеющим r клеток). Мы не будем здесь проверять тождество (4.3.64) в общем случае (см. Задачу 109).

- *Задача 106.* ★ Пусть $p(r)$ — число разных диаграмм Юнга $\lambda \vdash r$. Доказать, что производящая функция для чисел $p(r)$ дается формулой Эйлера (см., например [40])

$$\sum_{r=0}^{\infty} p(r) x^r = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

- *Задача 107.* Вычислить по формулам (4.3.56) и (4.3.57) размерность $f_{(\mu)}$ (число стандартных таблиц, имеющих форму μ) представления группы S_{17} , соответствующего диаграмме μ , изображенной в (4.3.58).

- *Задача 108.* Получить, не используя (4.3.56) и (4.3.57), формулу $f_{(\mu)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)}{(\lambda_1 + 1)} C_{\lambda_1 + \lambda_2}^{\lambda_2}$, для числа стандартных таблиц Юнга (для размерности соответствующего представления группы S_r), имеющих форму двухрядной диаграммы Юнга $\mu = [\lambda_1, \lambda_2] \vdash r$. Проверить эту формулу с помощью (4.3.56) и (4.3.57).

- *Задача 109.* С помощью (4.3.56) и (4.3.57) проверить тождество (4.3.64) для $r = 4, 5$.

4.4 Конечномерные неприводимые представления групп SU и SL

Прежде всего напомним, что конечномерные комплексные представления группы $SU(N)$ и алгебр $sl(N, \mathbb{C})$ и $su(N)$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями группы $SL(N, \mathbb{C})$ из подкласса, описанного в Замечании **3** в разделе **2.1** и в Замечании в разделе **4.1**. Поэтому вся общая процедура построения конечномерных комплексных неприводимых представлений $SL(N, \mathbb{C})$ из указанного подкласса, которую мы начали рассматривать в разделе **4.2** и которая будет излагаться в этом разделе, практически без изменений переносится и на случай построения конечномерных неприводимых комплексных представлений компактной группы $SU(N) \subset SL(N, \mathbb{C})$. Учитывая этот факт, в дальнейшем мы будем упоминать только группу $SL(N, \mathbb{C})$. Если будут возникать различия, то они будут оговариваться специально.

В дальнейшем в этой Главе мы будем в основном рассматривать две тесно связанные между собой задачи. Первая из них — перечисление всех комплексных конечномерных неприводимых представлений групп $SU(N)$ (и перечисление ограниченного класса соответствующих представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$) как подпредставлений в тензорном произведении r определяющих представлений $T^{\otimes r}$ и формулировка конструктивного метода выделения таких неприводимых представлений из $T^{\otimes r}$. Вторая задача — явное разложение на неприводимые представления тензорного произведения $T^{\otimes r}$. Первая задача может быть решена достаточно быстро и ее решение будет дано в конце раздела **4.4.1**. Рецепт решения второй задачи формулируется просто, но обоснование этого рецепта требует, вообще говоря, построения довольно громоздких конструкций, которые мы будем обсуждать в разделах **4.5** и **4.6**.

4.4.1 Конечномерные неприводимые представления $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$ в пространствах симметризованных тензоров

Пусть $\mathcal{V} \equiv \mathbb{C}^N$ — пространство определяющего представления T группы $SL(N, \mathbb{C})$. Напомним, что в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ одновременно действуют группа $SL(N, \mathbb{C})$ в представлении $T^{\otimes r}$ и групповая алгебра $\mathbb{C}[S_r]$ в представлении \mathfrak{s} , которое определено в (4.2.9), (4.2.10). Далее, пусть $\lambda \vdash r$ — диаграмма Юнга с r клетками (разбиение числа r). Каждой такой диаграмме Юнга λ соответствует набор таблиц Юнга T_λ . Как было показано в разделе **4.3**, по каждой таблице строится симметризатор Юнга $Y(T_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$, который порождает левый (правый) идеал в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$, или, другими словами, порождает подпространство неприводимого представления ρ_{T_λ} алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ в пространстве ее левого (правого) регулярного представления. Все представления ρ_{T_λ} , соответствующие разным, но имеющим одну и ту же форму λ , таблицам T_λ , эквивалентны друг другу (см. Утверждение **4.3.4**), поэтому ниже мы будем использовать обозначение ρ_λ для всех представлений ρ_{T_λ} , $\forall T_\lambda$, алгебры $\mathbb{C}[S_r]$. С другой стороны, согласно Утверждению **4.3.3**, нормированные симметризаторы Юнга в представлении \mathfrak{s} :

$$\mathfrak{s}(E(T_\lambda)) = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathfrak{s}(Y(T_\lambda)), \quad (4.4.1)$$

где $\alpha_\lambda = r!/f_\lambda$, являются проекторами в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ представления $T^{\otimes r}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$. Эти проекторы выделяют (см. конец раздела 4.2) в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ инвариантные подпространства

$$\mathcal{V}^{(\lambda)} = \mathfrak{s}(E(\Gamma_\lambda)) \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} \sim \mathfrak{s}(Y(\Gamma_\lambda)) \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} \subset \mathcal{V}^{\otimes r}, \quad (4.4.2)$$

неприводимых представлений $T^{(\Gamma_\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$. Все представления $T^{(\Gamma_\lambda)}$ неприводимы, так как идемпотенты $E(\Gamma_\lambda)$ примитивны (см. Следствие к Утверждению 4.3.3). Операторы элементов $g \in SL(N, \mathbb{C})$ в неприводимом представлении $T^{(\Gamma_\lambda)}$ записываются в виде (сравните с (4.2.27))

$$T^{(\Gamma_\lambda)}(g) = \alpha_\lambda^{-1} \mathfrak{s}(Y(\Gamma_\lambda)) \cdot T^{\otimes r}(g) = \alpha_\lambda^{-1} T^{\otimes r}(g) \cdot \mathfrak{s}(Y(\Gamma_\lambda)), \quad (4.4.3)$$

где последнее равенство следует из коммутативности операторов $T^{\otimes r}(g)$ и $\mathfrak{s}(a)$ для всех $g \in SL(N, \mathbb{C})$ и всех $a \in \mathbb{C}[S_r]$ (см. Утверждение 4.2.2). Операторы $\mathfrak{s}(Y(\Gamma_\lambda))$ в $\mathcal{V}^{\otimes r}(g)$, так же как и элементы $Y(\Gamma_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$, мы будем называть *симметризаторами Юнга*.

- *Задача 110. Пользуясь тем, что оператор $\mathfrak{s}(Y(\Gamma_\lambda))$ коммутирует с любым элементом $g \in SL(N, \mathbb{C})$ в представлении $T^{\otimes r}$, проверить свойство гомоморфизма для отображения (4.4.3).*

Оказывается, что представления $T^{(\Gamma_\lambda)}$, для всех таблиц Γ_λ , имеющих одну и ту же форму λ , — эквивалентны (в связи с этим введем более простое обозначение $T^{(\lambda)} \equiv T^{(\Gamma_\lambda)}$), а представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ для таблиц, имеющих разную форму $\lambda \neq \lambda'$, — неэквивалентны. Докажем эти факты.

Утверждение 4.4.1 1.) Представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, построенные по двум разным таблицам Γ_λ и $\Gamma_{\lambda'}$, имеющим одинаковую форму $\lambda \vdash r$, эквивалентны. 2.) Представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, построенные по двум таблицам Γ_λ и $\Gamma_{\lambda'}$, имеющим разную форму $\lambda \vdash r$ и $\lambda' \vdash r$ (но одинаковое число клеток), неэквивалентны.

Доказательство. 1.) Таблицу Γ_λ всегда можно перевести в таблицу Γ'_λ с помощью некоторой перестановки $\sigma \in S_r$: $\Gamma'_\lambda = \sigma \cdot \Gamma_\lambda$. Тогда, согласно (4.3.22) мы имеем $Y(\Gamma'_\lambda) = \sigma \cdot Y(\Gamma_\lambda) \cdot \sigma^{-1}$ и, учитывая определение (4.4.3), получаем

$$T^{(\lambda)'}(g) = A \cdot T^{(\lambda)}(g) \cdot A^{-1}, \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}), \quad (4.4.4)$$

где $A = \mathfrak{s}(\sigma)$ — обратимый оператор.

2.) Доказательство второй части Утверждения во многом повторяет доказательство Утверждения 4.3.5. Согласно лемме Шура (см. раздел I-3.4.2 первой части книги) представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ неэквивалентны, если любой оператор $A: \mathcal{V}^{(\lambda')} \rightarrow \mathcal{V}^{(\lambda)}$, связывающий пространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ и $\mathcal{V}^{(\lambda')}$ представлений $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ и сплетающий все операторы этих представлений

$$\left(T^{\otimes r}(g) \cdot \mathfrak{s}(Y(\Gamma_\lambda)) \right) \cdot A = A \cdot \left(T^{\otimes r}(g) \cdot \mathfrak{s}(Y(\Gamma_{\lambda'})) \right), \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}), \quad (4.4.5)$$

равен нулю: $A = 0$. Учитывая то, что симметризаторы Юнга коммутируют с $T^{\otimes r}(g)$ и пропорциональны проекторам (см. (4.3.35)), перепишем условие (4.4.5) в виде

$$T^{\otimes r}(g) \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot T^{\otimes r}(g), \quad (4.4.6)$$

где $\tilde{A} \equiv \mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda)) \cdot A \cdot \mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_{\lambda'}))$ — общий вид оператора, который переводит пространство $\mathcal{V}^{(\lambda')}$ в $\mathcal{V}^{(\lambda)}$. Таким образом, необходимо доказать равенство $\tilde{A} = 0$. Согласно Утверждению 4.2.2 любой оператор \tilde{A} , удовлетворяющий (4.4.6), представляется как $\mathfrak{s}(a)$, где $a \in \mathbb{C}[S_r]$. Поэтому мы имеем

$$\tilde{A} = \frac{1}{\alpha_\lambda^2} \mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda)) \cdot \tilde{A} \cdot \mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_{\lambda'})) = \frac{1}{\alpha_\lambda^2} \mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda) \cdot a \cdot Y(\mathbb{T}_{\lambda'})) = 0, \quad (4.4.7)$$

где в первом равенстве мы снова воспользовались (4.3.35), а последнее равенство вытекает из (4.3.32). \blacksquare

Из этого утверждения следует важный вывод о том, что неприводимые и неэквивалентные представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ из рассматриваемого подкласса (так же как и неприводимые и неэквивалентные представления группы S_r ; см. конец Раздела 4.3.2) должны нумероваться не разными таблицами Юнга, а разными диаграммами Юнга. Этот вывод будет более детально обсуждаться чуть ниже (см. Утверждение 4.4.2).

Взглянем теперь на неприводимые представления $T^{(\lambda)}$, вложенные в $T^{\otimes r}$, с несколько иной точки зрения. Представление $T^{\otimes r}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ тензоров ранга r

$$\psi = \psi^{i_1 i_2 \dots i_r} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r} \in \mathcal{V}^{\otimes r}. \quad (4.4.8)$$

Каждой таблице Юнга \mathbb{T}_λ , имеющей форму диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$, сопоставляется согласно (4.4.2) подпространство $\mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda))\mathcal{V}^{\otimes r}$ тензоров $\psi_{\mathbb{T}_\lambda}$ ранга r , которые получаются проекцией из произвольных тензоров (4.4.8) с помощью симметризаторов Юнга $Y(\mathbb{T}_\lambda)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbb{T}_\lambda}^{i_1 i_2 \dots i_r} &\equiv [\mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda)) \cdot \psi]^{i_1 i_2 \dots i_r} = [\mathfrak{s}(Q) \cdot \mathfrak{s}(P) \cdot \psi]^{i_1 i_2 \dots i_r} = \\ &= \left(\sum_{q \in V(\mathbb{T}_\lambda)} \delta_q \mathfrak{s}(q) \right) \sum_{p \in H(\mathbb{T}_\lambda)} \psi^{p(i_1 i_2 \dots i_r)} = \sum_{q \in V(\mathbb{T}_\lambda)} \sum_{p \in H(\mathbb{T}_\lambda)} \delta_q \psi^{q \cdot p(i_1 i_2 \dots i_r)}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Здесь для симметризатора Юнга $Y(\mathbb{T}_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$ использована формула (4.3.11), а $p(i_1 \dots i_r)$ и $q \cdot p(i_1 \dots i_r)$ обозначают новый порядок индексов (i_1, i_2, \dots, i_r) , полученный в результате применения перестановок $p \in S_r$ и $q \cdot p \in S_r$:

$$p(i_1 \dots i_r) = i_{p(1)} \dots i_{p(r)}, \quad q \cdot p(i_1 \dots i_r) = i_{q \cdot p(1)} \dots i_{q \cdot p(r)},$$

где q — вертикальная перестановка, а p — горизонтальная перестановка, построенные по таблице \mathbb{T}_λ (см. определения таких перестановок в разделе 4.3.1). Как было сказано выше, тензоры с симметризованными компонентами (4.4.9) образуют инвариантное подпространство в $\mathcal{V}^{\otimes r}$ неприводимого представления $T^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$. Соответственно элементы $g \in SL(N, \mathbb{C})$ в неприводимом представлении $T^{(\lambda)}$, которые действуют на компоненты (4.4.9), записываются в виде операторов (4.4.3). Разным таблицам Юнга \mathbb{T}_λ и \mathbb{T}'_λ , которые имеют одинаковую форму диаграммы λ , в общем случае соответствуют разные симметризаторы Юнга, которые согласно (4.4.9) определяют разные тензоры $\psi_{\mathbb{T}_\lambda}$ и $\psi_{\mathbb{T}'_\lambda}$. Однако, в силу Утверждения 4.4.1, соответствующие представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ оказываются эквивалентными. Поэтому,

представление $T^{\otimes r}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$ разлагается на **неэквивалентные** неприводимые представления $T^{(\lambda)}$, типы которых нумеруются разными диаграммами Юнга $\lambda \vdash r$, а не таблицами T_λ . Кратность вхождения представления данного типа (соответствующего данной диаграмме Юнга) в тензорное произведение $T^{\otimes r}$, вообще говоря, больше единицы.

Удобно представлять тензоры с компонентами (4.4.9) в виде соответствующей таблицы Юнга T_λ , в каждой клетке которой с номером k проставлен тензорный индекс i_k . Например, специальным образом симметризованный тензор $\psi_{T_\lambda}^{i_1 \dots i_{11}}$ ранга $r = 11$ и соответствующая ему таблица T_λ представляются в виде

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline i_1 & i_3 & i_4 & i_5 & i_{10} \\ \hline i_2 & i_6 & i_8 & i_9 & \\ \hline i_7 & i_{11} & & & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 9 & \\ \hline 7 & 11 & & & \\ \hline \end{array} . \quad (4.4.10)$$

Обсудим более детально такое представление на примерах тензоров ψ_{T_λ} (ранга $r = 1, 2, 3$), построенных по таблицам T_λ с одной, двумя и тремя клетками. Эти примеры понадобятся нам в дальнейшем.

Пример 1. Таблица с одной клеткой $\boxed{i_1}$ сопоставляется вектору $\vec{\psi} = \psi^{i_1} \vec{e}_{i_1}$ в пространстве $\mathcal{V} = \mathbb{C}^N$ определяющего представления группы $SL(N, \mathbb{C})$. Напомним, что действие группы в этом представлении определяется формулой (4.2.2):

$$\psi^i \rightarrow \psi'^i = g^i_j \psi^j, \quad g \in SL(N, \mathbb{C}). \quad (4.4.11)$$

Пример 2. Двум таблицам Юнга с двумя клетками $T_{[2]} = \boxed{i_1 i_2}$ и $T_{[1^2]} = \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & \\ \hline & i_2 \\ \hline \end{array}$, имеющим форму диаграмм Юнга $[2]$ и $[1^2]$, сопоставляются симметричный $\psi_s^{i_1 i_2}$ и антисимметричный $\psi_a^{i_1 i_2}$ тензоры второго ранга. Действительно, таблицам Юнга $T_{[2]}$ и $T_{[1^2]}$ соответствуют симметризаторы Юнга (4.3.14), которые в представлении (4.2.14) записываются в виде (4.2.23):

$$s(Y(T_{[2]})) = \frac{1}{2}(I_N \otimes I_N + P), \quad s(Y(T_{[1^2]})) = \frac{1}{2}(I_N \otimes I_N - P), \quad (4.4.12)$$

и действуют в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ (см. Пример 2 в разделе 4.2). Подстановка этих симметризаторов в (4.4.9) определяет симметричный и антисимметричный тензоры второго ранга с компонентами (4.2.25):

$$\psi_s^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} + \psi^{ji}), \quad \psi_a^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} - \psi^{ji}). \quad (4.4.13)$$

Действие группы $SL(N, \mathbb{C})$ на эти тензоры определяется правилом (4.2.4) и имеет вид:

$$\psi_s^{ij} \rightarrow g^i_k g^j_m \psi_s^{km}, \quad \psi_a^{ij} \rightarrow g^i_k g^j_m \psi_a^{km}, \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}).$$

Пример 3. Двум разным таблицам Юнга

$$T_1 \equiv T_{[2,1]} = \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_2 \\ \hline & i_3 \\ \hline \end{array}, \quad T_2 \equiv T'_{[2,1]} = \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_3 \\ \hline & i_2 \\ \hline \end{array}, \quad (4.4.14)$$

(имеющим одинаковую форму $\lambda = [2, 1]$) согласно (4.3.23) сопоставляются симметризаторы Юнга

$$s(Y(T_1)) = (1 - s(1, 3))(1 + s(1, 2)), \quad s(Y(T_2)) = (1 - s(1, 2))(1 + s(1, 3)), \quad (4.4.15)$$

где (j, k) обозначают транспозиции в группе перестановок, то есть $[s(j, k) \cdot \psi]^{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots} = \psi^{i_1 \dots i_k \dots i_j \dots}$. Подстановка симметризаторов (4.4.15) в (4.4.9) определяет симметризованные тензоры третьего ранга с компонентами

$$\begin{aligned} \psi_{T_1}^{i_1 i_2 i_3} &= [s(Y(T_1)) \cdot \psi]^{i_1 i_2 i_3} = \psi^{i_1 i_2 i_3} - \psi^{i_3 i_2 i_1} + \psi^{i_2 i_1 i_3} - \psi^{i_2 i_3 i_1}, \\ \psi_{T_2}^{i_1 i_2 i_3} &= [s(Y(T_2)) \cdot \psi]^{i_1 i_2 i_3} = \psi^{i_1 i_2 i_3} - \psi^{i_2 i_1 i_3} + \psi^{i_3 i_2 i_1} - \psi^{i_3 i_1 i_2}. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

- *Задача 111. Проверить формулы (4.4.16).*

Пространства тензоров ψ_{T_1} и ψ_{T_2} образуют инвариантные (по отношению к действию группы $SL(N, \mathbb{C})$) подпространства в $\mathcal{V}^{\otimes 3}$, и в соответствии с формулами (4.4.3) на этих подпространствах определены неприводимые представления $T^{(T_1)}$ и $T^{(T_2)}$. Таблицы T_1 и T_2 в (4.4.14) имеют одинаковую форму $\lambda = [2, 1]$, поэтому согласно Утверждению 4.4.1 построенные по этим таблицам представления $T^{(T_1)}$ и $T^{(T_2)}$ — эквивалентны. Это означает, что существует обратимый оператор A , который устанавливает взаимнооднозначное соответствие между пространствами тензоров ψ_{T_1} и ψ_{T_2} . Построим этот оператор явно. Так как таблицы T_1 и T_2 имеют одинаковую форму, то они должны быть связаны соотношением $T_2 = \sigma \cdot T_1$, где $\sigma \in S_3$. Элемент σ в рассматриваемом случае равен транспозиции $(2, 3)$. Тогда соответствующие симметризаторы Юнга связаны равенством (4.3.22), которое в представлении s записывается в виде

$$s(Y(T_2)) = s(2, 3) \cdot s(Y(T_1)) \cdot s(2, 3).$$

Пользуясь этим равенством, а также определением (4.4.9), мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_{T_2}^{i_1 i_2 i_3} &= [s(Y(T_2)) \cdot \psi]^{i_1 i_2 i_3} = [s(2, 3) \cdot s(Y(T_1)) \cdot s(2, 3) \cdot \psi]^{i_1 i_2 i_3} = \\ &= [s(2, 3) \cdot s(Y(T_1)) \cdot \tilde{\psi}]^{i_1 i_2 i_3} = [s(2, 3) \cdot \tilde{\psi}_{T_1}]^{i_1 i_2 i_3} = \tilde{\psi}_{T_1}^{i_1 i_3 i_2}, \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

где мы положили $\tilde{\psi} = (s(2, 3) \cdot \psi)$, то есть $\tilde{\psi}^{j_1 j_2 j_3} = \psi^{j_1 j_3 j_2}$, и в силу первой формулы из (4.4.16) мы имеем

$$\tilde{\psi}_{T_1}^{j_1 j_2 j_3} = \tilde{\psi}^{j_1 j_2 j_3} - \tilde{\psi}^{j_3 j_2 j_1} + \tilde{\psi}^{j_2 j_1 j_3} - \tilde{\psi}^{j_2 j_3 j_1} = \psi^{j_1 j_3 j_2} - \psi^{j_3 j_2 j_1} + \psi^{j_2 j_1 j_3} - \psi^{j_2 j_3 j_1}. \quad (4.4.18)$$

Из соотношений (4.4.17) следует, что тензоры (4.4.16), обладающие симметрией соответствующих таблиц (4.4.14), связаны друг с другом обратимым линейным преобразованием A :

$$\psi_{T_2}^{i_1 i_2 i_3} = (A \cdot \psi_{T_1})^{i_1 i_2 i_3} = \tilde{\psi}_{T_1}^{i_1 i_3 i_2}, \quad (4.4.19)$$

что и демонстрирует эквивалентность представлений $T^{(T_1)}$ и $T^{(T_2)}$. Отметим, что приведенное выше рассуждение, как и формулы (4.4.19), очевидным образом переносится на более сложные случаи, соответствующие таблицам Юнга с числом клеток $r > 3$.

- *Задача 112. Записать с помощью определения (4.4.9) компоненты тензора $\psi_{T_\lambda}^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ через компоненты тензора общего вида $\psi^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ для двух таблиц Юнга*

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Найти обратимый оператор A такой, что $\psi_{T'}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = (A \cdot \psi_T)^{i_1 i_2 i_3 i_4}$.

Замечание. Рассмотрим таблицу Юнга T_λ , в клетках которой расположены индексы i_a компонент (4.4.9) тензора ψ_{T_λ} ранга r (аналог левой таблицы из (4.4.10))

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline i_{a_1} & i_{a_{m+1}} & \dots & \dots & i_{a_r} \\ \hline i_{a_2} & i_{a_{m+2}} & \dots & \dots & i_{a_{r-1}} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline i_{a_m} & \dots & & & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \psi_{T_\lambda}^{i_{a_1} \dots i_{a_r}}, \quad (4.4.20)$$

и рассмотрим в ней любой из столбцов длины $k \leq m$. Пусть в этом столбце стоят индексы i_{b_1}, \dots, i_{b_k} . Тензор ψ_{T_λ} , который строится по таблице T_λ с использованием формулы (4.4.9), является антисимметричным по этим индексам. Это следует из определения (4.3.11) симметризатора Юнга $Y(T_\lambda)$, а также из формулы (4.4.9), определяющей тензор ψ_{T_λ} . Отсюда вытекает, что в случае группы $SL(N, \mathbb{C})$ тензор, построенный по таблице T_λ , имеющей столбцы длиной $k > N$, должен равняться нулю, поскольку индексы i_{b_j} , расположенные в этом столбце, пробегают значения $1, \dots, N$ и при $k > N$ у компоненты тензора ψ_{T_λ} какое-то значение индекса (из данного столбца) обязательно будет повторяться дважды в наборе $(i_{b_1}, \dots, i_{b_k})$. Итак, высота столбцов или, что то же самое, число строк в таблице (4.4.20) не может превышать N , то есть $m \leq N$. Далее, если высота m первого столбца в T_λ равна N , то такой столбец можно удалить из (4.4.20), так как для компонент соответствующего тензора мы имеем

$$\psi^{i_{a_1} \dots i_{a_m} i_{a_{m+1}} \dots i_{a_r}} = \varepsilon^{i_{a_1} \dots i_{a_N}} \phi^{i_{a_{m+1}} \dots i_{a_r}},$$

(здесь $\varepsilon^{i_{a_1} \dots i_{a_N}}$ — полностью антисимметричный тензор ранга N) и тензор ψ ранга $r > N$ эквивалентен тензору ϕ ранга $(r - N)$, представимому в виде (4.4.20) с удаленным первым столбцом. Продолжая эту процедуру для второго столбца (если его высота равна N), и так далее, мы в конце концов получаем, что при изучении неэквивалентных представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ можно ограничиться только рассмотрением таблиц (4.4.20) и соответствующих диаграмм Юнга, у которых число строк m не превышает $(N - 1)$.

Утверждение 4.4.2 *Представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, построенные по двум таблицам T_λ и $T_{\lambda'}$, имеющим форму разных диаграмм Юнга $\lambda \neq \lambda'$ с числом строк не превышающим $(N - 1)$, неэквивалентны.*

Доказательство. Если число клеток у диаграмм $\lambda \vdash r$ и $\lambda' \vdash r'$ совпадает, $r = r'$, то данное утверждение вытекает из второй части Утверждения 4.4.1. Если $r \neq r'$, то неэквивалентность представлений $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ вытекает из классификации неприводимых представлений алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$, изложенной в пункте 2 Раздела 3.4.2 (напомним, что имеется взаимнооднозначное соответствие между представлениями группы $SL(N, \mathbb{C})$ из того подкласса, который мы рассматриваем, и алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$). Согласно Замечаниям 1 и 2, сделанным после Утверждения 3.4.8, каждое неприводимое представление алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ (которое является представлением со старшим весом) характеризуется своей диаграммой Юнга, причем разные диаграммы Юнга соответствуют разным старшим весам. В силу Теоремы 3.4.2 представления с разными старшими весами неэквивалентны. ■

Замечание. Рассуждение, использованное при доказательстве Утверждения 4.4.2 в случае $r \neq r'$, можно применить и для случая $r = r'$. Здесь следует подчеркнуть,

что симметризация тензоров, соответствующая диаграмме Юнга λ и изложенная в Разделе 3.4.2, формально отличается от симметризации (соответствующей той же диаграмме λ) тензоров (4.4.9), принятой в данном разделе. В первом случае мы сначала антисимметризуем индексы в столбцах, а потом симметризуем индексы в строках диаграммы λ . Во втором случае мы наоборот сначала симметризуем индексы в строках, а потом антисимметризуем индексы в столбцах. Тем не менее можно показать, что неприводимые представления, действующие в пространствах тензоров, полученных этими двумя разными способами симметризации, эквивалентны, и данное отличие в способах симметризации не влияет на справедливость доказательства Утверждения 4.4.2.

Учитывая тот факт, что любое интересующее нас неприводимое представление группы $SL(N, \mathbb{C})$ содержится в каком-либо тензорном произведении $T^{\otimes r}$ (см. Утверждение 3.4.8), а также принимая во внимание Утверждения 4.4.1 и 4.4.2, мы приходим к следующему важному заключению.

Утверждение 4.4.3 *Каждому неприводимому представлению группы $SL(N, \mathbb{C})$ из рассматриваемого подкласса соответствует одна и только одна диаграмма Юнга λ с числом строк, не превышающем $(N - 1)$. Представление, соответствующее данной диаграмме Юнга λ с r клетками ($\lambda \vdash r$), можно рассматривать как подпредставление в $T^{\otimes r}$, которое построено с помощью симметризатора Юнга $Y(T_\lambda)$ по какой-либо (все равно какой) таблице Юнга T_λ , имеющей форму λ . Иными словами, это представление реализуется на пространстве тензоров с симметричными свойствами, определяемыми таблицей T_λ .*

Таким образом, первая задача, сформулированная в начале раздела 4.4 решена: все рассматриваемые неприводимые конечномерные представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ (и группы $SU(N)$) перечислены и, более того, дан конструктивный способ их построения.

В следующих подразделах 4.4.2 и 4.4.3 мы рассмотрим более подробно некоторые свойства неприводимых конечномерных представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ из рассматриваемого подкласса, а этот раздел закончим краткой и неполной формулировкой ответа на вопрос о разложении тензорного произведения $T^{\otimes r}$ на неприводимые представления. А именно, в представление $T^{\otimes r}$ входят все неприводимые представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, соответствующие всем диаграммам Юнга λ с r клетками (и числом строк, не превышающем $(N - 1)$), и кратность вхождения каждого из них равна количеству $f_{(\lambda)}$ стандартных таблиц Юнга формы λ (см. определение 4.3.2 в подразделе 4.3.2). Отметим, что число стандартных таблиц $f_{(\lambda)}$ также равно размерности представления группы перестановок S_r , соответствующего диаграмме Юнга λ , см. раздел 4.5. Последняя дается формулами (4.3.56) и (4.3.57), приведенными в подразделе 4.3.2. Рецепт построения явного разложения пространства $\mathcal{V}^{\otimes r}$ в сумму инвариантных подпространств $\mathcal{V}^{(\lambda)}$, каждое из которых встречается $f_{(\lambda)}$ раз, будет рассмотрен в разделах 4.5 и 4.6. Кроме этого, в $T^{\otimes r}$ при $r \geq N$ входят неприводимые представления, соответствующие диаграммам Юнга $\lambda' \vdash r'$ (у которых $r' < r$ и число строк не превышает $(N - 1)$), построенным в результате некоторой специальной процедуры из диаграмм $\lambda \vdash r$ с числом строк большим $(N - 1)$.

4.4.2 Размерности неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$

Пусть $T^{(\lambda)}$ — неприводимое конечномерное представление группы $SL(N, \mathbb{C})$ (или $SU(N)$), соответствующее диаграмме $\lambda \vdash r$ и действующее в пространстве $\mathcal{V}^{(\lambda)}$. Из результатов предыдущего подраздела следует, что размерность $\dim(\mathcal{V}^{(\lambda)})$ неприводимого представления $T^{(\lambda)}$, которую мы будем также обозначать $\dim(T^{(\lambda)})$, равна числу независимых компонент определенным образом симметризованного тензора ψ_{T_λ} ранга r (см. формулу (4.4.9)). Это число согласно Утверждению 4.4.1 должно определяться формой диаграммы Юнга λ , а не таблицей T_λ . Приведем полезную общую формулу для этой размерности

$$\dim(T^{(\lambda)}) \equiv \dim(\mathcal{V}^{(\lambda)}) = \prod_{(k,i) \in \lambda} \frac{(N+i-k)}{h_{(k,i)}}, \quad (4.4.21)$$

где в правой части произведение берется по всем клеткам в диаграмме λ с координатами (k, i) (k - номер строки, i - номер столбца) и $h_{(k,i)}$ - длина крюка, соответствующего клетке (k, i) (определение длины крюка дано в конце раздела 4.3.2). Формула для размерностей (4.4.21) называется **формулой крюков**. Из этой формулы в частности следует, что для группы $SL(N, \mathbb{C})$ не существует представлений, которые соответствуют диаграммам λ с числом строк больше N , так как для таких диаграмм мы имеем $\dim(\mathcal{V}^{(\lambda)}) = 0$. Это вполне согласуется с выводами, изложенными в Замечании к разделу 4.4.1.

Утверждение 4.4.4 Формула (4.4.21) является следствием формулы Вейля (3.5.45).

Доказательство. Для того, чтобы вывести формулу (4.4.21) из равенства (3.5.45) рассмотрим случай диаграммы Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$, имеющей m строк (то есть $\lambda_j = 0, \forall j > m$). Тогда (3.5.45) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dim(T^{(\lambda^{(\bar{m})})}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^N \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} = \\ &= \prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=i+1}^m \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \prod_{j=m+1}^N \frac{\lambda_i + j - i}{j - i} \right) = \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \right) \prod_{i=1}^m \frac{(\lambda_i + N - i)!}{(\lambda_i + m - i)!(N - i)!}. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Воспользуемся теперь формулой (4.3.60) для произведения длин всех крюков диаграммы λ , которая была получена при доказательстве Утверждения 4.3.6 в Разделе 4.3.2. Подставляя эту формулу (4.3.60) в правую часть (4.4.22), мы получаем

$$\dim(T^{(\lambda^{(\bar{m})})}) = \left(\prod_{(k,i) \in \lambda} \frac{1}{h_{(k,i)}} \right) \prod_{i=1}^m \frac{(\lambda_i + N - i)!}{(N - i)!}. \quad (4.4.23)$$

Осталось проверить тождество

$$\prod_{i=1}^m \frac{(\lambda_i + N - i)!}{(N - i)!} = \prod_{(k,i) \in \lambda} (N + i - k),$$

что легко делается, если расписать правую часть этого тождества в виде произведения по строкам диаграммы λ . ■

- **Задача 113.** Пользуясь формулой (4.4.21) проверить, что для группы $SL(N, \mathbb{C})$ не существует представлений, которые соответствуют диаграммам λ с числом строк $(N+1)$ и более (то есть, что для таких диаграмм мы имеем $\dim(\mathcal{V}^\lambda) = 0$). Пусть первый столбец в диаграмме Юнга λ имеет высоту N . Доказать, что формула (4.4.21) согласуется с соотношением (см. Замечание в Разделе 4.4.1) $\dim(\mathcal{V}^\lambda) = \dim(\mathcal{V}^{\lambda'})$, где диаграмма λ' получается из λ удалением из нее первого столбца с высотой N .
- **Задача 114.** Вывести из формулы крюков (4.4.21) формулу для размерностей неприводимых представлений группы $SU(3)$, которые соответствуют двухрядной диаграмме Юнга $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$):

$$\dim(\mathcal{V}^{([\lambda_1, \lambda_2])}) = \frac{1}{2}(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + 2) .$$

Для некоторых специальных представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ их размерности могут быть вычислены без обращения к формуле Вейля, или формуле крюков. Например, найдем размерность полностью антисимметричного представления, отвечающего диаграмме Юнга

$$\lambda = [1^r] = \left. \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} r . \tag{4.4.24}$$

Пространство этого представления, согласно (4.4.9), состоит из полностью антисимметричных тензоров ранга r , имеющих компоненты $\psi_a^{i_1 \dots i_r}$. Размерность такого пространства равна числу независимых ненулевых компонент тензора $\psi_a^{i_1 \dots i_r}$. Ясно, что все индексы (i_1, \dots, i_r) не равны друг другу и могут быть упорядочены, $i_1 < i_2 < \dots < i_r$. Исходя из этого размерность пространства тензоров $\psi_a^{i_1 \dots i_r}$ легко вычислить, и она равна

$$\dim \left(\left. \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} r \right) = \frac{N(N-1) \dots (N-r+1)}{r!} = \frac{N!}{r!(N-r)!} = C_N^r , \tag{4.4.25}$$

где в левой части, для наглядности, мы вместо $\mathcal{V}^{([1^r])}$ подставили соответствующую диаграмму. Отметим, что для $r = N - 1$ формула (4.4.25) дает $\dim([1^{N-1}]) = N$, то есть размерность представления $T^{([1^{N-1}])}$ совпадает с размерностью определяющего представления $T^{([1])}$. Это совпадение не случайно. Ниже (см. раздел 4.4.3) мы покажем, что $T^{([1^{N-1}])}$ – представление, контраградиентное к определяющему представлению $T^{([1])}$.

Аналогично вычисляется размерность полностью симметричного представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, пространство которого состоит из симметричных тензоров ранга r , представимых в виде таблицы

$$\psi_s^{i_1 \dots i_r} = \begin{array}{|c|c|c| \dots \dots \dots |c|} \hline i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \hline \end{array} . \tag{4.4.26}$$

В силу симметрии для каждого выбора $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ мы имеем единственную компоненту. Тогда

$$i_1 < i_2 + 1 < i_3 + 2 < \dots < i_r + r - 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_r , \tag{4.4.27}$$

где $a_k = i_k + k - 1$. То есть, необходимо согласно (4.4.27) упорядочить числа a_k , которые принадлежат набору $(1, 2, \dots, N + r - 1)$. Отсюда, аналогично формуле (4.4.25), мы получаем

$$\dim \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & \dots & i_r \\ \hline \end{array} \right) = C_{N+r-1}^r = \frac{(N+r-1) \cdots (N+1)N}{r!}. \quad (4.4.28)$$

- **Задача 115.** С помощью формулы крюков (4.4.21) получить размерности представлений, соответствующих диаграммам $[1^r]$ и $[r]$ (то есть диаграммам (4.4.24) и (4.4.26)), и сравнить результат с (4.4.25) и (4.4.28).

Кроме этого имеются два способа вычисления размерностей представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, которые соответствуют более общим диаграммам Юнга.

Первый способ. Этот способ связан с вложениями представлений группы $SL(N - 1, \mathbb{C})$ в представления группы $SL(N, \mathbb{C})$. Рассмотрим представление $SL(N, \mathbb{C})$, реализованное на тензорах, симметричные свойства которых соответствуют таблице λ :

$$\psi^{i_1 \dots i_r} \iff \lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline i_1 & i_{m+1} & \dots & \dots & \dots & i_r \\ \hline i_2 & i_{m+2} & \dots & \dots & i_{r-1} & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \hline i_m & \dots & & & & \\ \hline \end{array}. \quad (4.4.29)$$

В данном случае тензор $\psi^{i_1 \dots i_r}$ следует воспринимать как самостоятельный объект, обладающий свойством $\mathfrak{s}(Y(T_\lambda)) \cdot \psi = \alpha_\lambda \psi$ (коэффициент α_λ определен в (4.3.36)) и имеющий число независимых компонент, равное $\dim(T^{(\lambda)})$.

Рассмотрим подгруппу $SL(N - 1, \mathbb{C}) \subset SL(N, \mathbb{C})$, которая вложена в $SL(N, \mathbb{C})$ следующим образом:

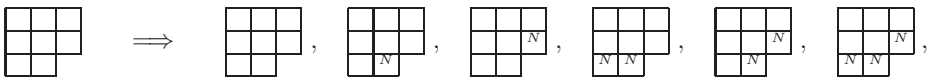
$$\left(\begin{array}{c|c} U & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right), \quad U \in SL(N - 1, \mathbb{C}).$$

Это значит, что действие элементов такой подгруппы на тензор (4.4.29) не будет затрагивать те индексы i_k у компонент $\psi^{i_1 \dots i_r}$, которые равны N . Например, если $i_r = N$, то компоненты $\psi^{a_1 \dots a_{r-1} N}$, где $a_i = 1, \dots, N - 1$ ($\forall i < r$), будут образовывать, относительно преобразований подгруппы $SL(N - 1, \mathbb{C})$, тензор $(r - 1)$ -го ранга, компоненты $\psi^{a_1 \dots a_{r-2}, N, N}$, будут образовывать тензор $(r - 2)$ -го ранга, и так далее. Разумеется, индексы, принимающие значения N , могут находиться в любом месте среди индексов i_1, \dots, i_r , а не только в конце этого набора, как в приведенных примерах. Из изложенных соображений, в частности, следует, что неприводимое представление $T_{SL(N, \mathbb{C})}^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, характеризуемое диаграммой $\lambda \vdash r$, определяет приводимое представление группы $SL(N - 1, \mathbb{C})$, которое разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $T_{SL(N-1, \mathbb{C})}^{(\lambda_a)}$ группы $SL(N - 1, \mathbb{C})$:

$$T_{SL(N, \mathbb{C})}^{(\lambda)} = \oplus_b T_{SL(N-1, \mathbb{C})}^{(\lambda_b)}. \quad (4.4.30)$$

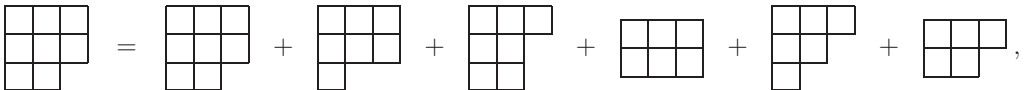
Тензоры $\tilde{\psi}^{a_1 \dots a_p}$ из пространства представления $T_{SL(N-1, \mathbb{C})}^{(\lambda_b)}$ отличаются от тензора $\psi^{i_1 \dots i_r}$ тем, что $(r - p)$ индексов в $\psi^{i_1 \dots i_r}$ положены равными N , а остальные принимают значения $1, \dots, N - 1$. При этом выделение наборов индексов, которым присваиваются значения N , должно делаться с учетом симметричных свойств тензора ψ . Например, в случае симметричного тензора $\psi_s^{ij} = \psi_s^{ji}$ компоненты ψ_s^{aN} и ψ_s^{Na} равны друг другу и задают один вектор в пространстве определяющего представления $SL(N - 1, \mathbb{C})$, поэтому определяющее представление $SL(N - 1, \mathbb{C})$ входит в симметричное представление $SL(N, \mathbb{C})$ всего один раз.

Таким образом, для выяснения того, какие представления входят в правую часть (4.4.30), нам необходимо описать все неэквивалентные способы присвоения значения N одному или нескольким индексам в $\psi^{i_1 \dots i_r}$. Это удобно сделать на языке таблиц Юнга. На этом языке присвоение какому-то индексу i_k значения N означает вписывание символа N в ту клетку исходной таблицы λ , где стоял этот индекс i_k . Прежде всего, в силу антисимметрии по столбцам, в каждом столбце получаемой таким образом таблицы символ N может присутствовать не более одного раза. Если он есть в данном столбце, то без ограничения общности можно считать, что он расположен в нижней клетке; любой другой выбор положения символа N в данном столбце эквивалентен этому, опять-таки в силу антисимметрии по столбцам. Далее, если имеется несколько столбцов одинаковой длины, то в силу симметрии по строкам можно передвинуть символ N в нижней строке этих столбцов в самое крайнее справа положение, какое только возможно. Такой алгоритм присвоения символов N клеткам диаграммы Юнга и приводит к перечислению всех неэквивалентных способов присвоения значения N индексам в $\psi^{i_1 \dots i_r}$, и тем самым к перечислению всех неприводимых представлений группы $SL(N - 1, \mathbb{C})$, фигурирующих в правой части (4.4.30). Приведем пример всех неэквивалентных способов расположения символов N в клетках диаграммы Юнга:



где имеется в виду, что в пустых клетках в левой части стоят индексы, принимающие все значения $1, \dots, N$, а в правой части — принимающие значения $1, \dots, (N - 1)$.

В соответствии со всем сказанным выше, представления группы $SL(N - 1, \mathbb{C})$, фигурирующие в правой части (4.4.30), получаются вычеркиванием клеток с символом N . Поэтому в нашем примере разложение (4.4.30) примет вид



где диаграммы в левой и правой части описывают представления групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SL(N - 1, \mathbb{C})$, соответственно.

Данный подход дает конструктивный способ нахождения разложений неприводимых представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ на неприводимые представления группы $SL(N - 1, \mathbb{C})$. В частности, из него следует связь между размерностями представлений этих групп. Действительно, согласно формуле (4.4.30) мы получаем

$$\dim(T_{SL(N, \mathbb{C})}^{(\lambda)}) = \oplus_b \dim(T_{SL(N-1, \mathbb{C})}^{(\lambda_b)}) . \tag{4.4.31}$$

Поэтому если известны размерности представлений $T_{SL(N-1, \mathbb{C})}^{(\lambda_b)}$ группы $SL(N-1, \mathbb{C})$ для всех λ_b в (4.4.31), то по формуле (4.4.31) мы вычисляем размерность представления $T_{SL(N, \mathbb{C})}^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$.

В качестве примера применения этого метода рассмотрим полностью симметричное представление (4.4.26) группы $SL(N, \mathbb{C})$. Формула (4.4.31) в этом случае дает

$$\dim_{SL(N, \mathbb{C})} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \hline \end{array} \right) = 1 + \sum_{k=1}^r \dim_{SL(N-1, \mathbb{C})} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & \dots & i_k \\ \hline \end{array} \right), \quad (4.4.32)$$

где таблица в левой части обозначает представление группы $SL(N, \mathbb{C})$, а таблицы в правой части – представления группы $SL(N-1, \mathbb{C})$. Слагаемое 1 в правой части – размерность тривиального представления $T^{(0)}$ группы $SL(N-1, \mathbb{C})$.

- **Задача 116.** Проверить формулу (4.4.32), подставив в нее размерности (4.4.28) (указание: воспользоваться индукцией). Доказать, что тождество (4.4.31) для полностью антисимметричного представления (4.4.24) имеет вид

$$\dim_{SL(N, \mathbb{C})} ([1^r]) = \dim_{SL(N-1, \mathbb{C})} ([1^{(r-1)}]) + \dim_{SL(N-1, \mathbb{C})} ([1^r]) .$$

Проверить эту формулу, подставив в нее размерности (4.4.25). Записать тождество (4.4.31) для случая диаграммы $\lambda = [2, 1^{(r-2)}]$.

Второй способ. Перейдем к обсуждению еще одного способа вычисления размерностей представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$. Рассмотрим тензорное произведение двух представлений – представления, соответствующего произвольной диаграмме Юнга $\lambda_n \vdash n$, изображенной Рис. 4.2, и определяющего представления, то есть представления, соответствующего диаграмме Юнга $[1] = \square$. Согласно правилу ветвления

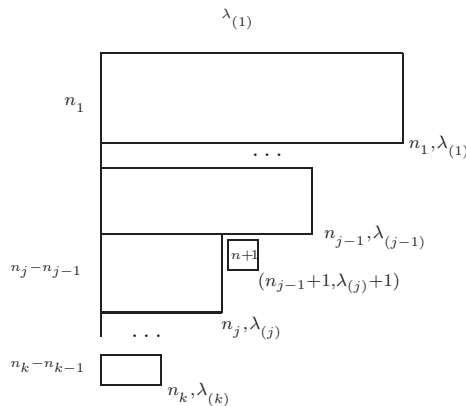


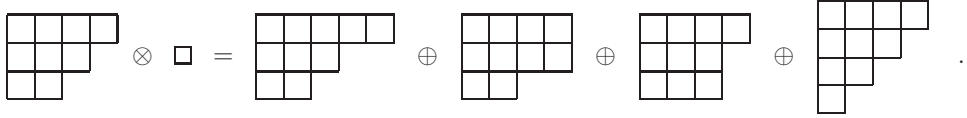
Рис. 4.2: Диаграмма Юнга $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2 - n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k - n_{k-1}}]$ с добавленной $(n+1)$ -й клеткой, имеющей координаты $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$.

представлений, которое будет обсуждаться в разделе 4.6.3 (см. Рис. 4.8), мы получаем для такого произведения представлений разложение^{4.6}

$$\lambda_n \otimes [1] = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \lambda_{n+1}(j), \quad (4.4.33)$$

^{4.6}Здесь мы предполагаем, что число n_k строк в диаграмме λ_n не превосходит $(N-1)$.

где для краткости диаграммами Юнга λ обозначены соответствующие представления $T^{(\lambda)}$, а $\lambda_{n+1}(j)$ – обозначает диаграмму, которая получается из λ_n добавлением одной клетки во внешние углы λ_n с координатами $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$, см. Рис. 4.2. Например,



Подставляя размерности представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ в правой и левой частях соотношения (4.4.33), мы получаем тождество

$$N \cdot \dim(\lambda_n) = \sum_{j=1}^{k+1} \dim(\lambda_{n+1}(j)). \tag{4.4.34}$$

В качестве примера применения формулы (4.4.34) вычислим размерность представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, которое соответствует диаграмме Юнга $[2, 1^{(r-2)}]$. Пользуясь соотношением (4.4.33), мы получаем

$$(r-1) \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \otimes \square = (r-1) \left\{ \begin{array}{c} \square \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \oplus r \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}. \tag{4.4.35}$$

Для соответствующих размерностей формула (4.4.35) дает

$$N \cdot \dim([1^{r-1}]) = \dim([2, 1^{r-2}]) + \dim([1^r]).$$

Отсюда, зная размерности (4.4.25) антисимметричных представлений, мы имеем

$$\dim([2, 1^{r-2}]) = N \dim([1^{r-1}]) - \dim([1^r]) = N C_N^{r-1} - C_N^r = \frac{(N+1)!(r-1)}{(N-r+1)!r!}. \tag{4.4.36}$$

В частности для $r = N$ мы получаем размерность $\dim([2, 1^{N-2}]) = N^2 - 1$, которая равна размерности присоединенного представления $SL(N, \mathbb{C})$ (или что то же самое, размерности алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$). В следующем подразделе мы покажем, что пространство присоединенного представления групп $SU(N)$ и $SL(N, \mathbb{C})$ действительно образовано тензорами, симметрия которых соответствует диаграмме Юнга $[2, 1^{N-2}]$.

- *Задача 117.* Проверить выражение (4.4.36) с помощью формулы крюков Вейля (4.4.21).

4.4.3 Ко-определяющее и присоединенное представления групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$

Далее, как и в предыдущих разделах, мы используем обозначение \mathcal{V} для N -мерного пространства \mathbb{C}^N определяющего представления групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$. Рассмотрим тензор $(N-1)$ -го ранга $\psi \in \mathcal{V}^{\otimes(N-1)}$, который является элементом в пространстве

неприводимого представления $SL(N, \mathbb{C})$, соответствующего диаграмме

$$\lambda = [1^{(N-1)}] = \left. \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} (N-1) .$$

Согласно (4.4.9) этот тензор обладает полной антисимметрией и его компоненты $\psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}}$ можно свернуть с компонентами полностью антисимметричного ε -тензора N -го ранга

$$\bar{\psi}_i = \varepsilon_{i i_1 i_2 \dots i_{N-1}} \psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}} . \quad (4.4.37)$$

Действие группы $SL(N, \mathbb{C})$ на $\bar{\psi}$ задается формулами (4.2.4) и имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}'_i = \varepsilon_{i i_1 i_2 \dots i_{N-1}} g^{i_1}_{k_1} \cdots g^{i_{N-1}}_{k_{N-1}} \psi^{k_1 k_2 \dots k_{N-1}} = \\ &= \varepsilon_{k i_1 i_2 \dots i_{N-1}} \psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}} (g^{-1})^k_i = \bar{\psi}_k (g^{-1})^k_i , \end{aligned} \quad (4.4.38)$$

где мы воспользовались определением детерминанта (см. раздел **I-1.2.2** первой части книги)

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} g^{i_1}_{j_1} g^{i_2}_{j_2} \cdots g^{i_n}_{j_n} = \det(g) \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} , \quad (4.4.39)$$

и равенством $\det(g) = 1$ для матриц $g \in SL(N, \mathbb{C})$. Таким образом, $\bar{\psi}_i$ преобразуются как компоненты векторов из пространства $\bar{\mathcal{V}}$ представления $SL(N, \mathbb{C})$, контраградиентного к определяющему (см. пункт **3** раздела **I-3.1.1** в первой части книги)

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = (g^{-1})^\Gamma \cdot \bar{\psi} . \quad (4.4.40)$$

Отметим, что действие алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$ на $\bar{\psi}$ можно получить из цепочки равенств (4.4.38), если подставить в (4.4.38) элементы $g \in SL(N, \mathbb{C})$, близкие к единичной матрице $g(t) = I_N + tA + \dots$, где $A \in sl(N, \mathbb{C})$ и параметр t мал. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} [A \cdot \bar{\psi}]_i &= \varepsilon_{i i_1 i_2 \dots i_{N-1}} (T_{(1)}^{\otimes(N-1)}(A))^{i_1 \dots i_{N-1}}_{k_1 \dots k_{N-1}} \psi^{k_1 k_2 \dots k_{N-1}} = \\ &= -\varepsilon_{k i_1 i_2 \dots i_{N-1}} \psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}} A^k_i = -\bar{\psi}_k A^k_i . \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.4.24) для тензорного произведения $T_{(1)}^{\otimes(N-1)}$ определяющих представлений $T_{(1)}$ алгебры $sl(N, \mathbb{C})$, а также инфинитезимальным аналогом тождества (4.4.39)

$$\varepsilon_{i_1 j_2 \dots j_n} A^{i_1}_{j_1} + \varepsilon_{j_1 i_2 \dots j_n} A^{i_2}_{j_2} + \cdots + \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-1} i_n} A^{i_n}_{j_n} = \text{Tr}(A) \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} . \quad (4.4.42)$$

Напомним, что $\text{Tr}(A) = 0$ для всех $A \in sl(N, \mathbb{C})$.

Итак, согласно (4.4.38) и (4.4.41), антисимметричный тензор $\psi \in \mathcal{V}^{\otimes(N-1)}$, соответствующий диаграмме $[1^{N-1}]$, с помощью формулы (4.4.37) отображается в ко-вектор $\bar{\psi} \in \bar{\mathcal{V}}$. Данное отображение обратимо:

$$\frac{1}{(N-1)!} \bar{\psi}_k \varepsilon^{k i_1 i_2 \dots i_{N-1}} = \psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}} , \quad (4.4.43)$$

и поэтому взаимнооднозначно. Следовательно, для группы $SL(N, \mathbb{C})$ (а соответственно и для ее вещественной формы $SU(N)$) представление $[1^{N-1}]$ и ко-определяющее (контраградиентное к определяющему) представление — эквивалентны.

- **Задача 118.** Доказать, что для $N > 2$ определяющее и контраградиентное к нему представления T и \bar{T} группы $SL(N, \mathbb{C})$ неэквивалентны. Указание: сравнить характеры $\chi_T(g) = \text{Tr}(g)$ и $\chi_{\bar{T}}(g) = \text{Tr}((g^{-1})^T)$ для этих представлений.

Если $g \in SU(N) \subset SL(N, \mathbb{C})$, то, учитывая условие унитарности $g^{-1} = g^\dagger$, контраградиентное преобразование (4.4.40) можно записать в виде

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = (g^{-1})^T \cdot \bar{\psi} = g^* \cdot \bar{\psi}.$$

То есть, ко-определяющее и сопряженное к определяющему представления группы $SU(N)$ эквивалентны, и поэтому для $SU(N)$ оказываются эквивалентными представление $[1^{N-1}]$ и представление, сопряженное определяющему (для группы $SL(N, \mathbb{C})$ это не так).

Пусть ϕ^i и $\bar{\psi}_i$ – компоненты векторов из пространств \mathcal{V} и $\bar{\mathcal{V}}$ определяющего и ко-определяющего представлений $SL(N, \mathbb{C})$, соответственно. Тогда, согласно (4.4.11) и (4.4.40), свертка $(\bar{\psi}_i \phi^i)$ инвариантна относительно действия группы $SL(N, \mathbb{C})$ и, таким образом, реализует элемент в пространстве тривиального представления $SL(N, \mathbb{C})$. То же самое имеет место и для группы $SU(N)$. Рассмотрим теперь тензорное произведение ко-определяющего представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ (или $SU(N)$), соответствующего диаграмме $[1^{(N-1)}]$, и определяющего представления, отвечающего диаграмме $[1]$. Это произведение представлений действует в пространстве тензоров ψ :

$$\psi = \psi_k^j \bar{e}_j \otimes \bar{e}^k, \quad \bar{e}^k := \frac{1}{(N-1)!} \varepsilon^{k i_1 i_2 \dots i_{N-1}} \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_{N-1}}, \quad (4.4.44)$$

где \bar{e}_j – базисные вектора в пространстве \mathcal{V} определяющего представления, а \bar{e}^k задают, согласно (4.4.43), базисные вектора в пространстве контраградиентного представления $[1^{(N-1)}]$. Произведение представлений $[1^{(N-1)}] \otimes [1]$ приводимо и мы имеем для него разложение (4.4.35) (где необходимо положить $r = N$) на два неприводимых представления $[1^N]$ и $[2, 1^{(N-2)}]$. Соответственно, пространство тензоров (4.4.44), как пространство представления $[1^{(N-1)}] \otimes [1]$, разбивается на два инвариантных подпространства представлений $[1^N]$ и $[2, 1^{(N-2)}]$. В терминах компонент тензоров (4.4.44) такое разложение на два инвариантных подпространства записывается в виде

$$\psi_k^j = \frac{1}{N} \delta_k^j (\psi_i^i) + \left(\psi_k^j - \frac{1}{N} \delta_k^j (\psi_i^i) \right), \quad (4.4.45)$$

где инвариантная свертка (ψ_i^i) – элемент пространства тривиального представления $[1^N] = \emptyset$, а бесследовый тензор второго ранга $X_k^j = (\psi_k^j - \frac{1}{N} \delta_k^j (\psi_i^i))$ является элементом пространства неприводимого представления $[2, 1^{(N-2)}]$. Указанное соответствие между разложениями (4.4.35) и (4.4.45) вытекает из вида (полученного с помощью (4.4.38)) действия группы $SL(N, \mathbb{C})$ (или $SU(N)$) на свертку (ψ_i^i) и на матрицу $\|X_k^j\|$:

$$(\psi_i^i) \rightarrow (\psi_i^i), \quad X \rightarrow g \cdot X \cdot g^{-1}.$$

Именно поэтому инвариантный вектор (ψ_i^i) ассоциируется с представлением $[1^N] = \emptyset$, а тензор $\|X_k^j\|$, который преобразуется как вектор в пространстве присоединенного представления, ассоциируется с диаграммой $[2, 1^{(N-2)}]$.

Замечание. Отметим, что представление $[2, 1^{(N-2)}]$, вложенное в $T^{\otimes N}$, где T — определяющее представление группы $SL(N, \mathbb{C})$, по определению комплексное. В то же время, в первой части книги мы определили алгебру Ли $\mathcal{A}(G)$ любой группы Ли G , как вещественное пространство, поэтому присоединенное представление группы Ли G , действующее в пространстве ее алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$, было определено нами как вещественное представление (см. раздел **I-3.1.1** первой части книги). В связи с этим, рассмотренное выше представление $[2, 1^{(N-2)}]$ группы $SL(N, \mathbb{C})$ (которое также называют присоединенным) следует понимать как представление, действующее в комплексной алгебре $sl(N, \mathbb{C})$, связь которой с вещественной алгеброй Ли группы $SL(N, \mathbb{C})$ обсуждалась в разделе **I-2.2.7** первой части книги. В случае же группы $SU(N)$ представление $[2, 1^{(N-2)}]$ — это комплексифицированное присоединенное представление, то есть представление, действующее не в вещественной алгебре $su(N)$, а в ее комплексификации $sl(N, \mathbb{C})$.

4.4.4 Кварки, $SU(3)$ -симметрия и ее нарушение

Классическое изложение материала этого раздела дано в лекциях Н.Н. Боголюбова [11]; см. также книгу [12].

Заряды и квантовые числа кварков.

Пусть T_f — определяющее представление группы $SU(3)$, действующее в трехмерном комплексном пространстве \mathcal{V}_f с базисом \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$). В физике элементарных частиц, при рассмотрении унитарной симметрии $SU(3)$, координатам $\psi^i = (\vec{\psi})^i$ ($i = 1, 2, 3$) вектора $\vec{\psi} = \psi^i \vec{e}_i \in \mathcal{V}_f$ сопоставляются три кварка u , d и s :

$$(\psi^1, \psi^2, \psi^3) = (u, d, s). \quad (4.4.46)$$

То есть, волновые функции кварков ψ^i , помимо спиновых индексов (о которых мы будем говорить ниже), имеют дополнительный индекс i и преобразуются как координаты векторов в пространстве определяющего представления группы $SU(3)$, отвечающего таблице Юнга \square (см. раздел **4.4.1**). Обозначим это определяющее представление как **3**. Три степени свободы кварков u , d и s называются ароматами, а группа $SU(3)$, которая перемешивает эти степени свободы, называется группой ароматов и обозначается $SU(3)_f$ (здесь f — первая буква в слове "flavour"). Кваркам u , d и s приписываются заряды $+2/3$, $-1/3$ и $-1/3$, соответственно. Другими словами, в пространстве \mathcal{V}_f определен оператор заряда Q :

$$Q \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_k Q^i{}_k, \quad (Q \cdot \vec{\psi})^i = Q^i{}_k \psi^k, \quad (4.4.47)$$

матрица которого в выбранном базисе, который соответствует (4.4.46), диагональна

$$\|Q^i{}_k\| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right). \quad (4.4.48)$$

Здесь λ_3 и λ_8 — картановские образующие алгебры Ли $su(3)_f$ группы $SU(3)_f$. Все восемь образующих алгебры Ли $su(3)_f$ записываются в виде (см. пункт **5** раздела

I-2.2.9 первой части книги)

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (4.4.49)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4.50)$$

и называются *матрицами Гелл-Манна*. Представим оператор Q как линейную комбинацию

$$Q = I_3 + Y/2 \quad (4.4.51)$$

третьей компоненты I_3 , оператора вектора изоспина $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ и оператора гиперзаряда Y :

$$(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8, \quad (4.4.52)$$

где элементы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_8 \in su(3)$ – определены в (4.4.49), (4.4.50). Таким образом, матрицы операторов I_3 и Y , действующих в пространстве определяющего представления \mathcal{V}_f , в выбранном базисе равны:

$$\|(I_3)^i{}_k\| = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|Y^i{}_k\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.4.53)$$

Матрица Q , заданная в (4.4.48), – элемент алгебры Ли $su(3)_f$ группы $SU(3)_f$, поэтому в представлении $(T_f)^{\otimes r}$ действие Q на координаты тензора r -го ранга $\psi \in \mathcal{V}_f^{\otimes r}$ определяется стандартным правилом

$$\begin{aligned} (T_f^{\otimes r}(Q) \psi)^{i_1 i_2 \dots i_r} &= \left(\sum_{m=1}^r \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_{m-1}}^{i_{m-1}} Q_{k_m}^{i_m} \delta_{k_{m+1}}^{i_{m+1}} \dots \delta_{k_r}^{i_r} \right) \psi^{k_1 k_2 \dots k_r} \Leftrightarrow \\ T_f^{\otimes r}(Q) \psi &= \left(Q \otimes I^{\otimes(r-1)} + I \otimes Q \otimes I^{\otimes(r-2)} + \dots + I^{\otimes(r-1)} \otimes Q \right) \psi, \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

где $\|Q^i{}_k\|$ – матрица (4.4.48) и I – единичный оператор в \mathcal{V}_f . Операторы I_3 и Y (4.4.53) – также элементы алгебры Ли $su(3)_f$ группы $SU(3)_f$, поэтому их действие на $\psi \in \mathcal{V}_f^{\otimes k}$ определяется по тем же правилам (4.4.54), что и действие оператора Q . Из формул (4.4.54) следует, что заряд Q , гиперзаряд Y и третья проекция оператора изоспина I_3 являются аддитивными характеристиками.

Антикваркам $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3)$ сопоставляются координаты сопряженного вектора $\bar{\psi}_j = \varepsilon_{jik} \psi_a^{ik}$ (сравните с общей формулой (4.4.37)), где ψ_a^{ik} – антисимметричный тензор (4.4.13), который ассоциируется с диаграммой Юнга $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline k \\ \hline \end{array}$ и принадлежит пространству контраградиентного представления $\bar{\mathbf{3}}$. Пользуясь (4.4.42) и (4.4.54) мы получаем

$$(Q \cdot \bar{\psi})_k = \varepsilon_{kij} (Q \cdot \psi_a)^{ij} = \varepsilon_{kij} (Q^i{}_\ell \psi_a^{\ell j} + Q^j{}_\ell \psi_a^{i \ell}) = -\bar{\psi}_j Q^j{}_k, \quad (4.4.55)$$

то есть заряды антикварков $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ противоположны зарядам кварков u, d, s , как и должно быть. Аналогично, гиперзаряды Y и значения I_3 для антикварков противоположны гиперзарядам Y и значениям I_3 для соответствующих кварков.

Более общее утверждение заключается в том, что аддитивные заряды $Z \in su(3)_f$ составных частиц из мультиплета^{4.7} представления T противоположны зарядам составных частиц из мультиплета представления \bar{T} , контраградиентного к представлению T . Это сразу же вытекает из формулы $\bar{T}(Z) = -T(Z)^\top$.

Отметим, что гиперзаряд Y записывается в виде суммы двух аддитивных характеристик, а именно, барионного числа \mathcal{B} и странности \mathcal{S}

$$Y = \mathcal{B} + \mathcal{S} . \tag{4.4.56}$$

Матрицы операторов \mathcal{B} и \mathcal{S} в определяющем представлении и в выбранном базисе (4.4.46) имеют вид

$$\|\mathcal{B}^i_k\| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \|\mathcal{S}^i_k\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{4.4.57}$$

Таким образом, кваркам u, d приписывается странность $\mathcal{S} = 0$, кварку s — странность $\mathcal{S} = -1$, а барионное число у всех кварков одинаково и равно $1/3$. С учетом представления (4.4.56) формула для заряда (4.4.51) записывается следующим образом

$$Q = I_3 + (\mathcal{B} + \mathcal{S})/2 , \tag{4.4.58}$$

и называется *формулой Гелл-Манна–Нишидзимы*. Заметим, что операторы \mathcal{B} и \mathcal{S} не являются элементами алгебры Ли группы $SU(3)_f$. Однако, группу $SU(3)_f$ можно расширить до группы $U(3)_f = SU(3)_f \otimes U(1)_B$, где в качестве образующей абелевой подгруппы $U(1)_B$ выбирается оператор барионного числа \mathcal{B} . После этого формула (4.4.54) может быть применена и для операторов \mathcal{B} и \mathcal{S} , что объясняет аддитивность барионного числа и странности с теоретико-групповой точки зрения.

Замечание 1. Так как формула (4.4.51), (4.4.58) справедлива для кварков u, d и s , то она в силу аддитивности всех входящих в нее характеристик справедлива и для всех частиц, построенных из этих кварков. Ее нетрудно обобщить^{4.8} на случай тяжелых кварков c, b и t с электрическими зарядами $(Q(c), Q(b), Q(t)) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Замечание 2. Каждый сорт кварка u, d и s в (4.4.46) имеет еще цветовые и спиновые степени свободы. Мы будем говорить об этом более подробно ниже, в разделе, посвященном барионам.

В свободном состоянии кварки в природе не наблюдаются. Частицы, участвующие в сильных взаимодействиях — *адроны* — являются составными. В нерелятивистской кварковой модели они представляют собой связанные состояния либо кварка и антикварка (мезоны), либо трех кварков (барионы)^{4.9}. Такие особенности связаны

^{4.7}Здесь мультиплетом мы называем вектор (в компонентной записи) в пространстве представления T группы $SU(3)$. Например, вектор в пространстве определяющего представления называется триплетом, а в пространстве присоединенного представления — октетом.

^{4.8}Конечно, ни о какой, даже приближенной, симметрии $SU(6)_f$ не может быть и речи; см. обсуждение в конце этого подраздела.

^{4.9}Имеются ввиду так называемые валентные кварки.

со свойством **невыветания цвета** (конфайнмента), см. ниже в разделе “Барионы”. В последнее время, впрочем, обнаружены адроны, обладающие более сложной структурой, например, пентакварки (связанные состояния четырех кварков и одного антикварка).

Псевдоскалярные мезоны

Далее мы будем в основном говорить только о частицах, построенных из кварков u, d, s и их антикварков. Мезоны – это связанные состояния одного кварка и одного антикварка. В зависимости от спина J и пространственной четности P , говорят о скалярных (спин 0, четность положительная) и псевдоскалярных (спин 0, четность отрицательная) мезонах, векторных и псевдовекторных мезонах (спин 1, четность отрицательная и положительная, соответственно), тензорных мезонах (спин 2) и т.д. При этом используется запись $J^P = 0^\pm, 1^\pm, 2^\pm$. В соответствии с указанным выше кварковым составом, поля мезонов преобразуются по неприводимым представлениям $SU(3)_f$, возникающим при разложении прямого произведения кваркового и антикваркового представлений (сравните с общей формулой (4.4.45), записанной для случая группы $SU(N)$):

$$\psi^k \bar{\psi}_j = \frac{1}{3} \delta_j^k (\psi^i \bar{\psi}_i) + \left(\psi^k \bar{\psi}_j - \frac{1}{3} \delta_j^k (\psi^i \bar{\psi}_i) \right). \quad (4.4.59)$$

Размерность пространства тензоров с компонентами (4.4.59) равна $3^2 = 9$. В терминах диаграмм Юнга разложение (4.4.59) представляется в виде

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

где в правой части первая диаграмма соответствует полностью антисимметричному тензору 3-го ранга, или мезонному синглету $(\psi_i \bar{\psi}^i)$ (размерность этого представления очевидно равна 1), а вторая диаграмма соответствует бесследовому тензору

$$M_j^k = \left(\psi^k \bar{\psi}_j - \frac{1}{3} \delta_j^k (\psi^i \bar{\psi}_i) \right), \quad (4.4.60)$$

или мезонному октету (как мы показали в разделе 4.4.3, это — присоединенное представление группы $SU(3)_f$ и его размерность равна $3^2 - 1 = 8$).

Легчайшими адронами являются псевдоскалярные мезоны $(\pi^0, \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta)$. Они образуют октет относительно $SU(3)_f$. В отличие от мезонов с другими спином и четностью, девятый псевдоскалярный η' -мезон, синглетный относительно $SU(3)_f$, имеет массу, значительно превышающую массы мезонов указанного октета, и в грубом приближении его можно не учитывать. В частности, мы не будем вдаваться в тонкости, связанные с $\eta - \eta'$ -смешиванием.

Бесследовая матрица (4.4.60) сопоставляется октету псевдоскалярных мезонов следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \text{Tr}(M) = 0, \quad (4.4.61)$$

что соответствует кварковому составу

$$\begin{aligned} \pi^+ &= u \bar{d}, \quad \pi^- = d \bar{u}, \quad K^+ = u \bar{s}, \quad K^- = s \bar{u}, \quad K^0 = d \bar{s}, \quad \bar{K}^0 = s \bar{d}, \\ \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u \bar{u} - d \bar{d}), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u \bar{u} + d \bar{d} - 2s \bar{s}). \end{aligned} \quad (4.4.62)$$

В дополнение к этому списку существует девятый мезон $\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u \bar{u} + d \bar{d} + s \bar{s})$, о котором мы уже упоминали и который соответствует инвариантному вектору $(\psi_i \bar{\psi}^i)$ пространства одномерного (тривиального) представления $SU(3)_f$. Отметим, что в полевом описании мезонов, компоненты M^k_j матрицы (4.4.61) являются полями и зависят от координат $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ пространства-времени. В теории поля мы имеем $\pi^- = (\pi^+)^*$, $K^- = (K^+)^*$, $\bar{K}^0 = (K^0)^*$, и поля в (4.4.61) нормированы так, что $SU(3)_f$ -инвариантный кинетический член $\frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_\mu M \cdot \partial^\mu M)$, где^{4.10} $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = \eta_{\mu\nu}\partial^\nu$, дает стандартные (канонические) кинетические члены для полей мезонов

$$\frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_\mu M \cdot \partial^\mu M) = \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 + \dots + \frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta.$$

Таким образом, кинетический член для вещественного (эрмитова) поля, такого как π^0 или η , традиционно содержит коэффициент $1/2$; в случае комплексного поля этого множителя нет. Аналогичное требование будет определять численные нормировочные коэффициенты в разложениях (типа (4.4.61)) других адронных $SU(3)_f$ -мультиплетов по независимым адронным полям.

В случае точной $SU(3)_f$ -симметрии массы адронов, входящих в один и тот же $SU(3)_f$ -мультиплет, должны быть одинаковы. В природе это не совсем верно. Различие в массах легких адронов с одними и теми же спином и четностью, но содержащими только u - и d -кварки с одной стороны, и имеющими в своем составе s -кварк с другой стороны^{4.11}, связано с тем, что s -кварк значительно тяжелее u - и d -кварков:

$$m_u \simeq 2.2 \text{ МэВ}, \quad m_d \simeq 4.7 \text{ МэВ}, \quad m_s \simeq 96 \text{ МэВ}. \quad (4.4.63)$$

Тем не менее, все эти массы невелики по сравнению с характерным адронным масштабом, который традиционно связывают с массой ρ -мезона, $m_\rho = 770 \text{ МэВ}$. Именно в силу последнего обстоятельства приближенная $SU(3)_f$ -симметрия является неплохим нулевым приближением.

Для получения связи между массами адронов из одного $SU(3)_f$ -мультиплета полезно рассмотреть нарушающую $SU(3)_f$ часть массового члена в эффективном адронном лагранжиане. Она возникает из-за массового слагаемого в кварковом лагранжиане

$$L_q = -m^i_j \bar{\psi}_i \psi^j, \quad (4.4.64)$$

где $m^i_j = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. Удобно воспринимать m^i_j как некоторое вспомогательное поле (“шпурин”), преобразующееся по представлению $\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}}$ (напомним, что мы используем $\mathbf{3}$ и $\bar{\mathbf{3}}$ для обозначения определяющего и сопряженного к нему представлений группы $SU(3)_f$), вакуумное среднее которого фиксировано и равно $\text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. При такой интерпретации массовый член (4.4.64) инвариантен относительно $SU(3)_f$, поэтому должны быть инвариантны и массовые члены в эффективном адронном лагранжиане.

^{4.10}Мы работаем с метрикой $\|\eta_{\mu\nu}\| = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, см. раздел 6.4.3.

^{4.11}Важное исключение составляет как раз псевдоскалярный η' -мезон.

В отличие от всех остальных легких адронов, наличие масс у октета псевдоскалярных мезонов целиком обусловлено ненулевыми массами кварков, так что массовый член в эффективном мезонном лагранжиане пропорционален m^i_j .

Эта особенность связана с тем, что в пределе нулевых масс кварков $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ (его называют киральным пределом) лагранжиан квантовой хромодинамики (КХД) — теории сильных взаимодействий, описывающей, в частности, легкие адроны^{4.12} — обладает расширенной симметрией $SU(3)_L \times SU(3)_R$, где $SU(3)_L$ действует только на левые компоненты кварковых полей и не затрагивает правые компоненты, а $SU(3)_R$, наоборот, действует только на правые компоненты кварковых полей. Симметрия $SU(3)_L \times SU(3)_R$ спонтанно нарушена в природе до “диагональной” $SU(3)_f$, той самой, которая обсуждается в этом разделе и одинаково (в соответствии с определяющим представлением) действует на левые и правые компоненты кварковых полей. В соответствии с теоремой Голдстоуна, в результате спонтанного нарушения симметрии имеется 8 **безмассовых намбу–голдстоуновских бозонов**, по числу нарушенных генераторов, $\dim(SU(3)_L \times SU(3)_R) - \dim(SU(3)_f) = 8$. Эти бозоны являются псевдоскалярами и образуют октет по отношению к $SU(3)_f$. Это и есть октет (4.4.61). В реальности кварки имеют массы, но они невелики, и КХД близка к киральному пределу. Массовый член кварков (4.4.64) **явно** нарушает симметрию $SU(3)_L \times SU(3)_R$, поэтому псевдоскалярные мезоны имеют массы (в этом случае их называют псевдо–намбу–голдстоуновскими бозонами). В главном порядке по массам кварков массовый член в лагранжиане псевдо–намбу–голдстоуновских бозонов пропорционален этим массам.

Наивно, лагранжиан КХД инвариантен еще и относительно $U(1)_B \times U(1)_A$, где $U(1)_B$ генерируется барионным зарядом \mathcal{B} (см. (4.4.57)) и осуществляет фазовые вращения одновременно всех кварковых полей $\psi^j \rightarrow e^{i\varphi/3}\psi^j$, а $U(1)_A$ осуществляет вращения левых и правых компонент кварковых полей с противоположными фазами, $\psi^j_L \rightarrow e^{i\varphi}\psi^j_L$, $\psi^j_R \rightarrow e^{-i\varphi}\psi^j_R$. При этом симметрия $U(1)_A$ также спонтанно нарушена, и можно было бы ожидать существования девятого легкого псевдо–намбу–голдстоуновского бозона. В квантовой теории, однако, симметрии $U(1)_A$ нет вообще из-за так называемой аксиальной аномалии. Это и приводит к тому, что масса девятого псевдоскалярного бозона η' велика. Более подробное изложение данного вопроса см. в книге [21], гл. 19.

Итак, массовый член для псевдоскалярных мезонов пропорционален массовой матрице кварков m^i_j . При этом он должен быть инвариантен относительно $SU(3)_f$, если m^i_j считать шпурионом. Единственный инвариант, линейный по m^i_j и квадратичный по полям мезонов M^i_j , имеет вид

$$L_M = -M^i_j \mu^j_k M^k_i = -\text{Tr}(M\mu M), \quad (4.4.65)$$

где

$$\mu^j_k = B \cdot m^j_k,$$

и B — константа, не зависящая от аромата. Подставляя сюда матрицу (4.4.61) и фиксируя вакуумное среднее (нарушающее $SU(3)_f$ -симметрию) шпурионного поля в виде диагональной матрицы $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \equiv \text{diag}(\mu_u, \mu_d, \mu_s) = B \cdot \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, мы получаем массовый член в виде

$$-L_M = \sum_{i < j} (\mu_i + \mu_j) M^i_j M^j_i - L_M^{(\pi^0 \eta)}, \quad (4.4.66)$$

^{4.12}Лагранжиан КХД в киральном пределе имеет вид

$$L_{QCD} m_i=0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) + i \sum_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu D_\mu \psi^j,$$

где выписан только индекс аромата j ; $G_{\mu\nu}$ — напряженность глюонного поля; D_μ — ковариантная производная, включающая в себя глюонное поле; остальные обозначения стандартны. В реальном случае массивных кварков к этому лагранжиану добавляется массовый член (4.4.64).

где $L_M^{(\pi^0 \eta)} = -\sum_i \mu_i (M^i)^2$ и поэтому

$$-L_M^{(\pi^0 \eta)} = \frac{1}{2} \left[(\mu_u + \mu_d)(\pi^0)^2 + \frac{1}{3} (\mu_u + \mu_d + 4\mu_s) \eta^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} (\mu_u - \mu_d) \pi^0 \eta \right]. \quad (4.4.67)$$

Первое слагаемое в (4.4.66) имеет вид

$$\sum_{i < j} (\mu_i + \mu_j) M^i_j M^j_i = (\mu_u + \mu_d) \pi^- \pi^+ + (\mu_u + \mu_s) K^- K^+ + (\mu_d + \mu_s) \bar{K}^0 K^0,$$

что соответствует квадратам масс

$$m_{\pi^\pm}^2 = \mu_u + \mu_d, \quad m_{K^\pm}^2 = \mu_u + \mu_s, \quad m_{K^0}^2 = \mu_d + \mu_s. \quad (4.4.68)$$

Слагаемое (4.4.67) описывает массы π^0 и η . При этом последний член в (4.4.67) приводит к $(\pi^0 - \eta)$ -смешиванию: определенные массы имеют не поля π^0 и η , введенные в (4.4.61), а их линейные комбинации. В приближении

$$\mu_s \gg \mu_u, \mu_d \quad (4.4.69)$$

(которое хорошо выполняется, см. (4.4.63)), а также пренебрегая $(\pi^0 - \eta)$ -смешиванием^{4.13} (можно показать, что в приближении (4.4.69) смешивание действительно мало), мы получаем

$$m_{\pi^0}^2 = \mu_u + \mu_d, \quad m_\eta^2 = \frac{4}{3} \mu_s. \quad (4.4.70)$$

В этом же приближении $m_{K^\pm}^2 = m_{K^0}^2 = \mu_s$, откуда следует массовое соотношение

$$m_\eta^2 = \frac{4}{3} m_K^2, \quad (4.4.71)$$

которое выполняется с хорошей точностью ($m_\pi = 135-140$ МэВ, $m_K = 494-498$ МэВ, $m_\eta = 547,5$ МэВ).

- *Задача 119.* Найти поправку к первой формуле в (4.4.70), связанную с $(\pi^0 - \eta)$ -смешиванием. Оценить ее величину, воспользовавшись численными значениями (4.4.63).
- *Задача 120.* Найти поправку порядка m_π^2 к массовому соотношению (4.4.71) с учетом $(\pi^0 - \eta)$ -смешивания. Найти ее относительный вклад, воспользовавшись численными значениями (4.4.63).

Изотопическая симметрия

Массы u - и d -кварков очень малы в адронном масштабе масс, который имеет порядок $m_\rho = 770$ МэВ. Поэтому при изучении свойств адронов, за исключением масс π -мезонов, массами m_u и m_d можно пренебречь. В этом приближении группа симметрии $SU(3)_f$ нарушается массой s -кварка не полностью: остается ненарушенной

^{4.13}Отметим, что приближение (4.4.69) и пренебрежение $(\pi^0 - \eta)$ -смешиванием восстанавливает изотопическую симметрию относительно подгруппы $SU(2)_I \subset SU(3)_f$; см. следующий пункт "Изотопическая симметрия".

изоспиновая подгруппа $SU(2)_I$, которая вкладывается в $SU(3)_f$ следующим образом (в соответствии с определением (4.4.52) образующих группы $SU(2)_I$)

$$\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in SU(3)_f, \quad g \in SU(2)_I. \quad (4.4.72)$$

В этом приближении массы адронов в одном изоспиновом мультиплете равны между собой; имеется связь и между амплитудами взаимодействий адронов, обусловленная изотопической симметрией. Все эти свойства действительно выполняются с хорошей точностью, в отличие от соотношений ненарушенной $SU(3)_f$, которые выполняются с худшей точностью.

Отметим, что массы нейтральных и заряженных пионов равны друг другу в рамках киральной теории, см. первые формулы (4.4.68), (4.4.70). Хотя это равенство обусловлено случайными причинами, оно показывает, что массы пионов не нарушают изотопическую симметрию $SU(2)_I$. Отметим еще, что изотопическая симметрия нарушается не только массами u - и d -кварков, которые не равны друг другу, но и электромагнитными взаимодействиями. Поэтому изучение эффектов, связанных с нарушением изотопической симметрии, представляет собой весьма сложную задачу. Мы в дальнейшем будем считать изотопическую симметрию точной. В частности, мы будем считать, что массовый член кварков, нарушающий $SU(3)_f$ -симметрию, имеет вид (4.4.64) с

$$m^i_j = \text{diag}(0, 0, m_s).$$

Векторные мезоны.

Вернемся к рассмотрению связанных состояний кварка и антикварка $V^k_j = \psi^k \bar{\psi}_j$, но теперь рассмотрим не псевдоскалярные, как раньше, а векторные мезоны. В этом случае полезно считать, что $\text{Tr}(V) = V^k_k \neq 0$. Тогда в пространстве тензоров с координатами (4.4.59) реализуется приводимое представление $SU(3)_f$, а матрицу V^k_j можно связать с девяткой (нонетом) векторных мезонов^{4.14}

$$V^k_j = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{2}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{2}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \phi \end{pmatrix}, \quad (4.4.73)$$

с массами (в единицах МэВ)

$$\begin{aligned} m_{\rho^\pm} &= 766 \pm 2, & m_{\rho^0} &= 770 \pm 1, & m_{\omega^0} &= 782, 7 \pm 0, 3, \\ m_{K^{*\pm}} &= 892, 2 \pm 0, 5, & m_{K^{*0}} &= 896, 1 \pm 0, 3, & m_{\phi^0} &= 1019, 7 \pm 0, 3, \end{aligned} \quad (4.4.74)$$

и кварковым составом

$$\begin{aligned} \rho^+ &= u \bar{d}, & \rho^- &= d \bar{u}, & \rho^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u \bar{u} - d \bar{d}), & \omega &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u \bar{u} + d \bar{d}), \\ K^{*+} &= u \bar{s}, & K^{*-} &= s \bar{u}, & K^{*0} &= d \bar{s}, & \bar{K}^{*0} &= s \bar{d}, & \phi &= s \bar{s}. \end{aligned} \quad (4.4.75)$$

^{4.14}На языке разложения $3 \times \bar{3} = 8 + 1$, см. (4.4.59), такая ситуация имеет место, если в пределе ненарушенной $SU(3)_f$ -симметрии октет и синглет имеют равные или очень близкие массы. Тогда нарушение $SU(3)_f$ приводит к смешиванию синглета и 8-й компоненты октета, и при максимальном смешивании мы имеем (4.4.73).

Отличие случая векторных мезонов (4.4.73) от случая псевдоскалярных мезонов (4.4.61) заключается в том, что масса ω^0 -мезона (аналог η -мезона в (4.4.61)) практически совпадает с массой ρ -мезона (аналог π -мезона в (4.4.61)). Так как разница в массах адронов (за исключением псевдоскалярного η' -мезона) обусловлена наличием в их кварковом составе более тяжелого s -кварка, то из равенства $m_{\omega^0} \approx m_\rho$ и отсутствия s -кварка в составе ρ -мезона следует отсутствие s -кварка в составе ω^0 -мезона, как это и учтено в формулах (4.4.73) и (4.4.75).

Выберем массовый член в лагранжиане псевдовекторных мезонов в виде^{4.15}

$$\begin{aligned} -L_V &= \frac{m_v^2}{2} V_k^j V_j^k + \Delta V_3^k V_k^3 \\ &= m_v^2 \rho^+ \rho^- + \frac{m_v^2}{2} ((\rho^0)^2 + \omega^2) + (m_v^2 + \Delta)(K^{*+} K^{*-} + K^{*0} \bar{K}^{*0}) + \left(\frac{m_v^2}{2} + \Delta\right) \phi^2. \end{aligned} \quad (4.4.76)$$

Здесь m_v^2 — массовый параметр, не нарушающий $SU(3)_f$ -симметрию, Δ — параметр нарушения $SU(3)_f$ -симметрии; мы воспользовались тем, что единственным инвариантным массовым членом в эффективном лагранжиане векторных мезонов (мы вновь считаем матрицу масс кварков шпурионом), в конечном итоге нарушающим $SU(3)_f$ -симметрию, служит $\text{const} \cdot \text{Tr}(VmV)$. В нашем приближении мы имеем

$$m_{ij}^i = \text{diag}(0, 0, m_s) \propto \text{diag}(0, 0, \Delta), \quad (4.4.77)$$

что и дает (4.4.76). В результате мы получаем следующие соотношения для квадратов масс псевдовекторных мезонов:

$$m_{\rho^0}^2 = m_{\rho^\pm}^2 = m_v^2, \quad m_{\omega^0}^2 = m_v^2, \quad m_{K^{*0}}^2 = m_{K^{*\pm}}^2 = m_v^2 + \Delta, \quad m_\phi^2 = m_v^2 + 2\Delta,$$

из которых следует массовое соотношение

$$\Delta = m_{K^*}^2 - m_\rho^2 = m_\phi^2 - m_{K^*}^2.$$

С учетом значений (4.4.74) это соотношение хорошо выполняется.

Барионы.

Кроме мезонов (4.4.60) из кварков могут быть составлены барионы. В нерелятивистской кварковой модели барионы — это связанные состояния трех кварков, и поле бариона строится как произведение полей трех кварков. Таким образом, поля барионов преобразуются по неприводимым представлениям, возникающим при прямом произведении трех кварковых представлений (трех определяющих представлений T_f группы $SU(3)_f$). Для этого произведения мы имеем

$$\square \otimes \square \otimes \square = \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (4.4.78)$$

где в правой части первая диаграмма соответствует синглету, вторая — двум октетам (размерность каждого из этих двух представлений, как было показано выше, равна 8), а последняя — декуплету (в соответствии с (4.4.28) с $N = 3$ и $r = 3$, размерность этого представления равна 10, что согласуется с тем, что размерность представления в левой части (4.4.78) равна $3^3 = 27$, а в правой мы имеем $1 + 2 \times 8 + 10$).

^{4.15}Здесь предполагается, что в пределе ненарушенной $SU(3)_f$ -симметрии, $\Delta \rightarrow 0$, массы октета и синглета равны. Такое предположение обосновывается полученными ниже результатами для масс мезонов, а также другими результатами, подтверждающими кварковый состав (4.4.75).

- *Задача 121.* Найти все неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ группы $SU(3)_f$, которые могли бы соответствовать пентакваркам — связанным состояниям одного антикварка и четырех кварков

$$\square \otimes \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square = \sum_{\lambda=6} T^{(\lambda)} .$$

Вычислить по формуле крюков (4.4.21) размерности этих представлений $T^{(\lambda)}$.

В действительности не все перечисленные в (4.4.78) возможности реализуются в природе для барионов. Например, легкого синглетного бариона не существует. Это связано с Ферми-статистикой кварков и наличием у них спина и цвета.

Поясним более подробно, почему отсутствует синглетный барион. В нерелятивистской кварковой модели наличие у кварков спина и цвета учитывается тем, что кварки (4.4.46) являются представлением более широкой группы $SU(3)_f \otimes SU(3)_c \otimes SU(2)$, где $SU(2)$ — группа спина, а $SU(3)_c$ — группа цвета (c — первая буква в слове "colour"; этот индекс используется для того, чтобы отличать цветовую группу $SU(3)_c$ от группы ароматов $SU(3)_f$). Пусть \mathcal{V}_f , \mathcal{V}_c и \mathcal{V}_2 — соответственно пространства определяющих представлений T_f , T_c и $T^{(\frac{1}{2})}$ групп $SU(3)_f$, $SU(3)_c$ и $SU(2)$, и пусть \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) — базис в \mathcal{V}_f , \vec{e}_A ($A = 1, 2, 3$) — базис в \mathcal{V}_c и \vec{e}^α ($\alpha = 1, 2$) — базис в \mathcal{V}_2 . Кварковые поля ψ принимают значения в пространстве $\mathcal{V}_f \times \mathcal{V}_c \times \mathcal{V}_2$:

$$\psi = \psi_\alpha^{iA} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_A \otimes \vec{e}^\alpha \in \mathcal{V}_f \times \mathcal{V}_c \times \mathcal{V}_2, \quad (\psi_\alpha^{1A}, \psi_\alpha^{2A}, \psi_\alpha^{3A}) = (u_\alpha^A, d_\alpha^A, s_\alpha^A). \quad (4.4.79)$$

Таким образом, каждый сорт кварка u , d и s имеет еще цветовые ($A = 1, 2, 3$) и спиновые ($\alpha = 1, 2$) степени свободы и преобразуется по определяющему представлению цветовой группы $SU(3)_c$ и определяющему представлению группы спина $SU(2)$. Последнее означает, что кварки имеют спин $1/2$ и являются фермионами.

Важным физическим требованием является то, что наблюдаемые частицы должны быть синглетами (тривиальными представлениями) цветовой группы $SU(3)_c$. Это свойство — невылетание цвета (конфайнмент) — до сих пор не имеет надежного теоретического объяснения, но заведомо выполняется в природе. Антикварки преобразуются по представлению $SU(3)_c$, контраградиентному к определяющему, поэтому кварк-антикварковая пара может находиться в синглетном по цвету, "бесцветном" состоянии $\psi^{iA} \bar{\psi}_{jA}$. Именно так устроены мезоны. Тот факт, что в состав барионов входят три кварка, а не какое-то иное их количество, напрямую связан с тем, что цветовая группа $SU(N)_c$ имеет $N = 3$: тензорное произведение трех определяющих представлений группы $SU(3)_c$ содержит цветовой синглет — полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Иначе говоря, цветовая структура волновой функции бариона всегда имеет фиксированный вид $\psi^{iA} \cdot \psi^{jB} \cdot \psi^{kC} \sim \epsilon^{ABC}$.

Кроме того, Ферми-статистика кварков означает, что поля кварков ψ_α^{iA} антикоммутируют друг с другом: $\psi_\alpha^{iA} \psi_\beta^{kB} = -\psi_\beta^{kB} \psi_\alpha^{iA}$. Поэтому поля барионов (связанных состояний трех кварков) представляются в виде линейных комбинаций произведений $\psi_\alpha^{iA} \cdot \psi_\beta^{jB} \cdot \psi_\gamma^{kC}$, которые антисимметризованы по всем перестановкам троек индексов (i, A, α), (j, B, β) и (k, C, γ). Здесь мы не учитываем зависимость кварковых полей ψ_α^{iA} от пространственных координат $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$, так как кварки, составляющие низшие по массам барионы, имеют нулевой орбитальный угловой момент (рассматривается именно этот случай), и мы можем считать, что барионная волновая

функция $\psi_\alpha^{iA}(\vec{r}_1) \cdot \psi_\beta^{jB}(\vec{r}_2) \cdot \psi_\gamma^{kC}(\vec{r}_3)$ полностью симметрична по всем перестановкам векторов \vec{r}_1 , \vec{r}_2 и \vec{r}_3 . Принимая во внимание все вышесказанное, представление для $SU(3)_f$ -синглетного бариона в (4.4.78) записывается в терминах полей ψ_α^{iA} следующим образом

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ABC} \psi_\alpha^{iA} \psi_\beta^{jB} \psi_\gamma^{kC}.$$

Здесь свертка с антисимметричным тензором ε_{ABC} необходима для того, чтобы компоненты $S_{\alpha\beta\gamma}$ были синглетами по $SU(3)_c$. Аналогично, свертка с ε_{ijk} обеспечивает то, что $S_{\alpha\beta\gamma}$ является синглетом и по группе $SU(3)_f$. В результате, в силу антикоммутируемости полей ψ_α^{iA} друг с другом (Ферми-статистика), тензор $S_{\alpha\beta\gamma}$ должен быть антисимметричен по всем перестановкам индексов α, β и γ . Но эти индексы могут принимать только два значения (1, 2), поэтому $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Это и означает, что синглетный барион не реализуется в природе.

Рассмотрим теперь представление для поля барионного декуплета в (4.4.78), которое соответствует таблице Юнга $\begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline \end{array}$. Согласно общей формуле (4.4.9) поля $SU(3)_f$ -декуплета записываются в терминах ψ_α^{iA} следующим образом

$$D_{\alpha\beta\gamma}^{(i_1 i_2 i_3)} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ABC} \sum_{\sigma \in S_3} \psi_\alpha^{i_{\sigma(1)} A} \psi_\beta^{i_{\sigma(2)} B} \psi_\gamma^{i_{\sigma(3)} C}, \quad (4.4.80)$$

где $\sum_{\sigma \in S_3}$ обозначает сумму по всем перестановкам σ трех индексов (i_1, i_2, i_3) . С учетом Ферми-статистики тензор с компонентами (4.4.80) полностью симметричен по индексам (α, β, γ) . Тензоры такого типа образуют (см. раздел 2.3.2) полностью симметричное неприводимое представление $T^{(3/2)}$ спиновой группы $SU(2)$, вложенное в прямое произведение $(T^{(1/2)})^{\otimes 3}$. Представление $T^{(3/2)}$ группы $SU(2)$ соответствует таблице $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ и характеризуется спином $j = 3/2$. Итак, *легкие барионы со спином 3/2 образуют $SU(3)$ -декуплет и наоборот, барионы $SU(3)$ -декуплета могут иметь только спин 3/2.*

Компоненты тензора (4.4.80) сопоставляются барионному декуплету следующим образом.

1) Представление с нулевой странностью $s = 0$ (без s -кварка) и изоспином $I = 3/2$. Это соответствует случаю, когда все индексы i, j, k в (4.4.80) принимают только два значения 1, 2 (изоспиновая подгруппа $SU(2)_I$ вкладывается в $SU(3)_f$ так, как показано в (4.4.72)). Опуская цветовые и спиновые индексы, а также нормировочные множители, запишем

$$\Delta^{++} = D^{(111)} = uuu, \quad \Delta^- = D^{(222)} = ddd, \quad \Delta^+ = D^{(112)} = uud, \quad \Delta^0 = D^{(122)} = udd, \quad (4.4.81)$$

где используются стандартные обозначения для частиц $\Delta^+, \Delta^-, \Delta^0, \Delta^{++}$, в которых в качестве верхних индексов указаны их электрические заряды (напомним, что заряды u -, d - и s -кварков равны $+2/3$, $-1/3$ и $-1/3$, соответственно).

2) Представление со странностью $s = -1$ (с одним s -кварком, см. (4.4.57)) и изоспином $I = 1$. Это соответствует случаю, когда один из индексов i, j, k в (4.4.80) равен 3, а остальные принимают только два значения 1, 2:

$$\Sigma^{*+} = D^{(113)} = uus, \quad \Sigma^{*-} = D^{(223)} = dds, \quad \Sigma^{*0} = D^{(123)} = uds. \quad (4.4.82)$$

3) Представление со странностью $s = -2$ (двумя s -кварками) и изоспином $I = 1/2$:

$$\Xi^{*0} = D^{(133)} = uss, \quad \Xi^{*-} = D^{(233)} = dss \quad (4.4.83)$$

4) Представление со странностью $s = -3$ (триа s -кварками) и изоспином $I = 0$:

$$\Omega^- = D^{333} = sss. \quad (4.4.84)$$

Отметим, что барион Ω^- с указанным в (4.4.84) кварковым составом был бы запрещен, если бы кварки (фермионы) не имели цвета. Действительно, при отсутствии цветовых степеней свободы волновая функция $s_\alpha \cdot s_\beta \cdot s_\gamma$ для частиц с Ферми-статистикой полностью антисимметрична по перестановкам индексов α, β, γ . Поскольку спиновый индекс принимает только два значения, то он одинаков по крайней мере у двух s -кварков, что дает $s_\alpha \cdot s_\beta \cdot s_\gamma = 0$. Именно существование таких легких барионов с симметричной по ароматам волновой функцией (барионов Δ^{++} , Δ^- и Ω^-) стало основанием для введения Боголюбовым, Струминским и Тавхелидзе и независимо Ханом и Намбу дополнительного квантового числа – цвета кварков.

Обсудим теперь два барионных октета в правой части (4.4.78), которые сопоставляются двум эквивалентным представлениям $\square \square$ группы $SU(3)_f$. Пространства этих двух представлений – это пространства специальным образом симметризованных тензоров третьего ранга, которые строятся с помощью двух симметризаторов Юнга по двум таблицам Юнга T_1 и T_2 , изображенным в (4.4.14). Явные формулы для компонент соответствующих симметризованных тензоров были получены в (4.4.16). Компоненты тензора ψ_{T_1} (4.4.16) в терминах кварковых степеней свободы (4.4.79) имеют вид (мы сразу же рассматриваем синглетное состояние по цвету и учитываем Ферми-статистику для кварков)

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta\gamma}^{i_1 i_2 i_3} &= \varepsilon_{ABC} (\psi_{T_1}^{i_1 i_2 i_3})_{\alpha\beta\gamma}^{ABC} = \varepsilon_{ABC} (\psi^{i_1 i_2 i_3} - \psi^{i_3 i_2 i_1} + \psi^{i_2 i_1 i_3} - \psi^{i_2 i_3 i_1})_{\alpha\beta\gamma}^{ABC} = \\ &= \varepsilon_{ABC} (\psi_\alpha^{i_1 A} \psi_\beta^{i_2 B} \psi_\gamma^{i_3 C} - \psi_\alpha^{i_3 A} \psi_\beta^{i_2 B} \psi_\gamma^{i_1 C} + \psi_\alpha^{i_2 A} \psi_\beta^{i_1 B} \psi_\gamma^{i_3 C} - \psi_\alpha^{i_2 A} \psi_\beta^{i_3 B} \psi_\gamma^{i_1 C}) = \\ &= 2\varepsilon_{ABC} (\psi_\beta^{i_2 A} \psi_{[\alpha}^{i_1 B} \psi_{\gamma]}^{i_3 C} + \psi_\alpha^{i_2 A} \psi_{[\beta}^{i_1 B} \psi_{\gamma]}^{i_3 C}) \end{aligned} \quad (4.4.85)$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по спинорным индексам. Так как антисимметричные по спинорным индексам состояния $\psi_{[\alpha\beta]}$ соответствуют тривиальному представлению группы $SU(2)$ со спином $j = 0$, то каждая барионная компонента $B^{i_1 i_2 i_3}$ в (4.4.85) соответствует определяющему представлению спиновой группы $SU(2)$ со спином $j = 1/2$ (см. Задачу 47). Итак, *барионный октет имеет спин $1/2$, и наоборот, легкие барионы (связанные состояния трех кварков) со спином $1/2$ с необходимостью образуют $SU(3)_f$ -октет*. Выпишем (с точностью до коэффициента 2, который возник в (4.4.85)), учитывая антисимметрию $B_{\alpha\beta\gamma}^{i_1 i_2 i_3} = -B_{\alpha\beta\gamma}^{i_3 i_2 i_1}$, кварковый состав барионного октета (4.4.85)

$$\begin{aligned} p &= B_{\alpha\beta\gamma}^{112} = \varepsilon_{ABC} (u_\beta^A u_\alpha^B d_\gamma^C + u_\alpha^A u_\beta^B d_\gamma^C), \quad n = B_{\alpha\beta\gamma}^{122} = \varepsilon_{ABC} (d_\beta^A u_\alpha^B d_\gamma^C + d_\alpha^A u_\beta^B d_\gamma^C), \\ \Sigma^+ &= B_{\alpha\beta\gamma}^{113} = \varepsilon_{ABC} (u_\beta^A u_\alpha^B s_\gamma^C + u_\alpha^A u_\beta^B s_\gamma^C), \quad \Sigma^- = B_{\alpha\beta\gamma}^{223} = \varepsilon_{ABC} (d_\beta^A d_\alpha^B s_\gamma^C + d_\alpha^A d_\beta^B s_\gamma^C), \\ \Sigma^0 &= B_{\alpha\beta\gamma}^{123} + B_{\alpha\beta\gamma}^{213} = \varepsilon_{ABC} (d_\beta^A u_\alpha^B s_\gamma^C + d_\alpha^A u_\beta^B s_\gamma^C) + (u \leftrightarrow d), \\ \Lambda^0 &= B_{\alpha\beta\gamma}^{132} = (B_{\alpha\beta\gamma}^{123} - B_{\alpha\beta\gamma}^{213}) = \varepsilon_{ABC} (s_\beta^A u_\alpha^B d_\gamma^C + s_\alpha^A u_\beta^B d_\gamma^C), \\ \Xi^0 &= B_{\alpha\beta\gamma}^{133} = \varepsilon_{ABC} (s_\beta^A u_\alpha^B s_\gamma^C + s_\alpha^A u_\beta^B s_\gamma^C), \quad \Xi^- = B_{\alpha\beta\gamma}^{233} = \varepsilon_{ABC} (s_\beta^A d_\alpha^B s_\gamma^C + s_\alpha^A d_\beta^B s_\gamma^C). \end{aligned} \quad (4.4.86)$$

Отметим, что компонента Λ^0 – антисимметрична относительно перестановки $u \leftrightarrow d$ и поэтому является синглетом по изоспиновой подгруппе $SU(2)_I \subset SU(3)_f$, в то время как компонента Σ^0 (симметрична относительно замены $u \leftrightarrow d$) вместе с компонентами Σ^+ и Σ^- образует изотриплет.

Наконец, покажем, что второй барионный октет в правой части (4.4.78), который сопоставляется второму эквивалентному представлению группы $SU(3)_f$, действующему в пространстве тензоров ψ_{T_2} (4.4.16), на самом деле идентичен барионному октету (4.4.85). Действительно, в терминах кварковых переменных (4.4.79) компоненты волновых функций второго октета имеют вид

$$\tilde{B}_{\alpha\beta\gamma}^{i_1 i_2 i_3} = \varepsilon_{ABC} (\psi_{T_2}^{i_1 i_2 i_3})_{\alpha\beta\gamma}^{ABC} = 2\varepsilon_{ABC} (\psi_{[\alpha}^{i_1 A} \psi_{\beta]}^{i_2 B} \psi_{\gamma}^{i_3 C} + \psi_{\alpha}^{i_3 A} \psi_{[\beta}^{i_2 B} \psi_{\gamma]}^{i_1 C}). \quad (4.4.87)$$

Сравнивая компоненты (4.4.85) и (4.4.87) мы получаем $B_{\alpha\beta\gamma}^{i_1 i_2 i_3} = \tilde{B}_{\alpha\beta\gamma}^{i_1 i_2 i_3}$, то есть результирующие полные волновые функции барионов сводятся друг к другу переобозначением индексов. Таким образом, два барионных октета в правой части (4.4.78), которые соответствуют стандартным таблицам Юнга

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_3 \\ \hline i_2 & \\ \hline \end{array},$$

на самом деле неразличимы по своему кварковому составу и спину (напомним, что представления группы $SU(3)_f$, построенные по таблицам T_1 и T_2 являются эквивалентными; см. Утверждение 4.4.1). Это согласуется с тем, что в природе существует только один октет легких барионов.

Для барионов, состоящих из кварков u, d и s , также можно получить массовые формулы, аналогичные мезонным массовым формулам. Учитывая тот факт, что тензор (4.4.85) антисимметричен по индексам i_1, i_3 , введем эквивалентное представление для октета

$$B_j^k = \varepsilon_{jlm} B^{lkm}.$$

В терминах независимых барионных переменных эта матрица имеет вид

$$B_j^k = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad B_k^k = 0. \quad (4.4.88)$$

В отличие от матрицы мезонов (4.4.61), которая является самосопряженной, эрмитово сопряжение (4.4.88) дает новую матрицу, определяющую октет антибарионов

$$\bar{B}_j^k = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^+ \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_k^k = 0. \quad (4.4.89)$$

- *Задача 122.* Вывести представление (4.4.88). Указание: учесть, что инвариантный кинетический член для барионного октета, $\bar{B}_k^j i\gamma^\mu \partial_\mu B_j^k$, должен быть равен сумме кинетических членов каждого из барионов, $\bar{p} i\gamma^\mu \partial_\mu p + \dots + \bar{\Xi}^0 i\gamma^\mu \partial_\mu \Xi^0$.

В силу того, что барионы являются фермионами, массовый член в барионном лагранжиане линеен по массам и имеет вид

$$-L_{B,8} = m_{B,8} \bar{B}_j^k B^j_k + \alpha \bar{B}_3^k B^3_k + \beta \bar{B}_k^3 B^k_3. \quad (4.4.90)$$

Здесь первый член $SU(3)_f$ -симметричен, второе и третье слагаемое в терминах массовой матрицы кварков представляют собой независимые инварианты $C_1 \text{Tr}(\bar{B}mB)$ и $C_2 \text{Tr}(\bar{B}Bm)$, соответственно. При учете (4.4.77) эти инварианты принимают вид второго и третьего членов в (4.4.90), которые нарушают $SU(3)_f$ -симметрию до изотопической $SU(2)_I$. Подставляя (4.4.88) и (4.4.89) в массовый член (4.4.90), мы получаем

$$\begin{aligned} m_p &= m_n = m_{B,8} + \beta, \\ m_{\Sigma^\pm} &= m_{\Sigma^0} = m_{B,8}, \quad m_\Lambda = m_{B,8} + \frac{2}{3}(\alpha + \beta), \\ m_{\Xi^-} &= m_{\Xi^0} = m_{B,8} + \alpha, \end{aligned} \quad (4.4.91)$$

откуда, исключая параметры α и β , мы выводим соотношение для масс барионов

$$3m_\Lambda + m_\Sigma = 2m_N + 2m_\Xi \quad (N = p, n), \quad (4.4.92)$$

которое называется *массовой формулой Гелл-Манна–Окубо*. Формула (4.4.92) выполняется с хорошей точностью, что можно проверить, подставив туда значения

$$m_N \approx 939 \text{ МэВ}, \quad m_\Lambda \approx 1116 \text{ МэВ}, \quad m_\Sigma \approx 1193 \text{ МэВ}, \quad m_\Xi \approx 1319 \text{ МэВ}, \quad (4.4.93)$$

(массы трех частиц Σ^0, Σ^\pm лежат в интервале 1189.3 – 1197.5 МэВ, а массы двух частиц Ξ^-, Ξ^0 – в интервале 1314.9 – 1321.7 МэВ).

Для получения массовых формул для декуплета барионов запишем еще раз выражения для компонент симметричного тензора $D^{(ijk)}$ в терминах барионных перемешанных, см. (4.4.81) – (4.4.84) (цветовые и спиновые индексы не выписываем):

$$\begin{aligned} D^{(111)} &= \Delta^{++}, \quad D^{(112)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+, \quad D^{(122)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0, \quad D^{(222)} = \Delta^-, \\ D^{(113)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+}, \quad D^{(223)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-}, \quad D^{(123)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^{*+}, \\ D^{(133)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0}, \quad D^{(233)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-}, \quad D^{(333)} = \Omega^-. \end{aligned} \quad (4.4.94)$$

Как и раньше, численные коэффициенты здесь выбраны так, чтобы инвариантный кинетический член $i\bar{D}_{(ijk)}\gamma^\mu\partial_\mu D^{(ijk)}$ был равен сумме стандартных (канонических) кинетических членов для каждого из барионов $\Delta^{++}, \dots, \Omega^-$.

С учетом полной симметрии тензора $D^{(ijk)}$, единственным инвариантным массовым членом, нарушающим $SU(3)_f$ -симметрию, служит $\text{const} \cdot (m^j_i \bar{D}_{(jkl)} D^{(ikl)})$. Поэтому массовый член в лагранжиане декуплета имеет вид

$$-L_{B,10} = m_{B,10} \bar{D}_{(ijk)} D^{(ijk)} + h_0 m^j_i \bar{D}_{(jkl)} D^{(ikl)} = m_{B,10} \bar{D}_{(ijk)} D^{(ijk)} + \delta_{10} \bar{D}_{(3kl)} D^{(3kl)},$$

где в правой части первое слагаемое симметрично относительно $SU(3)_f$, а второе – нарушает симметрию $SU(3)_f$ до симметрии относительно изотопической подгруппы $SU(2)_I$. Отсюда и из (4.4.94) следуют простые массовые формулы

$$m_{\Sigma^*} - m_\Delta = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_\Omega - m_{\Xi^*}, \quad (4.4.95)$$

которые выполняются с очень хорошей точностью (около 1%), если подставить в них экспериментальные значения масс частиц декуплета:

$$m_{\Delta} \approx 1232 \text{ МэВ}, \quad m_{\Sigma^*} \approx 1385 \text{ МэВ}, \quad m_{\Xi^*} \approx 1530 \text{ МэВ}, \quad m_{\Omega} \approx 1672 \text{ МэВ}. \quad (4.4.96)$$

Подчеркнем, что Ω^- -барион был обнаружен после теоретического предсказания как самого факта его существования, как последнего члена декуплета, так и его массы на основании (4.4.95). Это было выдающимся успехом кварковой модели адронов.

- **Задача 123.** Показать, что значения изоспина I и гиперзаряда $Y = B + S$ для октета барионов равны:

$$\begin{aligned} p, n : \quad I = 1/2, \quad Y = 1; \quad \Lambda : \quad I = 0, \quad Y = 0; \\ \Sigma : \quad I = 1, \quad Y = 0; \quad \Xi : \quad I = 1/2, \quad Y = -1; \end{aligned} \quad (4.4.97)$$

а для декуплета барионов равны:

$$\begin{aligned} \Delta : \quad I = 3/2, \quad Y = 1; \quad \Sigma^* : \quad I = 1, \quad Y = 0; \\ \Xi^* : \quad I = 1/2, \quad Y = -1; \quad \Omega : \quad I = 0, \quad Y = -2. \end{aligned} \quad (4.4.98)$$

Проверить, что массы барионов (4.4.93) и (4.4.96) с очень хорошей точностью даются массовой формулой Окубо

$$m = m_{\lambda} + h_1 Y + h_2 \left(I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right), \quad (4.4.99)$$

где $h_1 \approx -196.3 \text{ МэВ}$, $h_2 \approx 38.5 \text{ МэВ}$, а параметр m_{λ} зависит от представления, то есть для октета $m_{\lambda} = m_8$ и декуплета $m_{\lambda} = m_{10}$ мы имеем

$$m_8 \approx 1116 \text{ МэВ}, \quad m_{10} \approx 1308 \text{ МэВ}. \quad (4.4.100)$$

В заключение этого раздела отметим, что попытки включить в рассмотренную схему тяжелые кварки c, b, t не увенчались успехом. Это связано с тем, что массы c, b, t превышают не только массы u, d, s , но и адронный масштаб масс порядка $m_p = 770 \text{ МэВ}$, и говорить о приближенной $SU(6)_f$ симметрии в физике адронов некорректно. Тем не менее, представление о том, что любые кварк-антикварковые пары образуют мезоны, а любые три кварка — барионы (имеются ввиду валентные кварки и антикварки), не подвергается сомнению. Здесь следует отметить, что мезоны и барионы, содержащие самый тяжелый t -кварк, не реализуются в природе. Это происходит из-за того, что t -кварк распадается быстрее, чем успевают образоваться мезоны и барионы, содержащие t кварк (время адронизации t кварка превышает время его жизни).

4.5 Представления группы перестановок II. Теория Юнга–Фробениуса

Напомним, что данная Глава 4 посвящена решению двух задач: (1) построению всех конечномерных неприводимых комплексных представлений $T^{(\alpha)}$ группы $SU(N)$ и

алгебр $sl(N, \mathbb{C})$ and $su(N)$ (и всех представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ из рассматриваемого подкласса) как подпредставлений в прямом произведении $T^{\otimes r}$ определяющих представлений T ; (2) явное разложение представления $T^{\otimes r}$ на неприводимые конечномерные представления $T^{(\alpha)}$. Первую задачу мы уже решили: все неприводимые представления строятся с помощью симметризаторов Юнга (*примитивных* идемпотентов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$) и с учетом эквивалентности представлений взаимнооднозначно перечисляются диаграммами Юнга, которые к тому же дают конструктивный способ построения пространств представлений как пространств тензоров с определенными свойствами симметрии, см. раздел 4.4.1 (другой метод, связанный с построением представлений со старшим весом, был изложен в разделе 3.4). Вторая задача (которая представляет собой весьма частный случай задачи о разложении Клебша–Гордана для представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SU(N)$) будет решена, если из всего множества примитивных идемпотентов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$ (симметризаторов Юнга, соответствующих разным таблицам Юнга), будет выделен *полный набор взаимно ортогональных* примитивных идемпотентов.

Итак, все, что было сказано выше (см. разделы 4.2, 4.4.1) приводит нас к задаче о построении набора идемпотентов e_α ($\alpha = 1, \dots, s$) в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_r]$, обладающих свойствами (4.2.29), которые мы выпишем здесь снова:

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \quad \text{идемпотентность и ортогональность,} \quad (4.5.1a)$$

$$e = \sum_{\alpha=1}^s e_\alpha, \quad \text{полнота,} \quad (4.5.1b)$$

где e — единичный элемент в $\mathbb{C}[S_r]$. Так как речь идет о *неприводимых* представлениях группы $SL(N, \mathbb{C})$, то искомые идемпотенты $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_r]$ должны быть *примитивными*, то есть неразложимыми далее в сумму таких же идемпотентов (см. Определение 4.2.1). Если известен набор примитивных идемпотентов $\{e_\alpha\} \in \mathbb{C}[S_r]$, удовлетворяющих (4.5.1), то, используя представление \mathfrak{s} алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$, заданное формулой (4.2.6), мы строим полный набор взаимно ортогональных проекторов $\mathfrak{s}(e_\alpha)$, действующих в $\mathcal{V}^{\otimes r}$. С помощью этого набора пространство $\mathcal{V}^{\otimes r}$ тензорного произведения r определяющих представлений T группы $SL(N, \mathbb{C})$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathcal{V}^{\otimes r} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha},$$

где $\mathcal{V}_{\alpha} = \mathfrak{s}(e_{\alpha}) \cdot \mathcal{V}^{\otimes r}$ — инвариантные (по отношению к действию представления $T^{\otimes r}$) подпространства неприводимых конечномерных представлений $T^{(\alpha)}$, вложенных в $T^{\otimes r}$. Таким образом, задача разложения тензорного произведения $T^{\otimes r}$ определяющих представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ на неприводимые представления $T^{(\alpha)}$ (среди этих неприводимых представлений могут встречаться эквивалентные) сводится к задаче о нахождении системы примитивных идемпотентов в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_r]$ со свойствами (4.5.1b).

Отметим, что наличие полной системы примитивных взаимно ортогональных идемпотентов не есть специфика только групповой алгебры $\mathbb{C}[S_r]$. В следующем разделе мы обсудим достаточно обширный класс ассоциативных конечномерных алгебр \mathcal{A} над полем \mathbb{C} с единичным элементом e , в которых возможно выделение полной

системы примитивных взаимно ортогональных идемпотентов. Мы покажем, что наличие такой полной системы идемпотентов дает конструктивный способ построения всех неприводимых представлений для \mathcal{A} .

4.5.1 Идемпотенты и неприводимые представления ассоциативных алгебр. Разложения Пирса

Пусть \mathcal{A} — ассоциативная алгебра над полем \mathbb{C} с единичным элементом e . В этом подразделе мы покажем, что полная система взаимно ортогональных примитивных идемпотентов e_α строится для достаточно обширного подкласса таких алгебр. Для конечномерных алгебр \mathcal{A} число s примитивных идемпотентов конечно.

Часть материала данного подраздела в несколько иной форме изложена в книге [26].

Любая ассоциативная алгебра \mathcal{A} действует на себя (на свое векторное пространство) левыми (правыми) умножениями. Возникающие при этом представления алгебры \mathcal{A} называются *левыми (правыми) регулярными*. Будем полагать, что \mathcal{A} — *конечномерная* алгебра и ее левое (правое) регулярное представление *вполне приводимо*, то есть пространство левого (правого) регулярного представления алгебры \mathcal{A} (векторное пространство алгебры \mathcal{A}) разлагается в прямую сумму ее неприводимых представлений $T^{(\lambda)}$ (индекс λ перечисляет эти представления). В качестве примера такой алгебры \mathcal{A} приведем групповую алгебру $\mathbb{C}[G]$ любой конечной группы G . Эта алгебра ассоциативна, конечномерна и по определению имеет единичный элемент. Все неприводимые неэквивалентные представления $T^{(\lambda)}$ конечномерной ассоциативной алгебры $\mathbb{C}[G]$ содержатся в ее регулярном представлении и кратность вхождения $T^{(\lambda)}$ в регулярное представление равна размерности $T^{(\lambda)}$ (см. раздел I-3.6.2 в первой части книги; см. также формулу (4.3.63)).

Рассмотрим случай левого регулярного представления алгебры \mathcal{A} с указанными выше свойствами; рассмотрение правого регулярного представления проводится аналогично. Так как регулярное представление алгебры \mathcal{A} вполне приводимо, то алгебра \mathcal{A} , как векторное пространство, разлагается в прямую сумму своих *простых* левых идеалов

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_\alpha, \quad (4.5.2)$$

то есть в прямую сумму инвариантных подпространств \mathcal{L}_α таких, что $\mathcal{A} \cdot \mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}_\alpha$. Левые идеалы \mathcal{L}_α называются *простыми*, если они не содержат нетривиальных левых инвариантных подпространств (левых идеалов); другими словами \mathcal{L}_α — пространства неприводимых представлений алгебры \mathcal{A} . Из формулы (4.5.2) следует, что любой элемент $a \in \mathcal{A}$ представляется в виде суммы $a = \sum_\alpha a_\alpha$, где $a_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$. В частности для единичного элемента $e \in \mathcal{A}$ мы имеем разложение (4.5.1b):

$$e = \sum_{\alpha=1}^s e_\alpha, \quad e_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha. \quad (4.5.3)$$

Так как $e_\beta \in \mathcal{L}_\beta$, то произведение $e_\alpha \cdot e_\beta$ в силу левой инвариантности \mathcal{L}_β также должно принадлежать \mathcal{L}_β , а из соотношения

$$e_\alpha = e_\alpha \cdot e = \sum_{\beta} e_\alpha \cdot e_\beta \in \mathcal{L}_\alpha,$$

следует, что $e_\alpha \cdot e_\beta = 0$ для всех $\alpha \neq \beta$ и $e_\alpha \cdot e_\alpha = e_\alpha$, то есть мы имеем (4.5.1a):

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha . \quad (4.5.4)$$

Таким образом, возникшие в разложении (4.5.3) элементы e_α являются взаимно ортогональными идемпотентами, причем идемпотенты e_α – примитивные, так как \mathcal{L}_α – **простые** левые идеалы, и согласно (4.5.3) образуют полную систему. Заметим, что любой элемент из \mathcal{L}_α можно представить в виде $a \cdot e_\alpha$, где $a \in \mathcal{A}$, то есть весь левый идеал \mathcal{L}_α порождается элементом e_α : $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{A} \cdot e_\alpha$, иначе левый идеал \mathcal{L}_α был бы не простым. Отсюда в соответствии с соотношениями (4.5.3) и (4.5.4) следует, что рассматриваемая алгебра \mathcal{A} всегда разлагается в сумму ее левых идеалов $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{A} \cdot e_\alpha$, порожденных полной системой взаимно ортогональных примитивных идемпотентов e_α . С другой стороны любой полный набор примитивных взаимно ортогональных идемпотентов $e_\alpha \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих (4.5.3) и (4.5.4), может быть использован для разложения алгебры \mathcal{A} в сумму ее левых \mathcal{L}_α , или правых \mathcal{R}_α , идеалов

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{A} \cdot e_\alpha = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_\alpha , \quad \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s e_\alpha \cdot \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{R}_\alpha , \quad (4.5.5)$$

см. обсуждение после формулы (4.3.34).

Итак, любое разложение алгебры \mathcal{A} в прямую сумму своих простых идеалов связано с некоторым полным набором примитивных идемпотентов, так что эта прямая сумма строится по формулам (4.5.5). Еще раз подчеркнем, что каждое подпространство $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{A} \cdot e_\alpha$ (или $\mathcal{R}_\alpha = e_\alpha \cdot \mathcal{A}$) образует инвариантное подпространство в \mathcal{A} по отношению к левому (или, соответственно, правому) действию алгебры \mathcal{A} . То есть, для любого $v \in \mathcal{L}_\alpha$ и любого $v' \in \mathcal{R}_\alpha$ мы имеем

$$a \cdot v \in \mathcal{L}_\alpha , \quad v' \cdot a \in \mathcal{R}_\alpha , \quad \forall a \in \mathcal{A} . \quad (4.5.6)$$

Левые (и правые) идеалы \mathcal{L}_α (и \mathcal{R}_α) в алгебре \mathcal{A} образуют подалгебры в \mathcal{A} (это вытекает из (4.5.6)).

- **Задача 124.** Рассмотреть ассоциативную алгебру $\bar{\mathcal{B}}_+$ верхнетреугольных матриц с базисом, состоящим из матричных единиц $\{e_{ij}\}$ ($1 \leq i < j \leq n$) и единичной матрицы I_n . Показать, что регулярные представления алгебры $\bar{\mathcal{B}}_+$ приводимы, но не вполне приводимы. Выяснить структуру левых и правых идеалов в $\bar{\mathcal{B}}_+$. Показать, что в этой алгебре нет идемпотентов кроме тривиального I_n .

Первое и второе разложения в (4.5.5) называются соответственно *левым* и *правым* разложениями Пирса. Применяя одновременно левое и правое разложение Пирса, мы получаем *двустороннее разложение Пирса*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha,\beta=1}^s e_\alpha \mathcal{A} e_\beta = \bigoplus_{\alpha,\beta=1}^s \mathcal{A}_{\alpha,\beta} , \quad \mathcal{A}_{\alpha,\beta} = e_\alpha \mathcal{A} e_\beta . \quad (4.5.7)$$

Здесь линейные пространства $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ уже не являются, вообще говоря, ни левыми, ни правыми идеалами в \mathcal{A} . Вместо этого для произведения элементов пространств $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$

имеют место соотношения, напоминающие соотношения для умножения матричных единиц

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathcal{A}_{\gamma,\kappa} = \delta_{\beta,\gamma} \mathcal{A}_{\alpha,\kappa} . \quad (4.5.8)$$

Подействуем произвольным элементом $a \in \mathcal{A}$ слева на идемпотент e_β и применим к произведению $a \cdot e_\beta$ правое разложение Пирса. В результате получим формулу

$$a \cdot e_\beta = \sum_{\alpha} e_{\alpha} a_{\alpha\beta} , \quad (4.5.9)$$

где $a_{\alpha\beta} = e_{\alpha} \cdot a \cdot e_{\beta} \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{A}$ — коэффициенты двустороннего разложения Пирса (4.5.7) элемента a . Формулу (4.5.9) можно интерпретировать как правило коммутирования элемента a с идемпотентом e_β . Из этой формулы сразу же, с учетом ассоциативности \mathcal{A} , следует матричное правило умножения коэффициентов двустороннего разложения Пирса

$$(a \cdot b)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} , \quad \forall a, b \in \mathcal{A} . \quad (4.5.10)$$

С учетом свойства линейности $(a + b)_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$ мы видим, что коэффициенты двустороннего разложения Пирса ведут себя как элементы матричной алгебры.

Формулы (4.5.8), (4.5.9) и (4.5.10) можно использовать для построения представлений ассоциативных конечномерных алгебр \mathcal{A} специального типа (см. ниже Замечание 3). Пусть алгебра \mathcal{A} такова, что в ней существует полный набор примитивных взаимно ортогональных идемпотентов e_{α} , для которых подпространства $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ из двустороннего разложения Пирса — одномерны и нульмерны^{4.16}. Выберем нормировку базисных элементов $e_{\alpha,\beta}$ в $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ так, чтобы в соответствии с (4.5.8) выполнялись соотношения

$$e_{\alpha,\beta} \cdot e_{\gamma,\kappa} = \delta_{\beta\gamma} e_{\alpha,\kappa} . \quad (4.5.11)$$

Для такой алгебры \mathcal{A} любой ее элемент a представляется в виде $a = \sum a_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}$, где $a_{\alpha,\beta}$ теперь — *числа* (а не элементы алгебры, как в (4.5.9)), удовлетворяющие (4.5.10). Эти числа удобно записать в обозначениях Дирака (см. раздел 1) как $a_{\alpha,\beta} = \langle \alpha | a | \beta \rangle$. Поясним эту формулу более подробно. Для алгебры \mathcal{A} с указанными свойствами строится представление T , действующее в комплексном пространстве \mathcal{V} с базисными векторами $|\alpha\rangle$ ($\alpha = 1, \dots, s$), которые подчиняются соотношениям

$$e_{\beta,\gamma} |\alpha\rangle = |\beta\rangle \delta_{\gamma\alpha} ,$$

согласованным с (4.5.11). Тогда базисные элементы $e_{\alpha,\beta} \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ и идемпотенты e_{α} записываются в представлении T с помощью обозначений Дирака следующим образом (сравните с формулой (4.5.26) из Примера 1 ниже):

$$e_{\alpha,\beta} = |\alpha\rangle \langle \beta| , \quad e_{\alpha} = e_{\alpha,\alpha} = |\alpha\rangle \langle \alpha| , \quad (4.5.12)$$

где $\langle \beta|$ и $|\alpha\rangle$ — ортонормированные бра- и кет- вектора, а для условия полноты (4.5.1b) мы имеем

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = e .$$

^{4.16}Это обширный класс алгебр, к которым, как мы увидим ниже, принадлежат групповые алгебры $\mathbb{C}[S_r]$.

В этом случае, коэффициенты $a_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot a \cdot e_\beta$ двустороннего разложения Пирса элемента a , фигурирующие в формуле (4.5.9), а также соотношения (4.5.10), представляются в виде

$$e_\alpha \cdot a \cdot e_\beta = |\alpha\rangle\langle\alpha| a |\beta\rangle\langle\beta| = \langle\alpha| a |\beta\rangle e_{\alpha,\beta}, \quad (4.5.13)$$

$$\langle\alpha| a \cdot b |\beta\rangle = \sum_{\gamma} \langle\alpha| a |\gamma\rangle\langle\gamma| b |\beta\rangle.$$

Эти соотношения показывают, что множители $\langle\alpha| a |\beta\rangle \in \mathbb{C}$ в коэффициентах (4.5.13) двустороннего разложения Пирса определяют матрицы представления T элементов $a \in \mathcal{A}$:

$$e_\beta \cdot a \cdot e_\alpha = \langle\beta| a |\alpha\rangle e_{\beta,\alpha} \Rightarrow T_{\beta\alpha}(a) := \langle\beta| a |\alpha\rangle. \quad (4.5.14)$$

В общем случае данное представление T приводимо. Мы обсудим этот факт, а также способ выделения неприводимых подпредставлений из T чуть ниже.

Кроме указанного применения в теории представлений, двустороннее разложение Пирса используется и в том случае, когда необходимо получить более детальную информацию о структуре самой алгебры \mathcal{A} , например, о матричной структуре ее регулярного представления (см. Замечание 2 ниже). Конкретные случаи двустороннего разложения Пирса рассмотрены далее, в Примерах 1, 2 и 3.

Определение 4.5.1 *Идеал, являющийся одновременно левым и правым, называется двусторонним, или просто идеалом. Идеал тривиален, если он состоит из одного нулевого элемента или совпадает со всей алгеброй. Алгебра \mathcal{A} называется простой, если она не имеет нетривиальных идеалов. Алгебра \mathcal{A} называется полупростой, если она изоморфна прямой сумме простых идеалов.*

Очевидно, что идеал является подалгеброй в \mathcal{A} , которая называется **инвариантной**.

Отметим, что в алгебре \mathcal{A} могут содержаться два важных набора идемпотентов, удовлетворяющих (4.5.3) и (4.5.4): 1.) примитивные идемпотенты $\{e_\alpha\}$, о которых речь шла выше; 2.) примитивные **центральные** идемпотенты $\{e_A\}$ — это идемпотенты, которые принадлежат центру алгебры \mathcal{A} и не разлагаются в сумму других **центральных** идемпотентов. Для набора 2.) мы имеем

$$e_A \mathcal{A} e_B = \delta_{A,B} e_A \mathcal{A} = \delta_{A,B} \mathcal{A} e_A.$$

Поэтому, левое, правое, а также двустороннее разложения Пирса для центральных идемпотентов совпадают и мы получаем

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{A=1}^{s'} e_A \mathcal{A} = \bigoplus_{A=1}^{s'} \mathcal{A} e_A = \bigoplus_{A=1}^{s'} \mathcal{A}_A, \quad \mathcal{A}_A \equiv e_A \mathcal{A} e_A, \quad (4.5.15)$$

где \mathcal{A}_A — двусторонние идеалы (**инвариантные** подалгебры в \mathcal{A}), а s' — число центральных идемпотентов в \mathcal{A} . Таким образом, если алгебра \mathcal{A} имеет нетривиальные центральные идемпотенты (отличные от единичного элемента), то формула (4.5.15) дает разложение алгебры \mathcal{A} в прямую сумму ее инвариантных подалгебр, и эта алгебра не проста. Отметим, что в полупростой алгебре \mathcal{A} всегда существует полная

система *центральных* примитивных идемпотентов. Это следует из разложения такой алгебры в прямую сумму ее простых инвариантных подалгебр и рассуждений, аналогичных тем, которые мы использовали для получения формул (4.5.2) – (4.5.4) в случае разложения алгебры по ее левым идеалам. Разложение (4.5.15) аналогично разложению полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых алгебр Ли, которое рассматривалось нами в разделе **I-4.2** первой части книги.

Далее мы сконцентрируемся на рассмотрении полупростых алгебр \mathcal{A} (другие случаи будут оговариваться специально). Для центральных идемпотентов $\{e_A\}$ полупростой алгебры можно применить левое (или правое) разложения Пирса (4.5.5) и разложить e_A по примитивным идемпотентам $\{e_\alpha\}$:

$$e_A = \sum_{\alpha \in A} e_\alpha, \tag{4.5.16}$$

где A — подмножество индексов в наборе $\{1, 2, \dots, s\}$; то есть центральные взаимно ортогональные идемпотенты $\{e_A\}$, образующие полную систему, удобно нумеровать непересекающимися подмножествами $A \subset \{1, 2, \dots, s\}$, которые покрывают весь набор индексов $\{1, 2, \dots, s\}$.

- *Задача 125. Доказать, что левое (и правое) разложения Пирса (4.5.5) для центральных идемпотентов $\{e_A\}$ имеет вид (4.5.16). Указание: подставить произвольное разложение $e_A = \sum_{\alpha \in A} C_{A\alpha} e_\alpha$ в соотношение $e_A e_B = \delta_{AB} e_A$.*

Пусть A_i ($i = 1, \dots, s'$) — набор непересекающихся подмножеств в $\{1, 2, \dots, s\}$ (покрывающих все это множество), которым соответствуют центральные идемпотенты e_{A_i} . Пусть $\alpha \in A_i$, $\beta \in A_j$ и $i \neq j$, тогда для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ в силу ортогональности $e_{A_i} \cdot e_{A_j} = 0$ коэффициент $a_{\alpha,\beta} = e_\alpha \cdot a \cdot e_\beta$ двустороннего разложения Пирса равен нулю:

$$e_\alpha \cdot a \cdot e_\beta = e_\alpha \cdot e_{A_i} \cdot a \cdot e_{A_j} \cdot e_\beta = e_\alpha \cdot a \cdot e_{A_i} \cdot e_{A_j} \cdot e_\beta = 0.$$

Это согласуется с (4.5.15) и означает, что в двустороннем разложении Пирса (4.5.7) полупростой алгебры \mathcal{A} отсутствуют слагаемые $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$, если $\alpha \in A_i$, $\beta \in A_j$ и $i \neq j$, то есть мы имеем

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{s'} \bigoplus_{\alpha,\beta \in A_i} e_\alpha \mathcal{A} e_\beta = \bigoplus_{i=1}^{s'} \bigoplus_{\alpha,\beta \in A_i} \mathcal{A}_{\alpha,\beta}, \tag{4.5.17}$$

где, напомним, s' — число примитивных центральных идемпотентов e_{A_i} для полупростой алгебры \mathcal{A} . Соответственно, матрицы $T(a) = \|T_{\alpha\beta}(a)\|$ элементов $a \in \mathcal{A}$ в представлении T , которое определяется по коэффициентам двустороннего разложения Пирса в (4.5.14), имеют блочно-диагональный вид

$$T(a) = \bigoplus_{i=1}^{s'} T^{(A_i)}(a), \tag{4.5.18}$$

где матрицы $T^{(A_i)}(a) = \|T_{\alpha\beta}^{(A_i)}(a)\|$ определяются по коэффициентам двустороннего разложения Пирса для идеала $\mathcal{A}_{A_i} \subset \mathcal{A}$ (сравните с (4.5.14)):

$$e_\alpha \cdot a \cdot e_\beta = T_{\alpha\beta}^{(A_i)}(a) e_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta \in A_i. \tag{4.5.19}$$

Таким образом, в соответствии с (4.5.18) представление T — приводимо и разлагается в прямую сумму представлений $T^{(A_i)}$, каждое из которых строится по центральному идемпотенту e_{A_i} . Размерность n_i представления $T^{(A_i)}$ равна числу $\text{card}(A_i)$ элементов в подмножестве $A_i \subset \{1, \dots, s\}$, другими словами она равна числу нецентральных примитивных идемпотентов e_α , входящих в сумму (4.5.16), где $A = A_i$.

Замечание 1. Система примитивных нецентральных идемпотентов (4.5.3) и (4.5.4) определяется неоднозначно. Например, мы можем сделать преобразования

$$e_\alpha \rightarrow e'_\alpha = S \cdot e_\alpha \cdot S^{-1}, \quad \forall \alpha, \quad (4.5.20)$$

где S — любой обратимый элемент в \mathcal{A} , при этом возникает новая система ортогональных примитивных идемпотентов e'_α . Отметим, что при преобразованиях (4.5.20) центральные идемпотенты не меняются.

Пример 1. Рассмотрим конечномерную матричную алгебру $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Базис в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ состоит из матричных единиц e_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), удовлетворяющих структурным соотношениям:

$$e_{ij} \cdot e_{km} = \delta_{jk} e_{im}, \quad (4.5.21)$$

В частности, e_{ii} — диагональные матрицы, у которых на диагонали на i -м месте стоят единицы, а все остальные элементы — нули. Отметим, что на алгебру $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ можно смотреть как на абстрактную алгебру с базисными элементами e_{ij} , удовлетворяющими структурным соотношениям (4.5.21). Тогда, матричные единицы это элементы e_{ij} в определяющем представлении алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

В качестве примитивных идемпотентов в алгебре $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ можно выбрать элементы $e_i := e_{ii}$ ($i = 1, \dots, n$). Действительно, в силу (4.5.21) элементы e_i удовлетворяют условиям (4.5.3) и (4.5.4):

$$\sum_{i=1}^n e_i = e, \quad e_i \cdot e_k = \delta_{ik} e_i, \quad (4.5.22)$$

где e — единичный элемент в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, то есть в определяющем представлении это матрица $e = I_n$.

По отношению к данной системе примитивных идемпотентов левое разложение Пирса произвольного элемента $a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, где $a_{ij} \in \mathbb{C}$, имеет вид:

$$a = a \cdot \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (4.5.23)$$

Здесь $a_i = \sum_{k=1}^n (a_{ki} e_{ki})$ — элемент i -го левого идеала \mathcal{L}_i . Из этого представления для $a_i \in \mathcal{L}_i$ следует, что базис в \mathcal{L}_i образован векторами $\epsilon_k^{(i)} \equiv e_{ki}$ ($k = 1, \dots, n$), элемент a_i в координатной записи соответствует i -му столбцу матрицы $\|a_{kj}\|$ и пространства \mathcal{L}_i для всех $i \in (1, \dots, n)$ изоморфны \mathbb{C}^n . С учетом (4.5.21), действие слева любого элемента $a = \sum_{j,\ell} a_{j\ell} e_{j\ell} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ на \mathcal{L}_i определяется равенствами

$$\epsilon_k^{(i)} \rightarrow a \cdot \epsilon_k^{(i)} = \sum_{j,\ell} a_{j\ell} e_{j\ell} \cdot \epsilon_k^{(i)} = \sum_j \epsilon_j^{(i)} a_{jk} \in \mathcal{L}_i. \quad (4.5.24)$$

Отсюда следует, что представления алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, действующие во всех пространствах $\mathcal{L}_i = \mathbb{C}^n$, эквивалентны определяющему представлению $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ и поэтому эквивалентны друг другу для всех $i \in (1, \dots, n)$. Таким образом, левое регулярное представление алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ распадается в прямую сумму n эквивалентных определяющих представлений, имеющих размерность n . Для любого $a = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ мы имеем

$$e_i \cdot a \cdot e_j = a_{ij} e_{ij}, \quad (4.5.25)$$

(суммирования по i, j в правой части нет) поэтому компонентами двустороннего разложения Пирса (4.5.15) для алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ являются одномерные векторные пространства, натянутые на элементы e_{ij} . Из сравнения (4.5.25) и (4.5.14) вытекает, что представление T (которое определяется в (4.5.14) по двустороннему разложению Пирса) эквивалентно определяющему представлению и для любого элемента $a \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ задается матрицами $T_{ij}(a) = a_{ij}$. Отметим, что в определяющем представлении для элементов $e_{ij} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеется реализация (4.5.12):

$$e_{ij} = |i\rangle \langle j| = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j^T, \quad (4.5.26)$$

где \vec{e}_i — базисные вектора с координатами $(\vec{e}_i)_k = \delta_{ik}$. Центр в алгебре $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ тривиален и состоит из элементов, пропорциональных единичному элементу e из (4.5.22), поэтому алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ не имеет нетривиальных двусторонних идеалов и следовательно она проста.

- *Задача 126.* Выделить в алгебре \mathcal{B}_+ верхнетреугольных матриц с базисом $\{e_{ij}\}$, где $i \leq j$, полный набор примитивных идемпотентов и построить соответствующие левые (правые) идеалы. Доказать, что алгебра \mathcal{B}_+ не проста и не полупроста.

Замечание 2. Для полупростых ассоциативных конечномерных алгебр \mathcal{A} справедлива теорема Веддербёрна, которая вытекает из всего вышесказанного и которую мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 4.5.1 Полупростая ассоциативная конечномерная алгебра \mathcal{A} над полем \mathbb{C} изоморфна прямой сумме матричных алгебр $\text{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{n_{s'}}(\mathbb{C})$, где s' — число примитивных центральных идемпотентов $e_{A_i} \in \mathcal{A}$, а $n_i = \text{card}(A_i)$ — число примитивных идемпотентов $e_\alpha \in \mathcal{A}$, входящих в разложение (4.5.16) центрального идемпотента e_{A_i} .

Для матричной алгебры $\text{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{n_{s'}}(\mathbb{C})$ диагональные матричные единицы $e_{jj}^{(i)} |_{j=1, n_i} \in \text{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ и единичные элементы $e^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_i} e_{jj}^{(i)} \in \text{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ являются соответственно примитивными e_α ($\alpha \in A_i$) и центральными e_{A_i} идемпотентами (см. Пример 1 выше). Кроме того, для матричной алгебры $\text{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{n_{s'}}(\mathbb{C})$ все слагаемые $e_\alpha \cdot \mathcal{A} \cdot e_\beta \equiv \mathcal{A}_{\alpha, \beta}$ в двустороннем разложении Пирса (4.5.7) — одномерны, поэтому в силу изоморфизма, указанного в Теореме 4.5.1, все полупростые конечномерные алгебры \mathcal{A} принадлежат тому типу специальных алгебр, для которых базисные элементы $e_{\alpha, \beta} \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}$ и примитивные идемпотенты e_α представляются в виде (4.5.12). Из Теоремы 4.5.1 также вытекает следующий результат (сравните с Разделом I-3.6.2).

Утверждение 4.5.2 В случае полупростой конечномерной алгебры \mathcal{A} , каждое ее неприводимое N_ν -мерное представление $T^{(\nu)}$ входит в регулярное представление $T^{(R)}$ ровно N_ν раз.

Из Теоремы 4.5.1 и Утверждения 4.5.2 следуют равенства

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{s'} n_i^2 = \sum_{i=1}^{s'} n_i \dim(T^{(A_i)}) \quad (4.5.27)$$

(сравните первое равенство в (4.5.27) с формулой (4.3.63)), где $T^{(A_i)}$ — представления, заданные в (4.5.19).

Замечание 3. Поясним Утверждение 4.5.2 более подробно. С каждым левым идеалом $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{A} \cdot e_\alpha$ (аналогично с каждым правым идеалом $\mathcal{R}_\alpha = e_\alpha \cdot \mathcal{A}$), порожденным примитивным идемпотентом e_α , связано неприводимое представление алгебры \mathcal{A} . Действительно, выберем базисные элементы ϵ_ℓ (где $\ell = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{L}_\alpha)$) в линейном пространстве \mathcal{L}_α , тогда левое действие любого элемента $a \in \mathcal{A}$ на \mathcal{L}_α записывается в виде

$$a \cdot \epsilon_\ell = \epsilon_{\ell'} T_{\ell'\ell}^{(\alpha)}(a), \quad (4.5.28)$$

где отображение $T^{(\alpha)}$ из алгебры \mathcal{A} в матрицы $\|T_{\ell'\ell}^{(\alpha)}(a)\|$ определяет представление для \mathcal{A} . Это представление неприводимое, так как левый идеал \mathcal{L}_α — простой. Для **полупростой** алгебры \mathcal{A} , для которой все подпространства $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ одномерны, представления $T^{(\alpha)}$ для $\alpha \in A_i$, где A_i подмножество в $\{1, \dots, s\}$, соответствующее центральному идемпотенту e_{A_i} , эквивалентны представлению $T^{(A_i)}$, заданному в (4.5.19). Действительно, для полупростой алгебры \mathcal{A} в качестве базиса в \mathcal{L}_α , где $\alpha \in A_i$, можно выбрать n_i элементов $\epsilon_\beta \equiv e_{\beta,\alpha} \in \mathcal{A}_{\beta,\alpha}$ (α — фиксировано, а β пробегает все подмножество A_i). Тогда $\dim(\mathcal{L}_\alpha) = n_i$, и по аналогии с (4.5.24) имеем

$$\begin{aligned} a \cdot \epsilon_\beta &= \left(\sum_{i=1}^{s'} \sum_{\gamma, \delta \in A_i} e_\gamma \cdot a \cdot e_\delta \right) \cdot e_{\beta,\alpha} = \sum_{\gamma, \delta \in A_i} \langle \gamma | a | \delta \rangle e_{\gamma,\delta} \cdot e_{\beta,\alpha} = \\ &= \sum_{\gamma \in A_i} \langle \gamma | a | \beta \rangle e_{\gamma,\alpha} = \sum_{\gamma \in A_i} \epsilon_\gamma T_{\gamma\beta}^{(A_i)}(a). \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

Сравнивая эти соотношения с (4.5.28), мы получаем, что для всех $\alpha \in A_i$ представления $T^{(\alpha)}$, число которых равно $n_i = \text{card}(A_i) = \dim(\mathcal{L}_\alpha)$, эквивалентны представлению $T^{(A_i)}$ (нумеруется центральным идемпотентом e_{A_i}). Подчеркнем дуальную роль идемпотента e_α в изложенной конструкции. С одной стороны, идемпотент e_α порождает неприводимое представление $T^{(\alpha)}$, а с другой стороны, с этим идемпотентом ассоциируются базисные элементы ϵ_α в каждом из пространств представлений $T^{(\beta)}$, где β принадлежит тому же подмножеству A_i , что и α . Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между базисными элементами ϵ_α пространства представления $T^{(\beta)}$ и пространствами эквивалентных представлений $T^{(\alpha)}$. Это согласуется с Утверждением 4.5.2.

В качестве иллюстрации к Замечаниям 2 и 3 ниже (см. Пример 3) будет детально рассмотрен случай алгебры $\mathbb{C}[S_3]$.

Замечание 4. Пусть имеется система элементов $e'_\alpha \in \mathcal{A}$ ($\alpha = 1, \dots, s$), полная в том смысле, что она порождает непересекающиеся левые идеалы $\mathcal{L}'_\alpha = \mathcal{A} \cdot e'_\alpha \subset \mathcal{A}$, и имеет

место аналог левого разложения Пирса для алгебры \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^s \mathcal{A} \cdot e'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \mathcal{L}'_\alpha. \quad (4.5.30)$$

Тогда для единичного элемента $e \in \mathcal{A}$ получаем разложение в виде (сравните с (4.5.3))

$$e = \sum_{\alpha=1}^s x_\alpha \cdot e'_\alpha, \quad x_\alpha \in \mathcal{A}. \quad (4.5.31)$$

Умножим обе части равенства (4.5.31) слева на элемент e'_β . В результате мы получаем (см. в связи с этим вывод соотношений (4.5.4) из разложения (4.5.3)) обобщенные условия ортогональности и идемпотентности (сравните с (4.5.4)):

$$e'_\beta \cdot x_\alpha \cdot e'_\alpha = \delta_{\alpha\beta} e'_\beta. \quad (4.5.32)$$

То есть для элементов e'_α нарушено стандартное условие ортогональности $e'_\alpha \cdot e'_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$). Однако, сравнивая формулы (4.5.31), (4.5.32) с формулами (4.5.3), (4.5.4) и учитывая, что разные идеалы \mathcal{L}'_α не пересекаются, легко получить из элементов e'_α полную систему взаимно ортогональных идемпотентов (4.5.3) и (4.5.4), положив $e_\alpha = x_\alpha \cdot e'_\alpha, \forall \alpha$. Аналогичная полная система идемпотентов $e_\alpha = e'_\alpha \cdot \tilde{x}_\alpha$ строится и для правого разложения Пирса, если единичный элемент разлагается в виде $e = \sum_{\alpha=1}^s e'_\alpha \cdot \tilde{x}_\alpha$, где $\tilde{x}_\alpha \in \mathcal{A}$. Полная система обобщенных идемпотентов e'_α , для которых справедливы разложения (4.5.30), (4.5.31) и условия (4.5.32), важна для нас, так как симметризаторы Юнга, как мы увидим ниже в подразделе 4.5.2, дают именно такую систему идемпотентов^{4.17}.

Пример 2. Рассмотрим группу перестановок (симметрическую группу) S_2 , состоящую из двух элементов $\{e, \sigma_1\}$, где e — единичный элемент и σ_1 — соседняя транспозиция: $\sigma_1 = (1, 2)$. Взаимно ортогональные примитивные идемпотенты для $\mathbb{C}[S_2]$ имеют вид

$$\begin{aligned} e_{[2]} &= \frac{1}{2}(e + \sigma_1), & e_{[12]} &= \frac{1}{2}(e - \sigma_1), \\ e_{[2]} \cdot e_{[12]} &= 0, & (e_{[2]})^2 &= e_{[2]}, & (e_{[12]})^2 &= e_{[12]}, & e_{[2]} + e_{[12]} &= e. \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

Идемпотенты $e_{[2]}$ и $e_{[12]}$ являются центральными, так как очевидно коммутируют с единственной образующей σ_1 . Перестановка $\sigma_1 = (1, 2)$ действует на идемпотенты $e_{[2]}$ и $e_{[12]}$ следующим образом:

$$\sigma_1 \cdot e_{[2]} = e_{[2]}, \quad \sigma_1 \cdot e_{[12]} = -e_{[12]}, \quad (4.5.34)$$

то есть не меняет знак у $e_{[2]}$ и меняет знак у $e_{[12]}$. Поэтому, а также согласно определениям (4.3.4) и (4.3.5), $e_{[2]}$ и $e_{[12]}$ называются соответственно *симметризатором* и *антисимметризатором* в $\mathbb{C}[S_2]$ (сравните формулу для $e_{[2]} \in \mathbb{C}[S_2]$ в (4.5.33) с общей формулой симметризатора (4.3.16) для алгебры $\mathbb{C}[S_r]$). В соответствии с (4.5.33) алгебра $\mathbb{C}[S_2]$ разлагается в прямую сумму двух одномерных двусторонних идеалов

^{4.17}См. шаг 4 в рецепте построения примитивных взаимно ортогональных идемпотентов в $\mathbb{C}[S_r]$, сформулированном в следующем подразделе 4.5.2.

$\mathcal{L}_{[2]}$ и $\mathcal{L}_{[1^2]}$ и следовательно регулярное представление алгебры $\mathbb{C}[S_2]$ разлагается всего лишь на два неприводимых одномерных представления, которые определяются по формулам (4.5.34):

$$1.) \quad T^{[2]}(e) = 1, \quad T^{[2]}(\sigma_1) = 1; \quad 2.) \quad T^{[1^2]}(e) = 1, \quad T^{[1^2]}(\sigma_1) = -1.$$

Идемпотенты $e_{[2]}$ и $e_{[1^2]}$, которые порождают представления $T^{[2]}$ и $T^{[1^2]}$, с точностью до фактора $1/2$ равны двум возможным симметризаторам Юнга (4.3.14) для $\mathbb{C}[S_2]$, которые в свою очередь строятся по двум таблицам Юнга

$$T^{[2]} \leftrightarrow \mathbb{T}_{[2]} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad T^{[1^2]} \leftrightarrow \mathbb{T}_{[1^2]} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}. \quad (4.5.35)$$

Отметим, что идемпотенты (4.5.33) в матричном представлении \mathfrak{s} , согласно (4.2.9) и (4.2.10), дают проекторы (4.2.23).

Пример 3. Рассмотрим симметрическую группу S_3 и ее презентацию (4.3.13) в терминах двух образующих Кокстера σ_1, σ_2 . В этой презентации шесть элементов группы S_3 имеют вид

$$e, \quad \sigma_1 = (1, 2), \quad \sigma_2 = (2, 3), \quad \sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2. \quad (4.5.36)$$

В качестве полного набора взаимно ортогональных примитивных идемпотентов для $\mathbb{C}[S_3]$ можно выбрать следующие элементы

$$\begin{aligned} e_{[3]} &= \frac{1}{6}(1 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2)(1 + \sigma_1), \\ e_{[1^3]} &= \frac{1}{6}(1 - \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2)(1 - \sigma_1), \\ e_{[2,1]_1} &= \frac{1}{3}\left(1 - \sigma_2 + \varepsilon(1 - \sigma_1)\sigma_2\right)(1 + \sigma_1), \\ e_{[2,1]_2} &= \frac{1}{3}(1 - \sigma_1)\left(1 + \sigma_2 - \varepsilon\sigma_2(1 + \sigma_1)\right), \end{aligned} \quad (4.5.37)$$

где ε – произвольный параметр, и для простоты мы записали единичный элемент e как 1. Действие образующих $\sigma_i = (\sigma_1, \sigma_2)$ на идемпотенты $e_{[3]}$ и $e_{[1^3]}$ слева и справа дает:

$$\sigma_i \cdot e_{[3]} = e_{[3]} \cdot \sigma_i = e_{[3]}, \quad \sigma_i \cdot e_{[1^3]} = e_{[1^3]} \cdot \sigma_i = -e_{[1^3]}, \quad (4.5.38)$$

поэтому идемпотенты $e_{[3]}$ и $e_{[1^3]}$ являются центральными и называются соответственно *симметризатором* и *антисимметризатором* в $\mathbb{C}[S_3]$ (сравните первые две формулы в (4.5.37) с определением (4.3.16); см. также решения Задач 97, 98). Идемпотенты $e_{[2,1]_1}$ и $e_{[2,1]_2}$ – нецентральны и их зависимость от произвольного параметра ε показывает, что выбор нецентральных примитивных идемпотентов вообще говоря неоднозначен (см. выше Замечание 1).

- *Задача 127.* Пользуясь определяющими соотношениями (4.3.13), проверить, что элементы (4.5.37) образуют полную систему взаимно ортогональных идемпотентов для $\mathbb{C}[S_3]$, то есть проверить выполнение равенств (4.5.3) и (4.5.4). Проверить формулы (4.5.38). Указание: воспользоваться проекторными свойствами операторов $P_i^\pm = (1 \pm \sigma_i)$: $P_i^+ P_i^- = 0$, $P_i^\pm \sigma_i = \pm P_i^\pm$.

Центральные идемпотенты $e_{[3]}$ и $e_{[1^3]}$ задают одномерные двусторонние идеалы в $\mathbb{C}[S_3]$. Идемпотент $e_{[3]}$ определяет тривиальное одномерное представление $T^{([3])}(\sigma) = +1$ ($\forall \sigma \in S_3$), а идемпотент $e_{[1^3]}$ определяет одномерное представление: $T^{([1^3])}(\sigma) = +1$ для четных $\sigma \in S_3$ и $T^{([1^3])}(\sigma) = -1$ для нечетных $\sigma \in S_3$. Из разложения единицы

$$e = e_{[3]} + e_{[1^3]} + e_{[2,1]_1} + e_{[2,1]_2},$$

учитывая, что идемпотенты $e_{[3]}$ и $e_{[1^3]}$ центральны, сразу следует, что сумма (сравните с (4.5.16))

$$e_{[2,1]_1} + e_{[2,1]_2} = \frac{1}{3}(2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) =: e_{[2,1]}, \quad (4.5.39)$$

также является центральным идемпотентом и тождество $e = e_{[3]} + e_{[1^3]} + e_{[2,1]}$ дает центральное разложение единицы. Отметим, что центральный идемпотент $e_{[2,1]}$ как и ожидалось не зависит от произвольного параметра ε , то есть центральные идемпотенты определяются однозначно.

Рассмотрим теперь для примера левый идеал $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$, который порождается нецентральным идемпотентом $e_{[2,1]_1}$. Представим этот идемпотент в виде

$$e_{[2,1]_1} = (\epsilon_1 + \varepsilon \epsilon_2), \quad (4.5.40)$$

где два элемента

$$\epsilon_1 = \frac{1}{3}(1 - \sigma_2)(1 + \sigma_1), \quad \epsilon_2 = \frac{1}{3}(1 - \sigma_1)\sigma_2(1 + \sigma_1), \quad (4.5.41)$$

можно выбрать в качестве базиса в $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$. Покажем это, для чего подействуем на элементы (4.5.41) слева образующими $\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$ (сравните с (4.5.28))

$$\sigma_1 \cdot \epsilon_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \sigma_1 \cdot \epsilon_2 = -\epsilon_2, \quad \sigma_2 \cdot \epsilon_1 = -\epsilon_1, \quad \sigma_2 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2. \quad (4.5.42)$$

Отсюда следует, что любой элемент $x \in \mathcal{L}_{[2,1]_1} = \mathbb{C}[S_3] \cdot e_{[2,1]_1}$ записывается как линейная комбинация $x = x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2$, ($x_1, x_2 \in \mathbb{C}$), а элементы ϵ_1 и ϵ_2 действительно образуют базис в $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ (то есть левый идеал $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ – двумерен) и удовлетворяют структурным соотношениям

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_1 = \epsilon_1, \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_2 = 0, \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0, \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_1 = \epsilon_2. \quad (4.5.43)$$

Из соотношений (4.5.42) следует (согласно правилу (4.5.28)) двумерное неприводимое представление группы S_3 :

$$T^{([2,1])}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{([2,1])}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5.44)$$

- *Задача 128.* Проверить выполнение структурных соотношений (4.3.13) для представления (4.5.44) группы S_3 .
- *Задача 129.* Получить структурные соотношения (4.5.43) для образующих ϵ_1, ϵ_2 подалгебры (левого идеала) $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$. Указание: воспользоваться формулами (4.5.42), а также тождеством $(e_{[2,1]_1})^2 = e_{[2,1]_1}$, где элемент $e_{[2,1]_1}$ определен общей формулой (4.5.40) с произвольным параметром ε .

Рассмотрим теперь второй левый идеал $\mathcal{L}_{[2,1]_2} \subset \mathbb{C}[S_3]$, который порождается идемпотентом $e_{[2,1]_2}$ из (4.5.37). Для простоты положим $\varepsilon = 0$. Этот левый идеал также двумерен и в нем можно выбрать базис, состоящий из двух элементов

$$\epsilon_3 = \frac{1}{3}(1 - \sigma_1)(1 + \sigma_2), \quad \epsilon_4 = \frac{1}{3}(1 - \sigma_2)\sigma_1(1 + \sigma_2), \quad (4.5.45)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_1 \cdot \epsilon_3 = -\epsilon_3, \quad \sigma_1 \cdot \epsilon_4 = \epsilon_3 + \epsilon_4, \quad \sigma_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3 + \epsilon_4, \quad \sigma_2 \cdot \epsilon_4 = -\epsilon_4, \quad (4.5.46)$$

$$\epsilon_3 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3, \quad \epsilon_4 \cdot \epsilon_4 = 0, \quad \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = 0, \quad \epsilon_4 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_4. \quad (4.5.47)$$

Тогда двусторонний идеал $\mathcal{L}_{[2,1]}$ (инвариантная подалгебра в $\mathbb{C}[S_3]$), который порождается центральным идемпотентом (4.5.39), — четырехмерен, а его базисные элементы $\epsilon_i \in \mathcal{L}_{[2,1]}$ ($i = 1, \dots, 4$) подчиняются структурным соотношениям (4.5.43), (4.5.47) для двух подалгебр $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$, $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$ и перекрестным формулам

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3 \cdot \epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_4 \cdot \epsilon_1 = 0, \\ \epsilon_3 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_2, \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 = \epsilon_4, \quad \epsilon_4 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_1, \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 = \epsilon_3. \end{aligned} \quad (4.5.48)$$

Все формулы (4.5.46), (4.5.47) и (4.5.48) можно записать единым образом, как соотношения для матричных единиц

$$e_{ij} \cdot e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}, \quad (4.5.49)$$

если положить $\epsilon_1 \equiv e_{11}$, $\epsilon_2 \equiv e_{21}$, $\epsilon_3 \equiv e_{22}$ и $\epsilon_4 \equiv e_{12}$. Из соотношений (4.5.49) следует, что двусторонний идеал $\mathcal{L}_{[2,1]} \subset \mathbb{C}[S_3]$ изоморфен алгебре $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$, не содержит нетривиальных инвариантных подалгебр (двусторонних идеалов) и поэтому является простой алгеброй.

- *Задача 130. ★ Доказать, что левый идеал $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$ двумерен и в нем (в случае $\varepsilon = 0$) можно выбрать базисные элементы (4.5.45). Доказать, что эти элементы удовлетворяют соотношениям (4.5.46), (4.5.47) и (4.5.48). Установить эквивалентность представлений, реализованных на соответствующих левых идеалах $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ и $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$.*

Напомним, что $\epsilon_1 = e_{[2,1]_1}|_{\varepsilon=0}$ и $\epsilon_3 = e_{[2,1]_2}|_{\varepsilon=0}$ — примитивные идемпотенты в $\mathbb{C}[S_3]$. Матричные коэффициенты (4.5.13) двустороннего разложения Пирса (4.5.7) для элементов σ_1, σ_2 равны

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \sigma_1 \epsilon_1 & \epsilon_1 \sigma_1 \epsilon_3 \\ \epsilon_3 \sigma_1 \epsilon_1 & \epsilon_3 \sigma_1 \epsilon_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{21} & -e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow T(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \epsilon_1 \sigma_2 \epsilon_1 & \epsilon_1 \sigma_2 \epsilon_3 \\ \epsilon_3 \sigma_2 \epsilon_1 & \epsilon_3 \sigma_2 \epsilon_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\epsilon_1 & \epsilon_4 \\ 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_{11} & e_{12} \\ 0 & e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow T(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

где неприводимое представление T группы S_3 получено в соответствии с правилом (4.5.19) и совпадает (см. Замечание 3 выше) с представлением (4.5.44).

Из всего сказанного в этом Примере 3 следует вывод, что шестимерная алгебра $\mathbb{C}[S_3]$, базис которой состоит из элементов $\{e_{[3]}, e_{[1^3]}, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$, разлагается в прямую сумму трех инвариантных простых подалгебр $\mathcal{L}_{[3]}$, $\mathcal{L}_{[1^3]}$ и $\mathcal{L}_{[2,1]}$, изоморфных

соответственно матричным алгебрам $\text{Mat}_1(\mathbb{C})$, $\text{Mat}_1(\mathbb{C})$ и $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$, то есть алгебра $\mathbb{C}[S_3]$ полупроста и в согласии с Теоремой Веддербёрна 4.5.1 мы имеем

$$\mathbb{C}[S_3] = \text{Mat}_1(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_1(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_2(\mathbb{C}). \quad (4.5.50)$$

Замечание 5. В разделе 4.3 мы показали, что неприводимые представления $T^{[3]}$, $T^{[1^3]}$ и $T^{[2,1]_1} \sim T^{[2,1]_2}$ алгебры $\mathbb{C}[S_3]$ должны выделяться из регулярного представления симметризаторами Юнга, которые строятся по таблицам, имеющим форму диаграмм Юнга

$$[3] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad [1^3] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}.$$

Сравнивая явные формулы (4.5.37) для взаимно ортогональных идемпотентов $e_{[3]}$, $e_{[1^3]}$, $e_{[2,1]_1}$, $e_{[2,1]_2}$, образующих полную систему, и выражения (4.3.15) для симметризаторов Юнга алгебры $\mathbb{C}[S_3]$, мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} e_{[3]} &= \frac{1}{6} Y(\mathbb{T}_{[3]}), & e_{[1^3]} &= \frac{1}{6} Y(\mathbb{T}_{[1^3]}), \\ e_{[2,1]_1} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{3} Y(\mathbb{T}_{[2,1]_1}), & e_{[2,1]_2} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{3} Y(\mathbb{T}_{[2,1]_2}). \end{aligned} \quad (4.5.51)$$

Замечание 6. По сути дела в последнем примере мы решали ту же задачу, что и в пункте 2 раздела I-3.6.1 первой части книги. А именно, мы раскладывали регулярное представление группы S_3 на ее неприводимые представления. При этом здесь мы применили метод, отличный от прямого метода, который использовался в первой части книги. Метод, изложенный в Примере 3 для случая группы S_3 и основанный на выделении примитивных ортогональных идемпотентов, оказывается универсальным и применим, как мы увидим в разделе 4.6, для групп S_r с любым r .

Замечание 7. Изоморфизм, указанный в (4.5.50), является частным случаем общего утверждения, которое мы даем здесь без доказательства, но которое вытекает из всего, что изложено выше в подразделе 4.3.2 и данном подразделе 4.5.1.

Утверждение 4.5.3 Групповая алгебра $\mathbb{C}[S_r]$ (для всех $r \geq 2$) полупроста и изоморфна матричной алгебре

$$\mathbb{C}[S_r] = \bigoplus_{\lambda \vdash r} \text{Mat}_{f(\lambda)}(\mathbb{C}),$$

где $f(\lambda)$ — размерности неприводимых представлений алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ (см. формулы (4.3.56) и (4.3.57)), которые соответствуют диаграммам Юнга $\lambda \vdash r$.

В следующем подразделе будут изложены дополнительные аргументы, которые также свидетельствуют в пользу этого Утверждения.

4.5.2 Взаимная ортогональность и полнота симметризаторов Юнга

В этом подразделе, используя факты, изложенные в разделе 4.3, мы рассмотрим один из методов решения проблемы о построении (на основе симметризаторов Юнга)

полной системы взаимно ортогональных идемпотентов в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$. Метод восходит к А.Юнгу^{4.18} и Ф.Г.Фробениусу^{4.19} и основан на использовании таблиц Юнга специального типа (стандартных таблиц Юнга). Мы сначала сформулируем соответствующий рецепт, а затем применим этот рецепт для построения искомой системы идемпотентов. При этом мы в значительной степени будем использовать общую теорию, изложенную в предыдущем подразделе 4.5.1.

Напомним (см. Определение 4.3.2 в подразделе 4.3.2), что таблица Юнга T_λ , в которой числа в клетках возрастают в каждой строке слева направо и в каждом столбце сверху вниз, называется стандартной таблицей. Примеры не стандартных и стандартной таблиц даны в (4.3.54). Как мы убедимся, количество стандартных таблиц Юнга формы λ равно размерности $f(\lambda)$ неприводимого представления группы перестановок S_r , которое соответствует диаграмме Юнга λ . Эта размерность дается формулой крюков (4.3.56), или формулой Фробениуса (4.3.57); см. подраздел 4.3.2.

Теперь мы можем сформулировать рецепт построения (на основе симметризаторов Юнга) полной системы примитивных и взаимно ортогональных идемпотентов для $\mathbb{C}[S_r]$:

- 1.) *Находятся все разбиения $\lambda \vdash r$ числа r , или, что то же самое, строятся все диаграммы Юнга с r клетками, и далее для каждой диаграммы λ строятся все стандартные таблицы Юнга $T_{a,\lambda}$ ($a = 1, \dots, f(\lambda)$).*
- 2.) *По каждой стандартной таблице $T_{a,\lambda}$ вычисляются горизонтальный симметризатор P , вертикальный антисимметризатор Q , а затем строится симметризатор Юнга $Y(T_{a,\lambda}) = Q \cdot P$ (см. подраздел 4.3.1).*
- 3.) *По симметризаторам Юнга $Y(T_{a,\lambda})$ строится система идемпотентов Юнга $E(T_{a,\lambda}) = \alpha_\lambda^{-1} Y(T_{a,\lambda})$, где $\alpha_\lambda = r! / f(\lambda)$, см. (4.3.36). Эта система не является ортогональной.*
- 4.) *Ортогонализация производится путем построения новых идемпотентов вида*

$$E'(T_{a,\lambda}) = X_{a,\lambda} \cdot E(T_{a,\lambda}), \quad E''(T_{a,\lambda}) = E(T_{a,\lambda}) \cdot \tilde{X}_{a,\lambda}, \quad (4.5.52)$$

где $X_{a,\lambda}$ и $\tilde{X}_{a,\lambda}$ — специальные элементы алгебры $\mathbb{C}[S_r]$; см. Замечание 4 в предыдущем подразделе 4.5.1. Процедура нахождения факторов $X_{a,\lambda}$ и $\tilde{X}_{a,\lambda}$ описана ниже в этом подразделе (см. формулы (4.5.71) — (4.5.72)) и основана на введении упорядочения (доминантности) на множестве стандартных таблиц, имеющих одну и ту же форму λ . Так строятся две полные системы (4.5.52) взаимно ортогональных идемпотентов

$$E'(T_{a,\lambda}) \cdot E'(T_{b,\mu}) = E'(T_{b,\lambda}) \delta_{ab} \delta_{\lambda\mu}, \quad E''(T_{a,\lambda}) \cdot E''(T_{b,\mu}) = E''(T_{b,\lambda}) \delta_{ab} \delta_{\lambda\mu}, \quad (4.5.53)$$

$$\lambda \vdash r, \quad \mu \vdash r, \quad a = 1, \dots, f(\lambda), \quad b = 1, \dots, f(\mu),$$

что и решает поставленную задачу.

В качестве недостатка изложенного выше метода построения примитивных ортогональных идемпотентов для алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ следует отметить необходимость вычисления факторов $X_{a,\lambda}, \tilde{X}_{a,\lambda} \in \mathbb{C}[S_r]$ для определения модифицированных идемпотентов Юнга (4.5.52). Ниже, в разделе 4.6, мы рассмотрим другой метод построения

^{4.18}Альфред Юнг (1873–1940) — английский математик. Внес значительный вклад в теорию групп.

^{4.19}Фердинанд Георг Фробениус (1849–1917) — немецкий математик, известный своими достижениями в теории эллиптических функций, теории чисел и теории групп.

полной системы примитивных ортогональных идемпотентов $e(\Gamma_{a,\lambda}) \in \mathbb{C}[S_r]$ (вообще говоря, отличных от идемпотентов (4.5.52)), в рамках которого все взаимно ортогональные идемпотенты $e(\Gamma_{a,\lambda})$ будут строиться однозначно по стандартным таблицам Юнга (без необходимости их дополнительной модификации с помощью умножения на факторы $X_{a,\lambda}, \tilde{X}_{a,\lambda}$). Условие полноты и взаимная ортогональность для идемпотентов $e(\Gamma_{a,\lambda})$ в новом подходе будут выполняться автоматически.

Итак, в данном подразделе мы продолжим построение, начатое в разделе 4.3, и покажем как из всего набора симметризаторов Юнга $Y(\Gamma_\lambda)$ можно выделить те симметризаторы Юнга, которые образуют полную систему идемпотентов в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$. Кроме того, мы обсудим проблему взаимной ортогональности таких идемпотентов.

Прежде всего необходимо отметить, что левые (правые) идеалы, порожденные симметризаторами $Y(\Gamma_\lambda)$ и $Y(\Gamma'_\lambda)$, которые построены по разным, но имеющим одну и ту же форму λ , таблицам Γ_λ и Γ'_λ , могут совпадать. Например, выбирая в (4.3.22) горизонтальную перестановку $\sigma = p \in H(\Gamma_\lambda)$, или вертикальную перестановку $\sigma = q \in V(\Gamma_\lambda)$, мы получаем

$$Y(p \cdot \Gamma_\lambda) = p \cdot Y(\Gamma_\lambda) \cdot p^{-1} = p \cdot Y(\Gamma_\lambda), \quad Y(q \cdot \Gamma_\lambda) = q \cdot Y(\Gamma_\lambda) \cdot q^{-1} = \delta_q Y(\Gamma_\lambda) \cdot q^{-1}, \quad (4.5.54)$$

что следует из равенств (4.3.12). В соответствии с (4.5.54) левые идеалы, порожденные идемпотентами $Y(p \cdot \Gamma_\lambda)$, для всех $p \in H(\Gamma_\lambda)$ совпадают с левым идеалом, порожденным идемпотентом $Y(\Gamma_\lambda)$, а правые идеалы, порожденные идемпотентами $Y(q \cdot \Gamma_\lambda)$, совпадают для всех $q \in V(\Gamma_\lambda)$ с правым идеалом, порожденным $Y(\Gamma_\lambda)$,

$$\mathbb{C}[S_r] \cdot Y(p \cdot \Gamma_\lambda) = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(\Gamma_\lambda), \quad Y(q \cdot \Gamma_\lambda) \cdot \mathbb{C}[S_r] = Y(\Gamma_\lambda) \cdot \mathbb{C}[S_r]. \quad (4.5.55)$$

Поэтому симметризаторы Юнга $Y(\Gamma_\lambda)$, $Y(p \cdot \Gamma_\lambda)$ и $Y(q \cdot \Gamma_\lambda)$ не имеет смысла одновременно включать в полную систему независимых примитивных идемпотентов, по которым строятся разложения (4.3.33), (4.5.5). Как мы увидим ниже, один из способов исключения таких лишних идемпотентов заключается в том, что выбираются симметризаторы Юнга $Y(\Gamma_\lambda)$, которые строятся только по **стандартным таблицам** Юнга Γ_λ , см. Определение 4.3.2.

Подчеркнем, что полнота системы идемпотентов $\alpha_\lambda^{-1} Y(\Gamma_\lambda)$ определяется здесь, как полнота системы идеалов, порожденных $Y(\Gamma_\lambda)$ (см. Замечание 4. в подразделе 4.5.1). То есть, мы не требуем, чтобы система идемпотентов $\alpha_\lambda^{-1} Y(\Gamma_\lambda)$ удовлетворяла соотношениям (4.5.3), (4.5.4). Нам достаточно, чтобы эти идемпотенты порождали непересекающиеся идеалы в $\mathbb{C}[S_r]$ и покрывали всю алгебру $\mathbb{C}[S_r]$, то есть давали разложения (4.5.30) и (4.5.31).

Обсудим соответствие между нестандартными и стандартными таблицами Юнга, сначала на примере таблиц (4.3.54):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 17 & 18 & 13 & 15 & 10 \\ \hline 6 & 16 & 2 & 12 & 8 & \\ \hline 14 & 3 & 1 & 7 & & \\ \hline 11 & 9 & 4 & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 10 & 13 & 15 & 17 & 18 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 12 & 16 & \\ \hline 1 & 3 & 7 & 14 & & \\ \hline 4 & 9 & 11 & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{q'} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 & 12 & 16 & 18 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 14 & 17 & \\ \hline 4 & 9 & 11 & 15 & & \\ \hline 5 & 10 & 13 & & & \\ \hline \end{array} = \Gamma'_\mu. \quad (4.5.56)$$

Первые две таблицы не стандартны, а последняя Γ'_μ – стандартна и получена из первой действием композиции двух перестановок $q' \cdot p = p \cdot q$

$$\Gamma'_\mu = q' \cdot p \cdot \Gamma_\mu = p \cdot q \cdot \Gamma_\mu,$$

где p – горизонтальная перестановка, которая расставляет числа в строках таблицы T_μ по возрастанию слева направо, а q' – вертикальная перестановка, которая расставляет числа в столбцах таблицы $p \cdot T_\mu$ по возрастанию сверху вниз. Согласно (4.3.19), мы ввели обозначение $q = p^{-1} \cdot q' \cdot p$ для вертикальной перестановки, которая переставляет числа в столбцах таблицы T_μ .

- **Задача 131.** Доказать, что вертикальная перестановка $q = p^{-1} \cdot q' \cdot p \in V(T_\mu)$, где p и q' заданы в (4.5.56), имеет вид

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 4 & 2 & 9 & 18 & 14 & 6 & 13 & 15 & 17 & 10 & 5 & 7 & 12 & 11 & 8 & 16 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что если таблица T_λ – стандартна, то любая горизонтальная p или вертикальная q перестановка переведет ее в нестандартную таблицу $p \cdot T_\lambda$ или $q \cdot T_\lambda$. Таким образом, выбор симметризаторов Юнга, построенных только по стандартным таблицам, приводит к отсутствию лишних идемпотентов, связанных друг с другом соотношениями (4.5.54) и приводящим согласно (4.5.55) к одним и тем же левым (или правым) идеалам в $\mathbb{C}[S_r]$.

Конечно, имеются таблицы Юнга (и таких таблиц большинство), которые не приводятся к стандартному виду только горизонтальными, или только вертикальными перестановками (пример: левая таблица в (4.5.56)). Обсудим этот общий случай более подробно.

Утверждение 4.5.4 Любая таблица T'_λ переводится в стандартную таблицу T_λ , имеющую ту же форму λ , двумя последовательными перестановками p' и q , где p' – горизонтальная перестановка, которая расставляет числа в строках таблицы T'_λ по возрастанию слева направо, а q – вертикальная перестановка, которая расставляет числа в столбцах таблицы $p' \cdot T'_\lambda$ по возрастанию сверху вниз. Таким образом, имеет место равенство

$$T_\lambda = q \cdot p' \cdot T'_\lambda \Rightarrow T'_\lambda = (p')^{-1} \cdot q^{-1} \cdot T_\lambda = q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot T_\lambda, \quad (4.5.57)$$

где T_λ – стандартная таблица, а $p = q \cdot p' \cdot q^{-1}$ – горизонтальная перестановка, которая переставляет числа в строках таблицы T_λ .

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Обозначим числа, стоящие в клетках (i, j) таблицы T_λ , где i – номер строки, а j – номер столбца, как $a_{(i,j)}$. Пусть после второй, вертикальной, перестановки q , которая упорядочивает числа в столбцах таблицы $p' \cdot T'_\lambda$ по возрастанию сверху вниз, получившаяся в результате таблица T_λ не стандартна. Это означает, что в T_λ найдется строка i , в которой большее число $a_{(i,j)}$ будет располагаться в клетке $(i, j) \in T_\lambda$ левее меньшего числа $a_{(i,k)}$, попавшего в клетку $(i, k) \in T_\lambda$ (то есть, $k > j$) в той же строке i . Заметим теперь, что в результате действия второй перестановки q и в силу того, что $a_{(i,k)} < a_{(i,j)}$, все i чисел $\{a_{(1,k)}, \dots, a_{(i,k)}\}$ в k -ом столбце T_λ , должны быть меньше, чем числа $\{a_{(i,j)}, a_{(i+1,j)}, \dots\}$ в j -ом столбце T_λ :

$$a_{(1,k)} < a_{(2,k)} < \dots < a_{(i,k)} < a_{(i,j)} < a_{(i+1,j)}, \dots \quad (4.5.58)$$

Так как первая перестановка p' расставляла числа в строках таблицы T'_λ по возрастанию слева направо, то в j -ом столбце таблицы T_λ должно содержаться как минимум

i чисел меньших, чем числа $\{a_{(1,k)}, \dots, a_{(i,k)}\}$ в k -ом столбце T_λ . Однако, в столбце j таблицы T_λ числа, которые могут быть меньше чем $\{a_{(1,k)}, \dots, a_{(i,k)}\}$, в силу (4.5.58), могут располагаться только выше клетки с числом $a_{(i,j)}$, а их количество равно $(i-1)$. Таким образом, мы пришли к противоречию, и следовательно построенная с помощью специальной перестановки $q \cdot p'$ таблица T_λ – стандартная. То, что перестановка $p = q \cdot p' \cdot q^{-1}$ принадлежит $H(T_\lambda)$, следует из (4.3.18). ■

Следствие 4.5.4. Все множество таблиц T'_λ , имеющих форму $\lambda \vdash r$, разбивается на классы $\mathcal{M}(T_\lambda)$ таблиц $T'_\lambda \in \mathcal{M}(T_\lambda)$, которые согласно процедуре (4.5.57) с помощью двух специальных перестановок $p' \in H(T'_\lambda)$ и $q \in V(T_\lambda)$ переводятся в стандартную таблицу T_λ . В этом случае симметризаторы Юнга, построенные по стандартной таблице T_λ и по любой таблице $T'_\lambda \in \mathcal{M}(T_\lambda)$, в силу правила (4.3.22), связаны соотношениями

$$Y(T'_\lambda) = q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot Y(T_\lambda) \cdot p \cdot q = q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot Y(T_\lambda) \cdot q, \quad (4.5.59)$$

(здесь $p \in H(T_\lambda)$ и $q \in V(T_\lambda)$) и для таких симметризаторов автоматически нарушается условие ортогональности, так как мы имеем

$$Y(T'_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot Y(T_\lambda) \cdot q \cdot Y(T_\lambda) = \delta_q \alpha_\lambda q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot Y(T_\lambda) \neq 0. \quad (4.5.60)$$

Замечание 1. Классы $\mathcal{M}(T_\lambda)$ не являются классами эквивалентности. В частности, для некоторых диаграмм Юнга $\lambda \vdash r$ существуют две *стандартные* таблицы T_λ и T'_λ такие, что $T'_\lambda \in \mathcal{M}(T_\lambda)$, но $T_\lambda \notin \mathcal{M}(T'_\lambda)$. Рассмотрим пример двух стандартных таблиц, имеющих форму $\lambda = [3, 2]$:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T'_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad (4.5.61)$$

которые связаны соотношениями (4.5.57), где $q = (2, 5)$, $p' = (2, 4) \cdot (3, 5)$ и $p = q \cdot p' \cdot q^{-1} = (2, 3) \cdot (4, 5)$ и поэтому $T'_\lambda \in \mathcal{M}(T_\lambda)$. Тем не менее, $T_\lambda \notin \mathcal{M}(T'_\lambda)$, так как имеются два числа 1 и 2, которые располагаются в одной строке T_λ и в одном столбце T'_λ ; в связи с чем очевидно не существует двух последовательных перестановок $p \in H(T_\lambda)$ и $q' \in V(T'_\lambda)$ таких, что $T'_\lambda = q' \cdot p \cdot T_\lambda$. Согласно Следствию 2 к Лемме 4.3.2 мы имеем $Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_\lambda) = 0$. Однако, симметризаторы Юнга, построенные по стандартным таблицам (4.5.61), не ортогональны, так как умножая их в другом порядке, опять же в силу Следствия 2 к Лемме 4.3.2, мы имеем соотношения (4.5.57), (4.5.59) и (4.5.60), из которых следует

$$Y(T'_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = -\alpha_{[3,2]} (2, 5) \cdot (4, 5) \cdot (2, 3) \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_{[3,2]} (2, 4) \cdot (3, 5) \cdot Y(T_\lambda) \neq 0, \quad (4.5.62)$$

где константа $\alpha_{[3,2]} = 5!/5 = 24$ определяется по формуле (4.3.36). В (4.5.62) в последнем равенстве мы пронесли транспозицию $(2, 5)$ направо и воспользовались первым тождеством из (4.3.12), которое в данном случае принимает вид: $(2, 5) \cdot Y(T_\lambda) = -Y(T_\lambda)$.

- **Задача 132.** Проверить соотношение (4.5.62), подставив в него явные формулы для симметризаторов $Y(T_\lambda)$ и $Y(T'_\lambda)$, найденные по таблицам (4.5.61).

Итак, система симметризаторов Юнга, построенных по *стандартным таблицам Юнга*, претендует на то, чтобы быть полной системой идемпотентов. Однако,

несмотря на полноту, в силу Замечания 1 эта система в общем случае не будет взаимно ортогональной.

Замечание 2. Мы отмечали в разделе 4.3.2, что для любого симметризатора Юнга $Y(T_\lambda)$ и любого $x \in \mathbb{C}[S_r]$ выполнено соотношение (см. (4.3.43)) $Y(T_\lambda) \cdot x \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_\lambda(x) Y(T_\lambda)$, где $\alpha_\lambda(x)$ — комплексное число. Пусть элемент x таков, что константа $\alpha_\lambda(x) \neq 0$. Тогда, умножая обе части данного соотношения справа (или слева) на x , мы получаем, что элементы

$$Y'(T_\lambda) = x \cdot Y(T_\lambda), \quad Y''(T_\lambda) = Y(T_\lambda) \cdot x, \quad (4.5.63)$$

так же, как и симметризатор Юнга $Y(T_\lambda)$, пропорциональны идемпотентам. При такой модификации левые идеалы, порожденные симметризаторами $Y(T_\lambda)$ и $Y'(T_\lambda)$ (соответственно, правые идеалы, порожденные симметризаторами $Y(T_\lambda)$ и $Y''(T_\lambda)$), совпадают и, таким образом, первое (по левым идеалам) разложение в (4.5.5) не меняется, если мы вместо идемпотента $E(Y(T_\lambda)) = \alpha_\lambda^{-1} Y(T_\lambda)$ будем использовать идемпотент $\alpha_\lambda(x)^{-1} Y'(T_\lambda)$, а второе (по правым идеалам) разложение в (4.5.5) не меняется, если вместо $E(Y(T_\lambda))$ использовать идемпотент $\alpha_\lambda(x)^{-1} Y''(T_\lambda)$. Данная модификация позволяет (см. ниже) сделать симметризаторы Юнга, построенные по стандартным таблицам, взаимно ортогональными.

Для дальнейшего нам понадобится специальное упорядочение стандартных таблиц. Рассмотрим две разные стандартные таблицы T_λ и T'_λ , имеющие одну и ту же форму λ . Сравним числа в клетках этих двух таблиц. Как мы уже указывали, каждую клетку диаграммы Юнга λ можно задать с помощью двух координат (i, j) , где i — номер строки, а j — номер столбца в λ . Число 1 в стандартных таблицах T_λ и T'_λ всегда располагается в клетке $(1, 1)$, то есть в первой клетке первой строки.

Определение 4.5.2 Будем проводить сравнение чисел в стандартных таблицах T_λ и T'_λ в каждой строке слева направо, начиная с первой. Пусть первое различающееся число возникает в i -й строке, в клетке (i, j) , и оно равно k для таблицы T_λ и равно k' для таблицы T'_λ . Если $k' > k$, то будем говорить, что стандартная таблица T'_λ доминирует над стандартной таблицей T_λ .

Все стандартные таблицы T_λ , имеющие одинаковую форму λ , могут быть однозначно упорядочены по отношению к такому доминированию. Данный порядок напоминает правило расстановки слов в словарях, поэтому этот порядок иногда называют **словарным**. Ясно, что в стандартной таблице T'_λ , доминирующей над всеми другими таблицами T_λ , числа будут расставлены по столбцам, то есть сначала будут расставлены числа $(1, 2, \dots, m_1)$ в первом столбце диаграммы λ , имеющем высоту m_1 , затем числа $(m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_1 + m_2)$ будут расставлены во втором столбце с высотой m_2 и так далее. Соответственно, в стандартной таблице T_λ , над которой будут доминировать все другие таблицы T'_λ , числа будут расставлены по строкам. Подчеркнем еще раз, что порядок доминирования устанавливается только для стандартных таблиц, имеющих одну и ту же форму.

Замечание 3. Ниже, в разделе 5.1.3 при доказательстве Утверждения 152, нам понадобится следующий факт. Пусть в стандартной таблице T_λ числа упорядочены по столбцам, а диаграмма $\lambda \vdash r$ имеет n столбцов. Рассмотрим стандартную таблицу $T_{\lambda'}$, которая получается из T_λ отбрасыванием всех столбцов справа с номерами $k + 1, k + 2, \dots, n$. Таким образом, таблица $T_{\lambda'}$ состоит из $k < n$ первых столбцов таблицы T_λ , то есть $T_{\lambda'}$ включена в таблицу T_λ (диаграмма $\lambda' \vdash r'$ включена в диаграмму $\lambda \vdash r$ и $r' < r$). Построим по таблицам T_λ и $T_{\lambda'}$ симметризаторы Юнга $Y(T_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$ и $Y(T_{\lambda'}) \in \mathbb{C}[S_{r'}]$, где подгруппа $S_{r'}$ вложена в S_r естественным образом. Тогда, справедливо тождество

$$Y(T_\lambda) = (\alpha_{\lambda'})^{-1} Y(T_{\lambda'}) \cdot Y(T_\lambda). \quad (4.5.64)$$

Докажем это тождество. Согласно определению (4.3.11) мы имеем

$$Y(T_{\lambda'}) = Q' \cdot P', \quad Y(T_\lambda) = Q \cdot P.$$

Здесь строчные симметризаторы P и P' таблиц T_λ и $T_{\lambda'}$ связаны соотношениями $P = P' \cdot P$, а для столбцовых антисимметризаторов Q и Q' мы имеем $Q = Q' \cdot Q_{k+1} \cdots Q_n$, где Q_i — антисимметризатор чисел в i -ом столбце таблицы T_λ . Так как числа в столбцах таблицы T_λ с номерами $\ell > k$ не содержатся в таблице $T_{\lambda'}$, то мы имеем $P' \cdot Q_\ell = Q_\ell \cdot P'$. Поэтому

$$\begin{aligned} Y(T_\lambda) &= Q \cdot P = Q' \cdot Q_{k+1} \cdots Q_n \cdot P' \cdot P = Q' \cdot P' \cdot Q_{k+1} \cdots Q_n \cdot P = \\ &= Y(T_{\lambda'}) \cdot Q_{k+1} \cdots Q_n \cdot P = (\alpha_{\lambda'})^{-1} Y(T_{\lambda'}) \cdot Y(T_{\lambda'}) \cdot Q_{k+1} \cdots Q_n \cdot P = (\alpha_{\lambda'})^{-1} Y(T_{\lambda'}) \cdot Y(T_\lambda), \end{aligned}$$

что и доказывает (4.5.64).

Утверждение 4.5.5 Пусть две стандартные таблицы T_λ и T'_{λ} имеют одну и ту же форму λ , и пусть таблица T'_{λ} доминирует над таблицей T_λ . Тогда существуют два числа, которые находятся в одной строке таблицы T_λ и в одном столбце T'_{λ} .

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, когда при сравнении чисел в таблицах T_λ и T'_{λ} в каждой строке слева направо, начиная с первой, первое различающееся число возникает в i -й строке, в клетке (i, j) , и оно равно k для таблицы T_λ и равно k' для таблицы T'_{λ} . Если стандартная таблица T'_{λ} доминирует над стандартной таблицей T_λ , то мы имеем $k' > k$. Так как все числа в предыдущих $k(i, j)$ клетках в строках с первой по i -ую у таблиц T_λ и T'_{λ} совпадали и $k' > k$, то число k в стандартной таблице T'_{λ} не может размещаться в строке i , а должно находиться в одной из последующих строк с номером $i' > i$, например в клетке (i', j') , причем должно выполняться неравенство $j' < j$ (см. Рис. 4.3). Поясним это последнее неравенство. Действительно, если бы мы имели $j' \geq j$ (то есть, столбец j' располагается либо правее чем столбец j , либо совпадает со столбцом j), то тогда для стандартной таблицы T'_{λ} выполнялось бы неравенство $k' \leq s < k$, где s — число в клетке с координатами (i, j') , что противоречит изначальному предположению $k' > k$. Далее, в силу того, что все предыдущие числа в строках с первой по i -ую (до клетки (i, j)) совпадали у таблиц T_λ и T'_{λ} , в строке i в клетке (i, j') в обеих таблицах располагается одно и то же число s ($1 \leq s < k$); см. Рис. 4.3. Таким образом, мы получаем, что два числа s и k располагаются в одной строке таблицы T_λ и в одном столбце таблицы T'_{λ} . Что и требовалось доказать. ■

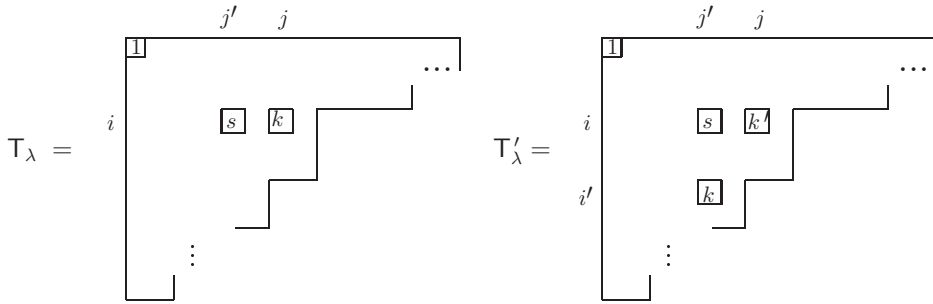


Рис. 4.3: Размещение клеток с числами k, k' и s в стандартных таблицах Юнга T_λ и T'_{λ} .

Следствие 4.5.5. Если стандартная таблица T'_{λ} доминирует над стандартной таблицей T_λ , то согласно Утверждениям 4.3.1 и 4.5.5 мы имеем

$$Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_{\lambda}) = 0. \tag{4.5.65}$$

Замечание 4. Пусть снова стандартная таблица T'_{λ} доминирует над стандартной таблицей T_λ . В силу Следствия 2 к Лемме 4.3.2, либо имеется два числа, которые находятся в одной строке таблицы T'_{λ} и в одном столбце T_λ и тогда согласно Утверждению 4.3.1 в дополнение к (4.5.65) мы имеем

$$Y(T'_{\lambda}) \cdot Y(T_\lambda) = 0, \tag{4.5.66}$$

то есть симметризаторы T'_λ и T_λ – взаимно ортогональны, либо таблица T'_λ с помощью двух специальных перестановок $p' \in H(T'_\lambda)$ и $q \in V(T_\lambda)$ (см. (4.5.57)) переводится в стандартную таблицу T_λ . В этом случае симметризаторы Юнга, построенные по стандартным таблицам T_λ и T'_λ , согласно правилу (4.3.22), связаны соотношениями (4.5.59) и для них имеет место равенство (4.5.60), которое говорит о том, что условие ортогональности для $Y(T'_\lambda)$ и $Y(T_\lambda)$ нарушается.

Вернемся теперь к обсуждению полноты симметризаторов Юнга, построенных по стандартным таблицам.

Утверждение 4.5.6 Пусть $T_{a,\lambda}$ ($a = 1, \dots, f(\lambda)$) – набор всех стандартных таблиц, имеющих форму диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$. Для любых $X_a \in \mathbb{C}[S_r]$ ($a = 1, \dots, f(\lambda)$) элементы $X'_a \equiv X_a \cdot Y(T_{a,\lambda})$ являются линейно независимыми.

Доказательство. Докажем этот факт от противного. Будем считать, что набор $T_{a,\lambda}$ упорядочен так, что $T_{b,\lambda}$ доминирует над $T_{a,\lambda}$, если $b > a$. Пусть существуют константы α_a , не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 X'_1 + \alpha_2 X'_2 + \dots + \alpha_f X'_f = 0, \quad (4.5.67)$$

где для краткости мы положили $f(\lambda) = f$. Подействуем справа на обе части равенства (4.5.67) доминирующим симметризатором $Y(T_{f,\lambda})$ и воспользуемся (4.3.35) и (4.5.65). В результате получим, что $\alpha_f X'_f = 0$, то есть, $\alpha_f = 0$ и слагаемое $\alpha_f X'_f$ не содержится в (4.5.67). Подействуем далее на обе части равенств (4.5.67) симметризатором $Y(T_{f-1,\lambda})$ и воспользуемся (4.5.65) и тем, что $\alpha_f = 0$. В результате получим $\alpha_{f-1} = 0$ и так далее. Продолжая эту процедуру, мы получим, что все коэффициенты α_a в (4.5.67) равны нулю, и следовательно элементы $X'_a \equiv X_a \cdot Y(T_{a,\lambda})$ являются линейно независимыми. ■

Из Утверждения 4.5.6 следует, что левые идеалы $\mathcal{L}_{T_{a,\lambda}}$ и $\mathcal{L}_{T_{b,\lambda}}$ не пересекаются, если $a \neq b$. Более того, из взаимной ортогональности (4.3.29) симметризаторов Юнга, построенных по таблицам T_λ и $T_{\lambda'}$ с разной формой $\lambda \neq \lambda'$, следует, что $\mathcal{L}_{T_{a,\lambda}} \cap \mathcal{L}_{T_{b,\lambda'}} = \emptyset$ для всех a, b . Учитывая все сказанное выше, а также то, что число $f(\lambda)$ стандартных таблиц $T_{a,\lambda}$, имеющих форму $\lambda \vdash r$, совпадает с размерностью левого идеала $\mathcal{L}_{T_{a,\lambda}}$ (это следует из сравнения тождеств (4.3.63) и (4.3.64)), мы заключаем, что идемпотенты Юнга

$$E(T_{a,\lambda}) = \alpha_\lambda^{-1} Y(T_{a,\lambda}), \quad (4.5.68)$$

построенные по всем стандартным таблицам $T_{a,\lambda}$, где λ пробегает все диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$ и $a = 1, \dots, f(\lambda)$, образуют полную систему идемпотентов (здесь полнота понимается именно в том смысле, как это изложено в Замечании 2. раздела 4.5.1) в алгебре $\mathbb{C}[S_r]$. Таким образом, первое разложение (по левым идеалам) в (4.3.55) является справедливым. Справедливость второго разложения (по правым идеалам) в (4.3.55) демонстрируется аналогично. В дальнейшем мы будем обсуждать только разложения в (4.3.55) по левым идеалам. Все выводы, которые будут делаться ниже для этого разложения, легко переносятся на случай разложения по правым идеалам.

Полноту системы идемпотентов (4.5.68), можно выразить, пользуясь (4.3.55), в виде формулы разложения единичного элемента e по элементам левых идеалов, порожденных $E(T_{a,\lambda})$ (сравните с (4.5.31)):

$$e = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f(\lambda)} X_{a,\lambda} \cdot E(T_{a,\lambda}), \quad X_{a,\lambda} \in \mathbb{C}[S_r]. \quad (4.5.69)$$

Как указывалось выше в Замечаниях 1 и 3, не все идемпотенты $E(T_{a,\lambda})$ являются взаимно ортогональными. Однако, согласно (4.5.69) (см. в связи с этим вывод соотношений (4.5.4) из разложения (4.5.3)) следует существование модификации (4.5.63)

$$E(T_{a,\lambda}) \rightarrow E'(T_{a,\lambda}) = X_{a,\lambda} \cdot E(T_{a,\lambda}), \quad (4.5.70)$$

которая дает взаимно ортогональную систему идемпотентов. Поясним, каким образом для такой модификации можно явно вычислять коэффициенты $X_{a,\lambda}$.

Возьмем для некоторой диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$ доминирующую стандартную таблицу $T_{f,\lambda}$ (здесь $f = f(\lambda)$) и подействуем справа на обе части разложения (4.5.69) идемпотентом $E(T_{f,\lambda})$. В силу ортогональности этого идемпотента и всех идемпотентов $E(T_{a,\lambda'})$, для $\lambda' \neq \lambda$, а также в силу соотношений $E(T_{a,\lambda}) \cdot E(T_{f,\lambda}) = 0$ ($\forall a < f$), которые следуют из доминирования $T_{f,\lambda}$, мы получаем

из (4.5.69) тождество $E(\Gamma_{f,\lambda}) = X_{f,\lambda} \cdot E(\Gamma_{f,\lambda})$ и следовательно в разложении (4.5.69) и в определении (4.5.70) новых идемпотентов $E'(\Gamma_{f(\lambda),\lambda})$ мы должны положить $X_{f(\lambda),\lambda} = e$ для всех диаграмм $\lambda \vdash r$. Выделим теперь в разложении (4.5.69) только те члены, которые соответствуют некоторой диаграмме Юнга $\lambda \vdash r$

$$e = \dots + \sum_{a=1}^{f-1} X_{a,\lambda} \cdot E(\Gamma_{a,\lambda}) + E(\Gamma_{f,\lambda}) + \dots, \quad X_{a,\lambda} \in \mathbb{C}[S_r], \quad (4.5.71)$$

где $f = f(\lambda)$, и подействуем на обе части (4.5.69), (4.5.71) справа следующим по доминированию идемпотентом $E(\Gamma_{f-1,\lambda})$. Все слагаемые, обозначенные точками в (4.5.71), а также слагаемые $X_{a,\lambda} \cdot E(\Gamma_{a,\lambda})$ для $a < (f-1)$ исчезнут в силу ортогональности идемпотентов Юнга для разных диаграмм Юнга и в силу доминирования стандартной таблицы $\Gamma_{f-1,\lambda}$ над таблицами $\Gamma_{a,\lambda}$, где $a < (f-1)$. При этом имеются две возможности (см. Замечание 3 выше): либо $E(\Gamma_{f,\lambda}) \cdot E(\Gamma_{f-1,\lambda}) = 0$ и тогда $X_{f-1,\lambda} = e$, либо существуют две перестановки $p \in H(\Gamma_{f-1,\lambda})$ и $q \in V(\Gamma_{f-1,\lambda})$ такие, что $\Gamma_{f,\lambda} = p \cdot q \cdot \Gamma_{f-1,\lambda}$ и тогда, согласно (4.5.60), мы имеем тождество

$$E(\Gamma_{f,\lambda}) \cdot E(\Gamma_{f-1,\lambda}) = \delta_q q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot E(\Gamma_{f-1,\lambda}). \quad (4.5.72)$$

В этом случае мы получаем уравнение

$$E(\Gamma_{f-1,\lambda}) = X_{f-1,\lambda} \cdot E(\Gamma_{f-1,\lambda}) + \delta_q q^{-1} \cdot p^{-1} \cdot E(\Gamma_{f-1,\lambda}), \quad (4.5.73)$$

которое фиксирует коэффициент $X_{f-1,\lambda} = e - \delta_q q^{-1} \cdot p^{-1}$. Далее, подействуем на обе части разложения (4.5.71) справа идемпотентом $E(\Gamma_{f-2,\lambda})$. Рассуждая так же, как и выше, и зная предыдущие коэффициенты $X_{f,\lambda} = e$ и $X_{f-1,\lambda}$, мы находим в (4.5.70) следующий коэффициент $X_{f-2,\lambda}$. Таким образом, продолжая эту процедуру, мы на каждом шаге, умножая (4.5.71) справа на $E(\Gamma_{a,\lambda})$, выражаем коэффициент $X_{a,\lambda}$ через предыдущие $X_{b,\lambda}$ ($b > a$) и следовательно имеем конструктивный способ, который позволяет определить явно все $X_{a,\lambda}$ и все операторы (4.5.70), образующие полную систему взаимно ортогональных идемпотентов.

Пример. В качестве примера построения полной системы взаимно ортогональных идемпотентов рассмотрим случай алгебры $\mathbb{C}[S_5]$. Ограничимся обсуждением только тех симметризаторов Юнга, которые соответствуют диаграмме Юнга $\nu = [3, 2]$. Существует пять стандартных таблиц, имеющих форму диаграммы $\nu = [3, 2]$:

$$\Gamma_{1,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \Gamma_{2,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \Gamma_{3,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \Gamma_{4,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \Gamma_{5,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}. \quad (4.5.74)$$

Здесь таблицы, располагающиеся правее, доминируют над таблицами, располагающимися левее. Легко проверить, что Утверждение 4.5.5 согласуется с порядком доминирования, представленным в (4.5.74). Например, два числа 1 и 2 находятся в одной строке таблицы $\Gamma_{1,\nu}$ и в одном столбце таблиц $\Gamma_{4,\nu}$ и $\Gamma_{5,\nu}$, которые доминируют над $\Gamma_{1,\nu}$. Заметим, что почти для всех пар таблиц, упорядоченных в (4.5.74), имеется обратная ситуация, а именно, если $\Gamma_{b,\nu}$ доминирует над $\Gamma_{a,\nu}$ ($b > a$), то существует пара чисел, которые находятся в одной строке таблицы $\Gamma_{b,\nu}$ и в одном столбце таблицы $\Gamma_{a,\nu}$. Исключение дается (см. Замечание 1 к Утверждению 4.5.4 выше) лишь парой, состоящей из таблиц $\Gamma_{1,\nu}$ и $\Gamma_{5,\nu}$, представленных на (4.5.74). Действительно, не существует двух чисел, которые находятся в одном столбце таблицы $\Gamma_{1,\nu}$ и в одной строке таблицы $\Gamma_{5,\nu}$. Поэтому тождества

$$Y(\Gamma_{a,\nu}) \cdot Y(\Gamma_{b,\nu}) = \alpha_\nu Y(\Gamma_{b,\nu}) \delta_{ab}. \quad (4.5.75)$$

необходимые для взаимно ортогональной системы идемпотентов, выполняются для всех $a, b = 1, \dots, 5$, кроме единственного случая ($a = 5, b = 1$). Для случая ($a = 5, b = 1$) мы имеем равенство (4.5.62)

$$Y(\Gamma_{5,\nu}) \cdot Y(\Gamma_{1,\nu}) = \alpha_\nu (2, 4) \cdot (3, 5) \cdot Y(\Gamma_{1,\nu}) \neq 0, \quad (4.5.76)$$

где $\alpha_\nu = \alpha_{[3,2]} = 24$.

Рассмотрим теперь разложение (4.5.69) единичного элемента $e \in S_5$ и укажем в этом разложении только вклад от симметризаторов Юнга, построенных по таблицам (4.5.74)

$$e = \dots + \sum_{a=1}^5 X_{a,\nu} \cdot E(\Gamma_{a,\nu}) + \dots, \quad X_{a,\lambda} \in \mathbb{C}[S_5], \quad (4.5.77)$$

где $E(\Gamma_{a,\nu}) = \alpha_\nu^{-1} Y(\Gamma_{a,\nu})$ и точками обозначены вклады от симметризаторов $Y(\Gamma_{a,\lambda})$ с $\lambda \neq \nu$. Согласно общей процедуре нахождения коэффициентов $X_{a,\lambda}$, которая была изложена выше, подействуем справа на обе части (4.5.77) идемпотентами $E(\Gamma_{b,\nu})$ с $b = 5, 4, 3, 2$ и воспользуемся формулой (4.5.75) и тем, что все члены, обозначенные точками в (4.5.77), будут зануляться в силу ортогональности симметризаторов Юнга, соответствующих разным диаграммам $\lambda \vdash 5$. В результате из (4.5.77) мы получим соотношения $E(\Gamma_{b,\nu}) = X_{b,\nu} \cdot E(\Gamma_{b,\nu})$ ($b = 5, 4, 3, 2$), из которых следует, что

$$X_{b,\nu} = e, \quad b = 5, 4, 3, 2. \quad (4.5.78)$$

Наконец, умножим обе части (4.5.77) справа на идемпотент $E(\Gamma_{1,\nu})$ и воспользуемся формулой (4.5.75) для $a = b = 1$ и соотношением (4.5.76). В результате получим условие $E(\Gamma_{1,\nu}) = X_{1,\nu} \cdot E(\Gamma_{1,\nu}) + (2, 4) \cdot (3, 5) \cdot E(\Gamma_{1,\nu})$ откуда следует, что

$$X_{1,\nu} = (e - (2, 4) \cdot (3, 5)) \in \mathbb{C}[S_5]. \quad (4.5.79)$$

Таким образом, согласно (4.5.78) и (4.5.79), система взаимно ортогональных идемпотентов (4.5.70), построенных по стандартным таблицам (4.5.74) и определяющих левое разложение Пирса в (4.3.55), имеет вид

$$\begin{aligned} E'(\Gamma_{1,\nu}) &= (e - (2, 4) \cdot (3, 5)) \cdot E(\Gamma_{1,\nu}) = \alpha_\nu^{-1} (e - (2, 4) \cdot (3, 5)) \cdot Y(\Gamma_{1,\nu}), \\ E'(\Gamma_{b,\nu}) &= E(\Gamma_{b,\nu}) = \alpha_\nu^{-1} Y(\Gamma_{b,\nu}), \quad b = 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (4.5.80)$$

- **Задача 133.** Построить операторы (4.5.80) явно по таблицам Юнга (4.5.74) и проверить для них выполнение условий $E'(\Gamma_{a,\nu}) \cdot E'(\Gamma_{b,\nu}) = \delta_{ab} E'(\Gamma_{a,\nu})$ ($a, b = 1, \dots, 5$) с помощью явных вычислений.

Этим мы завершаем обоснование рецепта получения полной системы примитивных, взаимно ортогональных идемпотентов для $\mathbb{C}[S_r]$, сформулированного в начале этого раздела 4.5.2. Ключевым в нем является построение левого и правого разложений Пирса для единичного элемента $e \in S_r$ в терминах симметризаторов Юнга, соответствующих стандартным таблицам Юнга $\Gamma_{a,\lambda}$:

$$e = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f(\lambda)} X_{a,\lambda} \cdot E(\Gamma_{a,\lambda}) = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f(\lambda)} E(\Gamma_{a,\lambda}) \cdot \tilde{X}_{a,\lambda}, \quad (4.5.81)$$

и вычисление факторов $X_{a,\lambda}, \tilde{X}_{a,\lambda} \in \mathbb{C}[S_r]$. Как мы отмечали, необходимость последнего вычисления является недостатком метода. Этот недостаток устраняется в другом подходе, изложенном в разделе 4.6.

4.5.3 Дуальность Шура–Вейля

Напомним (см. раздел 4.4.1), что представление s алгебры $\mathbb{C}[S_r]$, заданное в (4.2.9), (4.2.10), действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$, где \mathcal{V} – комплексное N -мерное векторное пространство определяющего представления T группы $SL(N, \mathbb{C})$. Пусть $\lambda \vdash r$ – разбиение числа r (диаграмма Юнга с r клетками). Каждой такой диаграмме Юнга λ соответствует набор стандартных таблиц Юнга $\Gamma_{a,\lambda}$, ($a = 1, \dots, f(\lambda)$), где число $f(\lambda)$ дается формулами (4.3.56), (4.3.57). По каждой стандартной таблице строится симметризатор Юнга $Y(\Gamma_{a,\lambda}) \in \mathbb{C}[S_r]$, который порождает пространство неприводимого подпредставления $\rho_a^{(\lambda)}$ алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ в ее регулярном представлении. Все представления $\rho_a^{(\lambda)}$ ($a = 1, \dots, f(\lambda)$) – эквивалентны друг другу (см. Утверждение 4.3.4) и мы обозначим их как $\rho^{(\lambda)}$. С другой стороны (см. раздел 4.2), операторы

$$s\left(E(\Gamma_{a,\lambda})\right) = \frac{1}{\alpha_\lambda} s\left(Y(\Gamma_{a,\lambda})\right),$$

действуют как проекторы в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ тензорного произведения представлений $T^{\otimes r}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, коммутируют с действием группы $SL(N, \mathbb{C})$ в представлении $T^{\otimes r}$ и выделяют в $\mathcal{V}^{\otimes r}$ инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ неприводимых представлений $T_a^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$. Представления $T_a^{(\lambda)}$ неприводимы, так как идемпотент $E(T_{a,\lambda})$ – примитивен (см. Следствие к Утверждению 4.3.3). Более того, согласно Утверждению 4.4.1, представления $T_a^{(\lambda)}$, для всех a , оказываются эквивалентными $T_a^{(\lambda)} \equiv T^{(\lambda)}$. Наконец, представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, построенные по двум таблицам T_λ и $T_{\lambda'}$, имеющим форму разных диаграмм Юнга $\lambda \neq \lambda'$, с числом строк, не превышающим $(N - 1)$, неэквивалентны (см. Утверждение 4.4.2). Здесь необходимо помнить, что проекторы $\mathfrak{s}(E(T_{a,\lambda}))$, в случае диаграмм λ с числом строк, превышающим N , являются тривиальными и отображают $\mathcal{V}^{\otimes r}$ в нулевой вектор (см. Разделы 4.4.1 и 4.4.2).

Итак, мы видим, что имеется соответствие между неприводимыми представлениями симметрической группы S_r (алгебры $\mathbb{C}[S_r]$) и неприводимыми представлениями группы $SL(N, \mathbb{C})$ ($SU(N)$), которые выделяются из тензорного произведения $T^{\otimes r}$ ее определяющих представлений. Данное соответствие называется **дуальностью Шура–Вейля**. В случае $N \geq r$ дуальность Шура–Вейля между симметрической группой S_r и матричной группой $SL(N, \mathbb{C})$ выражается также следующим разложением

$$\mathcal{V}^{\otimes r} = \mathfrak{s}(e) \mathcal{V}^{\otimes r} = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f(\lambda)} \mathfrak{s}(E(T_{a,\lambda}) \cdot \tilde{X}_{a,\lambda}) \mathcal{V}^{\otimes r} = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{a=1}^{f(\lambda)} \mathcal{V}^{(a,\lambda)}, \quad (4.5.82)$$

где $\mathcal{V}^{(a,\lambda)} = \mathfrak{s}(E(T_{a,\lambda}) \cdot \tilde{X}_{a,\lambda}) \mathcal{V}^{\otimes r}$ – инвариантные пространства неприводимых представлений $T^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, и мы воспользовались правым разложением Пирса для единичного элемента $e \in S_r$ из (4.5.81). Разложение (4.5.82) можно представить в виде замечательной формулы

$$\mathcal{V}^{\otimes r} = \sum_{\lambda \vdash r} \mathcal{R}_\lambda \otimes \mathcal{V}^{(\lambda)}, \quad (4.5.83)$$

где сумма берется по всем диаграммам Юнга λ с r клетками (по всем разбиениям $\lambda \vdash r$), $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ – пространство (4.4.2) неприводимого представления $T^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$, соответствующее диаграмме Юнга λ , а \mathcal{R}_λ – пространство неприводимого представления $\rho^{(\lambda)}$ группы S_r , которое соответствует той же диаграмме λ . При записи (4.5.82) в форме (4.5.83) мы использовали изоморфизм пространств $\mathcal{V}^{(a,\lambda)} \equiv \mathcal{V}^{(\lambda)}$ для всех $a = 1, \dots, f(\lambda)$, который (чтобы отличать $\mathcal{V}^{(a,\lambda)}$ для разных a друг от друга) можно представить в виде $\mathcal{V}^{(a,\lambda)} = e_{a,\lambda} \otimes \mathcal{V}^{(\lambda)}$, где $e_{a,\lambda}$ ($a = 1, \dots, f(\lambda)$) – базисные вектора в пространстве \mathcal{R}_λ представления $\rho^{(\lambda)}$. Подчеркнем (см. Замечание 3 из Раздела 4.5.1), что базисные вектора $e_{a,\lambda}$ в \mathcal{R}_λ нумеруются примитивными идемпотентами $E(T_{a,\lambda})$ или стандартными таблицами $T_{a,\lambda}$, имеющими форму λ . Таким образом, согласно разложению (4.5.83), в случае $N \geq r$ в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ можно выбрать базис, который построен как прямое произведение базисных векторов $e_{a,\lambda}$ пространства \mathcal{R}_λ и базисных векторов в пространстве $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ неприводимого представления $T^{(\lambda)}$ группы $SL(N, \mathbb{C})$. Напомним, что в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ действие группы S_r в представлении (4.2.9) коммутирует с действием группы $SL(N, \mathbb{C})$ в представлении $T^{\otimes r}$. В таком случае говорят, что в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$ группа S_r *централизует* группу $SL(N, \mathbb{C})$ и наоборот, группа $SL(N, \mathbb{C})$ *централизует* группу S_r .

Замечание. Формула (4.4.33) позволяет проиллюстрировать разложения (4.5.82) и (4.5.83) и поясняет появление стандартных таблиц Юнга в этих разложениях. Рассмотрим тензорное произведение r пространств определяющих представлений и применим последовательно формулу (4.4.33), с учетом соответствия (4.4.29):

$$\begin{aligned} \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_r} &= \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \boxed{3} \otimes \cdots = \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \boxed{4} \otimes \cdots = \\ &= \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \cdots = \end{aligned} \quad (4.5.84)$$

$$= \cdots = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{\tau_{a,\lambda}} \psi_{\tau_{a,\lambda}}, \quad (4.5.85)$$

где во втором и далее равенствах мы использовали краткие обозначения для содержания клеток $\boxed{k} \equiv \boxed{i_k}$, а в последнем равенстве $\sum_{\lambda \vdash r}$ — сумма по всем диаграммам Юнга λ из r клеток, $\sum_{\tau_{a,\lambda}}$ — сумма по всем стандартным таблицам $\tau_{a,\lambda}$, имеющим форму λ и $\psi_{\tau_{a,\lambda}}$ — компоненты тензоров, симметризованных по стандартным таблицам $\tau_{a,\lambda}$ (с соответствующими ортогонализирующими факторами $\tilde{X}_{a,\lambda}$). Отметим, что формула (4.5.84) и дальнейшие формулы, обозначенные точками, будут справедливы лишь до тех пор пока не возникнут диаграммы с числом строк, превышающем N . Это объясняет наше условие $N \geq r$ в соотношениях (4.5.82) и (4.5.83). Отметим также, что в формуле (4.5.84) по построению будут появляться только стандартные таблицы Юнга. Учитывая эквивалентность всех представлений $SL(N, \mathbb{C})$, соответствующих разным стандартным таблицам $\tau_{a,\lambda}$, имеющим одну и ту же форму λ (см. Утверждение 4.4.1), формулу (4.5.84) можно переписать в виде

$$T^{\otimes r} = \sum_{\lambda \vdash r} f_{(\lambda)} T^{(\lambda)}. \quad (4.5.86)$$

Подчеркнем еще раз то, что базисные элементы неприводимого представления λ группы S_r нумеруются стандартными таблицами $\tau_{a,\lambda}$, поэтому сумма (4.5.85) представляет собой результат разложения правых частей (4.5.82) и (4.5.83) по базисным векторам. Отметим, что в формуле (4.5.85) элементы $\tilde{X}_{a,\lambda}$ явно не присутствуют, так как они спрятаны в определение тензоров $\psi_{\tau_{a,\lambda}} \in \mathcal{V}^{(a,\lambda)}$ (см. в связи с этим определение пространства $\mathcal{V}^{(a,\lambda)}$ в формуле (4.5.82)).

4.6 Представления группы перестановок III. Подход Вершика–Окунькова

В этом разделе мы построим все примитивные ортогональные идемпотенты алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ и соответственно построим все неприводимые представления симметрической группы S_r , пользуясь подходом, который разрабатывался А.Юцисом, Г.Мёрфи и другими и в окончательном виде был сформулирован сравнительно недавно А. Вершиком и А. Окуньковым [45]. Как мы уже анонсировали, этот подход будет свободен от недостатка, присущего теории Юнга–Фробениуса (см. раздел 4.5). Наше изложение

подхода Вершика–Окунькова будет несколько упрощено по сравнению с оригинальной версией [45], за счет использования специальных сплетающих операторов U_k (см. ниже). Такое упрощение было предложено в работе [43], в которой метод Вершика–Окунькова применялся для построения неприводимых представлений алгебр Гекке A -типа, обобщающих алгебры $\mathbb{C}[S_r]$.

4.6.1 Элементы Юциса–Мёрфи и сплетающие операторы в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$

Мы будем пользоваться для группы перестановок S_n презентацией Кокстера, в которой образующими являются соседние транспозиции $\sigma_k = (k, k+1)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), удовлетворяющие соотношениям (4.3.13). Для удобства мы выпишем эти соотношения еще раз

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad \text{соотношения кос;} \\ [\sigma_i, \sigma_k] &= 0, \quad |i-k| > 1, \quad \text{соотношения локальности;} \\ \sigma_i^2 &= e. \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Определим в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ симметрической группы S_n набор элементов $\{y_m\}$ ($m = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \quad y_m = \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k \cdots \sigma_{m-2} \sigma_{m-1} \sigma_{m-2} \cdots \sigma_k = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \cdots \sigma_{m-1} = (1, m) + (2, m) + \cdots + (m-1, m), \\ & \quad m = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

Тривиальный элемент $y_1 = 0$ включен в этот набор для удобства. Операторы y_m называются *элементами Юциса–Мёрфи* и играют важную роль при построении примитивных идемпотентов в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$, необходимых для теории представлений, которая будет излагаться ниже. Отметим, что элементы Юциса–Мёрфи (4.6.2) можно задать с помощью индуктивной процедуры

$$y_1 = 0, \quad y_{m+1} = \sigma_m + \sigma_m \cdot y_m \cdot \sigma_m. \tag{4.6.3}$$

Для иллюстрации выпишем несколько элементов y_m в терминах образующих σ_i :

$$y_2 = \sigma_1, \quad y_3 = \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad y_4 = \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad \dots \tag{4.6.4}$$

Из определений (4.6.2), (4.6.3) и соотношений (4.6.1) следует, что элементы y_m удовлетворяют равенствам (они понадобятся нам в дальнейшем):

$$y_{m+1} \cdot \sigma_m = \sigma_m \cdot y_m + 1, \quad \sigma_m \cdot y_{m+1} = y_m \cdot \sigma_m + 1, \tag{4.6.5}$$

$$[y_m, \sigma_i] = 0, \quad m \neq i, i+1. \tag{4.6.6}$$

Здесь и далее тождественная перестановка $e \in S_n$ обозначается как 1, соответственно $c \cdot e$, где c — константа, будет записываться как c .

Определение 4.6.1 Будем говорить, что алгебра \mathcal{A} порождается образующими $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, если любой элемент из \mathcal{A} представляется в виде полинома от элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Замечание 1. Из соотношений (4.6.1) следует, что алгебра $\mathbb{C}[S_k]$ ($\forall k = 2, \dots, n$) порождается последней образующей σ_{k-1} и предыдущими элементами $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{k-2}\}$, которые в свою очередь порождают подалгебру $\mathbb{C}[S_{k-1}] \subset \mathbb{C}[S_k]$. Пусть Z_k — центральная подалгебра в $\mathbb{C}[S_k]$. Тогда, мы имеем естественное включение друг в друга групповых подалгебр $\mathbb{C}[S_k] \subset \mathbb{C}[S_n]$, а соответствующие центральные подалгебры Z_k вкладываются в $\mathbb{C}[S_k]$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{C}[S_2] & \subset & \mathbb{C}[S_3] & \subset & \dots & \subset & \mathbb{C}[S_{n-1}] & \subset & \mathbb{C}[S_n] \\ \cup & & \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ Z_2 & & Z_3 & & \dots & & Z_{n-1} & & Z_n \end{array} \quad (4.6.7)$$

Определим подалгебру $GZ_n \subset \mathbb{C}[S_n]$, которая порождается элементами всех центральных подалгебр Z_1, Z_2, \dots, Z_n , где Z_1 состоит из одного единичного элемента $e \in \mathbb{C}[S_n]$. Очевидно, что GZ_n — коммутативна и по аналогии со случаем линейных и ортогональных алгебр Ли эта подалгебра называется *подалгеброй Гельфанда–Цетлина*. Она замечательна не только тем, что является максимальной абелевой (коммутативной) подалгеброй в $\mathbb{C}[S_n]$, то есть всякий элемент z , коммутирующий со всеми элементами GZ_n , сам принадлежит GZ_n , но и тем, что $GZ_1 \subset \dots \subset GZ_{n-1} \subset GZ_n$. Из определения элементов Юциса–Мёрфи (4.6.2) следует, что

$$y_m = z_m - z_{m-1}, \quad (4.6.8)$$

где каждый элемент $z_m = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (i, j)$ равен сумме всех транспозиций в $\mathbb{C}[S_m]$ и очевидно принадлежит центральной подалгебре $Z_m \subset \mathbb{C}[S_m]$. Поэтому элементы Юциса–Мёрфи y_2, \dots, y_n коммутативны и принадлежат подалгебре Гельфанда–Цетлина GZ_n . Более того, можно показать (см. [45]), что абелева подалгебра Y_n , порожденная элементами Юциса–Мёрфи $\{y_2, \dots, y_n\}$, совпадает с подалгеброй Гельфанда–Цетлина GZ_n . Итак, мы приходим к следующему Утверждению.

Утверждение 4.6.1 Операторы Юциса–Мёрфи $\{y_2, \dots, y_n\}$ образуют полный набор коммутирующих элементов в $\mathbb{C}[S_n]$:

$$[y_i, y_j] = 0, \quad \forall i, j. \quad (4.6.9)$$

В данном случае полнота означает, что любой элемент $y \in \mathbb{C}[S_n]$, коммутирующий со всеми элементами y_i , представляется в виде полинома от элементов y_i .

- **Задача 134.** Проверить явно, что $[y_i, y_j] = 0$ ($\forall i, j$), пользуясь для этого последним представлением из (4.6.2).

Замечание 2. Имеется большое число полиномиальных соотношений, связывающих элементы Юциса–Мёрфи $\{y_1, \dots, y_n\}$, то есть эти элементы зависимы в алгебраическом смысле.

- **Задача 135.** Используя определение (4.6.2), доказать тождества

$$(y_2 + 1)(y_3 + 1)(y_3 - 2) = 0, \quad (y_2 + 1)(y_3 + 1)(y_4 + 1)(y_4 - 3) = 0. \quad (4.6.10)$$

Определим в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ *сплетающие операторы* U_k , которые будут чрезвычайно важны для нашего дальнейшего рассмотрения:

$$\begin{aligned} U_k &= \sigma_k \cdot y_k - y_k \cdot \sigma_k = y_{k+1} \cdot \sigma_k - \sigma_k \cdot y_{k+1} = \\ &= (y_{k+1} - y_k)\sigma_k - 1 = \sigma_k(y_k - y_{k+1}) + 1, \\ &k = 1, \dots, n - 1. \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Утверждение 4.6.2 Коммутационные соотношения сплетающего оператора U_k с образующими σ_m и элементами Юциса–Мёрфи y_m имеют вид:

$$U_k \cdot \sigma_k = -\sigma_k \cdot U_k, \quad U_k \cdot \sigma_m = \sigma_m \cdot U_k \quad (|k - m| > 1). \tag{4.6.12}$$

$$\begin{aligned} U_k \cdot y_m &= y_m \cdot U_k \quad (m \neq k, k + 1), \\ U_k \cdot y_k &= y_{k+1} \cdot U_k, \quad U_k \cdot y_{k+1} = y_k \cdot U_k. \end{aligned} \tag{4.6.13}$$

Соотношения для U_k и $\sigma_{k\pm 1}$ для нас не представляют интереса, поэтому мы их не выписываем. Кроме того, сплетающие операторы U_k удовлетворяют соотношениям группы кос:

$$U_k \cdot U_{k+1} \cdot U_k = U_{k+1} \cdot U_k \cdot U_{k+1}, \tag{4.6.14}$$

а квадрат оператора U_k выражается в виде функции от элементов y_k и y_{k+1} :

$$U_k^2 = (1 + y_{k+1} - y_k)(1 - y_{k+1} + y_k) = 1 - (y_{k+1} - y_k)^2, \tag{4.6.15}$$

и, таким образом, принадлежит абелевой подалгебре Y_n .

Доказательство. Первое соотношение в (4.6.12) получается с помощью $\sigma_k^2 = 1$ (см. (4.6.1)) следующим образом

$$U_k \cdot \sigma_k = (\sigma_k \cdot y_k - y_k \cdot \sigma_k)\sigma_k = -\sigma_k(\sigma_k \cdot y_k - y_k \cdot \sigma_k) = -\sigma_k \cdot U_k.$$

Второе соотношение в (4.6.12) и первое в (4.6.13) непосредственно следуют из (4.6.6) и соотношений локальности (4.6.1). Докажем второе соотношение в (4.6.13) (третье соотношение в (4.6.13) доказывается аналогично). Воспользуемся для этого определениями (4.6.3), (4.6.11) и тождествами (4.6.5), (4.6.9):

$$\begin{aligned} y_{k+1} \cdot U_k &= y_{k+1} \cdot (\sigma_k(y_k - y_{k+1}) + 1) = (\sigma_k \cdot y_k + 1)(y_k - y_{k+1}) + y_{k+1} = \\ &= \sigma_k(y_k - y_{k+1})y_k + y_k = U_k \cdot y_k. \end{aligned}$$

Соотношение (4.6.15) получается следующим образом

$$\begin{aligned} U_k \cdot U_k &= (\sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) + 1) \cdot U_k = \sigma_k \cdot U_k \cdot (y_{k+1} - y_k) + U_k = \\ &= (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_k) + 1 = (1 + y_{k+1} - y_k) \cdot (1 - y_{k+1} + y_k), \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенствами (4.6.13) и последним представлением из (4.6.11).

Перейдем теперь к доказательству соотношения кос (4.6.14). Преобразуем сначала правую часть (4.6.14) для чего, учитывая явное выражение (4.6.11) и формулы

(4.6.12), (4.6.13), постараемся протащить все элементы Юциса–Мёрфи y_m направо:

$$\begin{aligned}
 U_{k+1} \cdot U_k \cdot U_{k+1} &= \left(\sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + 1 \right) \cdot U_k \cdot U_{k+1} = \\
 &= \sigma_{k+1} \cdot U_k \cdot U_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+1}) + U_k \cdot U_{k+1} = \\
 &= \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+1}) + \\
 &+ \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+1}) + (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+1}) + \\
 &+ \sigma_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_k \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+2}) + \\
 &+ \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + 1,
 \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

где мы подставили выражение

$$\begin{aligned}
 U_k \cdot U_{k+1} &= \left(\sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) + 1 \right) \cdot U_{k+1} = \sigma_k \cdot U_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) + U_{k+1} = \\
 &= \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + 1
 \end{aligned}$$

Пользуясь этой же формулой, соотношениями (4.6.13), а также последним представлением из (4.6.11), мы получаем для левой части (4.6.14):

$$\begin{aligned}
 (U_k \cdot U_{k+1}) \cdot U_k &= \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot U_k \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \\
 &+ \sigma_k \cdot U_k \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \sigma_{k+1} \cdot U_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + U_k = \\
 &= \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \\
 &+ \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \\
 &+ \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_k - y_{k+2}) + \\
 &+ \sigma_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) + 1,
 \end{aligned} \tag{4.6.17}$$

Сравнивая правые части в (4.6.16) и (4.6.17), мы получаем (4.6.14). ■

Следствие. Согласно (4.6.13) правило коммутирования сплетающего оператора U_k с любой функцией $f(y_1, \dots, y_n)$ сводится к перестановке в $f(y_1, \dots, y_n)$ двух элементов Юциса–Мёрфи y_k и y_{k+1} :

$$U_k \cdot f(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_{k+1}, y_k, \dots, y_n) \cdot U_k. \tag{4.6.18}$$

Отсюда следует необходимое условие того, чтобы функция $f(y_1, \dots, y_n)$ принадлежала центру Z_n алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. А именно, функция $f(y_1, \dots, y_n)$ должна быть симметричной по всем своим аргументам. Оказывается, что это условие является не только необходимым, но и достаточным условием центральности для функции $f(y_1, \dots, y_n)$.

Утверждение 4.6.3 *Любая симметрическая функция f_s от переменных $\{y_1, \dots, y_n\}$ принадлежит центру групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$:*

$$[\sigma_k, f_s(y_1, \dots, y_n)] = 0, \quad \forall k. \tag{4.6.19}$$

Доказательство. Центральность (4.6.19) симметрической функции $f_s(y_1, \dots, y_n)$ следует из того, что любую такую функцию можно, учитывая частную симметрию по двум переменным y_k и y_{k+1} , записать в виде

$$f_s(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = \tilde{f}(y_1, \dots, y_{k-1}, (y_k \cdot y_{k+1}), (y_k + y_{k+1}), y_{k+2}, \dots, y_n),$$

после чего следует воспользоваться соотношениями локальности (4.6.6) и равенствами

$$[\sigma_k, y_k \cdot y_{k+1}] = 0, \quad [\sigma_k, y_k + y_{k+1}] = 0,$$

которые проверяются непосредственно с помощью индуктивной формулы (4.6.3) и равенств (4.6.1). ■

Замечание 3. Центральные элементы $z_n \in \mathbb{C}[S_n]$, использованные в (4.6.8) и равные сумме всех транспозиций, записываются как простейшие симметрические функции

$$z_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

4.6.2 Идемпотенты и спектр операторов Юциса–Мёрфи

Будем теперь строить полный набор примитивных взаимно ортогональных идемпотентов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_n]$, для которых выполняются соотношения (4.5.3), (4.5.4). При этом, учитывая неоднозначность их определения, потребуем, чтобы идемпотенты e_α являлись собственными векторами операторов Юциса–Мёрфи в левом регулярном представлении:

$$y_k \cdot e_\alpha = a_k^{(\alpha)} e_\alpha \quad (a_k^{(\alpha)} \in \mathbb{C}) \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (4.6.20)$$

Такой выбор идемпотентов для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ всегда возможен. В частности, идемпотенты (4.5.33), построенные для алгебры $\mathbb{C}[S_2]$, удовлетворяют соотношениям (4.5.34), которые, учитывая $\sigma_1 = y_2$, совпадают с (4.6.20).

- *Задача 136.* Проверить, что в алгебре $\mathbb{C}[S_3]$ идемпотенты (4.5.37) при специальном выборе $\varepsilon = 1/2$ являются идемпотентами типа (4.6.20):

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[3]} &= (0, 1, 2) e_{[3]}, & (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[13]} &= (0, -1, -2) e_{[13]}, \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[2,1]_1} &= (0, 1, -1) e_{[2,1]_1}, & (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[2,1]_2} &= (0, -1, 1) e_{[2,1]_2}. \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Из формулы (4.6.20) следует коммутативность идемпотентов e_α и образующих Юциса–Мёрфи $\{y_k\}$. Действительно, умножим обе части (4.6.20) слева на e_β :

$$e_\beta \cdot y_k \cdot e_\alpha = \delta_{\alpha\beta} a_k^{(\alpha)} e_\alpha,$$

и просуммируем по всем α . Учитывая условие полноты (4.5.3), в результате имеем

$$e_\beta \cdot y_k = a_k^{(\beta)} e_\beta \quad \forall \beta. \quad (4.6.22)$$

Сравнивая это соотношение при $\beta = \alpha$ с условием (4.6.20), мы получаем

$$[y_k, e_\alpha] = 0, \quad \forall k. \quad (4.6.23)$$

Так как элементы Юциса–Мёрфи $\{y_k\}$ образуют полный набор коммутирующих операторов в $\mathbb{C}[S_n]$ (см. Утверждение 4.6.1), то идемпотенты e_α , удовлетворяющие

(4.6.20) и (4.6.23), принадлежат подалгебре Гельфанда–Цетлина Y_n и, таким образом, должны строиться как некоторые функции от $\{y_m\}$.

Итак, согласно (4.6.20) каждый искомый примитивный идемпотент e_α характеризуется набором собственных значений

$$\Lambda^{(\alpha)} = (a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)}) \in \text{Spec}(y_1, y_2, \dots, y_n). \tag{4.6.24}$$

Здесь $\text{Spec}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ обозначает множество спектров $(a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)})$, соответствующих всем примитивным взаимно ортогональным идемпотентам e_α , образующим полную систему. При этом, каждому набору $\Lambda^{(\alpha)}$ соответствует единственный примитивный идемпотент $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_n]$, иначе набор коммутирующих элементов $\{y_2, \dots, y_n\}$ не был бы полным (см. Утверждение 4.6.1). Отметим также, что если $(a_1^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)}) \neq (a_1^{(\beta)}, \dots, a_n^{(\beta)})$, то из условий (4.6.20) и (4.6.22) автоматически следует ортогональность $e_\alpha \cdot e_\beta = 0$ соответствующих идемпотентов, что также согласуется с нашим изначальным предположением.

- **Задача 137.** Получить ортогональность элементов e_α и e_β , пользуясь только (4.6.20) и (4.6.22), при условии $\Lambda^{(\alpha)} \neq \Lambda^{(\beta)}$.

Рассмотрим теперь следующее размещение целых чисел в верхнем левом углу бесконечномерной матрицы

0	1	2	3	...
-1	0	1	2	...
-2	-1	0	1	...
-3	-2	-1	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	...

То есть, на главной диагонали стоят нули, на ближайшей к главной диагонали сверху стоят +1, на ближайшей к главной диагонали снизу стоят -1, на следующей диагонали сверху стоят +2, снизу - (-2), и так далее. Число, приписанное таким образом данной клетке, будем называть **содержанием (контентом)** этой клетки. Итак, клетка с координатами (k, m) , где k – номер строки, а m – номер столбца, имеет содержание $(m - k)$. Поместим теперь в этот угол стандартную таблицу Юнга T_{λ_n} , имеющую форму диаграммы Юнга λ_n с n клетками. В результате получаем стандартную таблицу Юнга, в которой клетка с координатами (k, m) характеризуется как имевшимся в таблице Юнга числом (номером) i , так и содержанием $(m - k)$, то есть она выглядит как $\boxed{i \ m-k}$. Полагая $a_i = (m - k)$, мы каждой стандартной таблице T_{λ_n} , у которой все клетки имеют i и номер и содержание, однозначно сопоставляем последовательность из n целых чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) . Эти последовательности мы будем называть **векторами содержаний** длины n . Множество векторов содержаний длины n , соответствующих всем стандартным таблицам T_λ , имеющим форму диаграммы $\lambda \vdash n$, будем обозначать как $\text{Cont}(\lambda)$.

В качестве примера рассмотрим стандартную таблицу

$$T_{\lambda_8} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 8 & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

($\lambda_8 = [4, 3, 1]$) и поместим в клетки этой таблицы их содержание в соответствии с правилами, которые были указаны выше. Таким образом возникает таблица

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\
 \hline
 3 & -1 & 5 & 0 & 8 & 1 & & \\
 \hline
 7 & -2 & & & & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{4.6.25}$$

с которой взаимнооднозначно связана последовательность чисел $(a_1, a_2, \dots, a_8) = (0, 1, -1, 2, 0, 3, -2, 1) \in \text{Cont}(\lambda_8)$.

Ниже мы покажем (и это будет основным результатом данного раздела), что каждому примитивному идемпотенту $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_n]$, удовлетворяющему условиям (4.6.20), можно взаимнооднозначно сопоставить единственную стандартную таблицу $T_{\lambda_n} \leftrightarrow e_\alpha$ так, что последовательность собственных значений (4.6.24) образующих Юциса–Мёрфи на векторе e_α будет совпадать с вектором содержаний (последовательностью контентов) клеток в стандартной таблице T_{λ_n} :

$$(a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)}) = (a_1, a_2, \dots, a_n). \tag{4.6.26}$$

Содержание a_1 первой клетки в стандартной таблице T_{λ_n} всегда равно нулю, что согласуется с собственным значением $a_1^{(\alpha)} = 0$ элемента y_1 в силу его определения (4.6.2).

Отметим здесь, что идемпотенты, удовлетворяющие (4.6.20), вообще говоря, не совпадают с нормированными симметризаторами Юнга (4.3.51), построенными по стандартным таблицам T_{λ_n} . Например, идемпотенты (4.5.37), для которых в случае $\varepsilon = \frac{1}{2}$ выполняются равенства (4.6.21), не равны симметризаторам Юнга (4.5.51), возникающим из (4.5.37) в случае $\varepsilon = 0$.

Итак, примитивные идемпотенты $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_n]$, подчиняющиеся (4.6.20), ассоциируются с одной стороны со стандартными таблицами Юнга с n клетками и последовательностью контентов (a_1, \dots, a_n) , а с другой стороны, как мы знаем (см. подраздел 4.5.1), каждый такой идемпотент порождает, при действии на него слева (справа) всей алгеброй $\mathbb{C}[S_n]$, неприводимое представление этой алгебры (группы S_n). Тем самым, и в данном подходе, устанавливается соответствие между неприводимыми представлениями алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ (группы S_n) и таблицами Юнга. Ниже мы укажем (см. подраздел 4.6.4) конструктивный способ построения идемпотентов, удовлетворяющих (4.6.20), с набором собственных значений $(a_1^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)})$, соответствующих содержанию клеток стандартных таблиц Юнга. Замечательно, что этот способ будет автоматически давать полную систему взаимно ортогональных идемпотентов.

Отметим прежде всего, что в правой части (4.6.26) стоит последовательность целых чисел (содержаний), поэтому в качестве первого шага к установлению соответствия (4.6.26) докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.6.4 *Спектр операторов Юциса–Мёрфи y_j для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ таков, что*

$$\text{Spec}(y_j) \subset [1 - j, j - 1] \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n), \tag{4.6.27}$$

где $[1 - j, j - 1]$ обозначает набор целых чисел

$$[1 - j, j - 1] = \{1 - j, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, j - 1\}. \tag{4.6.28}$$

Подчеркнем, что из формулы (4.6.27), вообще говоря не следует, что в спектре оператора y_j содержатся **все** целые числа из отрезка $[1 - j, j - 1]$. Например, в спектре оператора y_2 не содержится собственное значение 0, см. (4.6.21) и формулу (4.6.29) ниже.

Доказательство. Мы докажем (4.6.27) по индукции. Из последнего условия в (4.6.1) следует, что элемент $y_2 = \sigma_1$ удовлетворяет характеристическому тождеству:

$$(y_2 - 1)(y_2 + 1) = 0 . \tag{4.6.29}$$

Таким образом, $\text{Spec}(y_2) = \{-1, +1\}$ и следовательно спектр оператора y_2 удовлетворяет (4.6.27). Допустим, что спектр y_{j-1} удовлетворяет (4.6.27) для некоторого $j \geq 3$. Докажем, что в этом случае спектр y_j также удовлетворяет (4.6.27). Рассмотрим характеристическое уравнение для элемента y_{j-1} (сравните с (4.6.29)):

$$\prod_{\alpha} (y_{j-1} - a_{j-1}^{(\alpha)}) = 0 , \tag{4.6.30}$$

где $a_{j-1}^{(\alpha)} \in \text{Spec}(y_{j-1})$. Введем обозначение для функции, стоящей в левой части (4.6.30)

$$f(y_{j-1}) \equiv \prod_{\alpha} (y_{j-1} - a_{j-1}^{(\alpha)}) .$$

Используя сплетающие операторы U_{j-1} и их свойства (4.6.13), (4.6.15), из уравнения (4.6.30) мы получаем тождество

$$0 = U_{j-1} \cdot f(y_{j-1}) \cdot U_{j-1} = f(y_j) \cdot U_{j-1}^2 = f(y_j) \cdot (1 - (y_{j-1} - y_j)^2) , \tag{4.6.31}$$

которое означает, что

$$\text{Spec}(y_j) \subset \text{Spec}(y_{j-1}) \cup \left(\text{Spec}(y_{j-1}) + 1 \right) \cup \left(\text{Spec}(y_{j-1}) - 1 \right) ,$$

и следовательно доказывает (4.6.27). ■

Пусть $\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ — набор собственных значений элементов Юциса–Мёрфи (образующих (y_1, \dots, y_n) коммутативной подалгебры Y_n), который возникает при действии этих элементов на примитивный идемпотент $e_{\Lambda} \in \mathbb{C}[S_n]$ (см. (4.6.20)). В дальнейшем будем говорить, что идемпотент e_{Λ} имеет спектральный набор $\Lambda \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$.

Утверждение 4.6.5 *Собственные значения соседних операторов Юциса–Мёрфи y_i и y_{i+1} на одном и том же идемпотенте e_{Λ} не совпадают. То есть, набор Λ таков, что $a_i \neq a_{i+1}$ для всех $i = 1, \dots, n - 1$.*

Доказательство. Будем доказывать это утверждение от противного. Пусть для некоторого примитивного идемпотента $e_{\Lambda} \neq 0$ мы имеем $a_i = a_{i+1}$, то есть

$$y_i \cdot e_{\Lambda} = a_i e_{\Lambda} = y_{i+1} \cdot e_{\Lambda} . \tag{4.6.32}$$

Тогда, пользуясь определением (4.6.11) сплетающего оператора U_i , мы получаем

$$e_{\Lambda} \cdot U_i \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} \cdot \left(\sigma_i \cdot (y_i - y_{i+1}) + 1 \right) \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} . \tag{4.6.33}$$

С другой стороны, согласно (4.6.20) и (4.6.22) имеем

$$e_\Lambda \cdot U_i \cdot e_\Lambda = e_\Lambda \cdot (\sigma_i \cdot y_i - y_i \cdot \sigma_i) \cdot e_\Lambda = e_\Lambda \cdot (\sigma_i \cdot a_i - a_i \cdot \sigma_i) \cdot e_\Lambda = 0 .$$

Сравнивая это равенство с (4.6.33), мы приходим к противоречию. \blacksquare

Пусть $e_{\Lambda'} \in \mathbb{C}[S_n]$ – идемпотент, имеющий спектральный набор $\Lambda' = (a'_1, \dots, a'_n)$. Пользуясь (4.6.13), получаем ($k = 2, \dots, n$):

$$a_k e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot e_\Lambda = e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot y_k \cdot e_\Lambda = e_{\Lambda'} \cdot y_{\sigma_i(k)} \cdot U_i \cdot e_\Lambda = a'_{\sigma_i(k)} e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot e_\Lambda , \quad (4.6.34)$$

где $\sigma_i = (i, i + 1)$ – соседняя транспозиция, то есть $\sigma_i(k) = k$ для всех $k \neq i, i + 1$, и $\sigma_i(i + 1) = i$, $\sigma_i(i) = i + 1$. Поэтому, если $e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot e_\Lambda \neq 0$, то $a'_{\sigma_i(k)} = a_k$, что эквивалентно равенству

$$\Lambda' \equiv s_i \cdot \Lambda = (a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \text{Спец}(y_1, \dots, y_n) . \quad (4.6.35)$$

Здесь оператор s_i переставляет в наборе Λ только собственные значения a_i и a_{i+1} , а остальные собственные значения оставляет на своих местах. С другой стороны, из (4.6.34) следует, что

$$e_{\Lambda''} \cdot U_i \cdot e_\Lambda = 0 , \quad \forall \Lambda'' \neq s_i \cdot \Lambda . \quad (4.6.36)$$

Напомним, что каждому спектральному набору Λ соответствует единственный примитивный идемпотент $e_\Lambda \in \mathbb{C}[S_n]$, что следует из утверждения о полноте набора коммутирующих элементов $\{y_2, \dots, y_n\}$ (см. Утверждение 4.6.1).

Утверждение 4.6.6 Пусть $e_\Lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ – идемпотент, имеющий спектральный набор

$$\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Спец}(y_1, \dots, y_n) . \quad (4.6.37)$$

1.) Если $|a_{i+1} - a_i| \neq 1$, то существует идемпотент $e_{\Lambda'} \in \mathbb{C}[S_n]$, спектральный набор которого равен (4.6.35), и выполняются тождества

$$U_i \cdot e_\Lambda = e_{\Lambda'} \cdot U_i , \quad e_\Lambda \cdot U_i = U_i \cdot e_{\Lambda'} . \quad (4.6.38)$$

2.) Если $\Lambda' = s_i \Lambda \notin \text{Спец}(y_1, \dots, y_n)$, то идемпотент $e_\Lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ удовлетворяет соотношениям

$$U_i \cdot e_\Lambda = 0 , \quad e_\Lambda \cdot U_i = 0 . \quad (4.6.39)$$

и $|a_{i+1} - a_i| = 1$.

Доказательство. 1.) Пусть $|a_{i+1} - a_i| \neq 1$. Докажем существование идемпотента $e_{\Lambda'}$, имеющего спектральный набор (4.6.35). Рассмотрим произведение

$$U_i \cdot e_\Lambda = \left(\sigma_i(y_i - y_{i+1}) + 1 \right) \cdot e_\Lambda = \left(\sigma_i(a_i - a_{i+1}) + 1 \right) \cdot e_\Lambda . \quad (4.6.40)$$

Так как оператор $\left(\sigma_i(a_i - a_{i+1}) + 1 \right)$ обратим в случае $|a_{i+1} - a_i| \neq 1$, то $U_i \cdot e_\Lambda \neq 0$. Пользуясь условием полноты (4.5.3) и учитывая (4.6.36), мы получаем

$$U_i \cdot e_\Lambda = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \cdot U_i \cdot e_\Lambda = e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot e_\Lambda . \quad (4.6.41)$$

Поскольку $U_i \cdot e_\Lambda \neq 0$, среди полного набора идемпотентов должен существовать идемпотент $e_{\Lambda'} \neq 0$, имеющий спектральный набор (4.6.35). Далее, снова пользуясь условием полноты (4.5.3) и условием (4.6.36), в дополнение к соотношению (4.6.41) мы выводим

$$e_{\Lambda'} \cdot U_i = e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot \sum_{\alpha} e_{\alpha} = e_{\Lambda'} \cdot U_i \cdot e_{\Lambda}. \quad (4.6.42)$$

Сравнивая (4.6.41) и (4.6.42), мы приходим к первому равенству из (4.6.38). Второе равенство в (4.6.38) выводится аналогично, или получается из первого следующим образом:

$$\begin{aligned} U_i \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda'} \cdot U_i &\Rightarrow U_i^2 \cdot e_{\Lambda} \cdot U_i = U_i \cdot e_{\Lambda'} \cdot U_i^2 \Rightarrow \\ (1 - (a_{i+1} - a_i)^2) \cdot e_{\Lambda} \cdot U_i &= U_i \cdot e_{\Lambda'} \cdot (1 - (a_{i+1} - a_i)^2) \Rightarrow e_{\Lambda} \cdot U_i = U_i \cdot e_{\Lambda'}, \end{aligned}$$

где мы применили тождество (4.6.15), а также учли то, что $(a_{i+1} - a_i)^2 \neq 1$.

2.) Если $\Lambda' = s_i \cdot \Lambda$ не принадлежит $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$, то есть среди полной системы идемпотентов нет идемпотента со спектральным набором Λ' , то суммируя равенства (4.6.36) по всем наборам Λ'' и используя условие полноты (4.5.3), мы получаем первое тождество в (4.6.39). Второе тождество в (4.6.39) доказывается аналогично. Докажем теперь, что в этом случае $|a_i - a_{i+1}| = 1$. Распишем явно первое соотношение в (4.6.39):

$$0 = U_i \cdot e_{\Lambda} = \left(\sigma_i(y_i - y_{i+1}) + 1 \right) \cdot e_{\Lambda} = \left(\sigma_i(a_i - a_{i+1}) + 1 \right) \cdot e_{\Lambda}. \quad (4.6.43)$$

Если $|a_i - a_{i+1}| \neq 1$, то оператор $\left(\sigma_i(a_i - a_{i+1}) + 1 \right)$ обратим, и (4.6.43) дает $e_{\Lambda} = 0$, что противоречит начальному предположению. ■

Следствие 1. Умножим обе части первого равенства в (4.6.38) справа на U_i и воспользуемся равенством (4.6.15). В результате получаем

$$U_i \cdot e_{\Lambda} \cdot U_i = (1 - (a_{i+1} - a_i)^2) e_{\Lambda'}, \quad (4.6.44)$$

где мы учли значения спектра (4.6.35) для операторов y_i, y_{i+1} на идемпотенте $e_{\Lambda'}$. Тогда, если $|a_{i+1} - a_i| \neq 1$, то из (4.6.44) следует явная формула:

$$e_{\Lambda'} = \frac{1}{(1 - (a_{i+1} - a_i)^2)} U_i \cdot e_{\Lambda} \cdot U_i \in \mathbb{C}[S_n], \quad (4.6.45)$$

связывающая идемпотенты $e_{\Lambda'}$ и e_{Λ} , спектральные наборы которых удовлетворяют соотношению (4.6.35).

- *Задача 138.* Убедиться в том, что для элемента $e_{\Lambda'}$, заданного в (4.6.45), выполнены равенства (4.5.4), если таковые выполнены для e_{Λ} .

Следствие 2. Напомним, что в силу (4.6.23) идемпотенты e_{Λ} — элементы коммутативной подалгебры Гельфанда–Цетлина Y_n , то есть они представимы в виде полиномов от образующих $(y_2, \dots, y_n) \in Y_n$. Поскольку e_{Λ} — собственные вектора операторов (y_2, \dots, y_n) , эти полиномы должны удовлетворять тождествам

$$e_{\Lambda} \cdot (y_2 - a_2) = e_{\Lambda} \cdot (y_3 - a_3) = \dots = e_{\Lambda} \cdot (y_n - a_n) = 0,$$

которые аналогичны тождествам (4.6.10).

Следствие 3. Учитывая явные выражения (4.6.11) для U_i и спектральные наборы (4.6.35) и (4.6.37) для $e_{\Lambda'}$ и e_{Λ} , запишем равенства (4.6.38) следующим образом

$$\begin{aligned} (\sigma_i(a_i - a_{i+1}) + 1) \cdot e_{\Lambda} &= e_{\Lambda'} \cdot ((a_i - a_{i+1})\sigma_i - 1), \\ (\sigma_i(a_{i+1} - a_i) + 1) \cdot e_{\Lambda'} &= e_{\Lambda} \cdot ((a_{i+1} - a_i)\sigma_i - 1). \end{aligned} \quad (4.6.46)$$

Соответственно, если $\Lambda' \notin \text{Спек}(y_1, \dots, y_n)$, и поэтому $a_{i+1} = a_i \pm 1$, то $e_{\Lambda'} = 0$ и соотношения (4.6.46) переписываются в виде (4.6.39):

$$(\sigma_i \mp 1) \cdot e_{\Lambda} = 0, \quad e_{\Lambda} \cdot (\sigma_i \mp 1) = 0. \quad (4.6.47)$$

(верхние и нижние знаки коррелированы со знаками в условии $a_{i+1} = a_i \pm 1$).

Оказывается, что равенство $a_{i+1} = a_i \pm 1$ не только необходимо для выполнения соотношений (4.6.47) и условия $\Lambda' \notin \text{Спек}(y_1, \dots, y_n)$, но и достаточно для их выполнения.

Утверждение 4.6.7 Если для спектрального набора Λ при некотором фиксированном $i \leq n - 1$ выполняется условие $a_{i+1} = a_i \pm 1$, то идемпотент e_{Λ} , удовлетворяет соотношениям (4.6.47) (верхние и нижние знаки коррелированы) и $\Lambda' \notin \text{Спек}(y_1, \dots, y_n)$.

Доказательство этого утверждения нетривиально (см. [45]; см. также Замечание 1 в Разделе 4.6.3).

Окончательно все результаты, полученные выше, включая Утверждения 4.6.4, 4.6.5, 4.6.6 и 4.6.7, мы просуммируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.6.8 Пусть

$$\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Спек}(y_1, \dots, y_n) \quad (4.6.48)$$

— спектральный набор идемпотента e_{Λ} , то есть набор собственных значений, который получен при действии элементов Юциса–Мёрфи (y_1, \dots, y_n) (образующих коммутативной подалгебры Y_n) на идемпотент $e_{\Lambda} \in \mathbb{C}[S_n]$. Тогда, согласно (4.6.27) мы имеем $a_i \in [1 - j, j - 1]$ и выполняются следующие свойства для Λ :

- (1) $a_i \neq a_{i+1}$ для всех $i \leq n - 1$ (см. Утверждение 4.6.5);
- (2) если $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$, то перестановка собственных значений a_i и a_{i+1} в (4.6.48) также приводит к спектральному набору

$$\Lambda' = (a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \text{Спек}(y_1, \dots, y_n), \quad (4.6.49)$$

для идемпотента $e_{\Lambda'}$, который определяется по формуле (4.6.45);

- (3) если $a_{i+1} = a_i \pm 1$, то $e_{\Lambda'} = 0$, и на идемпотенте e_{Λ} реализуется одномерное представление элемента σ_i (см. (4.6.47)):

$$\sigma_i \cdot e_{\Lambda} = \pm e_{\Lambda}, \quad e_{\Lambda} \cdot \sigma_i = \pm e_{\Lambda}. \quad (4.6.50)$$

Следствие 4.6.8.1 Последовательности $(\dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots) = (\dots, a, a \pm 1, a, \dots)$ не могут возникать в спектральном наборе (4.6.48), так как согласно утверждению (3) Теоремы 4.6.8 в этом случае на идемпотенте e_Λ реализуются одномерные представления (4.6.50) элементов σ_i и σ_{i+1} : $\sigma_i = \pm 1$ и $\sigma_{i+1} = \mp 1$, что противоречит соотношению кос (4.6.1).

Определение 4.6.2 Множество последовательностей (a_1, a_2, \dots, a_n) (длины n) целых чисел $a_i \in [1 - i, i - 1]$ (набор целых чисел $[1 - i, i - 1]$ определен в (4.6.28)), обладающих свойствами

- (1) $a_1 = 0$;
 - (2) $a_r = z \Rightarrow \{z + 1, z - 1\} \cap \{a_1, \dots, a_{r-1}\} \neq \emptyset \quad \forall r > 1, \quad z \neq 0$;
 - (3) $a_i = a_j = z \ (i < j) \Rightarrow \{z + 1, z - 1\} \subset \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$
- (4.6.51)

называется **множеством векторов содержания длины n** и обозначается Cont_n .

Теорема 4.6.9 Спектральный набор $\Lambda = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Spec}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, удовлетворяет свойствам (4.6.51). То есть,

$$\text{Spec}(y_1, y_2, \dots, y_n) \subset \text{Cont}_n .$$

Доказательство. Согласно Утверждению 4.6.4 спектральные значения a_i содержатся в множестве целых чисел $[1 - i, i - 1]$. Докажем выполнение условий (1), (2) и (3) из (4.6.51) для любого спектрального набора $\Lambda \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$.

(1) Условие (1) следует из определения $y_1 = 0$; см. (4.6.2).

(2) Согласно пункту (2) Теоремы 4.6.8 спектральный набор (4.6.48) можно трансформировать следующим образом. Если $a_r \neq a_{r-1} \pm 1$, то a_r и a_{r-1} можно переставить в Λ и получить снова спектральный набор

$$\Lambda' = (a_1, \dots, a_{r-2}, a_r, a_{r-1}, \dots, a_n) \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_n) .$$

Далее, если $a_r \neq a_{r-2} \pm 1$, то a_r и a_{r-2} можно переставить в Λ' и получить $\Lambda'' = (\dots, a_{r-3}, a_r, a_{r-2}, a_{r-1}, \dots) \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$. То есть, если среди собственных значений $\{a_1, \dots, a_{r-1}\}$, входящих в спектральный набор Λ , не содержатся собственные значения $(a_r + 1)$, или $(a_r - 1)$, то, пользуясь вышеизложенной процедурой, собственное значение $a_r = z \neq 0$ можно переместить в спектральном наборе Λ на первое место, что противоречит свойству (1) из (4.6.51).

(3) Без ограничения общности можно считать, что среди $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$ нет собственных значений, равных z . Рассуждение, аналогичное использованному выше при доказательстве свойства (2), приводит нас к заключению, что одно из собственных значений $\{z + 1, z - 1\}$ обязательно содержится среди $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$, иначе $a_j = z$ можно было бы переместить на место a_{i+1} , соседнее с $a_i = z$, и это противоречило бы свойству (1), указанному в Теореме 4.6.8. Пусть $(z - 1) \in \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$ (случай, когда мы сначала имеем $(z + 1) \in \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$ рассматривается аналогично). Тогда нам необходимо доказать, что среди $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$ обязательно присутствует и собственное значение $(z + 1)$. Идея доказательства состоит в том, что в противном случае, делая допустимые (с точки зрения сохранения свойств, указанных в Теореме 4.6.8) перестановки в $\{z, a_{i+1}, \dots, (z - 1), \dots, a_{j-1}, z\}$, мы сможем поместить

собственные значения $z, (z - 1), z$ рядом в указанном порядке, что будет противоречить Следствию 4.6.8.1 к Теореме 4.6.8. Данное утверждение может быть доказано по индукции, если воспользоваться свойствами (1) и (3) из Теоремы 4.6.8, а также Следствием 4.6.8.1. Мы оставляем читателю довести это простое, но достаточно длинное доказательство до конца в качестве самостоятельного упражнения (см. доказательство Теоремы 5.1 в [45]). ■

Рассмотрим множество Tab_n всех стандартных таблиц T_{λ_n} , которые имеют форму всех диаграмм Юнга λ_n с n клетками.

Утверждение. 4.6.10 *Имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами множества Cont_n и элементами множества Tab_n .*

Доказательство. Напомним, что клеткам стандартной таблицы Юнга T_{λ_n} мы приписываем содержания a_i . Содержание клетки стандартной таблицы T_{λ_n} с числом (номером) i равно $a_i = (m - k)$, где (k, m) – координаты клетки в таблице T_{λ_n} . Таким образом, каждой стандартной таблице T_{λ_n} однозначно сопоставляется вектор (a_1, \dots, a_n) , который, как мы сейчас покажем, обладает свойствами, указанными в Определении 4.6.2. То есть, каждому элементу Tab_n соответствует некоторый элемент Cont_n . Действительно, свойства векторов содержания Λ , указанные в Определении 4.6.2, имеют простое геометрическое обоснование (см. Рис. 4.4) с точки зрения соответствия чисел $a_i \in \Lambda$, где $\Lambda \in \text{Cont}_n$, с содержанием клеток стандартных таблиц Юнга T_{λ_n} . Клетка с номером r и содержанием $z \neq 0$ может входить в стандартную таблицу T_{λ_n} , только если: 1) в этой таблице уже имеется клетка с номером $s < r$ и содержанием $(z + 1)$, расположенная выше клетки r , или 2) в таблице T_{λ_n} уже имеется клетка с номером $t < r$ и с содержанием $(z - 1)$, расположенная слева от клетки r . Соответственно, если две клетки с номерами i и j ($j > i$) в стандартной таблице T_{λ_n}

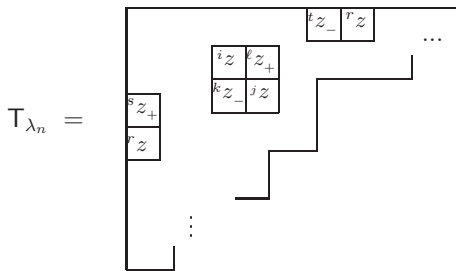


Рис. 4.4: Графическое обоснование свойств (2) и (3) из Определения 4.6.2 для компонент a_i векторов содержания клеток таблицы T_{λ_n} . Здесь использованы обозначения $z_- = z - 1$ и $z_+ = z + 1$.

имеют одинаковое содержание z , то они располагаются на одной диагонали в таблице T_{λ_n} и в этой таблице заведомо имеются клетки с содержанием $(z - 1)$ и $(z + 1)$ и числами (номерами) k, ℓ такими, что $i < k, \ell < j$ (см. Рис. 4.4). Итак, мы видим, что каждой стандартной таблице T_{λ_n} соответствует некоторый вектор содержаний $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_n$.

Докажем теперь, что каждому вектору содержаний $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_n$ соответствует некоторая стандартная таблица T_{λ_n} . Этот факт будем доказывать по индук-

ции. Множество Cont_1 состоит из одного вектора содержания $a_1 = 0$, что соответствует таблице, состоящей из одной клетки. Согласно свойству (2) из Определения 4.6.2 множество Cont_2 состоит только из двух векторов $(a_1, a_2) = (0, 1)$ и $(a_1, a_2) = (0, -1)$, которые соответствуют таблицам (4.5.35):

$$(0, 1) \leftrightarrow T_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (0, -1) \leftrightarrow T_{[1^2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.6.52)$$

Пусть теперь вектор $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_n$ соответствует некоторой стандартной таблице T_{λ_n} из Tab_n , содержания клеток которой совпадают с (a_1, \dots, a_n) . Рассмотрим вектор содержаний $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$, который получается добавлением еще одной компоненты a_{n+1} к вектору $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_n$ в соответствии со свойствами (2) и (3) из Определения 4.6.2. Пусть минимальное и максимальное содержание клеток в таблице T_{λ_n} равно соответственно z_1 и z_2 (см. Рис. 4.5), то есть,

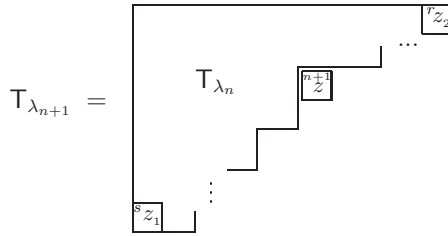


Рис. 4.5: Стандартная таблица $T_{\lambda_{n+1}}$ с добавленной к стандартной таблице T_{λ_n} клеткой $(n + 1)$ (и содержанием $a_{i+1} = z$) во внешний угол диаграммы λ_n . Здесь z_1 и z_2 — минимальное и максимальное содержание клеток таблицы T_{λ_n} .

$z_1 \leq a_1, \dots, a_n \leq z_2$. Тогда, согласно свойству (2) в Определении 4.6.2 мы имеем $(z_1 - 1) \leq a_{n+1} \leq (z_2 + 1)$, а минимальное и максимальное возможное значение a_{n+1} в векторе содержания $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ соответственно равно $a_{n+1} = z_1 - 1$ и $a_{n+1} = z_2 + 1$. Если $a_{n+1} = z_1 - 1$, то вектор содержания $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ однозначно отвечает стандартной таблице $T_{\lambda_{n+1}}$, у которой $(n + 1)$ -я клетка добавлена ниже клетки s с содержанием z_1 , а если $a_{n+1} = z_2 + 1$, то $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ однозначно отвечает стандартной таблице $T_{\lambda_{n+1}}$, у которой $(n + 1)$ -я клетка добавлена правее клетки r с содержанием z_2 (см. Рис. 4.5). Далее, согласно свойству (3) из Определения 4.6.2 для компоненты a_{n+1} в векторе содержания $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ имеем $a_{n+1} \neq z_1$ и $a_{n+1} \neq z_2$. Пусть теперь $z_1 < a_{n+1} < z_2$. Покажем, что компонента a_{n+1} в векторе содержания $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ согласно свойствам (2) и (3) из Определения 4.6.2 может принимать только те значения z , которые соответствуют внешним углам таблицы T_{λ_n} (см. Рис. 4.5). Действительно, добавляя $(n + 1)$ -ю клетку с содержанием $a_{n+1} = z$, где $z_1 < z < z_2$, мы можем получить возможности, которые изображены на Рис. 4.6 Только возможность D.) удовлетворяет свойству (3) из Определения 4.6.2. Возникающий при этом вектор содержания $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ однозначно соответствует стандартной таблице $T_{\lambda_{n+1}}$, которая получена добавлением клетки $(n + 1)$ во внешний угол стандартной таблицы T_{λ_n} . Таким образом, мы доказали, что каждому вектору содержания из множества Cont_n однозначно соответствует стандартная таблица T_{λ_n} и следовательно, с уче-

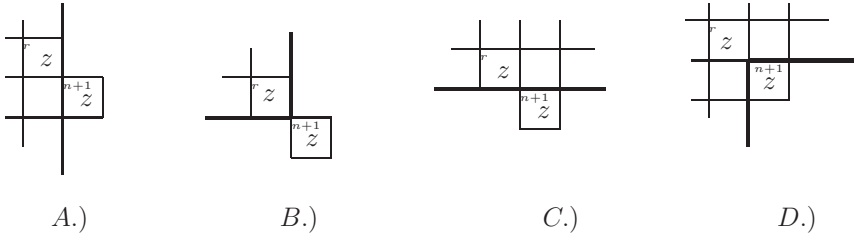


Рис. 4.6: Возможности A.), B.) C.) и D.) добавления содержания $a_{n+1} = z$ к вектору содержания $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_n$, отвечающему стандартной таблице T_{λ_n} , в которой уже имеется клетка r с тем же содержанием $a_r = z$, где $r \leq n$ (толстые линии показывают границу таблицы T_{λ_n}). Только случай D.) удовлетворяет свойству (3) из Определения 4.6.2. Возникающий при этом вектор содержания $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ однозначно соответствует некоторой стандартной таблице $T_{\lambda_{n+1}}$.

том того, что каждой стандартной таблице T_{λ_n} соответствует вектор содержания из множества Cont_n , мы доказали взаимнооднозначное соответствие $T_{\lambda_n} \leftrightarrow \text{Cont}_n$. ■

Замечание. Отметим, что индуктивная процедура получения вектора содержания $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$ из вектора содержания $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_n$, отвечающего стандартной таблице T_{λ_n} напоминает процесс бросания клетки с номером $(n + 1)$ и содержанием a_{n+1} в прямой угол, с помещенной в него таблицей Юнга T_{λ_n} и повернутый так, как изображено на Рис. 4.7. При таком бросании клетка с содержанием a_{n+1}

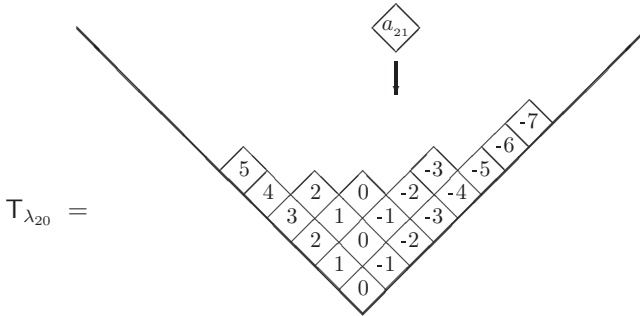


Рис. 4.7: Процесс добавления (случай D на Рис. 4.6) содержания a_{21} к вектору содержания $(a_1, \dots, a_{20}) \in \text{Cont}_{20}$, отвечающему некоторой стандартной таблице $T_{\lambda_{20}}$. При таком процессе будет возникать вектор содержания $(a_1, \dots, a_{20}, a_{21}) \in \text{Cont}_{21}$, удовлетворяющий всем свойствам из Определения 4.6.2 и однозначно соответствующий некоторой стандартной таблице $T_{\lambda_{21}}$.

будет всегда соскальзывать (случаи A и C на Рис.4.6; случай B считаем неустойчивым) и занимать внешний угол таблицы T_{λ_n} .

Окончательно наше основное утверждение может быть сформулировано следующим образом:

Теорема 4.6.11 *Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством Tab_n стандартных таблиц Юнга с n клетками, множеством $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ и*

множеством примитивных взаимно ортогональных идемпотентов $e_\Lambda \in \mathbb{C}[S_n]$, которые нумеруются спектральными наборами $\Lambda \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$.

Доказательство. Согласно Утверждению 4.6.10 мы имеем взаимнооднозначное соответствие $\text{Tab}_n \leftrightarrow \text{Cont}_n$. Можно показать (см. [45]), что число элементов в множестве $\text{Tab}_n \simeq \text{Cont}_n$ равно числу элементов в $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$, откуда в силу утверждения $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n) \subset \text{Cont}_n$ Теоремы 4.6.9 мы будем иметь $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow \text{Cont}_n$, что в свою очередь с учетом $\text{Tab}_n \leftrightarrow \text{Cont}_n$ дает взаимнооднозначное соответствие $\text{Tab}_n \leftrightarrow \text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$. ■

Рассмотрим конкретный пример, который будет иллюстрировать справедливость утверждения Теоремы 4.6.11.

Пример. (продолжение Примера 3 из раздела 4.5.1). Рассмотрим группу S_3 перестановок трех элементов и ее алгебру $\mathbb{C}[S_3]$. Три взаимно коммутирующих элемента Юциса–Мёрфи (см. (4.6.4)), которые образуют подалгебру $Y_3 \subset \mathbb{C}[S_3]$, имеют вид

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \sigma_1, \quad y_3 = \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2.$$

Поддействуем элементами y_1, y_2, y_3 слева на примитивные идемпотенты (4.5.37). Оказывается, что при определенном значении параметра ε , а именно для $\varepsilon = 1/2$, все идемпотенты (4.5.37) становятся собственными векторами операторов y_k :

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[3]} &= (0, 1, 2) e_{[3]}, \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[1^3]} &= (0, -1, -2) e_{[1^3]}, \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[2,1]_1} &= (0, 1, -1) e_{[2,1]_1}, \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[2,1]_2} &= (0, -1, 1) e_{[2,1]_2}. \end{aligned} \tag{4.6.53}$$

В правых частях этих соотношений в скобках даны собственные значения соответствующих операторов y_k , которые стоят в правых частях.

- *Задача 139. Проверить, что идемпотенты (4.5.37) при $\varepsilon = 1/2$ выражаются через операторы Юциса–Мёрфи:*

$$\begin{aligned} e_{[3]} &= \frac{1}{6}(1 + y_2) \cdot (1 + y_3), & e_{[1^3]} &= \frac{1}{6}(1 - y_2) \cdot (1 - y_3), \\ e_{[2,1]_1} &= \frac{1}{6}(2 - y_3) \cdot (1 + y_2), & e_{[2,1]_2} &= \frac{1}{6}(1 - y_2) \cdot (2 + y_3). \end{aligned} \tag{4.6.54}$$

С другой стороны, рассмотрим три диаграммы

$$[3] = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}}, \quad [1^3] = \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array}}, \quad [2, 1] = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}}, \tag{4.6.55}$$

с указанным в клетках содержанием. Видно, что содержание клеток в этих диаграммах в точности совпадает с набором собственных значений коммутирующих операторов y_k на соответствующих идемпотентах, который приведен в формулах (4.6.53), то есть со спектральным набором этих идемпотентов. Однако, соответствие между диаграммами Юнга с указанным контентом (4.6.55) и идемпотентами (4.5.37) не

является взаимнооднозначным, так как двум разным идемпотентам $e_{[2,1]_1}$, $e_{[2,1]_2}$ соответствует одна и та же диаграмма $[2, 1]$ с контентом. Это, конечно, связано с тем фактом, что диаграмме $[2, 1]$ с контентом можно сопоставить как последовательность содержаний $(0, 1, -1)$, так и последовательность $(0, -1, 1)$. Для того, чтобы получить взаимнооднозначное соответствие, проставим числа (номера) в клетках в диаграммах (4.6.55) так, чтобы они возрастали слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце, то есть построим стандартные таблицы Юнга (см. Определение 4.3.2 в разделе 4.3.2). В результате получаем четыре стандартные таблицы Юнга с контентом:

$$[3] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}, \quad [1^3] = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 3 & -2 \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1]_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & -1 & & \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1]_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & & \\ \hline \end{array}, \quad (4.6.56)$$

которые уже взаимнооднозначно соответствуют четырем идемпотентам (4.6.54) и четырем элементам множества $\text{Spec}(y_1, y_2, y_3)$:

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 2), \quad (0, -1, -2), \quad (0, 1, -1), \quad (0, -1, 1),$$

которые выписаны здесь согласно формулам (4.6.53).

4.6.3 Раскрашенный граф Юнга и правило ветвления представлений

Представим теперь результаты, касающиеся группы перестановок S_n и изложенные в предыдущем подразделе, в несколько иной, графической форме. А именно, представим эти результаты в форме графа Юнга; см. Рис.4.8. По определению граф Юнга группы S_n — это граф, у которого вершинами являются все диаграммы Юнга с $r \leq n$ клетками (напомним, что диаграммы Юнга с r клетками ассоциируются с неприводимыми представлениями группы S_r), и ребрами, соединяющими диаграммы λ_{r-1} , имеющие $(r - 1)$ клетку, с диаграммами λ_r , имеющими r клеток. Эти ребра указывают правило ветвления неприводимых представлений групп S_r . Поясним, что мы имеем ввиду под ветвлением неприводимых представлений. Неприводимые представления группы S_r вообще говоря являются приводимыми представлениями для ее подгруппы $S_{r-1} \subset S_r$. Поэтому, неприводимые представления $T^{(\lambda_{r-1})}$ подгруппы $S_{r-1} \subset S_r$, которые нумеруются диаграммами Юнга $\lambda_{r-1} \vdash (r-1)$, могут содержаться в неприводимых представлениях $T^{(\lambda_r)}$ группы S_r , которые нумеруются диаграммами Юнга $\lambda_r \vdash r$. Представление $T^{(\lambda_{r-1})}$ содержится в представлении $T^{(\lambda_r)}$, если диаграмма λ_r получается из диаграммы λ_{r-1} добавлением к ней одной клетки (как показано на Рис.4.5), а соответствующая связь неприводимого представления $T^{(\lambda_{r-1})}$ и содержащих его представлений $T^{(\lambda_r)}$ называется **ветвлением представления** $T^{(\lambda_{r-1})}$.

На ребрах графа Юнга, которые идут от диаграмм Юнга λ_{r-1} к диаграммам Юнга λ_r , мы поместим (см. Рис. 4.8) содержания a_r последней r -й клетки^{4.20}, которая

^{4.20}В общем случае набора алгебр \mathcal{A}_n ($n = 1, 2, \dots$), обладающих свойством $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, которое аналогично вложению $\mathbb{C}[S_n] \subset \mathbb{C}[S_{n+1}]$, неприводимое представление T_n подалгебры \mathcal{A}_n может вхо-

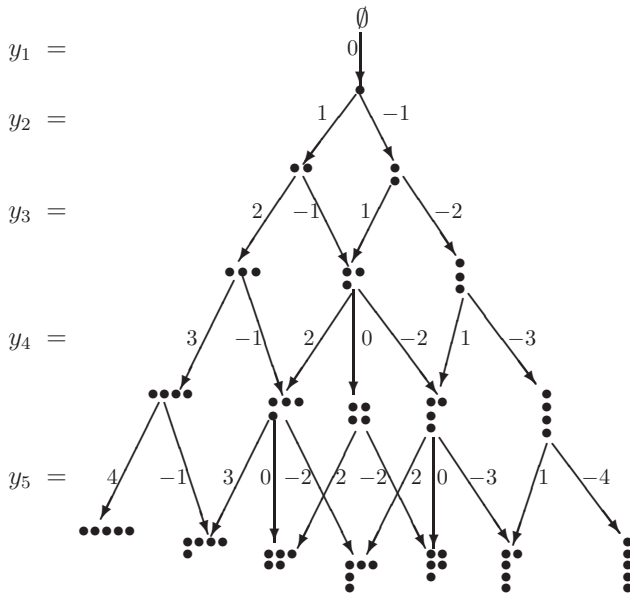


Рис. 4.8: Раскрашенный граф Юнга для S_5 . Каждый путь из вершины \emptyset до вершины с диаграммой Юнга $\lambda \vdash 5$ на последнем этаже графа соответствует идемпотенту e_λ или стандартной таблице Юнга T_λ . Индексы на ребрах этого пути равны собственным значениям операторов y_i , которые указаны слева (см. также Рис.4.9), и в совокупности эти индексы вдоль пути дают спектральный набор Λ , или содержания клеток в стандартной таблице T_λ .

добавляется к диаграмме λ_{r-1} для получения диаграммы λ_r (эту клетку мы обозначаем как λ_r/λ_{r-1}). Граф Юнга с проставленными содержаниями a_i клеток мы будем называть **раскрашенным**^{4.21}. На рисунке 4.8 представлен раскрашенный граф Юнга для группы S_5 . Здесь клетки в диаграммах Юнга для экономности изображаются жирными точками.

В раскрашенном графе Юнга для группы S_n каждому пути, который стартует из самой верхней вершины \emptyset и заканчивается в некоторой вершине, отмеченной диаграммой Юнга λ_n с n клетками и расположенной на нижнем "этаже" графа, соответствует набор стандартных таблиц, вложенных друг в друга: $T_{\lambda_1} \subset T_{\lambda_2} \subset \dots \subset T_{\lambda_n}$. Число (номер) i , стоящее в клетке λ_i/λ_{i-1} таблицы Юнга T_{λ_n} , равно номеру того шага на графе, на котором эта клетка появляется. То есть, если клетка появляется при переходе от диаграммы λ_{i-1} с $(i - 1)$ клетками к диаграмме λ_i с i клетками, то в этой клетке ставится число (номер) i и пишется ее содержание a_i . Таким образом, каждому пути на графе Юнга также соответствует последовательность содержаний (a_1, a_2, \dots, a_n) , приписываемых ребрам пути, и эта последовательность совпадает с

дуть в неприводимое представление T_{n+1} алгебры \mathcal{A}_{n+1} несколько раз. Число m таких вхождений называется кратностью ветвления представления T_n в представлении T_{n+1} и в графе ветвления на ребре, соединяющем представления T_n и T_{n+1} , ставится эта кратность m . Граф ветвления представлений алгебр $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n$ с указанными кратностями в литературе также называют диаграммой Браттели. В нашем случае в силу невырожденности спектра операторов Юциса–Мёрфи y_i (см. Утверждение 4.6.1) все кратности в графе ветвления (графе Юнга) равны 1.

^{4.21}Насколько нам известно, первым такой раскрашенный граф использовал О.В.Огиевецкий [43].

вектором содержаний (контентов) клеток таблицы Юнга T_{λ_n} , форма которой дается диаграммой Юнга λ_n , стоящей в последней вершине пути. Тем самым каждому пути из вершины \emptyset в вершину λ_n однозначно сопоставляется стандартная таблица Юнга $T_{\lambda_n} \in \text{Tab}_n$ со своим содержанием, и в соответствии с результатами предыдущего раздела (см. соотношение (4.6.26) и Теорему 4.6.11) этот путь определяет спектральный набор $\Lambda = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ (набор собственных значений элементов Юциса–Мёрфи) и соответствующий идемпотент $e_\Lambda = e(T_{\lambda_n})$.

Обозначим через $X(n)$ множество всех возможных путей длины n , которые начинаются в вершине \emptyset , идут вниз и заканчиваются какой-нибудь диаграммой Юнга с n клетками. Другими словами $X(n)$ — множество путей, состоящих из n ребер, на раскрашенном графе Юнга для группы S_n . Тогда, все сказанное выше можно просуммировать следующим образом.

Теорема 4.6.12 *Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством Tab_n стандартных таблиц Юнга с n клетками, в которых указано их содержание, множеством $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ и множеством $X(n)$ всех путей длины n в раскрашенном графе Юнга*

$$\text{Tab}_n \simeq \text{Spec}(y_1, \dots, y_n) \simeq X(n) . \tag{4.6.57}$$

Замечание 1. Все пути на раскрашенном графе Юнга (см. Рис. 4.8), состоящие из двух ребер и идущие из вершины λ_{i-1} на уровне $(i-1)$ в вершину λ_{i+1} на уровне $(i+1)$, образуют подграфы A и B , изображенные на Рис. 4.9 (звездами обозначены диаграммы Юнга). Легко увидеть, что, пользуясь расстановкой индексов в подграфах A и B (Рис. 4.9) и зная раскраску (индексы) на ребрах на верхних двух уровнях графа Юнга на Рис.4.8, мы можем последовательно восстановить раскраску всего графа Юнга. Таким образом, подграфы, изображенные на Рис. 4.9, определяют структуру всего раскрашенного графа Юнга группы S_n .

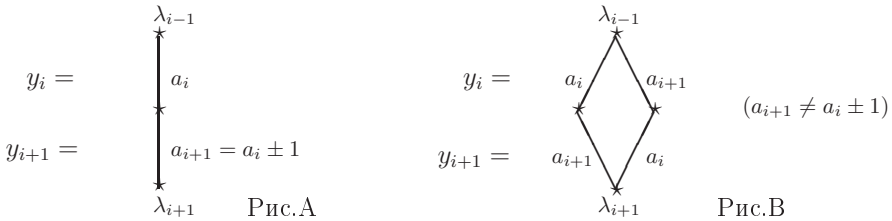


Рис. 4.9: На Рис. А и В изображены возможные подграфы в графе Юнга на Рис. 4.8, состоящие из путей длины 2, идущих из вершины, отмеченной диаграммой λ_{i-1} , в вершину, отмеченную диаграммой λ_{i+1} . Это отрезки полных путей в графе Юнга, соответствующих примитивным идемпотентам, на которых операторы y_i, y_{i+1} диагонализуются (индексы на ребрах графов А и В равны собственным значениям элементов y_i, y_{i+1}). Для графа А это идемпотент e_Λ , у которого в спектральном наборе Λ собственные значения a_i, a_{i+1} элементов y_i, y_{i+1} удовлетворяют соотношениям $a_{i+1} = a_i \pm 1$. Для графа В это два идемпотента e_Λ и $e_{\Lambda'}$ со спектральными наборами Λ и Λ' , которые отличаются лишь перестановкой двух собственных значений a_i и a_{i+1} таких, что $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$.

Поясним, почему в графе Юнга на Рис.4.8 все подграфы, состоящие из отрезков путей длины 2, имеют вид, представленный на Рис.4.9.

Элементы $y_i, y_{i+1}, \sigma_i \in \mathbb{C}[S_n]$ (при любом фиксированном $i \leq n-1$) подчиняются замкнутым структурным соотношениям (см. (4.6.1), (4.6.5) и (4.6.9)):

$$\sigma_i^2 = 1, \quad \sigma_i \cdot y_{i+1} = y_i \cdot \sigma_i + 1, \quad y_i \cdot y_{i+1} = y_{i+1} \cdot y_i, \quad (4.6.58)$$

и образуют неабелеву подалгебру $H_{2(i)}$ в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$. Неприводимые представления алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ являются в общем случае приводимыми представлениями ее подалгебры $H_{2(i)}$ и, как показано в [45], эти представления разлагаются в прямую сумму неприводимых представлений $H_{2(i)}$. То есть, приводимые представления подалгебры $H_{2(i)}$ разложимы. Наша задача — перечислить все неприводимые представления ρ подалгебр $H_{2(i)} \subset \mathbb{C}[S_n]$ ($\forall i$), на которые разбиваются неприводимые представления самой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Отметим также, что алгебра $\mathbb{C}[S_{i+1}]$ порождается алгеброй $\mathbb{C}[S_i]$ и алгеброй $H_{2(i)}$. Поэтому каждый шаг от i к $(i+1)$ сводится к изучению представлений подалгебры $H_{2(i)}$.

Будем строить неприводимые представления ρ подалгебры $H_{2(i)}$ так же, как строятся представления алгебр Ли со старшим весом. Начнем с того, что в пространстве \mathcal{V} представления ρ всегда имеется собственный вектор $v_1 \in \mathcal{V}$:

$$y_i \cdot v_1 = a_i v_1, \quad y_{i+1} \cdot v_1 = a_{i+1} v_1, \quad (4.6.59)$$

где a_i и a_{i+1} — собственные значения операторов y_i и y_{i+1} . Подействуем на v_1 элементом σ_i и рассмотрим случай, при котором новый вектор $\sigma_i \cdot v_1$ и вектор v_1 — линейно независимы. Тогда, учитывая (4.6.58), мы обнаруживаем, что действие подалгебры $H_{2(i)}$ на вектор v_1 порождает инвариантное двумерное пространство \mathcal{V} , натянутое на v_1 и $v_2 := \sigma_i \cdot v_1$ как на базис:

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot (v_1, v_2) &= (v_2, v_1), \quad y_i \cdot (v_1, v_2) = (a_i v_1, a_{i+1} v_2 - v_1), \\ y_{i+1} \cdot (v_1, v_2) &= (a_{i+1} v_1, a_i v_2 + v_1). \end{aligned} \quad (4.6.60)$$

Из этих формул, пользуясь стандартным соглашением (2.1.7), мы получаем двумерное представление ρ для образующих алгебры $H_{2(i)}$:

$$\rho(\sigma_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(y_i) = \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 0 & a_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \rho(y_{i+1}) = \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}. \quad (4.6.61)$$

Нас интересует случай $a_i \neq a_{i+1}$ (см. Утверждение 4.6.5). В этом случае матрицы $\rho(y_i), \rho(y_{i+1})$ из (4.6.61) могут быть одновременно диагонализированы с помощью преобразования эквивалентности: $\rho(y) \rightarrow \tilde{\rho}(y) = A^{-1} \cdot \rho(y) \cdot A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_i := (a_i - a_{i+1})^{-1}.$$

В результате мы получаем матричное представление $\tilde{\rho}$ для образующих алгебры $H_{2(i)}$, эквивалентное (4.6.61):

$$\tilde{\rho}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} -b_i & (1 - b_i^2) \\ 1 & b_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}(y_i) = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}(y_{i+1}) = \begin{pmatrix} a_{i+1} & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}, \quad (4.6.62)$$

которое записано в новом базисе

$$(v_\Lambda, v_{\Lambda'}) := (v_1, v_2) \cdot A = (v_1, (a_i - a_{i+1})^{-1} v_1 + v_2). \quad (4.6.63)$$

Мы поясним обозначения v_Λ и $v_{\Lambda'}$ чуть позже. Если, $b_i \neq \mp 1 \Leftrightarrow a_{i+1} \neq a_i \pm 1$, то двумерное представление (4.6.62) неприводимо и оно может реализоваться как подпредставление в представлении подалгебры $H_{2(i)} \subset \mathbb{C}[S_i]$ в неприводимом представлении всей алгебры $\mathbb{C}[S_i]$. Если $b_i = \mp 1 \Leftrightarrow a_{i+1} = a_i \pm 1$, то двумерное представление (4.6.62) приводимо (но не разложимо), и в пространстве \mathcal{V} этого представления имеется одномерное инвариантное подпространство $\mathcal{V}_{\Lambda'}$, натянутое на вектор

$$v_{\Lambda'} = (a_i - a_{i+1})^{-1} v_1 + v_2 = (\sigma_i \mp 1) v_\Lambda, \quad (4.6.64)$$

на котором согласно (4.6.62) подалгебра $H_{2(i)}$ действует следующим образом:

$$y_i v_{\Lambda'} = a_{i+1} v_{\Lambda'}, \quad y_{i+1} v_{\Lambda'} = a_i v_{\Lambda'}, \quad \sigma_i v_{\Lambda'} = \mp v_{\Lambda'}, \quad (a_{i+1} = a_i \pm 1), \quad (4.6.65)$$

(верхние и нижние знаки коррелированы). Данное приводимое (но неразложимое) представление (4.6.62) не может реализоваться (см. [45]) как подпредставление подалгебры $H_{2(i)} \subset \mathbb{C}[S_n]$ в неприводимом представлении всей алгебры $\mathbb{C}[S_n]$.

Наконец, вернемся к самому началу и рассмотрим случай, когда вектора $\sigma_i \cdot v_1$ и $v_1 \equiv v_\Lambda$ — линейно зависимы: $\sigma_i \cdot v_\Lambda \sim v_\Lambda$. В этом случае из соотношений (4.6.58) следует, что на векторе $v_1 \equiv v_\Lambda$ реализуется одномерное представление подалгебры $H_{2(i)}$:

$$y_i v_\Lambda = a_i v_\Lambda, \quad y_{i+1} v_\Lambda = a_{i+1} v_\Lambda, \quad \sigma_i v_\Lambda = \pm v_\Lambda \quad \Rightarrow \quad a_{i+1} = a_i \pm 1, \quad (4.6.66)$$

(верхние и нижние знаки коррелированы). Заметим, что представление (4.6.66) возникает из приводимого (в случае $a_{i+1} = a_i \pm 1$) представления $\tilde{\rho}$ (4.6.62), если инвариантное подпространство (4.6.65) — тривиально: $v_{\Lambda'} = 0$. Итак, все неприводимые представления подалгебры $H_{2(i)} \subset \mathbb{C}[S_n]$ — это либо двумерные представления (4.6.62), либо одномерные представления (4.6.66).

Нас интересуют неприводимые представления ρ подалгебры $H_{2(i)} \subset \mathbb{C}[S_n]$, которые вложены в неприводимые представления $\tilde{\rho}$ алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Соответственно пространство \mathcal{V} представления ρ вложено в пространство $\tilde{\mathcal{V}}$ представления $\tilde{\rho}$, и в качестве вектора $v_1 \in \mathcal{V}$, взятого нами в самом начале, мы можем выбрать собственный, для всех элементов $(y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$, вектор из пространства $\tilde{\mathcal{V}}$ соответствующий некоторому спектральному набору $\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$; см. (4.6.48). Согласно (4.6.62) собственные значения a_i и a_{i+1} операторов y_i и y_{i+1} переставлены у вектора $v_{\Lambda'}$ по сравнению с вектором v_Λ . Это объясняет (сравните Λ и Λ' в (4.6.48) и (4.6.49)) выбор обозначений v_Λ и $v_{\Lambda'}$, который мы сделали в (4.6.63).

Графическое представление двух, построенных выше, неприводимых представлений (одномерного (4.6.66) и двумерного (4.6.62)) подалгебры $H_{2(i)} \subset \mathbb{C}[S_n]$ дано на Рис.4.9. На графах A и B изображены соответственно одномерное (в случае $a_{i+1} = a_i \pm 1$) и двумерное (в случае $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$) представления алгебры $H_{2(i)}$. Различные пути, идущие из верхней вершины в нижнюю вершину, соответствуют базисным векторам, на которых операторы y_i, y_{i+1} диагонализуются. Для одномерного случая (Рис.А) это вектор $v_\Lambda = v_1$, а для двумерного случая (Рис.В) это вектора v_Λ и $v_{\Lambda'}$, которые определены в (4.6.63). Индексы на ребрах графов A и B равны собственным значениям (входящим в наборы Λ и Λ') элементов y_i, y_{i+1} .

Пример. В качестве примера рассмотрим на Рис. 4.8 путь

$$\{ \emptyset \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \bullet \xrightarrow{-1} \bullet \bullet \xrightarrow{0} \bullet \bullet \xrightarrow{2} \bullet \bullet \bullet \}, \quad (4.6.67)$$

которому соответствует таблица Юнга

$$T_{\lambda_5} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (4.6.68)$$

Форма этой таблицы дается формой последней вершины пути (диаграмма Юнга $\lambda_5 = \bullet \bullet \bullet$), а числа (номера) клеток таблицы T_{λ_5} показывают, в какой последовательности "клетки" \bullet появляются в вершинах (в диаграммах Юнга) вдоль рассматриваемого пути (4.6.67) в графе Юнга. Содержание клеток в (4.6.68) соответствует последовательности $(a_1, \dots, a_5) = (0, 1, -1, 0, 2)$ и дается индексами на ребрах пути. Числа $(a_1, \dots, a_5) = (0, 1, -1, 0, 2)$ являются собственными значениями элементов Юциса–Мёрфи $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$, полученными в результате действия элементов y_i на примитивный идемпотент $e(T_{\lambda_5})$, который соответствует таблице (4.6.68).

Таким образом, мы ассоциировали все стандартные таблицы Юнга T_{λ_n} , имеющие форму диаграммы Юнга λ_n с n клетками, во-первых, с элементами множества всех спектральных наборов $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ или, что тоже самое, с примитивными ортогональными идемпотентами в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ (это было сделано в предыдущем разделе), и, во-вторых, с путями в графе Юнга для группы S_n .

Замечание 2. Согласно рассмотрению, данному в разделах 4.3.2 и 4.5, размерность неприводимого представления алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ (группы S_n), которое соответствует диаграмме Юнга λ_n , равна числу стандартных таблиц T_{λ_n} , имеющих форму λ_n , или, как мы только что продемонстрировали, равна числу путей длины n в графе Юнга, которые идут к этой диаграмме из вершины \emptyset . Это число $f_{(\lambda_n)}$ дается формулами (4.3.56) и (4.3.57), которые мы привели в конце раздела 4.3.2.

Замечание 3. Граф Юнга на Рис.4.8 (без указания индексов на линиях) дает правило ветвления представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, согласно которому строится разложение прямого произведения $T^{\otimes 5}$ определяющих представлений T группы $SL(N, \mathbb{C})$ по ее неприводимым представлениям $T^{(\lambda)}$, где λ — диаграммы Юнга с 5 клетками. При этом необходимо считать, что $N > 5$, так как представления группы $SL(N, \mathbb{C})$ с диаграммами λ , имеющими N и более строк, не реализуются (см. Рис.4.11 ниже). Кратность вхождения представления $T^{(\lambda)}$ в $T^{\otimes 5}$ равна числу путей, идущих из вершины \emptyset графа и заканчивающихся в диаграмме $\lambda \vdash 5$. Например, разложение представления $T^{\otimes 4}$, которое дано в (4.5.84), определяется первыми четырьмя уровнями графа Юнга на Рис.4.8. Общая формула разложения $T^{\otimes r}$ на неприводимые представления $T^{(\lambda)}$, где λ — диаграммы Юнга с r клетками, приведена в (4.5.86). То, что один и тот же граф Юнга с r этажами описывает ветвление представлений группы S_r и ветвление неприводимых представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ (для $N > r$) при разложении представления $T^{\otimes r}$ является отражением дуальности Шура–Вейля (см. раздел 4.5.3).

Итак, раскрашенный граф Юнга для группы S_n полностью нами описан и может быть явно построен для любого фиксированного n . В следующем подразделе мы покажем, как на основе этого графа Юнга формулируется индуктивная процедура для вывода явных выражений (в терминах элементов Юциса–Мёрфи y_k) для всех ортогональных примитивных идемпотентов e_α алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, образующих полную систему.

4.6.4 Граф Юнга и индуктивное построение идемпотентов e_α

В данном подразделе мы будем основываться на следующем утверждении.

Утверждение 4.6.13 Пусть y — переменная, и $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — набор параметров таких, что $a_i \neq a_k$ для $i \neq k$. Тогда, функции $P_k(y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{(y-a_i)}{(a_k-a_i)}$ удовлетворяют тождеству

$$\sum_{k=1}^n P_k = 1. \tag{4.6.69}$$

Пусть y — линейный оператор, действующий в n -мерном векторном пространстве \mathcal{V} и пусть y подчиняется характеристическому тождеству $\prod_{i=1}^n (y - a_i) = 0$. Тогда a_1, a_2, \dots, a_n — собственные значения оператора y и элементы $P_k(y)$ образуют полную систему взаимно ортогональных проекторов в \mathcal{V} :

$$P_k \cdot P_i = \delta_{ki} P_k. \tag{4.6.70}$$

Доказательство. Для доказательства тождества (4.6.69) рассмотрим полином $p(y) = (\sum_{k=1}^n P_k - 1)$ по y . Заметим, что этот полином равен нулю в n точках $y = a_i$ ($i = 1, \dots, n$) и следовательно мы должны иметь

$$p(y) = c \cdot (y - a_1) \cdot (y - a_2) \cdots (y - a_n) . \tag{4.6.71}$$

В силу определения P_k , полином $p(y)$ имеет степень не выше $(n - 1)$, поэтому фактор c в правой части (4.6.71) должен равняться нулю и мы получаем (4.6.69).

Из характеристического тождества $\prod_i (y - a_i) = 0$ тривиально следуют равенства $y \cdot P_k = a_k P_k$ и проекторные соотношения (4.6.70). С учетом (4.6.69) пространство \mathcal{V} разбивается в прямую сумму $\mathcal{V} = \oplus_k \mathcal{V}_k$, где $\mathcal{V}_k = P_k \mathcal{V}$ — подпространства собственных векторов оператора y с собственными значениями a_k . ■

Рассмотрим диаграмму Юнга $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2 - n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k - n_{k-1}}]$ с n_k строками и n клетками:

$$n = \sum_{i=1}^k (n_i - n_{i-1}) \lambda_{(i)} ,$$

где мы зафиксировали $n_0 = 0$. Итак, первые n_1 строк в диаграмме λ_n имеют длину $\lambda_{(1)}$, следующие $(n_2 - n_1)$ строк имеют длину $\lambda_{(2)}$ и так далее, и наконец последние $(n_k - n_{k-1})$ строк имеют длину $\lambda_{(k)}$. Графически такая диаграмма изображается так, как показано на Рис. 4.10, где $(n_i, \lambda_{(i)})$ — координаты клеток, которые соответствуют

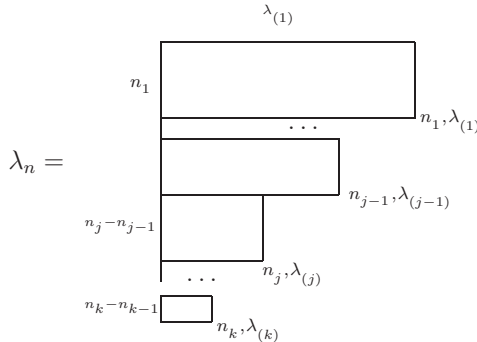


Рис. 4.10: Диаграмма Юнга $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2 - n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k - n_{k-1}}]$. Пары чисел $(n_j, \lambda_{(j)})$ определяют координаты клеток во внутренних углах диаграммы λ_n .

углам диаграммы λ_n . Напомним, что каждой диаграмме Юнга λ соответствует набор стандартных таблиц Юнга $\{T_{a,\lambda}, \dots, T_{f(\lambda),\lambda}\}$, число которых $f(\lambda)$ определяется формулами (4.3.56), (4.3.57). Для дальнейшего нам понадобится следующее определение.

Определение 4.6.3 Будем говорить, что стандартная таблица T_{λ_r} содержится в стандартной таблице T_{λ_n} , где $n > r$, и писать $T_{\lambda_r} \subset T_{\lambda_n}$, если T_{λ_r} получается из T_{λ_n} отбрасыванием последних клеток с номерами (числами) $i = r + 1, \dots, n$.

Рассмотрим некоторую стандартную таблицу Юнга T_{λ_n} , имеющую форму диаграммы λ_n на Рис. 4.10. Пусть нам уже известен примитивный идемпотент $e(T_{\lambda_n}) \in \mathbb{C}[S_n] \subset \mathbb{C}[S_{n+1}]$, который соответствует таблице T_{λ_n} и удовлетворяет соотношениям

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot e(T_{\lambda_n}) = (0, a_2, \dots, a_n) e(T_{\lambda_n}) , \tag{4.6.72}$$

где $(0, a_2, \dots, a_n)$ — содержания клеток таблицы T_{λ_n} . Примем во внимание правило ветвления, которое следует из раскрашенного графа Юнга для S_{n+1} , и которое говорит нам, что все диаграммы $\lambda_{n+1}^{(r)}$ с $(n+1)$ клеткой могут быть получены из диаграммы $\lambda_n \subset \lambda_{n+1}^{(r)}$ добавлением к λ_n одной клетки в любой ее внешний угол с координатами $(n_{r-1} + 1, \lambda_{(r)} + 1)$, где $r = 1, 2, \dots, k+1$; см. Рис. 4.2 в разделе 4.4.2. По определению внешними для λ_n являются также углы с координатами $(1, \lambda_{(1)} + 1)$ и $(n_k + 1, 1)$ (здесь мы фиксируем $\lambda_{(k+1)} = n_0 = 0$).

Утверждение 4.6.14 *Для идемпотента $e(T_{\lambda_n})$, рассматриваемого как элемент алгебры $\mathbb{C}[S_{n+1}]$, имеет место следующее тождество*

$$e(T_{\lambda_n}) \cdot \prod_{r=1}^{k+1} (y_{n+1} - a_{n+1}^{(r)}) = 0, \tag{4.6.73}$$

где $a_{n+1}^{(r)} = (\lambda_{(r)} - n_{r-1})$ (здесь $r = 1, \dots, k+1$) — содержания возможных добавленных клеток $\lambda_{n+1}^{(r)}/\lambda_n$, имеющих координаты $(n_{r-1} + 1, \lambda_{(r)} + 1)$.

Доказательство. В раскрашенном графе Юнга для S_{n+1} из вершины с диаграммой λ_n , изображенной на Рис.4.10, могут исходить только ребра с индексами $a_{n+1}^{(r)}$, которые являются содержанием новых клеток с координатами $(n_{r-1} + 1, \lambda_{(r)} + 1)$. Указанные клетки можно добавить к диаграмме λ_n только в ее внешние углы, чтобы получить новую диаграмму $\lambda_{n+1}^{(r)}$ с $(n+1)$ -й клеткой; см. Рис. 4.2 в разделе 4.4.2. Это означает, что путь, отвечающий стандартной таблице T_{λ_n} , разветвляется в вершине λ_n на пути, отвечающие стандартным таблицам $T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}$ таким, что $T_{\lambda_n} \subset T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}$; а для идемпотентов $e(T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}) \in \mathbb{C}[S_{n+1}]$ и $e(T_{\lambda_n}) \in \mathbb{C}[S_n] \subset \mathbb{C}[S_{n+1}]$ мы имеем

$$e(T_{\lambda_n}) \cdot e(T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}) = e(T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}), \quad e(T_{\lambda_n}) \cdot e(T_{\lambda_{n+1}}) = 0 \quad (\forall T_{\lambda_n} \not\subset T_{\lambda_{n+1}}). \tag{4.6.74}$$

Отсюда следует, что $e(T_{\lambda_n})$ должен разлагаться в сумму идемпотентов $e(T_{\lambda_{n+1}^{(r)}})$:

$$e(T_{\lambda_n}) = e(T_{\lambda_n}) \cdot e = e(T_{\lambda_n}) \cdot \sum_{\lambda \vdash (n+1)} \sum_{T_\lambda} e(T_\lambda) = \sum_{r=1}^{k+1} e(T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}), \tag{4.6.75}$$

где в предпоследнем выражении суммирование идет по всем диаграммам Юнга λ с $(n+1)$ клетками и по всем стандартным таблицам T_λ , имеющим форму λ , а в последнем выражении суммирование идет по всем $(k+1)$ стандартным таблицам $T_{\lambda_{n+1}^{(r)}}$ полученным из T_{λ_n} добавлением одной из клеток $(n_{r-1} + 1, \lambda_{(r)} + 1)$ с содержанием $a_{n+1}^{(r)} = (\lambda_{(r)} - n_{r-1})$. Напомним теперь, что по определению мы имеем $e(T_{\lambda_{n+1}^{(r)}})(y_{n+1} - a_{n+1}^{(r)}) = 0$, откуда с учетом (4.6.75) и вытекает тождество (4.6.73). ■

Итак, пусть $T_{\lambda_n} \subset T_{\lambda_{n+1}^{(j)}}$, где диаграмма Юнга $\lambda_{n+1}^{(j)}$ получается добавлением к диаграмме λ_n , новой $(n+1)$ -й клетки с координатами $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$, см. Рис. 4.10 и Рис. 4.2 в разделе 4.4.2. Тогда имеет место следующий факт.

Утверждение 4.6.15 *Примитивный ортогональный идемпотент $e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}})$ в алгебре $\mathbb{C}[S_{n+1}]$, соответствующий стандартной таблице $\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}$, определяется с помощью индуктивной формулы*

$$e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) = e(\mathbb{T}_{\lambda_n}) \cdot \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{k+1} \frac{(y_{n+1} - a_{n+1}^{(r)})}{(a_{n+1}^{(j)} - a_{n+1}^{(r)})}, \quad (4.6.76)$$

где $e(\mathbb{T}_{\lambda_n}) \in \mathbb{C}[S_n]$ – примитивный ортогональный идемпотент, соответствующий стандартной таблице $\mathbb{T}_{\lambda_n} \subset \mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}$.

Доказательство. Для элемента (4.6.76) в силу тождества (4.6.73) мы получаем

$$y_{n+1} \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) = a_{n+1}^{(j)} e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}), \quad (4.6.77)$$

что в соответствии с (4.6.72), учитывая коммутативность элементов y_i , дает

$$(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) = (0, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}^{(j)}) e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}).$$

Таким образом, формула (4.6.76) согласуется с тем, что $(n + 1)$ -я клетка в $\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}$ имеет координаты $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$, ее контент равен $a_{n+1}^{(j)} = \lambda_{(j)} - n_{j-1}$, а весь спектральный набор оператора $e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}})$, как и требуется, дается вектором содержаний $(0, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}^{(j)})$. Учитывая формулы (4.6.70) (см. Утверждение 4.6.13) и применяя соотношение $[e(\mathbb{T}_{\lambda_n})]^2 = e(\mathbb{T}_{\lambda_n})$, мы получаем, что операторы (4.6.76) определяют систему ортогональных идемпотентов

$$e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) = e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}), \quad e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(r)}}) = 0 \quad (j \neq r),$$

где таблица $\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(r)}}$ получается из таблицы \mathbb{T}_{λ_n} добавлением новой $(n + 1)$ -й клетки, но с другими координатами $(n_{r-1} + 1, \lambda_{(r)} + 1)$. Кроме того, пользуясь тождеством (4.6.69) из Утверждения 4.6.13 для идемпотентов (4.6.76) в полном соответствии с правилом ветвления представлений мы имеем спектральное разложение (4.6.75), из которого по индукции (предполагая соотношение полноты для идемпотентов $e(\mathbb{T}_{\lambda_n}) \in \mathbb{C}[S_n]$) следует соотношение полноты для идемпотентов $e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) \in \mathbb{C}[S_{n+1}]$:

$$\sum_{\lambda_n} \sum_{\mathbb{T}_{\lambda_n}} \sum_j e(\mathbb{T}_{\lambda_{n+1}^{(j)}}) = e, \quad (4.6.78)$$

где e – единичный элемент в $\mathbb{C}[S_{n+1}]$. ■

Следствие. Из индуктивной процедуры (4.6.76) для таблиц $\mathbb{T}_{\lambda_r} \subset \mathbb{T}_{\lambda_n}$, где $n > r$, сразу же следует тождество (сравните с (4.5.64) и (4.6.74))

$$e(\mathbb{T}_{\lambda_r}) \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_n}) = e(\mathbb{T}_{\lambda_n}) \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_r}) = e(\mathbb{T}_{\lambda_n}).$$

Если стандартная таблица \mathbb{T}_{λ_r} не содержится в стандартной таблице \mathbb{T}_{λ_n} , то мы имеем $e(\mathbb{T}_{\lambda_r}) \cdot e(\mathbb{T}_{\lambda_n}) = 0$.

Используя индуктивную формулу (4.6.76), соглашение $e(\boxed{1}) = 1$ и принципы построения раскрашенного графа Юнга, мы можем теперь шаг за шагом вывести полную систему примитивных взаимно ортогональных идемпотентов $e_\alpha \in \mathbb{C}[S_n]$, обладающих свойством (4.6.72) (см. (4.6.20)) и соответствующих стандартным таблицам Юнга T_{λ_n} , имеющим форму диаграмм Юнга λ_n с n клетками.

Пример. Построим с помощью указанной выше процедуры идемпотент, соответствующий стандартной таблице T_{λ_5} , представленной в (4.6.68). Будем двигаться на графе Юнга (Рис. 4.8) вдоль пути (4.6.67), который соответствует таблице T_{λ_5} . Первый шаг $\{\emptyset \xrightarrow{0} \bullet\}$ по определению дает $e(\boxed{1}) = 1$. На втором шаге к клетке $\boxed{1}$ мы добавляем вторую клетку $\boxed{2}$. Забывая пока про путь (4.6.67), заметим, что это можно сделать двумя возможными способами, как показано звездочками на рисунке

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \\ * \end{array} *$$

поэтому аналог формулы (4.6.73) записывается в виде (4.6.29):

$$e(\boxed{1}) \cdot (y_2 - 1) \cdot (y_2 + 1) = 0,$$

и согласно (4.6.76) мы имеем два идемпотента для $\mathbb{C}[S_2]$ (сравните с (4.5.33))

$$e(\boxed{1 \mid 2}) = \frac{(1 + y_2)}{2}, \quad e\left(\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array}\right) = \frac{(1 - y_2)}{2}, \tag{4.6.79}$$

где мы учли, что $e(\boxed{1}) = 1$. Путь (4.6.67) таков, что вторая клетка на втором шаге $\{\bullet \xrightarrow{1} \bullet\bullet\}$ стоит в одной строке с первой, поэтому контент второй клетки равен +1 и соответствующий идемпотент дается оператором $e(\boxed{1 \mid 2})$ из (4.6.79). На третьем шаге клетка с номером 3 может возникнуть на одном из двух мест (как показано звездочками)

$$\begin{array}{c} \boxed{1 \mid 2} \\ * \end{array} *$$

поэтому аналог формулы (4.6.73) имеет вид (сравните с первым тождеством в (4.6.10))

$$e(\boxed{1 \mid 2}) \cdot (y_3 + 1) \cdot (y_3 - 2) = 0,$$

и согласно (4.6.76) мы снова имеем два идемпотента (сравните с $e_{[2,1]}$ и $e_{[3]}$ из (4.6.54))

$$e\left(\begin{array}{c} \boxed{1 \mid 2} \\ \boxed{3} \end{array}\right) = e(\boxed{1 \mid 2}) \cdot \frac{(y_3 - 2)}{(-1 - 2)} = \frac{(1 + y_2)}{2} \cdot \frac{(2 - y_3)}{3}, \tag{4.6.80}$$

$$e(\boxed{1 \mid 2 \mid 3}) = e(\boxed{1 \mid 2}) \cdot \frac{(y_3 + 1)}{(2 + 1)} = \frac{(1 + y_2)}{2} \cdot \frac{(1 + y_3)}{3}. \tag{4.6.81}$$

Третья клетка на третьем шаге $\{\bullet\bullet \xrightarrow{-1} \bullet\bullet\bullet\}$ в (4.6.67) добавляется так, что следующий идемпотент должен соответствовать диаграмме $\bullet\bullet$ и поэтому должен быть равен (4.6.80). На 4-м шаге клетка с номером 4 может возникнуть в одном из 3-х мест, указанных на рисунке:

$$\begin{array}{c} \boxed{1 \mid 2} \\ \boxed{3} \\ * \end{array} *$$

поэтому аналог тождества (4.6.73) имеет вид

$$e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}\right) \cdot y_4 \cdot (y_4 - 2) \cdot (y_4 + 2) = 0.$$

Исходя из этой формулы мы строим три идемпотента (с учетом (4.6.80))

$$\begin{aligned} e\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}\right) &= e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}\right) \cdot \frac{y_4 \cdot (y_4 + 2)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{6 \cdot 8} (1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot y_4 \cdot (y_4 + 2), \\ e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) &= e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}\right) \cdot \frac{y_4 \cdot (y_4 - 2)}{2 \cdot (-2 - 2)} = \frac{1}{6 \cdot 8} (1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot y_4 \cdot (2 - y_4), \\ e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) &= e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}\right) \cdot \frac{(y_4 + 2) \cdot (y_4 - 2)}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{6 \cdot 4} (1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot (2 + y_4) \cdot (2 - y_4), \end{aligned} \quad (4.6.82)$$

Четвертая клетка на предпоследнем шаге в (4.6.67) $\{ \bullet \bullet \xrightarrow{0} \bullet \bullet \}$ занимает такое место, что путь $\{\emptyset \rightarrow \bullet \bullet\}$ соответствует таблице $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$, а идемпотент для этой таблицы дается формулой (4.6.82).

Наконец на последнем шаге клетка с номером 5 может возникнуть в одном из 2-х мест: $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}^*$, аналог тождества (4.6.73) имеет вид $e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) \cdot (y_5 - 2) \cdot (y_5 + 2) = 0$ и идемпотент, соответствующий стандартной таблице T_{λ_5} , указанной в (4.6.68), равен

$$e\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}\right) = e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) \cdot \frac{(y_5 + 2)}{(2 + 2)} = \frac{(1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot (2 + y_4) \cdot (2 - y_4) \cdot (2 + y_5)}{2^5 \cdot 3}. \quad (4.6.83)$$

- **Задача 140.** Доказать, что полный симметризатор $e([n])$ и антисимметризатор $e([1^n])$ для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ записываются, с учетом определения (4.6.2) элементов y_i , в виде

$$\begin{aligned} e([n]) &= \frac{1}{n!} (1 + y_2) \cdot (1 + y_3) \cdots (1 + y_n) = \\ &= \frac{1}{n!} (1 + (1, 2)) \cdot (1 + (1, 3) + (2, 3)) \cdots (1 + (1, n) + \cdots + (n - 1, n)), \\ e([1^n]) &= \frac{1}{n!} (1 - y_2) \cdot (1 - y_3) \cdots (1 - y_n) = \\ &= \frac{1}{n!} (1 - (1, 2)) \cdot (1 - (1, 3) - (2, 3)) \cdots (1 - (1, n) - \cdots - (n - 1, n)). \end{aligned} \quad (4.6.84)$$

Сравните идемпотенты $e([r])$ с операторами $E_{P[r]}$ из (4.3.16) и $e([1^r])$ с операторами, которые получаются из $E_{P[r]}$ заменой $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$.

4.6.5 Проекционные операторы и характеры для неприводимых представлений $U(N)$. Симметрические функции

Рассмотрим пространство определяющего представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, то есть N -мерное комплексное векторное пространство \mathcal{V} с базисом $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$. Действие линейного оператора A в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n} = \mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}$ определяется стандартным образом (2.1.7)

$$A \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n}) = (\vec{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{k_n}) A_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_n},$$

где $A_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{C}$ – элементы матрицы оператора A . Обозначим множество всех линейных операторов в $\mathcal{V}^{\otimes n}$ как $\text{End}(\mathcal{V}^{\otimes n})$. Определим операцию $\text{Tr}_{(m)}$ – взятия следа в пространстве \mathcal{V} , располагающемся на m -ом месте в произведении $\mathcal{V}^{\otimes n}$, как отображение $\text{End}(\mathcal{V}^{\otimes n}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{V}^{\otimes(n-1)})$, которое сопоставляет оператору $A \in \text{End}(\mathcal{V}^{\otimes n})$ оператор $\text{Tr}_{(m)}(A) \in \text{End}(\mathcal{V}^{\otimes(n-1)})$ следующего вида

$$\text{Tr}_{(m)}(A) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_{n-1}}) = (\vec{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{k_{n-1}}) B_{i_1 \dots i_{n-1}}^{k_1 \dots k_{n-1}},$$

где

$$B_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_n}^{k_1 \dots k_{m-1} k_{m+1} \dots k_n} \equiv \sum_{i_m} A_{i_1 \dots i_{m-1} i_m i_{m+1} \dots i_n}^{k_1 \dots k_{m-1} i_m k_{m+1} \dots k_n}, \quad (4.6.85)$$

Очевидно, что полный след в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ определяется как последовательное взятие следов во всех пространствах \mathcal{V} , входящих в произведение $\mathcal{V}^{\otimes n}$:

$$\mathbf{Tr} = \text{Tr}_{(1)} \text{Tr}_{(2)} \dots \text{Tr}_{(n)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Tr}(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n} A_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}. \quad (4.6.86)$$

Ранее, в разделе 4.2, было определено действие алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$. Для реализации такого действия элементы алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ записываются в матричном представлении \mathbf{s} (см. (4.2.9), (4.2.10)). Обозначим матричное представление \mathbf{s} примитивных идемпотентов $e(\Gamma_\lambda) \in \mathbb{C}[S_n]$, где Γ_λ – стандартная таблица Юнга, имеющая форму диаграммы Юнга $\lambda \vdash n$, следующим образом:

$$P(\Gamma_\lambda) = \mathbf{s}(e(\Gamma_\lambda)). \quad (4.6.87)$$

Проекторы (4.6.87) являются образами примитивных идемпотентов $e(\Gamma_\lambda)$, построенных с помощью индуктивной процедуры (4.6.76). Напомним, что набор примитивных идемпотентов $e(\Gamma_\lambda)$ вообще говоря отличается от набора примитивных идемпотентов $E(\Gamma_\lambda) = \frac{1}{\alpha_\lambda} Y(\Gamma_\lambda)$, построенных с помощью симметризаторов Юнга. Поэтому проекторы (4.6.87) вообще говоря отличаются от проекторов (4.4.1).

Определяющее представление T группы $SL(N, \mathbb{C})$ (и ее компактной подгруппы $SU(N)$) действует в пространстве \mathcal{V} . Соответственно представление $T^{\otimes n}$ групп $SL(N, \mathbb{C})$ (и $SU(N)$), которое приводимо, действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$. Напомним (см. подраздел 4.4.1), что представление $T^{\otimes n}$ разлагается на неприводимые представления $T^{(\lambda)}$, которые нумеруются диаграммами Юнга $\lambda \vdash n$ и действуют в инвариантных подпространствах $\mathcal{V}^{(\lambda)} \subset \mathcal{V}^{\otimes n}$. Подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ выделяются из пространства $\mathcal{V}^{\otimes n}$ представления $T^{\otimes n}$ с помощью симметризаторов Юнга (4.4.1), или с помощью проекторов (4.6.87). Указанное разложение представлений $T^{\otimes n}$ на неприводимые и выделение инвариантных подпространств $\mathcal{V}^{(\lambda)} \subset \mathcal{V}^{\otimes n}$ иллюстрируется с помощью графа ветвления Юнга (см. Рис.4.11), который вытекает из соотношений (4.4.33), (4.5.84) и в силу дуальности Шура–Вейля дается графом ветвления Юнга для группы S_n (см. Рис.4.8)

Утверждение 4.6.16 *Полные следы (4.6.86) от проекторов $P(\Gamma_\lambda)$ и $P(\Gamma'_\lambda)$, которые соответствуют двум таблицам Юнга Γ_λ и Γ'_λ , имеющим одну и ту же форму $\lambda \vdash n$, равны друг другу (то есть не зависят от расстановки чисел в клетках диаграммы λ) и равны размерности пространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ представления $T^{(\lambda)}$:*

$$\mathbf{Tr}(P(\Gamma_\lambda)) = \mathbf{Tr}(P(\Gamma'_\lambda)) = \dim(\mathcal{V}^{(\lambda)}). \quad (4.6.88)$$

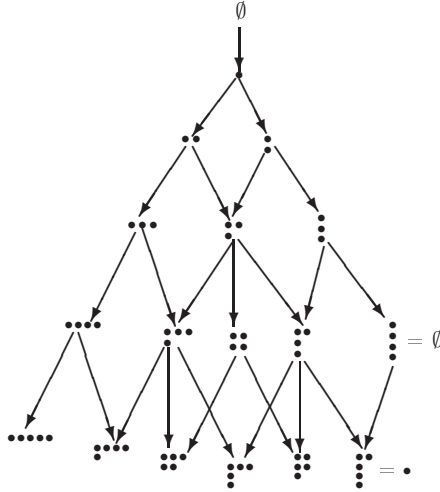


Рис. 4.11: Граф ветвления Юнга для представлений групп $SL(4, \mathbb{C})$ (и $SU(4)$), действующих в пространствах $\mathcal{V}^{\otimes n}$ ($n \leq 5$). Данный граф дается графом Юнга для группы S_5 (см. Рис.4.8). Каждый путь из вершины \emptyset на нулевом верхнем этаже графа до вершины с диаграммой Юнга $\lambda \vdash 5$ на последнем этаже графа соответствует стандартной таблице Юнга T_λ и проектору $P(T_\lambda)$. Таким образом, кратность вхождения представления, соответствующего диаграмме Юнга λ , в тензорное произведение определяющих представлений равна числу путей из вершины \emptyset до вершины λ . На данном графе показано, что происходит (см. Замечание в Разделе 4.4.1) с представлениями групп $SL(4, \mathbb{C})$ (и $SU(4)$) при появлении в диаграммах Юнга λ столбцов высотой $t \geq 4$. При рассмотрении последующей процедуры ветвления в случае $n > 5$, из представления $[1^4] = \emptyset$, возникшего на четвертом уровне, будет "расти" свой граф ветвления Юнга, аналогичный изображенному.

Доказательство. Двум разным стандартным таблицам T_λ и T'_λ , имеющим одну и ту же форму λ , однозначно сопоставляются два спектральных набора Λ и Λ' , которые переходят друг в друга с помощью нескольких перестановок (4.6.35) собственных значений a_i . Другими словами, имеется композиция $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ перестановок, указанных в (4.6.35) и в пункте 1.) Утверждения 4.6.6, которые переводят спектральный набор Λ в спектральный набор Λ' . Поэтому, идемпотенты $e(T_\lambda)$ и $e(T'_\lambda)$ связаны несколькими последовательными преобразованиями подобия (4.6.38):

$$e(T'_\lambda) = (U_{i_1} \cdots U_{i_k}) \cdot e(T_\lambda) \cdot (U_{i_1} \cdots U_{i_k})^{-1}, \tag{4.6.89}$$

где мы использовали то, что операторы U_i для случая $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$ невырождены. Отсюда следует равенство

$$\text{Tr}(P(T'_\lambda)) = \text{Tr}(s(U_{i_1} \cdots U_{i_k}) \cdot P(T_\lambda) \cdot s(U_{i_1} \cdots U_{i_k})^{-1}) = \text{Tr}(P(T_\lambda)).$$

Так как $e(T_\lambda)$ — идемпотент, то $P(T_\lambda)$ — проектор, удовлетворяющий тождеству $P^2 = P$, и спектр оператора $P(T_\lambda)$ состоит только из собственных значений 0 и +1, причем собственные вектора с собственным значением +1 лежат в подпространстве, являющемся образом проектора $P(T_\lambda)$. Так как след $\text{Tr}(P(T_\lambda))$ равен сумме

собственных значений оператора $P(T_\lambda)$, то эта сумма очевидно равна размерности подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$, которое является образом проектора $P(T_\lambda)$. ■

- **Задача 141.** Подставить выражения для симметризатора и антисимметризатора (4.6.84) в формулу (4.6.88) и получить размерности (4.4.25) и (4.4.28) представлений $T^{(1^n)}$ и $T^{(n)}$.

Формулу (4.6.88) для размерности неприводимых представлений $T^{(\lambda)}$ групп $SU(N)$ и $SL(N, \mathbb{C})$ достаточно сложно применять при конкретных вычислениях. Более удобная формула, так называемая формула крюков (4.4.21), обсуждалась выше в разделе 4.4.2 и была получена из выражения (3.5.45) для характеров группы $SU(N)$, которое в свою очередь выводится из формулы Вейля (3.5.31). Выражение для размерностей (4.6.88), указанное в Утверждении 4.6.16, следует из общего определения характеров, данного в (3.5.1).

Заметим, что пространство $\mathcal{V} = \mathbb{C}^N$ определяющего представления T группы $SU(N)$ одновременно является и пространством определяющего представления T' группы $U(N)$. Ясно, что инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ в $\mathcal{V}^{\otimes n}$ для прямых произведений $T^{\otimes n}$ и $T'^{\otimes n}$ определяющих представлений групп $SU(N)$ и $U(N)$ также совпадают. Поэтому, как для случая группы $SU(N)$, так и для случая группы $U(N)$, мы можем использовать одни и те же проекционные операторы (4.6.87). При этом, однако, следует помнить, что инвариантное подпространство $\mathcal{V}^{(1^N)} \subset \mathcal{V}^{\otimes n}$, полученное с помощью полного антисимметризатора $P(T_{[1^N]})$, в случае группы $SU(N)$ является пространством тривиального представления, а в случае группы $U(N)$ является пространством нетривиального детерминантного представления $T^{(1^N)}$: $g \rightarrow \det(g)$, где $g \in U(N)$. Далее мы будем рассматривать более общий случай матриц $g \in U(N)$. Так как любую матрицу $g \in U(N)$ можно представить в виде $g = \det^{1/N}(g) \cdot h$, где $h \in SU(N)$, то случай группы $SU(N)$ будет получаться из случая группы $U(N)$ при фиксации $\det(g) = 1$.

Утверждение 4.6.17 Пусть $g = ||g_j^i|| \in U(N)$ и λ_n — диаграмма Юнга с n клетками. Полный след

$$\chi_{\lambda_n}(g) := \text{Tr} \left(\underbrace{(g \otimes \cdots \otimes g)}_n P(T_{\lambda_n}) \right), \tag{4.6.90}$$

не зависит от расстановки чисел в клетках таблицы T_{λ_n} (зависит только от формы диаграммы Юнга λ_n) и является характером группы $U(N)$ в неприводимом представлении $T^{(\lambda_n)}$, соответствующем диаграмме λ_n .

Подчеркнем, что проектор $P(T_{\lambda_n})$ зависит от расстановки чисел в стандартной таблице T_{λ_n} , то есть зависит от выбора T_{λ_n} .

Доказательство. Операторы элементов $g \in U(N)$ в неприводимом представлении $T^{(\lambda_n)}$ записываются в виде (сравните с (4.4.3))

$$T^{(\lambda_n)}(g) = P(T_{\lambda_n}) \cdot T^{\otimes n}(g) = T^{\otimes n}(g) \cdot P(T_{\lambda_n}), \tag{4.6.91}$$

где T — определяющее представление и мы имеем $T^{\otimes n}(g) = g^{\otimes n}$. Полный след от левой и правой частей (4.6.91) дает формулу (4.6.90), которая в соответствии с общим определением (3.5.1) задает характер представления $T^{(\lambda_n)}$. То, что правая часть

(4.6.90) зависит только от формы диаграммы Юнга λ_n и не зависит от выбора стандартной таблицы T_{λ_n} , следует из равенства (4.6.89) и условия: $[g^{\otimes n}, s(U_{i_1} \cdots U_{i_k})] = 0$, вытекающего из Утверждения 4.2.2. ■

Матрица $g = \|g_j^i\| \in U(N)$ — диагонализуема (см. Утверждение 3.5.1) и может быть приведена с помощью преобразования эквивалентности $g \rightarrow h^{-1} \cdot g \cdot h$ к диагональной форме $g \rightarrow X = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$. Тогда, как было показано в разделе 3.5.2, характер $\chi_{\lambda_n}(g) = \chi_{\lambda_n}(X)$ является симметрическим полиномом степени n от N переменных $\{x_i\}$, который называется полиномом Шура для диаграммы λ_n . Определение симметрических полиномов Шура было дано выше в детерминантной форме (3.5.38), (3.5.43) в разделе 3.5.2 (другое принятое в литературе определение полиномов Шура будет дано в Замечании в конце этого Раздела). Формула (3.5.38), (3.5.43) не вполне явная, так как определяет полиномы Шура в виде отношения двух антисимметрических полиномов. Ниже, на основании определения характеров (4.6.90), мы приводим явные выражения для полиномов Шура в случае некоторых специальных диаграмм Юнга λ .

Примеры. Вычислим характеры (4.6.90) для представлений группы $U(N)$, которые соответствуют простейшим идемпотентам (4.5.33) и (4.5.37) для алгебр $\mathbb{C}[S_2]$ и $\mathbb{C}[S_3]$. При этом будем использовать следующие обозначения (см. также (4.2.13), (4.2.14))

$$P_k = s(\sigma_k) = I^{\otimes(k-1)} \otimes P \otimes I^{\otimes(n-k-1)}, \quad g_k = I^{\otimes(k-1)} \otimes g \otimes I^{\otimes(n-k)}, \quad (4.6.92)$$

где P — матрица перестановки. Подставим представления $s(e(T_{[2]}))$ и $s(e(T_{[1^2]}))$ идемпотентов (4.5.33) в формулу (4.6.90), в результате получаем

$$\begin{aligned} \chi_{[2]}(g) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(g_1 g_2 (1 + P_1) \right) = \frac{1}{2} (\text{Tr } g)^2 + \frac{1}{2} \text{Tr}(g^2), \\ \chi_{[1^2]}(g) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(g_1 g_2 (1 - P_1) \right) = \frac{1}{2} (\text{Tr } g)^2 - \frac{1}{2} \text{Tr}(g^2). \end{aligned} \quad (4.6.93)$$

Подстановка в формулу (4.6.90) образов идемпотентов (4.5.37) в представлении s дает

$$\chi_{[3]}(g) = \frac{1}{6} \text{Tr} \left(g_1 g_2 g_3 (1 + P_2 + P_1 P_2)(1 + P_1) \right) = \frac{1}{6} p_1^3 + \frac{1}{2} p_1 p_2 + \frac{1}{3} p_3, \quad (4.6.94)$$

$$\chi_{[1^3]}(g) = \frac{1}{6} \text{Tr} \left(g_1 g_2 g_3 (1 - P_2 + P_1 P_2)(1 - P_1) \right) = \frac{1}{6} p_1^3 - \frac{1}{2} p_1 p_2 + \frac{1}{3} p_3, \quad (4.6.95)$$

$$\chi_{[2,1^1]}(g) = \frac{1}{3} \text{Tr} \left(g_1 g_2 g_3 (1 - P_2 + \varepsilon(1 - P_1) P_2)(1 + P_1) \right) = \frac{1}{3} p_1^3 - \frac{1}{3} p_3, \quad (4.6.96)$$

$$\chi_{[2,1^2]}(g) = \frac{1}{3} \text{Tr} \left(g_1 g_2 g_3 (1 - P_1)(1 + P_2 - \varepsilon P_2 (1 + P_1)) \right) = \frac{1}{3} p_1^3 - \frac{1}{3} p_3,$$

где мы использовали краткие обозначения $p_k \equiv \text{Tr}(g^k)$.

- **Задача 142.** ★ Убедиться в справедливости соотношений (4.6.93), (4.6.94), (4.6.95) и (4.6.96).

Приведем матрицу g к диагональному виду $g \rightarrow \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$, тогда характеры (4.6.93), (4.6.94), (4.6.95) и (4.6.96) выражаются в виде симметрических функций

$$\begin{aligned} \chi_{[2]}(g) &= \sum_{i \leq j} x_i x_j, & \chi_{[1^2]}(g) &= \sum_{i < j} x_i x_j, \\ \chi_{[3]}(g) &= \sum_{i \leq j \leq k} x_i x_j x_k, & \chi_{[1^3]}(g) &= \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k, \end{aligned} \quad (4.6.97)$$

$$\chi_{[2,1]_1}(g) = 2 \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k + \sum_{i \neq j} x_i x_j^2 = \chi_{[2,1]_2}(g). \quad (4.6.98)$$

Отметим, что характеры $\chi_{[2,1]_1}$ и $\chi_{[2,1]_2}$ в (4.6.96) и (4.6.98) не зависят от произвольного параметра ε . Более того, как и ожидалось (см. Утверждение 4.6.17) мы получили $\chi_{[2,1]_1} = \chi_{[2,1]_2} \equiv \chi_{[2,1]}$, то есть характеры не зависят от расстановки чисел (номеров) в клетках таблицы Юнга T_λ , по которой строится представление, а зависят только от формы T_λ (от диаграммы Юнга λ).

- **Задача 143.** Получить равенства (4.6.97) и (4.6.98) из формул (4.6.93) — (4.6.96). Вывести равенства (4.6.97) и (4.6.98) для случая $N = 3$ из детерминантной формулы Якоби–Труди (3.5.43).
- **Задача 144.** Пользуясь соотношениями (4.6.93), (4.6.94), (4.6.95) и (4.6.96), проверить тождества для характеров, которые следуют из правила произведения представлений (4.4.33):

$$\chi_{[2]}(g) \cdot \chi_{[1]}(g) = \chi_{[3]}(g) + \chi_{[2,1]}(g), \quad \chi_{[1^2]}(g) \cdot \chi_{[1]}(g) = \chi_{[1^3]}(g) + \chi_{[2,1]}(g), \quad (4.6.99)$$

где $\chi_{[1]} = \text{Tr}(g) \equiv p_1$ — характер определяющего представления.

Утверждение 4.6.18 *Характеры $\chi_{[k]}(g)$ и $\chi_{[1^k]}(g)$ для полностью симметричного и полностью антисимметричного представлений группы $U(N)$ имеют вид (сравните с (4.6.97))*

$$\chi_{[k]}(g) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad \chi_{[1^k]}(g) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad (4.6.100)$$

где x_1, x_2, \dots, x_N — собственные значения матрицы $g \in U(N)$. Производящие функции для характеров $\chi_{[k]}(g)$ и $\chi_{[1^k]}(g)$ записываются следующим образом

$$H(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k]}(g) z^k = \prod_{k=1}^N \frac{1}{(1 - z x_k)}, \quad E(z) \equiv \sum_{k=0}^N \chi_{[1^k]}(g) z^k = \prod_{k=1}^N (1 + z x_k), \quad (4.6.101)$$

где мы положили $\chi_{[1^k]}(g) = \chi_{[k]}(g) = 1$ при $k = 0$.

Доказательство. Напомним, что представление группы $U(N)$, соответствующее диаграммам Юнга $[1^k]$ и $[k]$, действует в пространствах полностью антисимметричных и симметричных тензоров ранга k (см. раздел 4.4.2). Пусть матрица $g \in U(N)$ приведена к диагональной форме $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$. Тогда действие элемента g на компоненты тензора $\psi \in \mathcal{V}^{\otimes k}$ ранга k записывается в виде

$$\psi^{i_1, \dots, i_k} \rightarrow [g \cdot \psi]^{i_1, \dots, i_k} = (x_{i_1} \dots x_{i_k}) \psi^{i_1, \dots, i_k}, \quad (4.6.102)$$

и следовательно элементы $g \in U(N)$ в этом представлении также реализуются в виде диагональных матриц с диагональными элементами $(x_{i_1} \dots x_{i_k})$. Индексы у независимых компонент $\psi_a^{i_1, \dots, i_k}$ полностью антисимметричного тензора $\psi_a \in \mathcal{V}^{\otimes k}$ можно упорядочить как $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, а у независимых компонент $\psi_s^{i_1, \dots, i_k}$ полностью симметричного тензора $\psi_s \in \mathcal{V}^{\otimes k}$ индексы могут быть упорядочены следующим образом: $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ (см. раздел 4.4.2). Поэтому, суммируя все собственные

значения оператора g , указанные в (4.6.102), мы получаем для характеров $\chi_{[1^k]}$ и $\chi_{[k]}$ антисимметричного и симметричного представлений выражения (4.6.100).

Доказательство того, что функции $H(z)$ и $E(z)$, заданные в (4.6.101), действительно являются производящими функциями соответственно для характеров $\chi_{[k]}$ и $\chi_{[1^k]}$, которые выражаются в виде полиномов (4.6.100), мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения. ■

Следствие. Для матриц $g \in U(N)$, которые по определению диагонализуются, производящие функции $H(z)$ и $E(z)$, заданные в (4.6.101), имеют детерминантные представления

$$H(z) \equiv \sum_{k=0}^N \chi_{[k]}(g) z^k = \det^{-1}(I_N - z g) , \quad (4.6.103)$$

$$E(z) \equiv \sum_{k=0}^N \chi_{[1^k]}(g) z^k = \det(I_N + z g) . \quad (4.6.104)$$

Действительно, тождества (4.6.103) и (4.6.104) сразу же следует из равенств (4.6.101) для $H(z)$ и $E(z)$, так как в правых частях этих равенств стоят произведения собственных значений матриц $(I_N - z g)^{-1}$ и $(I_N + z g)$, то есть их детерминанты.

- **Задача 145.** ★ Не пользуясь диагонализуемостью матрицы g , доказать, что производящая функция $E(z)$ для характеров $\chi_{[1^k]}(g)$ дается характеристическим полиномом, вытекающим из разложения по z детерминанта (4.6.104). В случае диагонализуемой $(N \times N)$ матрицы g доказать характеристическое тождество (теорема Гамильтона–Кэли):

$$\sum_{r=0}^N (-g)^r \chi_{[1^{(N-r)}]}(g) = 0 , \quad (4.6.105)$$

(доказательство тождества (4.6.105) в общем случае дано в книге [28]).

- **Задача 146.** Доказать тождество $(\text{Tr}(g))^n = \sum_{\lambda \vdash n} f(\lambda) \chi_\lambda(g)$, где $f(\lambda)$ — число стандартных таблиц, имеющих форму диаграммы Юнга λ . Указание: воспользоваться формулой (4.5.86). Проверить это тождество для случая $n = 3$, учитывая равенства (4.6.94), (4.6.95) и (4.6.96).

Введем стандартные обозначения для характеров $\chi_{[k]}(g)$ и $\chi_{[1^k]}(g)$ из (4.6.100):

$$h_k(x) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} , \quad e_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} . \quad (4.6.106)$$

Тогда производящие функции (4.6.101) записываются следующим образом

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) z^k = \prod_{k=1}^N \frac{1}{(1 - z x_k)} , \quad E(z) = \sum_{k=0}^N e_k(x) z^k = \prod_{k=1}^N (1 + z x_k) . \quad (4.6.107)$$

Функции $h_k(x)$ и $e_k(x)$ называются соответственно k -ми **полными** и **элементарными** симметрическими полиномами от N переменных x_1, x_2, \dots, x_N . Введем еще один набор симметрических функций

$$p_k(x) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_N^k = \text{Tr}(g^k) , \quad (4.6.108)$$

которые называются k -ми **степенными суммами** Ньютона. Определим для степенных сумм (4.6.108) производящую функцию

$$\tilde{P}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(g^k) \frac{z^k}{k}, \quad P(z) \equiv \partial_z \tilde{P} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) z^{k-1} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{1 - zx_i}. \quad (4.6.109)$$

Утверждение 4.6.19 Производящие функции $H(z)$, $E(z)$ и $\tilde{P}(z)$, заданные в (4.6.107) и (4.6.109), связаны соотношениями

$$H(z) = \exp(\tilde{P}(z)), \quad E(z) = \exp(-\tilde{P}(-z)). \quad (4.6.110)$$

Наборы симметрических функций (4.6.106) и (4.6.108) удовлетворяют соотношениям

$$h_r(x) - e_1(x)h_{r-1}(x) + e_2(x)h_{r-2}(x) - \dots + (-1)^r e_r(x) = 0, \quad (4.6.111)$$

$$r h_r(x) - p_1(x)h_{r-1}(x) - p_2(x)h_{r-2}(x) - \dots - p_r(x) = 0, \quad (4.6.112)$$

$$r e_r(x) - p_1(x)e_{r-1}(x) + p_2(x)e_{r-2}(x) - \dots + (-1)^r p_r(x) = 0, \quad (4.6.113)$$

где $r = 1, \dots, N$. Соотношения (4.6.112) и (4.6.113) называются **формулами Ньютона**.

Доказательство. Пользуясь тождеством $\det(A) = \exp(\text{Tr} \ln(A))$, которое справедливо для любой матрицы A , а также разложением $\ln(1 - z) = -\sum_{k=1}^{\infty} z^k/k$, детерминанты в правых частях равенств (4.6.103) и (4.6.104) можно представить в виде функций $\exp(\tilde{P}(z))$ и $\exp(-\tilde{P}(-z))$, соответственно. Отсюда следуют соотношения (4.6.110). Из этих уравнений и равенств (4.6.107) вытекает формула $H(z)E(-z) = 1$, которая дает тождество

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) z^k \right) \left(\sum_{k=0}^N e_k(x) (-z)^k \right) = 1$$

Разлагая левую часть этого тождества по z , мы получаем соотношения (4.6.111). Заметим теперь, что производящие функции $H(z)$, $E(z)$ и $P(z)$, заданные в (4.6.107) и (4.6.109), связаны равенствами

$$\partial_z H(z) = P(z) H(z), \quad \partial_z E(z) = P(-z) E(z), \quad (4.6.114)$$

которые получаются дифференцированием обеих частей уравнений (4.6.110). Подставляя в равенства (4.6.114) разложения функций $H(z)$, $E(z)$ и $P(z)$ по z , мы получаем (4.6.112) и (4.6.113). ■

Известно, что в алгебре \mathcal{P} всех симметрических полиномов от N переменных $\{x_1, \dots, x_N\}$ над полем^{4.22} $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ в качестве образующих можно выбрать N элементарных симметрических полиномов $\{e_1(x), \dots, e_N(x)\}$. Из уравнений (4.6.110), разлагая их левые и правые части по z , следует, что функции $\{h_k(x) = \chi_{[k]}(x)\}$ и $\{e_k(x) = \chi_{[1^k]}(x)\}$ можно выразить в виде полиномов от функций $\{p_k(x)\}$, причем

^{4.22}Для простоты будем считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, хотя важными случаями здесь являются также поля \mathbb{Z} и \mathbb{Q} .

коэффициентами в этих полиномах будут рациональные числа. Кроме того из соотношений (4.6.111) также следует, что функции $\{e_k(x) = \chi_{[1^k]}(x)\}$ являются полиномами (с целыми коэффициентами) от функций из набора $\{h_k(x)\}$, где $k = 1, \dots, N$. Поэтому в качестве образующих в алгебре \mathcal{P} можно также выбирать конечные наборы степенных $\{p_1(x), \dots, p_N(x)\}$ или полных $\{h_1(x), \dots, h_N(x)\}$ симметрических функций.

- **Задача 147.** Вывести из уравнений (4.6.110) выражения (4.6.93) и (4.6.95) для характеров $\chi_{[k]}, \chi_{[1^k]}$ (в терминах степенных сумм $\text{Tr}(g^r)$) в случае $k = 2, 3$.

В качестве важного для приложений примера покажем, как симметрические функции Шура $\chi_\lambda(x) \in \mathcal{P}$, соответствующие произвольной диаграмме Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$, где $m \leq N$, представляются в виде некоторой комбинации полных симметрических полиномов $h_k(x) = \chi_{[k]}(x)$ ($k = 1, \dots, N$).

Утверждение 4.6.20 Пусть $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ — диаграмма Юнга с $m \leq N$ строками (то есть $\lambda_k = 0$ для всех $k > m$). Определим $(N \times N)$ матрицу $A(x)$ с элементами $A_{ij}(x) = h_{\lambda_i + j - i}(x)$, где $h_k(x) = 0$ для $k < 0$. Тогда функции Шура $\chi_\lambda(x)$ имеют детерминантное представление

$$\chi_\lambda(x) = \det(A(x)) = \det(\|h_{\lambda_i + j - i}(x)\|). \quad (4.6.115)$$

Доказательство (см. также [44]). Напомним, что функции Шура можно определить с помощью формулы Якоби–Труди (3.5.43)

$$\chi_\lambda(x) = \frac{\det(\|x_i^{\lambda_j + N - j}\|)}{\det(\|x_i^{N - j}\|)}. \quad (4.6.116)$$

Здесь $\|x_i^{\lambda_j + N - j}\|$ и $\|x_i^{N - j}\|$ — $(N \times N)$ матрицы, то есть $i, j = 1, \dots, N$ — номера строк и столбцов. Покажем, что результат деления двух полиномов в (4.6.116) равен симметрическому полиному (4.6.115). Пусть p — целое число такое, что $1 \leq p \leq N$, и пусть $e_r^{(p)}(x')$ — r -й элементарный симметрический полином от переменных $x' = (x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_N)$. Тогда, пользуясь производящими функциями (4.6.107), получаем

$$\left(\sum_k h_k(x) z^k\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{N-1} e_r^{(p)}(x') (-z)^r\right) = \frac{1}{1 - x_p z}. \quad (4.6.117)$$

Отметим, что сумму по k в левой части (4.6.117) можно распространить на весь интервал $k \in [-\infty, \infty]$, если вспомнить, что $h_k = 0$ для всех $k < 0$. Разлагая обе части равенства (4.6.117) по z , выводим формулу

$$\sum_{j=1}^N h_{q+j-N}(x) (-1)^{N-j} e_{N-j}^{(p)}(x') = (x_p)^q,$$

из которой при $q = \lambda_i + N - i$ следует соотношение для произведения матриц

$$\|h_{\lambda_i + j - i}(x)\| \cdot \|(-1)^{N-j} e_{N-j}^{(p)}(x')\| = \|(x_p)^{\lambda_i + N - i}\|. \quad (4.6.118)$$

Учтем, что из формулы (4.6.118) для $\lambda = [0, 0, \dots, 0]$ в силу условия $\det \| |h_{j-i}| \| = 1$, вытекающего из $h_0(x) = 1$ и $h_k(x) = 0$ при $k < 0$, следует равенство

$$\det(\|(-1)^{N-i} e_{N-i}^{(j)}\|) = \det(\|(x_j)^{N-i}\|). \tag{4.6.119}$$

Вычислим теперь детерминант от обеих частей матричного соотношения (4.6.118) и воспользуемся формулами (4.6.116) и (4.6.119). В результате получаем (4.6.115). ■

- *Задача 148. Вывести из детерминантного представления (4.6.115) формулу (сравните с первым равенством в (4.6.99))*

$$\chi_{[2,1]} = \det \begin{pmatrix} h_2(x) & h_3(x) \\ h_0(x) & h_1(x) \end{pmatrix} = h_2(x) h_1(x) - h_3(x).$$

Замечание. Наряду со стандартными таблицами Юнга T_λ , имеющими форму диаграммы Юнга λ (см. Определение 4.3.2 в подразделе 4.3.2), рассмотрим таблицы, которые определяются следующим образом. В клетках диаграммы $\lambda \vdash k$ будем размещать числа $\{1, 2, \dots, N\}$ так, что (а) они не убывают в строках слева направо и (б) строго возрастают в столбцах сверху вниз. Например,

$$T = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & \\ 3 & 4 & 4 & & & \\ 5 & 6 & & & & \end{array}. \tag{4.6.120}$$

Таблицы такого типа называются *полустандартными*. Пусть $n_T(i)$ — число вхождений числа i в полустандартную таблицу T . Каждой такой таблице T сопоставим моном

$$x^T = \prod_{i=1}^N x_i^{n_T(i)}. \tag{4.6.121}$$

Например, полустандартной таблице (4.6.120) сопоставляется моном $x_1 x_2^3 x_3^6 x_4^3 x_5^2 x_6 = x^T$. Обычно в литературе многочлены Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ определяются как однородные полиномы, построенные в виде суммы мономов (4.6.121) по всем полустандартным таблицам T , имеющим форму λ и содержащим в клетках числа $\{1, 2, \dots, N\}$:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_T x^T. \tag{4.6.122}$$

В частном случае, когда $\lambda = [k]$ и $\lambda = [1^k]$, легко проверить, что $s_{[k]}(x) = \chi_{[k]}(x)$ и $s_{[1^k]}(x) = \chi_{[1^k]}(x)$, где характеры $\chi_{[k]}(x)$ и $\chi_{[1^k]}(x)$ определены в (4.6.100). Доказательство равенства $s_\lambda(x) = \chi_\lambda(x)$ в общем случае, где $\chi_\lambda(x)$ определены в (4.6.115), или в (4.6.116), использующее комбинаторику таблиц Юнга (см. [40]), выходит за рамки нашей книги.

Отметим здесь лишь следующее наводящее соображение в пользу справедливости равенства $s_\lambda(x) = \chi_\lambda(x)$. При действии (4.6.102) элемента $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N) \in U(N)$ в пространстве тензоров $\psi^{i_1 \dots i_k}$, симметризованных в соответствии с некоторой диаграммой Юнга $\lambda \vdash k$ (напомним, что индексы i_1, \dots, i_k симметризованного тензора располагаются в клетках диаграммы λ), индексы у собственных значений

$(x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k})$, находящиеся в одном столбце диаграммы λ , можно упорядочить так, что они строго возрастают сверху вниз, а индексы находящиеся в одной строке диаграммы λ , могут быть упорядочены так, что они не убывают слева на право. Поэтому каждое собственное значение $(x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k})$ представляет собой моном (4.6.121), а сумма таких мономов с одной стороны дает характер представления $\chi_\lambda(x)$, а с другой стороны равна функции Шура (4.6.122) (см. аналогичные рассуждения при доказательстве равенств (4.6.100) из Утверждения 4.6.18).

4.7 Заключительные замечания. Базис Гельфанда–Цетлина

В заключение данной Главы 4, посвященной изложению теории конечномерных представлений линейных групп и их алгебр Ли, необходимо сделать замечание о том, что это изложение нельзя считать вполне законченным, так как мы здесь не коснулись двух важных тем. Первая тема — это базис Гельфанда–Цетлина в пространствах неприводимых представлений алгебры $sl(N, \mathbb{C})$, или алгебры $gl(N, \mathbb{C})$ и ее вещественной формы $u(N)$. Базис Гельфанда–Цетлина позволяет решить проблему вырождения спектра весов (см. пункт **В** в разделе 3.2), которые нумеруют базисные вектора в пространствах неприводимых конечномерных представлений алгебр Ли $sl(N, \mathbb{C})$, а также алгебр $gl(N, \mathbb{C})$ и $u(N)$. Кроме этого, базис Гельфанда–Цетлина является удобным инструментом для изучения и классификации таких представлений. Вторая тема — это разложение Клебша–Гордана для прямого произведения двух произвольных конечномерных неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли для случая $N \geq 3$ (случай $N = 2$ разобран нами в Разделе 2.4), или правило Литлвуда–Ричардсона для разложения прямого произведения двух неприводимых представлений группы перестановок S_r . Тем, кто хочет получить об этих темах более подробную информацию, мы рекомендуем обратиться к книгам [13], [27] [30] и [31].

Здесь мы лишь кратко обсудим идею построения базиса Гельфанда–Цетлина в пространствах $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ конечномерных неприводимых представлений $T^{(\lambda)}$ алгебры Ли $gl(N, \mathbb{C})$ с образующими E_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$), удовлетворяющими структурным соотношениям

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \quad (4.7.1)$$

Представления со старшим весом алгебры $gl(N, \mathbb{C})$ рассматривались в пункте 2.1 раздела 3.4.2. Вырождение весов означает, что в обертывающей алгебре $\mathcal{U}(gl(N, \mathbb{C}))$ ($N > 2$) имеются операторы, которые, с одной стороны, не являются произведениями элементов подалгебры Картана и операторов Казимира (операторы Казимира алгебр $sl(N, \mathbb{C})$ и $gl(N, \mathbb{C})$ совпадают), а с другой — коммутируют со всеми элементами подалгебры Картана в $gl(N, \mathbb{C})$. Напомним, что подалгебра Картана в $gl(N, \mathbb{C})$ включает единичный центральный элемент и имеет размерность N ; см. пункт 2.1 в разделе 3.4.2. Также напомним (см. раздел 3.4.3), что значения операторов Казимира на всех векторах пространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ выражаются в виде функций от компонент старшего веса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ представления $T^{(\lambda)}$. В пункте 2.1 раздела 3.4.2 было показано, что целочисленные компоненты старшего веса λ упорядочены согласно

(3.4.46):

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0, \quad (4.7.2)$$

и соответствуют диаграмме Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]$. Рассмотрим подалгебру $gl(N-1, \mathbb{C}) \subset gl(N, \mathbb{C})$, которая вложена в $gl(N, \mathbb{C})$ следующим образом

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 \dots 0 & 0 \end{array} \right), \quad A \in gl(N-1, \mathbb{C}), \quad (4.7.3)$$

то есть, подалгебра $gl(N-1, \mathbb{C})$ натянута на образующие $E_{ij} \in gl(N, \mathbb{C})$, у которых индексы пробегает значения $i, j = 1, \dots, (N-1)$. Неприводимое конечномерное представление $T^{(\lambda)}$ алгебры $gl(N, \mathbb{C})$ является приводимым для подалгебры $gl(N-1, \mathbb{C})$ и разлагается в сумму ее неприводимых представлений $T^{(\lambda')}$, каждое из которых имеет размерность меньшую $\dim(T^{(\lambda)})$ и нумеруется своим старшим весом $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1})$, где компоненты упорядочены так же как и в (4.7.2): $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_{N-1} \geq 0$. Вес λ' соответствует диаграмме Юнга $\Lambda' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}]$ и определяет собственные значения (как функции от λ'_i) операторов Казимира для $gl(N-1, \mathbb{C})$. Операторы Казимира для $gl(N-1, \mathbb{C})$ коммутируют с операторами Казимира (и элементами подалгебры Картана) для $gl(N, \mathbb{C})$ и поэтому мы можем использовать их собственные значения, а следовательно и значения компонент старшего веса $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1})$, для нумерации векторов в подпространствах $\mathcal{V}^{(\lambda')} \subset \mathcal{V}^{(\lambda)}$ представлений $T^{(\lambda')}$ наряду со значениями компонент старшего веса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Далее, вспомним рассуждения, которые использовались в разделе 4.4.2 для формулировки первого способа вычисления размерностей представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, который основывался на вложении представлений подгруппы $SL(N-1, \mathbb{C})$ в представления группы $SL(N, \mathbb{C})$. Эти рассуждения в полной мере применимы и к описанию вложений представлений алгебры $gl(N-1, \mathbb{C})$ в представления алгебры $gl(N, \mathbb{C})$. В результате мы приходим к тому, что представление $T^{(\lambda')}$ алгебры $gl(N-1, \mathbb{C})$, соответствующее диаграмме Юнга $\Lambda' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}]$, может входить в разложение представления $T^{(\lambda)}$ алгебры $gl(N, \mathbb{C})$, соответствующее диаграмме Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}]$, только если выполнено условие

$$\lambda_i \geq \lambda'_i \geq \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.7.4)$$

при этом кратность вхождения каждого неприводимого представления $T^{(\lambda')}$ в разложение представления $T^{(\lambda)}$ равна единице. Рассмотрим теперь цепочку вложений алгебр $gl(1, \mathbb{C}) \subset gl(2, \mathbb{C}) \subset \dots \subset gl(N, \mathbb{C})$ и разложим пространство $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ неприводимого представления алгебры $gl(N, \mathbb{C})$ на подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda')}$ неприводимых представлений алгебры $gl(N-1, \mathbb{C})$, которые в свою очередь разложим на подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda'')}$ представлений алгебры $gl(N-2, \mathbb{C})$ и так далее, вплоть до пространств неприводимых представлений алгебры $gl(1, \mathbb{C})$. Каждое пространство $\mathcal{V}^{(\lambda_{(K)})}$ неприводимого представления подалгебры $gl(K, \mathbb{C})$ нумеруется своим старшим весом $\lambda_{(K)} = (\lambda_{1(K)}, \dots, \lambda_{K(K)})$, компоненты которого удовлетворяют условиям (см. (4.7.2), (4.7.4))

$$\lambda_{1(K)} \geq \dots \geq \lambda_{K(K)}, \quad \lambda_{i(K)} \geq \lambda_{i(K-1)} \geq \lambda_{i+1(K)}, \quad i = 1, 2, \dots, K-1. \quad (4.7.5)$$

Так как пространства неприводимых представлений подалгебры $gl(1, \mathbb{C})$ одномерны, то набор компонент всех старших весов $\lambda_{(K)}$ ($K = 1, \dots, N$), нумерует фиксированное

Глава 5

Конечномерные представления групп SO , Sp и алгебр Ли so , sp

В разделах 5.1 — 5.3 мы рассмотрим класс неприводимых представлений групп из семейств SO и Sp , которые возникают как подпредставления в тензорном произведении *определяющих представлений* этих групп и исчерпывают все неприводимые представления групп SO и Sp , ассоциированные с представлениями алгебр Ли so и sp . Как было показано в разделе 3.4.2 (пункт 5.) все неприводимые представления алгебр Ли sp содержатся в тензорных произведениях определяющих представлений и таким образом находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями групп Sp рассматриваемого класса. Таким образом, наше рассмотрение будет охватывать *все* неприводимые представления алгебр sp -серии. Для алгебр Ли so взаимнооднозначного соответствия нет. Как было указано в разделе 3.4.2 (пункты 3. и 4.), эти алгебры имеют спинорные представления, которые не вкладываются в тензорное произведение определяющих представлений и не имеют аналогов среди представлений групп SO . Вместо этого спинорные представления алгебр so порождаются представлениями групп Spin, локально изоморфных группам SO . Мы познакомимся со спинорными представлениями алгебр Ли so в разделе 5.4, а в Главе 6 обсудим группы Spin более подробно.

5.1 Тензорные представления групп $O(N, \mathbb{C})$, $SO(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $O(p, q)$, $SO(p, q)$

В начале этого раздела мы кратко сформулируем некоторые факты, которые в той или иной мере уже обсуждались в разделах I-1.2.5, I-2.2.3 и I-2.2.9 первой части книги. Нам представляется целесообразным собрать эти факты в одном месте и рассмотреть их более детально. Все результаты, касающиеся представлений групп $O(p, q)$ и их алгебр Ли $so(p, q)$ и изложенные в этом разделе, легко переносятся (если зафиксировать $p = 1$ и $q = N - 1$) на случай многомерной группы Лоренца $O(1, N - 1)$ и ее алгебры Ли.

5.1.1 Псевдоортогональная группа $O(p, q)$ и алгебра Ли $so(p, q)$

Рассмотрим N -мерное **вещественное** векторное пространство \mathcal{V}_N , в котором для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}_N$ задано невырожденное скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}$. Относительно этого скалярного произведения выберем в пространстве \mathcal{V}_N ортогональный базис $\{\vec{e}_i\}$, ($i = 1, \dots, N$), то есть базис, для которого матрица η с элементами $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \eta_{ij}$ диагональна $\eta = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ и $\eta_i \neq 0$ для всех i . Матрица η называется метрикой в пространстве \mathcal{V}_N . С помощью растяжения базисных векторов $\vec{e}_j \rightarrow \lambda_j \vec{e}_j$ (где все $\lambda_j \in \mathbb{R}$) мы всегда можем свести ненулевые числа η_i к двум значениям $\eta_i = \pm 1$. Напомним, что если все $\eta_i = +1$ (или все $\eta_i = -1$), то пространство \mathcal{V}_N называется евклидовым и обозначается \mathbb{R}^N , а если в наборе $\{\eta_j\}$ встречаются как $+1$ так и -1 , то есть

$$\eta = I_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q), \quad (5.1.1)$$

где $p + q = N$, то пространство \mathcal{V}_N называется псевдоевклидовым и обозначается $\mathbb{R}^{p,q}$. Пространство $\mathbb{R}^{1,N-1}$ называется **пространством Минковского**.

Рассмотрим линейное преобразование базиса в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$:

$$\vec{e}_j' = \Lambda \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_k \Lambda^k_j, \quad \|\Lambda^k_j\| \in \text{Mat}_N(\mathbb{R}), \quad (5.1.2)$$

при этом метрика $\eta_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ будет меняться согласно правилу

$$\eta'_{ij} = (\vec{e}_i', \vec{e}_j') = \Lambda^k_i \Lambda^n_j (\vec{e}_k, \vec{e}_n) = \Lambda^k_i \Lambda^n_j \eta_{kn}. \quad (5.1.3)$$

У элементов Λ^k_i вещественной матрицы оператора Λ мы будем различать не только верхний и нижний, но и левый (входящий) и правый (исходящий) индексы, здесь это индексы k и i , соответственно.

Определение 5.1.1 Псевдоортогональной группой $O(p, q)$ называется множество линейных операторов Λ в $\mathbb{R}^{p,q}$, осуществляющих преобразования (5.1.2) базиса в $\mathbb{R}^{p,q}$, и не меняющих метрику (5.1.1):

$$\eta_{ij} = \eta'_{ij} = \Lambda^k_i \eta_{kn} \Lambda^n_j \Leftrightarrow \eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (5.1.4)$$

То есть, псевдоортогональная группа $O(p, q)$ — это множество всех вещественных $(p+q) \times (p+q)$ -матриц $\Lambda = \|\Lambda^k_j\|$, удовлетворяющих соотношению (5.1.4), с законом композиции — обычным произведением матриц.

Иначе говоря, $O(p, q)$ — множество преобразований (5.1.2), которые согласно (5.1.3) и (5.1.4) сохраняют скалярные произведения базисных векторов $(\vec{e}_i', \vec{e}_j') = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ в $\mathbb{R}^{p,q}$, и соответственно сохраняют скалярные произведения любых векторов в $\mathbb{R}^{p,q}$.

Напомним теперь как устроено многообразие группы Ли $O(p, q)$ (см. пункт 12 раздела I-2.1.2 первой части книги). В частности мы напомним определение связанной компоненты $SO^\uparrow(p, q) \subset O(p, q)$ единичного элемента. Эта информация понадобится нам в следующей Главе 6 при изучении групп $\text{Spin}(p, q)$, которые накрывают связную компоненту $SO^\uparrow(p, q)$.

Из условия (5.1.4) следует, что $\det(\Lambda) = \pm 1$. Поэтому псевдоортогональная группа $O(p, q)$ разбивается на два несвязанных друг с другом подмножества $O_+(p, q)$ и $O_-(p, q)$, состоящих соответственно из собственных ($\det(\Lambda) = +1$) и несобственных ($\det(\Lambda) = -1$) преобразований $\Lambda \in O(p, q)$. Подмножество $O_+(p, q) \equiv SO(p, q)$ собственных преобразований образует специальную подгруппу $SO(p, q) \subset O(p, q)$. Представим Λ в виде блочной матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (5.1.5)$$

где X , Y , Z и W – вещественные матрицы размера $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ и $q \times q$, соответственно.

- *Задача 150.* Получить условия $|\det(X)| \geq 1$, $|\det(W)| \geq 1$ из соотношений (5.1.4).

Как было показано в первой части книги (см. раздел **I-2.1.2**, пункт 12), для группы $O(p, q)$ можно определить аналог собственной ортохронной подгруппы $SO^\uparrow(p, q) \subset SO(p, q)$, которая определяется как подмножество элементов $\Lambda \in O(p, q)$ таких, что $\det(\Lambda) = +1$, а блоки X и W , заданные в (5.1.5), ограничены условиями $\det(X) \geq 1$, $\det(W) \geq 1$. Подгруппа $SO^\uparrow(p, q) \subset O(p, q)$ является связной компонентой единичного элемента $I \in O(p, q)$, а все многообразие группы $O(p, q)$ ($p \geq 1$, $q \geq 1$) состоит из четырех не связанных друг с другом компонент, каждая из которых представляет собой смежный класс по подгруппе $SO^\uparrow(p, q)$:

$$O(p, q) = (SO^\uparrow(p, q) \cdot I) \cup (SO^\uparrow(p, q) \cdot T) \cup (SO^\uparrow(p, q) \cdot P) \cup (SO^\uparrow(p, q) \cdot PT), \quad (5.1.6)$$

где $T = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ и $P = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1)$. Соответственно, объединение компонент $SO^\uparrow(p, q)$ и $(SO^\uparrow(p, q) \cdot PT)$ образует подгруппу собственных преобразований $SO(p, q)$, а объединение компонент $(SO^\uparrow(p, q) \cdot T)$ и $(SO^\uparrow(p, q) \cdot P)$ составляет несобственную часть $O_-(p, q) \subset O(p, q)$.

Заметим, что (5.1.4) переписывается в виде $\eta = (\Lambda^\top)^{-1} \eta \Lambda^{-1}$, поэтому:

$$\eta^{-1} = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^\top \Leftrightarrow \eta^{ij} = \Lambda^i_k \eta^{kn} \Lambda^j_n, \quad (5.1.7)$$

где коэффициенты η^{kj} (с верхними индексами) обозначают элементы обратной матрицы η^{-1} : $\eta_{ik} \eta^{kj} = \delta_i^j$; для стандартной метрики (5.1.1) мы имеем $\eta^{-1} = \eta$. Кроме того, условие (5.1.4) можно переписать в виде соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем,

$$\eta_{ij} (\Lambda^{-1})^j_n = \Lambda^k_i \eta_{kn} \Leftrightarrow (\Lambda^{-1})_{in} = \Lambda_{ni} \Leftrightarrow (\Lambda^{-1})_i^n = \Lambda^n_i, \quad (5.1.8)$$

$$\Lambda_i^k \eta_{kn} \Lambda_j^n = \eta_{ij} \Leftrightarrow \Lambda_k^i \eta^{kn} \Lambda_n^j = \eta^{ij}. \quad (5.1.9)$$

Здесь и далее подъем и опускание индексов осуществляются с помощью метрики (5.1.1), например, $\Lambda_{ni} = \eta_{nj} \Lambda^j_i$, $\Lambda_n^i = \eta^{ij} \Lambda_{nj}$, и так далее.

Рассматривая элементы $\Lambda \in SO(p, q)$ вблизи единицы $\Lambda = I + tA + \dots$ (где параметр t – мал), из условий (5.1.4) мы получаем в первом порядке по t :

$$A^k_i \eta_{kj} + \eta_{in} A^n_j = 0 \Leftrightarrow A^i_k \eta^{kj} + \eta^{in} A^j_n = 0. \quad (5.1.10)$$

Множество вещественных $(N \times N)$ матриц A , удовлетворяющих соотношениям (5.1.10), образует вещественное векторное пространство, касательное к многообразию группы $O(p, q)$ в единичном элементе. Это пространство обозначается как $so(p, q)$. Причем, если A и A' принадлежат $so(p, q)$, то их коммутатор $[A, A']$ удовлетворяет (5.1.10) и $[A, A'] \in so(p, q)$. Таким образом, множество матриц A , удовлетворяющих (5.1.10), образует алгебру Ли $so(p, q)$.

Соотношение (5.1.10), учитывая что η — симметричная матрица, можно записать в виде $\eta_{jk} A^k_i = -\eta_{ik} A^k_j$, то есть матрица $\eta \cdot A$ — кососимметрична и ее можно разложить по базису кососимметричных матриц

$$\eta \cdot A = \omega_{ij}(e_{ij} - e_{ji}),$$

где e_{ij} — матричные единицы и параметры $\omega_{ij} = -\omega_{ji} \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что в качестве базиса в алгебре $so(p, q)$ можно выбрать матрицы (см. пункт 7 Раздела I-2.2.9)

$$L_{ij} = \eta^{-1} \cdot (e_{ij} - e_{ji}), \quad 1 \leq i < j \leq p + q. \quad (5.1.11)$$

Используя известное правило $e_{ij} \cdot h \cdot e_{kl} = h_{jk} e_{il}$, где $h = ||h_{ik}||$, мы получаем для образующих (5.1.11) алгебры $so(p, q)$ структурные соотношения

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \eta_{jk}^{-1} L_{il} + \eta_{jl}^{-1} L_{ki} + \eta_{ik}^{-1} L_{lj} + \eta_{il}^{-1} L_{jk}. \quad (5.1.12)$$

Отметим, что эти соотношения справедливы для образующих алгебр Ли $so(p, q)$ с любой симметричной метрикой η (не обязательно диагональной).

Напомним, что в первой части книги мы определили ортогональные группы комплексных матриц как множества комплексных $N \times N$ матриц O , удовлетворяющих условию ортогональности

$$O^T \eta O = \eta, \quad (5.1.13)$$

где в качестве метрики η выбирается любая симметричная невырожденная вещественная матрица. В частности для специального выбора $\eta = I_N$ ортогональная группа комплексных матриц обозначалась как $O(N, \mathbb{C})$. Было показано, что в отличие от групп $O(p, q)$ вещественных матриц, независимо от выбора метрики η все ортогональные группы комплексных матриц изоморфны друг другу и следовательно изоморфны группе $O(N, \mathbb{C})$. Подгруппа $SO(N, \mathbb{C}) \subset O(N, \mathbb{C})$ выделялась из $O(N, \mathbb{C})$ с помощью условия $\det(O) = 1$; аналогично подгруппа $SO(p, q)$ выделялась из группы $O(p, q)$ в вещественном случае. Рассматривая матрицы $O = I_N + tA + t^2 \dots \in SO(N, \mathbb{C})$ вблизи единичного элемента (здесь t — малый параметр), и используя основное соотношение $O^T O = I_N$, мы получаем единственное условие

$$A + A^T = 0 \quad (5.1.14)$$

на комплексные $N \times N$ матрицы A . Поэтому естественно определить комплексную алгебру Ли $so(N, \mathbb{C})$, как комплексное векторное пространство матриц A , удовлетворяющих (5.1.14), с алгебраической операцией в виде коммутатора матриц. Отметим, что в данном матричном определении групп $O(N, \mathbb{C})$ комплексных матриц и их алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$ с помощью условий (5.1.13) и (5.1.14), мы нигде не пользуемся вещественностью многообразий групп Ли.

В случае комплексных матриц выбор метрики в соотношении (5.1.10) несущественен и мы положили там $\eta = I_N$. В вещественном случае выбор в (5.1.10) разных

метрику $\eta = I_{p,q}$ (для разных p и q с $p+q = N$) приводит к определению не изоморфных друг другу вещественных алгебр Ли $so(p, q)$, которые называются вещественными формами комплексной алгебры $so(N, \mathbb{C})$. Полная классификация вещественных форм алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$ дана в разделе **1-2.2.10** первой части книги.

В следующих разделах мы будем изучать представления группы $O(p, q)$ вещественных матриц, которые, как мы говорили выше, одновременно дают определенный класс представлений ее алгебры Ли $so(p, q)$ (все неприводимые представления этой алгебры, которые получены как прямое произведение ее определяющих представлений; в этот класс представлений не входят, например, спинорные представления).

5.1.2 Тензоры. Тензорные представления групп $O(p, q)$

С точки зрения физических приложений важно изучить вещественные представления групп $O(p, q)$.

Рассмотрим вектор $\vec{x} = x^j \vec{e}_j \in \mathbb{R}^{p,q}$ с координатами $x^j \in \mathbb{R}$. Эти координаты при преобразовании базиса (5.1.2) меняются в соответствии с правилом (2.1.8):

$$x'^j = \Lambda^j_k x^k = x^k (\Lambda^{-1})_k^j, \quad (5.1.15)$$

где во втором равенстве мы использовали (5.1.8). Из Определения **5.1.1**, следует, что преобразования (5.1.15) в $\mathbb{R}^{p,q}$ с матрицами Λ , которые удовлетворяют (5.1.4), сохраняют скалярное произведение

$$(\vec{y}, \vec{x}) = y^i \eta_{ij} x^j = y_j x^j, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{p,q}, \quad (5.1.16)$$

где, в соответствии со сказанным выше, мы определили координаты с нижними индексами

$$x_j = (\vec{x}, \vec{e}_j) = x^k \eta_{kj}. \quad (5.1.17)$$

Эти координаты преобразуются следующим образом

$$x'_j = x_k (\Lambda^{-1})^k_j = \Lambda_j^k x_k, \quad (5.1.18)$$

что в частности следует из (5.1.15) и инвариантности (5.1.16). Преобразование (5.1.18) будем называть **ковариантным** преобразованием координат, а преобразование (5.1.15) – **контравариантным**. В соответствии с этим соглашением координаты x_j с нижними индексами называются **ковариантными**, а с верхними — **контравариантными**. Отметим, что соотношение (5.1.17) можно обратить

$$x^k = \eta^{kj} x_j. \quad (5.1.19)$$

С помощью метрик η_{jk} и η^{kj} можно опускать и поднимать индексы и у базисных векторов \vec{e}^j и \vec{e}_j . Для базисных векторов \vec{e}^j действие (5.1.2) переписывается в виде

$$\vec{e}^{j'} = \Lambda \cdot \vec{e}^j = (\Lambda^{-1})^j_k \vec{e}^k = \vec{e}^k \Lambda_k^j. \quad (5.1.20)$$

Матрицы $\Lambda = \|\Lambda^k_j\|$, удовлетворяющие (5.1.4), задают определяющее вещественное представление T псевдоортогональной группы $O(p, q)$. Представление T действует в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ и это действие задается соотношениями (5.1.2) и (5.1.15).

Контраградиентное к определяющему представлению \tilde{T} группы $O(p, q)$ задается стандартным образом (см. пример 3. из раздела I-3.1.1 в первой части книги):

$$\tilde{T}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^T, \quad \forall \Lambda = \|\Lambda^k_j\| \in O(p, q),$$

и также действует в векторном пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$. Соответствующее действие определено в (5.1.18) и (5.1.20). В силу второго соотношения в (5.1.4), представления T и \tilde{T} эквивалентны

$$(\Lambda^{-1})^T = \eta \Lambda \eta^{-1}, \quad (5.1.21)$$

а равенства (5.1.17) и (5.1.19) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между векторами пространств $\mathbb{R}^{p,q}$ этих представлений.

Рассмотрим тензорное произведение нескольких представлений T и \tilde{T} группы $O(p, q)$

$$T^{(s+t)} = \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_s \otimes \underbrace{\tilde{T} \otimes \dots \otimes \tilde{T}}_t = T^{\otimes s} \otimes \tilde{T}^{\otimes t}, \quad s+t=r. \quad (5.1.22)$$

Пространством такого представления является тензорное произведение пространств $(\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes r}$. Рассмотрим элементы

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{k_{s+1} \dots k_r}^{k_1 \dots k_s} \vec{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{k_s} \otimes \vec{e}^{k_{s+1}} \otimes \dots \otimes \vec{e}^{k_r} \in (\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes r}, \quad (5.1.23)$$

где $\mathbf{t}_{k_{s+1} \dots k_r}^{k_1 \dots k_s}$ — вещественные числа, которые называются компонентами элемента \mathbf{t} и имеют в общем случае s верхних и $t = r - s$ нижних индексов. Согласно действию (5.1.2) и (5.1.20) группы $O(p, q)$ на базисные вектора $\vec{e}_j, \vec{e}^k \in \mathbb{R}^{p,q}$ компоненты (5.1.23) преобразуются следующим образом

$$\mathbf{t}_{j_1 \dots j_t}^{k_1 \dots k_s} \rightarrow \Lambda^{k_1}_{n_1} \dots \Lambda^{k_s}_{n_s} \mathbf{t}_{\ell_1 \dots \ell_t}^{n_1 \dots n_s} (\Lambda^{-1})^{\ell_1}_{j_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\ell_t}_{j_t}. \quad (5.1.24)$$

Определение 5.1.2 Тензором ранга $r = (s+t)$ в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ называется элемент (5.1.23) в пространстве $(\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes r}$, компоненты $\mathbf{t}_{j_1 \dots j_t}^{k_1 \dots k_s}$ которого при преобразованиях (5.1.2), (5.1.20) базиса в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ меняются согласно (5.1.24). Представление (5.1.22), которое действует в пространстве тензоров (5.1.23) в соответствии с правилом (5.1.24), называется **тензорным**.

Другими словами тензор ранга $(s+t)$ — это вектор в пространстве тензорного представления $T^{(s+t)}$. Из этого определения и вида преобразований (5.1.15) и (5.1.18) следует, например, что компоненты x^i и x_i векторов в $\mathbb{R}^{p,q}$ задают тензоры ранга $(1+0)$ и $(0+1)$, соответственно, а метрики η и η^{-1} в силу (5.1.4) и (5.1.7) являются инвариантными тензорами ранга $(0+2)$ и $(2+0)$.

Из двух тензоров \mathbf{t} и \mathbf{t}' , имеющих ранги $r, r' \geq 1$ можно построить новый тензор \mathbf{t}'' другого ранга с помощью процедуры, называемой сверткой. При этом компоненты тензора \mathbf{t}'' получаются в результате суммирования некоторых верхних (нижних) индексов компонент тензора \mathbf{t} с некоторыми нижними (верхними) индексами компонент тензора \mathbf{t}' . То, что в результате получается снова тензор, гарантируется видом преобразований (5.1.24). Например, рассмотрим свертку двух тензоров \mathbf{t} и \mathbf{t}' ранга $((k+t)+s)$ и $(g+(k+r))$ по k индексам:

$$\mathbf{t}_{k_1 \dots k_s}^{j_1 \dots j_k n_1 \dots n_t} \cdot \mathbf{t}'_{j_1 \dots j_k \ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_g} = \mathbf{t}''_{k_1 \dots k_s \ell_1 \dots \ell_r}^{n_1 \dots n_t i_1 \dots i_g}.$$

В результате этой свертки мы получили тензор ранга $((t + g) + (s + r))$. Очевидно, что поднимать и опускать индексы у компонент любых тензоров (как и у векторов, см. (5.1.19)) можно с помощью свертки с метриками η^{jk} и η_{kj} :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{j_1 \dots j_t}^{k_1 \dots k_s} \cdot \eta^{j_1 i_1} \dots \eta^{j_t i_t} \cdot \eta_{k_1 \ell_1} \dots \eta_{k_s \ell_s} &= \mathbf{t}_{\ell_1 \dots \ell_s}^{i_1 \dots i_t} = \\ &= \mathbf{t}_{\ell_1 \dots \ell_r} \eta^{\ell_{s+1} i_1} \dots \eta^{\ell_r i_t} = \mathbf{t}^{i_1 \dots i_r} \eta_{i_{t+1} \ell_1} \dots \eta_{i_r \ell_s}, \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

где $r = s + t$.

Соотношения (5.1.25) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между тензорами ранга $(s + t)$, $(t + s)$, $(0 + r)$ и $(r + 0)$, то есть соответствующие представления группы $O(p, q)$ эквивалентны

$$T^{(s+t)} \simeq T^{(t+s)} \simeq T^{(0+r)} \simeq T^{(r+0)} \equiv T^{\otimes r}. \quad (5.1.26)$$

Поэтому, с точки зрения теории представлений группы $O(p, q)$, нет необходимости рассматривать все эти представления по отдельности, достаточно исследовать только одно из них, скажем $T^{(r+0)} \equiv T^{\otimes r}$, которое действует в пространстве тензоров

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r} \vec{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{k_r} \in (\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes r}. \quad (5.1.27)$$

Представление $T^{\otimes r}$ приводимо при $r > 1$. Например, тензоры с компонентами

$$\mathbf{t}^{k_1 \dots k_{r-2} \ell_{r-1} \ell_r} \eta_{\ell_{r-1} \ell_r} \eta^{k_{r-1} k_r}, \quad (5.1.28)$$

образуют инвариантное подпространство в $(\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes r}$. Так как тензоры с компонентами $\mathbf{t}^{k_1 \dots k_{r-2}} = \mathbf{t}^{k_1 \dots k_{r-2} \ell_{r-1} \ell_r} \eta_{\ell_{r-1} \ell_r}$ составляют пространство представления $T^{\otimes(r-2)}$, то в представлении $T^{\otimes r}$ содержится представление $T^{\otimes(r-2)}$. Продолжая это рассуждение, мы получаем, что в $T^{\otimes(r-2)}$ содержится представление $T^{\otimes(r-4)}$ и так далее, то есть в $T^{\otimes r}$ содержатся все представления $T^{\otimes k}$, где $k = r - 2, r - 4, \dots$.

Замечание. В дальнейшем мы рассматриваем не только вещественные, но и комплексные тензоры \mathbf{t} с комплексными компонентами $\mathbf{t}^{k_1 \dots k_r}$. Они принадлежат пространствам комплексных представлений групп $SO(p, q)$, которые мы также обозначаем $T^{\otimes r}$. Какие представления рассматриваются — вещественные или комплексные — будет ясно из контекста. Комплексные представления $T^{\otimes r}$ группы $SO(p, q)$ и их подпредставления являются одновременно представлениями группы $SO(N, \mathbb{C})$, $N = p + q$. Говоря о представлениях группы $SO(N, \mathbb{C})$, мы всегда будем иметь в виду только те представления, которые содержатся в представлениях $T^{\otimes r}$, поскольку они находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями группы $SO(p, q)$. Пользуясь теми же рассуждениями, что и в случае линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$ (см. Замечание в Разделе 4.1) можно установить взаимнооднозначное соответствие класса неприводимых представлений групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$, вложенных в $T^{\otimes r}$, с классом неприводимых представлений алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$ и $so(p, q)$, в который не входят спинорные представления. Наконец подчеркнем, что как и в случае линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$, представления, вложенные в $T^{\otimes r}$, не исчерпывают все представления $SO(N, \mathbb{C})$; например, представление T^* , комплексно сопряженное к определяющему представлению T , не принадлежит рассматриваемому классу. Далее мы не обсуждаем представления $T^{\otimes r_1} \otimes (T^*)^{\otimes r_2}$, где $r_2 > 0$, и вложенные в них неприводимые представления группы $SO(N, \mathbb{C})$.

5.1.3 Выделение неприводимых представлений групп $O(p, q)$ и $SO(p, q)$ из представления $T^{\otimes r}$

В этом и следующем подразделах мы будем в основном рассматривать две тесно связанные между собой задачи. Первая из них — перечисление всех конечномерных неприводимых представлений групп $O(p, q)$ (и $SO(p, q)$) как подпредставлений в тензорном произведении r определяющих представлений $T^{\otimes r}$ и формулировка конструктивного метода выделения таких неприводимых представлений из $T^{\otimes r}$. Вторая задача — явное разложение тензорного произведения $T^{\otimes r}$ на неприводимые представления. Первая задача может быть решена достаточно быстро и ее решение будет изложено в данном подразделе (здесь мы основываемся на результатах, представленных в книге Г.Вейля [25]). Полный рецепт решения второй задачи будет сформулирован в следующем подразделе 5.1.4. Обоснование этого рецепта требует введения в рассмотрение алгебры Брауэра и изложения основ ее теории представлений; этой теме будет посвящен раздел 5.2.

Рассмотрим задачу о выделении всех неприводимых представлений группы $O(p, q)$ из представления $T^{\otimes r}$. Прежде всего заметим, что любое представление группы G одновременно является представлением и ее подгруппы $H \subset G$. При этом неприводимое представление группы G может оказаться приводимым представлением ее подгруппы H . С другой стороны, если представление группы G для ее подгруппы $H \subset G$ неприводимо, то оно будет неприводимым и для всей группы G . Группа $O(p, q)$ (где $p + q = N$) является подгруппой в группе $GL(N, \mathbb{R})$. Для определяющего представления группы $GL(N, \mathbb{R})$, действующего в N -мерном вещественном пространстве $\mathcal{V}_N \equiv \mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q = N$), мы будем пользоваться тем же обозначением T , что и для определяющего представления группы $O(p, q)$. Прежде всего, из представления $T^{\otimes r}$ группы $GL(N, \mathbb{R})$, которое действует в пространстве $\mathcal{V}_N^{\otimes r}$ тензоров ранга r , выделим ее неприводимые представления. Так как представление $T^{\otimes r}$ одновременно является и представлением подгруппы $SL(N, \mathbb{R}) \subset GL(N, \mathbb{R})$, то неприводимые представления группы $GL(N, \mathbb{R})$ можно выделить из $T^{\otimes r}$ так же, как и неприводимые представления подгруппы $SL(N, \mathbb{R})$, то есть с помощью **вещественных** симметризаторов Юнга $s(Y(T_\lambda))$, или с помощью проекторов $P(T_\lambda)$, где T_λ — стандартные таблицы Юнга, имеющие форму диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$ с числом строк, меньшим N . Специфика группы $GL(N, \mathbb{R})$ заключается в том, что каждой диаграмме Юнга λ соответствует не одно, а целый набор (см. ниже формулу (5.1.29)) неприводимых представлений группы $GL(N, \mathbb{R})$. Симметризаторы Юнга $s(Y(T_\lambda))$ и проекторы $P(T_\lambda) = s(e(T_\lambda))$ подробно обсуждались в предыдущей Главе 4 в разделах 4.4.1 и 4.6.5 (см. формулы (4.4.2), (4.4.3) и (4.6.91)) в контексте выделения неприводимых **комплексных** представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$ из прямого произведения определяющих представлений этой группы.

Отметим, что согласно определению (4.2.9) матричного представления \mathfrak{s} групповой алгебры группы перестановок $\mathbb{C}[S_r]$, действующего в пространстве $\mathcal{V}_N^{\otimes r}$, а также в силу явной конструкции идемпотентов $Y(T_\lambda)$ и $e(T_\lambda)$, все матрицы проекторов $s(Y(T_\lambda))$ и $P(T_\lambda) = s(e(T_\lambda))$ являются вещественными и поэтому ими можно воспользоваться и для выделения **вещественных** неприводимых представлений группы вещественных матриц $GL(N, \mathbb{R})$ и ее подгруппы $SL(N, \mathbb{R})$. Подчеркнем, что мы не говорим здесь о переносе всех результатов, полученных для **комплексных** представлений $SL(N, \mathbb{C})$, на случай **вещественных** представлений $SL(N, \mathbb{R})$. Нам будет

достаточно того, что Утверждение 4.2.2 и последующие за ним рассуждения справедливы и для группы $SL(N, \mathbb{R})$, то есть одна и та же система примитивных проекторов обеспечивает выделение неприводимых представлений как в комплексном, так и в вещественном случае. Кроме того мы будем в случае ортогональных групп пользоваться тем, что вещественные неприводимые представления $SL(N, \mathbb{R})$, соответствующие разным диаграммам Юнга (с числом строк $m < N$), неэквивалентны.

Заметим также, что тривиальное представление группы $SL(N, \mathbb{K})$ (здесь \mathbb{K} — поле вещественных, или комплексных чисел), которое выделяется из $T^{\otimes N}$ полным антисимметризатором $\mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_{[1^N]})) = P(\mathbb{T}_{[1^N]})$, соответствует в случае группы $GL(N, \mathbb{K})$ нетривиальному одномерному представлению $T^{(0)}$ такому, что $T^{(0)}(g) = \det(g)$, где $g \in GL(N, \mathbb{K})$. Поэтому, если для нумерации неприводимых представлений групп $SL(N, \mathbb{K})$ было достаточно ограничиться диаграммами Юнга с числом строк $m < N$, то для нумерации всех неприводимых конечномерных представлений групп $GL(N, \mathbb{K})$ необходимо использовать диаграммы Юнга с числом строк $m \leq N$. Диаграмма Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N]$ с числом строк $m = N$ соответствует неприводимому представлению группы $GL(N, \mathbb{K})$:

$$T^{(\lambda)} = T^{(\lambda')} \otimes (T^{(0)})^{\otimes \lambda_N}, \quad (5.1.29)$$

где $\lambda' = [\lambda_1 - \lambda_N, \dots, \lambda_{N-1} - \lambda_N]$, а $T^{(0)}$ — упомянутое выше одномерное детерминантное представление. Отметим, что тензорное произведение одномерных представлений $T^{(0)}$ в формуле (5.1.29) можно заменить на обычное произведение и в общем случае заменить целую степень λ_N на произвольный параметр ξ . Таким образом, неприводимые и неэквивалентные представления групп $GL(N, \mathbb{K})$ характеризуются диаграммой λ' и параметром ξ .

Как мы подчеркнули выше, полученные с помощью проекторов $\mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda))$, или $P(\mathbb{T}_\lambda)$, из $T^{\otimes r}$ неприводимые подпредставления $T^{(\lambda)}$ группы $GL(N, \mathbb{R})$, будут одновременно являться и представлениями (в общем случае приводимыми) подгруппы $O(p, q) \subset GL(N, \mathbb{R})$. Это видно и из того, что действие группы $O(p, q)$ в пространстве $\mathcal{V}_N^{\otimes r}$ (как и любой другой матричной подгруппы группы $GL(N, \mathbb{R})$) коммутирует с действием на это пространство операторов алгебры $\mathbb{C}[S_r]$ в представлении \mathfrak{s} (см. соотношение (4.2.15)):

$$\mathfrak{s}(X) \cdot \underbrace{(g \otimes \dots \otimes g)}_r = \underbrace{(g \otimes \dots \otimes g)}_r \cdot \mathfrak{s}(X), \quad \forall g \in GL(N, \mathbb{C}), \quad (5.1.30)$$

где X — любой элемент из $\mathbb{C}[S_r]$. Другими словами, симметризаторы Юнга $\mathfrak{s}(Y(\mathbb{T}_\lambda))$ (или проекторы $P(\mathbb{T}_\lambda)$) будут "вырезать" инвариантные, относительно действия группы $O(p, q)$, подпространства $\tilde{\mathcal{V}}^{(\lambda)}$ в $\mathcal{V}_N^{\otimes r}$. Например, в пространстве $\mathcal{V}_N^{\otimes 2}$ тензоров второго ранга с компонентами \mathfrak{t}^{ik} с помощью симметризаторов Юнга (4.4.12) (или с помощью проекторов $P(\mathbb{T}_\lambda) = \mathfrak{s}(e(\mathbb{T}_\lambda))$, которые строятся по идемпотентам (4.5.33)) можно выделить подпространства $\tilde{\mathcal{V}}^{([2])}$ и $\tilde{\mathcal{V}}^{([1^2])}$ симметричных \mathfrak{t}_s и антисимметричных \mathfrak{t}_a тензоров с компонентами

$$\mathfrak{t}_s^{ik} \equiv \mathfrak{t}^{(ik)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{t}^{ik} + \mathfrak{t}^{ki}), \quad \mathfrak{t}_a^{ik} \equiv \mathfrak{t}^{[ik]} = \frac{1}{2}(\mathfrak{t}^{ik} - \mathfrak{t}^{ki}), \quad (5.1.31)$$

которые преобразуются независимо и таким образом образуют два инвариантных подпространства в $\mathcal{V}_N^{\otimes 2}$.

Далее, так как мы интересуемся **неприводимыми** представлениями группы $O(p, q)$, необходимо (в соответствии с примером (5.1.28)) проверить, состоят ли инвариантные подпространства $\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda)} \subset \mathcal{V}_N^{\otimes r}$ из бесследовых тензоров:

$$\mathbf{t}^{k_1 k_2 \dots k_r} \eta_{k_i k_j} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (5.1.32)$$

Если компоненты тензоров, симметризованных с помощью $\mathfrak{s}(Y(T_\lambda))$, не удовлетворяют (5.1.32), то построенное подпредставление, действующее в пространстве $\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda)}$, является приводимым и из него необходимо выделить "бесследовое" подпредставление $T^{(\lambda)}$, действующее в подпространстве $\mathcal{V}^{(\lambda)} \subset \bar{\mathcal{V}}^{(\lambda)}$, составленном только из бесследовых тензоров \mathbf{t} ранга r . Выделение представления $T^{(\lambda)}$ можно сделать, потребовав выполнения дополнительных условий бесследовости (5.1.32), что приведет к ограничению числа независимых компонент тензоров $\mathbf{t} \in \mathcal{V}^{(\lambda)}$. Подчеркнем, что в общем случае условие бесследовости тензоров \mathbf{t} , симметризованных с помощью проекторов $\mathfrak{s}(Y(T_\lambda))$ (или проекторов $P(T_\lambda)$), является необходимым, но не достаточным, условием неприводимости представлений группы $O(p, q)$, реализованных на пространстве таких тензоров. Описанию всех неприводимых представлений посвящена оставшаяся часть этого подраздела.

Разложение симметризованного с помощью $\mathfrak{s}(Y(T_\lambda))$ подпредставления, действующего в пространстве $\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda)}$, на бесследовые подпредставления можно сделать для тензора любого ранга $r \geq 2$. Например, укажем способы приведения к "бесследовому" виду тензоров второго и третьего ранга:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{k_1 k_2} &\rightarrow \mathbf{t}^{k_1 k_2} - \frac{1}{N} \eta^{k_1 k_2} (\eta_{i_1 i_2} \mathbf{t}^{i_1 i_2}), \\ \mathbf{t}^{k_1 k_2 k_3} &\rightarrow \mathbf{t}^{k_1 k_2 k_3} - \frac{N+1}{(N-1)(N+2)} (\eta^{k_1 k_2} \mathbf{t}^{**k_3} + \eta^{k_1 k_3} \mathbf{t}^{*k_2*} + \eta^{k_2 k_3} \mathbf{t}^{k_1**}) + \\ &+ \frac{1}{(N-1)(N+2)} \left(\eta^{k_1 k_2} (\mathbf{t}^{k_3**} + \mathbf{t}^{*k_3*}) + \eta^{k_1 k_3} (\mathbf{t}^{k_2**} + \mathbf{t}^{**k_2}) + \eta^{k_2 k_3} (\mathbf{t}^{*k_1*} + \mathbf{t}^{**k_1}) \right), \end{aligned}$$

где использованы краткие обозначения $\mathbf{t}^{k**} = \eta_{ij} \mathbf{t}^{kij}$, $\mathbf{t}^{*k*} = \eta_{ij} \mathbf{t}^{ikj}$ и $\mathbf{t}^{**k} = \eta_{ij} \mathbf{t}^{ijk}$. Таким образом, кроме бесследовых представлений $T^{(\lambda)}$, соответствующих диаграммам Юнга $\lambda \vdash r$, в $T^{\otimes r}$ будут содержаться подпредставления, реализованные на тензорах меньшего чем r ранга, возникающие в результате свертки с метрикой η тензоров из $\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda)}$. Для этих тензоров меньшего ранга снова нужно применить указанную выше процедуру симметризации, выделение бесследовой части и так далее. При этом возникающие вновь подпредставления будут характеризоваться диаграммами Юнга с меньшим числом клеток, чем r . Более подробно разложение представления $T^{\otimes r}$ на неприводимые бесследовые подпредставления будет обсуждаться ниже в подразделе 5.1.4.

В качестве примера снова рассмотрим пространства $\bar{\mathcal{V}}^{([2])}$ и $\bar{\mathcal{V}}^{([1^2])}$ симметричных \mathbf{t}_s и антисимметричных \mathbf{t}_a тензоров (5.1.31). Представление $T^{([1^2])}$ группы $O(p, q)$, реализованное на пространстве $\mathcal{V}^{([1^2])} \equiv \bar{\mathcal{V}}^{([1^2])}$ антисимметричных тензоров \mathbf{t}_a с компонентами $\mathbf{t}^{[ik]}$ (см. (5.1.31)), является бесследовым и неприводимым. Представление, реализованное на пространстве $\bar{\mathcal{V}}^{([2])}$ симметричных тензоров \mathbf{t}_s с компонентами $\mathbf{t}^{(ik)}$ — приводимо, так как разлагается на два неприводимых представления, действующих в двух инвариантных подпространствах $\mathcal{V}^{([2])}$ и $\mathcal{V}^{([0])}$. Первое из этих пространств образовано бесследовыми симметричными тензорами \mathbf{t}'_s , а второе симметричным тензором \mathbf{t}_0 , компоненты которого пропорциональны неприводимому тензору нулевого

ранга $\eta_{rs} \mathfrak{t}^{(rs)}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}'_s{}^{ik} &= \mathfrak{t}^{(ik)} - \frac{1}{N} \eta^{ik} (\mathfrak{t}^{(rs)} \eta_{rs}), \\ \mathfrak{t}'_0{}^{ik} &= \eta^{ik} (\eta_{rs} \mathfrak{t}^{(rs)}). \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

Согласно определениям (5.1.31) и (5.1.33) неприводимые тензоры с компонентами $\mathfrak{t}'_a{}^{i_1 i_2}$, $\mathfrak{t}'_s{}^{i_1 i_2}$ и $\mathfrak{t}'_0{}^{i_1 i_2}$ выделяются из любого тензора с компонентами $\mathfrak{t}^{k_1 k_2}$ с помощью нормированных проекторов

$$\begin{aligned} (\Pi_a)_{k_1 k_2}{}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{2} (I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} - P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}), \\ (\Pi_s)_{k_1 k_2}{}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{2} (I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} + P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}) - \frac{1}{N} K_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}, \quad (\Pi_0)_{k_1 k_2}{}^{i_1 i_2} = \frac{1}{N} K_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}, \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

где $P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = \delta_{k_2}^{i_1} \delta_{k_1}^{i_2}$ — матрица перестановки, $I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = \delta_{k_1}^{i_1} \delta_{k_2}^{i_2}$ — единичная матрица и $K_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = \eta^{i_1 i_2} \eta_{k_1 k_2}$.

- **Задача 151.** Для операторов Π_α , где $\alpha = a, s, 0$, проверить проекторные соотношения $\Pi_\alpha \Pi_\beta = \delta_{\alpha\beta} \Pi_\alpha$ и условие полноты $\Pi_a + \Pi_s + \Pi_0 = I$.

Итак, неприводимые представления ортогональных групп $O(N, \mathbb{C})$ (из рассматриваемого класса, см. Замечание в разделе 5.1.2; в дальнейшем мы не будем делать эту оговорку) и их подгрупп $O(p, q)$ вещественных матриц, действуют в пространствах бесследовых тензоров ранга r , симметризованных в соответствии с таблицами Юнга T_λ , где λ — диаграмма Юнга с r клетками. Так же, как и в случае линейных групп, все представления, построенные по таблицам T_λ , имеющих одну и ту же форму λ , — эквивалентны^{5.1}. Еще раз укажем, что число строк в диаграммах Юнга λ , с помощью которых классифицируются неприводимые представления линейных групп, не должно превышать N в случае группы $GL(N, \mathbb{C})$, и $(N-1)$ в случае группы $SL(N, \mathbb{C})$. Очевидно, что это ограничение сохранится и в случае матричных подгрупп $O(p, q) \subset GL(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q) \subset SL(N, \mathbb{C})$. Покажем теперь, что наличие метрики η приводит к еще более жесткому ограничению на форму диаграмм Юнга λ , которые соответствуют неэквивалентным неприводимым представлениям специальных ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ и их вещественных подгрупп $SO(p, q)$. Из этого ограничения вытекает существенное отличие классификации неприводимых представлений ортогональных групп от классификации неприводимых конечномерных представлений линейных групп (см. разделы 3.4.2 и 4.4.1).

Утверждение 5.1.1 *Неэквивалентные представления $T^{(\lambda)}$ группы $SO(N, \mathbb{C})$ ($N = 2r$ или $N = 2r + 1$) и ее вещественных подгрупп $SO(p, q)$, где $N = p + q$, соответствуют разным диаграммам Юнга λ , у которых число строк не превосходит r .*

Доказательство. Прежде всего отметим одно важное отличие системы неприводимых конечномерных представлений ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп вещественных матриц $SO(p, q)$ от системы неприводимых конечномерных представлений линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $SL(N, \mathbb{R})$ и $SU(p, q)$. В случае специальных линейных групп, как мы знаем, все построенные с помощью симметризаторов Юнга $\mathfrak{s}(Y(T_\lambda))$ неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ неэквивалентны, если они

^{5.1} Доказательство в случае ортогональных групп по сути повторяет доказательство Утверждения 4.4.1, где необходимо считать, что все операторы действуют в пространствах бесследовых тензоров.

соответствуют разным диаграммам Юнга λ с числом строк $m < N$. В отличие от этого случая в случае специальных ортогональных групп имеются разные диаграммы Юнга $\lambda \vdash r$, $\lambda' \vdash r$, ... с числом строк $m < N$ такие, что соответствующие неприводимые представления $T^{(\lambda)}, T^{(\lambda')}, \dots$ групп $SO(N, \mathbb{C})$ и их вещественных подгрупп $SO(p, q)$ будут эквивалентны. Действительно, в силу наличия инвариантной метрики η определяющее T и ко-определяющее \tilde{T} представления ортогональных групп — эквивалентны, поэтому эквивалентны представления $T^{\otimes k}$ и $\tilde{T}^{\otimes k}$ для всех $k > 0$. Далее, для специальных линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$, а также для всех ее подгрупп, включая $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q) \subset SO(N, \mathbb{C})$ неприводимое подпредставление в $T^{\otimes k}$, реализованное в пространстве антисимметричных тензоров с компонентами $\mathbf{t}^{[r_1 \dots r_k]}$ и неприводимое подпредставление в $\tilde{T}^{\otimes(N-k)}$, реализованное в пространстве антисимметричных тензоров с компонентами $\tilde{\mathbf{t}}_{[r_1 \dots r_{N-k}]}$ оказываются эквивалентными. Это связано с существованием полностью антисимметричного инвариантного тензора с компонентами $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$. Действительно, вектора \mathbf{t} и $\tilde{\mathbf{t}}$ из пространств указанных представлений можно связать формулой

$$\mathbf{t}^{[j_1 \dots j_k]} \varepsilon_{j_1 \dots j_k, r_1 \dots r_{N-k}} = \tilde{\mathbf{t}}_{[r_1 \dots r_{N-k}]} . \quad (5.1.35)$$

Так как представления $\tilde{T}^{\otimes(N-k)}$ и $T^{\otimes(N-k)}$ для группы $SO(N, \mathbb{C})$ (и ее подгруппы $SO(p, q)$) — эквивалентны, то согласно (5.1.35) будут эквивалентны и антисимметричные представления, реализованные на тензорах с компонентами $\mathbf{t}_1^{[i_1 \dots i_k]}$ и $\mathbf{t}_2^{[i_1 \dots i_{N-k}]}$, отвечающие диаграммам Юнга $\lambda_1 = [1^k]$ и $\lambda_2 = [1^{N-k}]$. Взаимооднозначное соответствие между векторами пространств этих представлений устанавливается с помощью формулы

$$\mathbf{t}_1^{[j_1 \dots j_k]} \leftrightarrow \mathbf{t}_2^{[i_1 \dots i_{N-k}]} \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-k} i_{N-k+1} \dots i_N} \eta^{i_{N-k+1} j_1} \dots \eta^{i_N j_k} . \quad (5.1.36)$$

Таким образом, антисимметричные представления групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$ должны характеризоваться диаграммами Юнга $[1^k]$, где $2k \leq N$.

Соответствие (5.1.36) очевидным образом обобщается на случай тензоров с компонентами, имеющими кроме индексов j_1, \dots, j_k (индексов i_1, \dots, i_{N-k}), по которым они антисимметричны, еще и другие индексы. Например, представления, реализованные на тензорах с компонентами $\mathbf{t}^{[j_1 \dots j_k] \bar{j}}$ и $\mathbf{t}^{[i_1 \dots i_{N-k}] \bar{j}}$, эквивалентны. Дальнейшее обобщение этой эквивалентности следующее. Напомним, что индексы компонент тензора \mathbf{t} неприводимого представления $T^{(\lambda)}$ симметризуются с помощью проектора Юнга $s(Y(\Gamma_\lambda))$, который сначала симметризует индексы в строках, а затем антисимметризует индексы в столбцах диаграммы Юнга $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ (здесь $m < N$ так же как и в случае представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$). Учитывая это, а также эквивалентность (5.1.36), мы заключаем, что любой столбец в диаграмме λ , высота k которого больше $N/2$, можно заменить на столбец с меньшей высотой $(N - k)$ и, переставив этот столбец в нужное место (см. Рис.5.1), получить диаграмму λ' такую, что соответствующее представление $T^{(\lambda')}$ будет эквивалентно представлению $T^{(\lambda)}$. Делая эту процедуру для всех столбцов с высотой, большей $N/2$ (если такие столбцы имеются в диаграмме λ), мы получаем из λ диаграмму λ' , у которой число строк не превосходит $[N/2]$, где $[x]$ — целая часть числа x . Другими словами, высота всех столбцов в диаграмме λ' , полученной после всех этих замен и перестановок, не превосходит r , когда $N = 2r$ или $N = 2r + 1$. Из всего, сказанного выше, следует справедливость Утверждения **5.1.1**, то есть следует, что неэквивалентные представления $T^{(\lambda)}$ группы $SO(N, \mathbb{C})$ ($N = 2r$ или $N = 2r + 1$) и ее вещественных подгрупп $SO(p, q)$, где

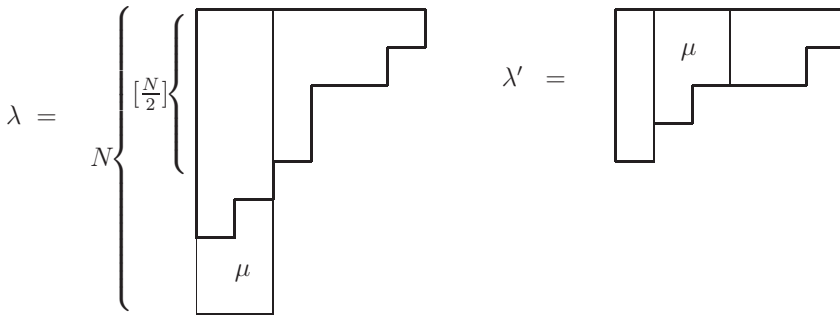


Рис. 5.1: Диаграмма Юнга λ , у которой высота первых двух столбцов превосходит $\lfloor N/2 \rfloor$. Эти два столбца заменяются на два столбца, обозначенные μ , которые вставляются в λ , как показано на диаграмме λ' в правой части рисунка. Представления $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ будут эквивалентны.

$N = p + q$, соответствуют разным диаграммам Юнга λ , у которых число строк не превосходит r . Данный вывод согласуется с утверждением, сделанным в Замечании 3, в разделе 3.4.2, и полученным на основе классификации представлений алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r + 1, \mathbb{C})$, вытекающей из теории весов. ■

Замечание 1. Для общих линейных $GL(N, \mathbb{C})$ и общих ортогональных групп $O(N, \mathbb{C})$ (и их вещественных подгрупп $O(p, q)$) эквивалентности, указанной в (5.1.35), нет. Представление этих групп на пространстве тензоров $\tilde{t}_{[j_1 \dots j_{N-k}]}$ не эквивалентно представлению на пространстве тензоров $t^{[i_1 \dots i_k]} \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-k} j_1 \dots j_k}$, так как преобразования этих тензоров (см. (5.1.24)) отличается на фактор $\det(\Lambda)$, который вообще говоря не равен единице для элементов Λ общих линейных и ортогональных групп; например, $\det(\Lambda) = -1$ для несобственных элементов $\Lambda \in O(p, q)$. В этом случае в левой и правой части формулы (5.1.35) мы имеем вектора из неэквивалентных представлений и соответствие (5.1.36) не корректно. Данный факт демонстрирует специфику неприводимых представлений полных ортогональных групп $O(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $O(p, q)$ ($p + q = N$) в сравнении со свойствами представлений специальных ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп вещественных матриц $SO(p, q)$, которые были сформулированы в Утверждении 5.1.1.

Обсудим эту специфику более подробно. Из Утверждения 5.1.1 следует, что число клеток в первых двух столбцах диаграмм Юнга, характеризующих неприводимые представления групп $SO(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $SO(p, q)$, не превышает $2r$, где $r = \lfloor N/2 \rfloor$. В случае полных ортогональных групп имеет место аналогичное утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

- **Задача 152.** ★ Доказать, что неприводимые конечномерные представления групп $O(N, \mathbb{C})$ (и их подгрупп вещественных матриц $O(p, q)$, где $p + q = N$) характеризуются диаграммами Юнга, у которых число клеток в первых двух столбцах не превышает N . Указание: получить формулу для размерности

$$\dim(T^{(\lambda')}) = \frac{(a - b + 1) N!(N + 2)! (N - a - b + 1)}{(a + 1)! b! (N - a + 1)! (N - b + 2)!}, \quad (5.1.37)$$

представления $T^{(\lambda')}$ группы $O(N, \mathbb{C})$, соответствующего диаграмме λ' , состоящей из двух столбцов высотой a и b ($a \geq b$).

Как мы указывали выше, эквивалентность (5.1.36) для полных ортогональных групп имеет место с точностью до умножения на одномерное детерминантное представление $T^{(0)}(\Lambda) = \det(\Lambda)$:

$$T^{([1^k])} = T^{(0)} \cdot T^{([1^{N-k}])}, \quad (5.1.38)$$

где $T^{(0)}(\Lambda) = +1$ и $T^{(0)}(\Lambda) = -1$ соответственно для собственных и несобственных элементов $\Lambda \in O(N, \mathbb{C})$. Поэтому из результата Задачи 152 и Утверждения 5.1.1 следует, что неприводимые неэквивалентные представления $\bar{T}^{(\lambda)}$ полных ортогональных групп $O(N, \mathbb{C})$ и их подгрупп $O(p, q)$, где $p + q = N$, характеризуются диаграммами Юнга λ с числом строк $m \leq [N/2] = r$ и определяются формулой (сравните с (5.1.29))

$$\bar{T}^{(\lambda)}(\Lambda) = T^{(\lambda)}(\Lambda) \cdot \det^\xi(\Lambda), \quad (5.1.39)$$

где $T^{(\lambda)}$ – неприводимое представление $SO(N, \mathbb{C})$ (или $SO(p, q)$), соответствующее диаграмме λ , а ξ – произвольный параметр (если ξ – целое четное число, то детерминантный фактор в (5.1.39) тривиален, так как $\det(\Lambda) = \pm 1$).

Замечание 2. Рассмотренная выше процедура выделения конечномерных неприводимых представлений работает для всех ортогональных и симплектических групп $SO(p, q)$ и $Sp(N, \mathbb{R})$, являющихся подгруппами $N \times N$ вещественных матриц в группах $SO(N, \mathbb{C})$ и $Sp(N, \mathbb{C})$ (в последнем случае $N = 2r$ – четное). Однако, в данной процедуре, в случае четномерных групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$, где $N = p + q = 2r$, имеется одно усложнение (аналогичное усложнение имеется и при построении неприводимых представлений групп $Sp(2r, \mathbb{C})$ и ее подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$ и $Sp(p, r - p)$; см. Раздел 5.3 ниже). Это усложнение снова связано с существованием полностью антисимметричного тензора ε ранга $2r$. С помощью тензора ε представление, реализованное на антисимметричных тензорах ранга r , можно разбить на два неприводимых подпредставления, одно из которых реализуется на самодуальных $\mathfrak{t}^{(+)}$, а другое на антисамодуальных $\mathfrak{t}^{(-)}$ антисимметричных тензорах ранга r :

$$\frac{\alpha}{r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_r} \mathfrak{t}_{(+)}^{k_1 \dots k_r} = \mathfrak{t}_{(+)}^{i_1 \dots i_r}, \quad \frac{\alpha}{r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_r} \mathfrak{t}_{(-)}^{k_1 \dots k_r} = -\mathfrak{t}_{(-)}^{i_1 \dots i_r}, \quad (5.1.40)$$

где мы выбираем $\alpha = e^{-i\pi(r+q)/2}$ (одно из решений уравнения $\alpha^2 = (-1)^{(r+q)}$). Самодуальные и антисамодуальные тензоры в четырехмерном пространстве рассматривались в Разделе I-2.2.12 первой части книги. Отметим, что здесь названия “самодуальный и антисамодуальный тензоры” являются условными и зависят от дополнительных соглашений.

- **Задача 153.** Записать соотношения (5.1.40) в виде проекторных равенств

$$(P_{\pm})_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} \mathfrak{t}^{k_1 \dots k_r} = 0, \quad (P_{\pm})_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} \equiv A_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} \pm \frac{\alpha}{r!} \varepsilon_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r}, \quad (5.1.41)$$

где $A_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r}$ – антисимметризатор ранга r . Проверить коэффициенты в определениях (5.1.40) (анти)самодуальных тензоров, для чего проверить тождества $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$. Указание: следует учесть, что для тензоров в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ подъем и опускание индексов осуществляется с помощью метрики (2.3.43) $\eta = I_{p,q}$, поэтому, в частности, имеет место соотношение $\varepsilon^{k_1 k_2 \dots k_{p+q}} = (-1)^q \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_{p+q}}$.

Подчеркнем, что для полных ортогональных групп $O(2r, \mathbb{C})$ и $O(p, q)$, где $(p+q) = 2r$, представление, реализованное на антисимметричных тензорах ранга r , не разбивается на два неприводимых подпредставления, реализованных на самодуальных и антисамодуальных антисимметричных тензорах ранга r . Это связано с тем, что несобственные вращения Λ из групп $O(2r, \mathbb{C})$ и $O(2r - q, q)$ переводят самодуальные антисимметричные тензоры ранга r в антисамодуальные и наоборот (из-за появления детерминантных факторов $\det(\Lambda)$ в левых частях условий (5.1.40)).

Замечание 3. Подчеркнем, что (анти)самодуальные **вещественные** тензоры $\mathbf{t}_{(-)}$ и $\mathbf{t}_{(+)}$, заданные в (5.1.40), можно определить только в случае вещественных α , когда $(r+q) - \text{четное}$ число. Это в частности выполняется для евклидовой группы $SO(4k)$, то есть когда $q = 0$ и число $r = 2k - \text{четное}$ (например, для $SO(4)$), но не выполняется для многомерной группы Лоренца $SO(1, 2r-1)$, когда $q = (2r-1)$ и $r = 2k$, например, для физической группы Лоренца $SO(1, 3)$. При нечетном $(r+q)$ самодуальные и антисамодуальные представления группы $SO(p, q)$, где $p+q = 2r$, могут быть только комплексными.

Учитывая все сказанное выше, сформулируем, какие бывают неприводимые неэквивалентные комплексные представления групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$.

Утверждение 5.1.2 *В случае $N = (p+q) = (2r+1)$ любое комплексное неприводимое представление групп $SO(N, \mathbb{C})$ (или $SO(p, q)$) реализуется в пространстве бесследовых (по всем парам индексов) тензоров, симметрия которых дается диаграммой Юнга с числом строк, не превышающим r . В случае $N = p+q = 2r$ любое комплексное неприводимое представление групп $SO(N, \mathbb{C})$ (или $SO(p, q)$) реализуется в пространстве бесследовых тензоров, симметрия которых дается диаграммой Юнга с числом строк, не превышающим $(r-1)$, или в пространстве бесследовых тензоров, симметрия которых определяется диаграммой Юнга λ с числом строк, равным r , при этом тензоры являются или самодуальными, или антисамодуальными, по отношению ко всем столбцам диаграммы λ высотой r .*

Последнее предложение в Утверждении 5.1.2 означает, в частности, что (анти)самодуальные представления не эквивалентны никаким другим представлениям. Утверждение, эквивалентное этому, доказано в книге [25]. Кроме того, последнее предложение в Утверждении 5.1.2 означает, что бесследовый тензор, который соответствует диаграмме Юнга λ с числом строк $m = r$ и при этом такой, что по отношению к части столбцов высотой r этот тензор самодуален, а по отношению к другой части – антисамодуален, равен нулю. В свою очередь это следует из утверждения, которое мы сформулируем в виде Задачи.

- **Задача 154.** ★ Пусть компоненты $\mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r}$ бесследового тензора ранга $2r$: $\mathbf{t} \in \mathcal{V}^{\otimes 2r}$, где \mathcal{V} – пространство определяющего представления группы $SO(2r, \mathbb{C})$

(группы $SO(2r - q, q)$), симметризованы в соответствии с таблицей

k_1	ℓ_1
\vdots	\vdots
k_r	ℓ_r

. До-

казать тождество $(P_+)^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_r} (P_-)^{j_1 \dots j_r}_{\ell_1 \dots \ell_r} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = 0$, где (анти)самодуальные проекторы P_{\pm} определены в (5.1.40), (5.1.41).

Мы проиллюстрируем Утверждение 5.1.2 и Задачу 154 на простом примере.

Пример. Для групп $SO(2)$ и $SO(1, 1)$ рассмотрим тензор \mathbf{t} ранга $k = 1$ с компонентами \mathbf{t}^ℓ и определим для него (анти)самодуальные части $\mathbf{t}_{(\pm)}$ с компонентами $\mathbf{t}_{(\pm)}^\ell$, которые задаются следующим образом

$$\begin{aligned} SO(2): \quad \mathbf{t}_{(\pm)}^k &= \mathbf{t}^k \pm i \varepsilon^{k\ell} \mathbf{t}_\ell \Rightarrow \mathbf{t}_{(\pm)}^1 = \mathbf{t}^1 \pm i \mathbf{t}^2 = \pm i \mathbf{t}_{(\pm)}^2, \\ SO(1, 1): \quad \mathbf{t}_{(\pm)}^k &= \mathbf{t}^k \mp \varepsilon^{k\ell} \mathbf{t}_\ell \Rightarrow \mathbf{t}_{(\pm)}^1 = \mathbf{t}^1 \pm \mathbf{t}^2 = \pm \mathbf{t}_{(\pm)}^2, \end{aligned}$$

где $\varepsilon^{k\ell} = -\varepsilon^{\ell k}$, $\varepsilon^{12} = +1$ и $\varepsilon^{k\ell} \varepsilon^{\ell s} = -\delta^{ks}$. Другими словами тензор первого ранга \mathbf{t} можно записать в (анти)самодуальных компонентах \mathbf{t}^\pm :

$$SO(2): \quad \mathbf{t}^\ell \rightarrow \mathbf{t}^\pm = \mathbf{t}^1 \pm i \mathbf{t}^2, \quad SO(1, 1): \quad \mathbf{t}^\ell \rightarrow \mathbf{t}^\pm = \mathbf{t}^1 \pm \mathbf{t}^2. \quad (5.1.42)$$

На тензорах $\mathbf{t}_{(\pm)}$ (на компонентах \mathbf{t}^\pm) реализуются одномерные неприводимые представления $T^{(\pm)}$ групп $SO(2)$ и $SO(1, 1)$ (в первом случае комплексное, а во втором — вещественное).

Рассмотрим комплексные представления $T^{(k)}$ группы $SO(2)$ (группы $SO(1, 1)$), которые реализуются в пространстве полностью симметричных бесследовых тензоров \mathbf{t} ранга k с компонентами $\mathbf{t}^{i_1 \dots i_k}$ ($i_1, \dots, i_k = 1, 2$):

$$\mathbf{t}^{i_1 \dots j \dots} = \mathbf{t}^{i_1 \dots j \dots}, \quad \eta_{ij} \mathbf{t}^{i_1 \dots j \dots} = 0, \quad (5.1.43)$$

где $\eta = \text{diag}(1, 1)$ в случае группы $SO(2)$ и $\eta = \text{diag}(1, -1)$ в случае группы $SO(1, 1)$. Данные представления соответствуют однорядным диаграммам Юнга $[k]$, которые в случае групп $SO(2)$ (или $SO(1, 1)$), когда $r = 1$, можно рассматривать как диаграммы Юнга, состоящие из k столбцов высотой 1. Утверждение 5.1.2 говорит, что представления $T^{(k)}$ приводимы и распадаются в сумму двух одномерных неприводимых представлений, которые реализуются на компонентах $\mathbf{t}^{+ \dots +}$ и $\mathbf{t}^{- \dots -}$, то есть по отношению ко всем столбцам высотой $r = 1$ (по отношению к каждому из k индексов у компонент $\mathbf{t}^{i_1 \dots i_k}$) тензор \mathbf{t} является либо самодуальным, либо антисамодуальным. Это действительно так: в случае группы $SO(2)$ (случай группы $SO(1, 1)$ рассматривается аналогично) для смешанных компонент $\mathbf{t}^{+ \dots -}$ мы получаем

$$\mathbf{t}^{+ \dots -} = \mathbf{t}^{+ \dots -} + i \mathbf{t}^{+ \dots -} = (\mathbf{t}^{+ \dots -} - i \mathbf{t}^{+ \dots -}) + i(\mathbf{t}^{+ \dots -} - i \mathbf{t}^{+ \dots -}) = 0,$$

где мы использовали преобразования (5.1.42) и условия (5.1.43). Отсюда следует, что у симметричного бесследового тензора \mathbf{t} ранга k ненулевыми оказываются только две компоненты, когда все индексы равны $+$, или когда все индексы равны $-$.

5.1.4 Неприводимые тензорные представления ортогональных групп. Осциллирующие таблицы Юнга

Выполняя все правила, изложенные выше, мы можем разложить произведение $T^{\otimes n}$ определяющих представлений T ортогональных групп на неприводимые представления этих групп. При этом, *все^{5.2} конечномерные неприводимые представления*

^{5.2}Все, кроме так называемых "спиновых" представлений, которые на самом деле являются представлениями не группы $SO(p, q)$, а ее алгебры Ли, или накрывающей группы $\text{Spin}(p, q)$. Группы $\text{Spin}(p, q)$ и их представления обсуждаются ниже в разделах 6.2.1 и 6.4.3. Подчеркнем еще раз, что в рассматриваемый класс, ассоциированный с представлениями алгебр $so(N, \mathbb{C})$, также не входят неприводимые представления групп $SO(N, \mathbb{C})$, которые содержатся в $T^{\otimes r_1} \otimes (T^*)^{\otimes r_2}$, где $r_2 > 0$ и T^* — представление, комплексно сопряженное к определяющему; см. Замечание в конце раздела 5.1.2.

ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ ($SO(p, q)$), которые соответствуют конечномерным неприводимым представлениям алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$, содержатся в наборе приводимых представлений $\{T^{\otimes n}\}$, где $n = 1, 2, \dots$

Как было показано в Разделе 5.1.3, каждому неприводимому конечномерному представлению $T^{(\lambda)}$ псевдоортогональной группы $SO(p, q)$ (как обычно, мы полагаем $N = p + q$), которое действует в пространстве бесследовых тензоров ранга n , сопоставляется диаграмма Юнга λ с n клетками и числом строк не превышающем ранга $[N/2] = r$. Однако, для ортогональных групп, в силу правил, которые обсуждались в предыдущем разделе, при изучении ветвления представлений имеются некоторые отличия (см. правила ветвления представлений групп $SL(N, \mathbb{C})$, которое изложено в Разделе 4.6.3) в использовании техники диаграмм Юнга. В качестве примера, обсудим тензорное произведение $T^{(\lambda_n)} \otimes T^{[1]}$ неприводимого представления $T^{(\lambda_n)}$ группы $SO(p, q)$, которое соответствует некоторой диаграмме Юнга λ_n с n клетками и действует в вещественном пространстве $\mathcal{V}^{(\lambda_n)} \subset \mathcal{V}_N^{\otimes n}$, и N -мерного определяющего представления $T = T^{[1]}$ группы $SO(p, q)$, которое характеризуется диаграммой $[1]$ с одной клеткой, и действует в вещественном пространстве $\mathcal{V}_N = \mathbb{R}^{p,q}$. В результате в общем случае получается приводимое представление $T^{(\lambda_n)} \otimes T$ группы $SO(p, q)$, которое разбивается в сумму неприводимых представлений, характеризуемых как диаграммами Юнга с $(n + 1)$ -й клетками, так и диаграммами Юнга с $(n - 1)$ -й клетками (сравните с формулой (4.4.33))

$$T^{(\lambda_n)} \otimes T^{([1])} \equiv \lambda_n \otimes [1] = \left(\bigoplus_{j=1}^{k+1} \lambda_{n+1}(j) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^k \lambda_{n-1}(j) \right), \quad (5.1.44)$$

где представления $T^{(\lambda)}$ для краткости обозначены соответствующими диаграммами Юнга λ , диаграммы $\lambda_{n+1}(j)$ получаются из λ_n добавлением $(n + 1)$ -й клетки во внешние углы диаграммы λ_n с координатами $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ (см. Рис.5.2), а диаграммы $\lambda_{n-1}(j)$ получается из λ_n стиранием одной из клеток во внутренних углах диаграммы λ_n с координатами $(n_j, \lambda_{(j)})$ (также см. Рис. 5.2). Индекс k в формуле (5.1.44) – число блоков, из которых составлена диаграмма λ_n на Рис. 5.2. Таким образом,

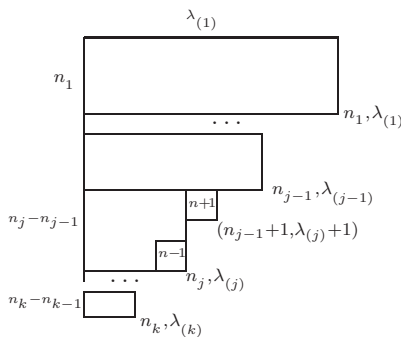


Рис. 5.2: Диаграмма Юнга $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2 - n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k - n_{k-1}}]$, состоящая из k блоков (длиной $\lambda_{(k)}$ и высотой n_k), с добавленной во внешний угол $(n + 1)$ -й клеткой, имеющей координаты $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ и с отмеченной $(n - 1)$ -й клеткой во внутреннем угле, имеющем координаты $(n_j, \lambda_{(j)})$.

прибавление одной клетки к диаграмме Юнга λ_n осуществляется по правилу, которое предписано для произведения неприводимых представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$

(при этом пространства соответствующих представлений состоят из тензоров ранга $(n+1)$), а уничтожение одной из клеток происходит во внутренних углах диаграммы λ_n (внутренние углы в λ_n – это клетки в λ_n , которые одновременно самые правые в своей строке и самые нижние в своем столбце; см. Рис.5.2). В последнем случае пространства соответствующих представлений состоят из тензоров ранга $(n-1)$. Для простоты будем считать, что число строк m у диаграммы λ_n не превышает $(N/2-1)$ и добавление клетки в первый столбец не нарушает условие $m \leq N/2$ (общий случай рассмотрен ниже, см. рис. 5.3 и подпись к нему).

Поясним более подробно, почему в разложении (5.1.44), кроме представлений с диаграммами $\lambda_{n+1}(j)$, возникают представления с диаграммами $\lambda_{n-1}(j)$, которые получаются из λ_n стиранием клетки в одном из ее внутренних углов. Напомним, что элементы пространств неприводимых представлений, возникающих в разложении (5.1.44) и характеризуемых диаграммами Юнга с $(n+1)$ -й и $(n-1)$ -й клетками, являются бесследовыми тензорами. Представление (5.1.44) действует в пространстве $\mathcal{V}^{(\lambda_n)} \otimes \mathcal{V}_N$, которое состоит из тензоров ψ ранга $(n+1)$ с компонентами $\psi^{i_1 \dots i_n; j}$. Для каждого фиксированного индекса j , нумерующего базис в пространстве \mathcal{V}_N , компоненты $\psi^{i_1 \dots i_n; j}$ определяют тензор n -го ранга, являющийся элементом пространства $\mathcal{V}^{(\lambda_n)}$, в котором действует неприводимое представление $T^{(\lambda_n)}$. Таким образом, тензор ψ – бесследовый по первым n индексам и эти индексы симметризованы с помощью оператора $\mathfrak{s}(Y(T_{\lambda_n}))$, отвечающего некоторой стандартной таблице, имеющей форму диаграммы Юнга λ_n . Однако, свертка любого из первых (i_1, \dots, i_n) и последнего j индексов: $\psi^{i_1 \dots i_n; j} \eta_{i_k j} = \bar{\psi}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_n}$ (здесь \hat{i}_k обозначает, что данный индекс удален) не обязана равняться нулю и определяет тензор $(n-1)$ -го ранга $\bar{\psi}$. Тензоры $\bar{\psi}$ с компонентами $\bar{\psi}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_n}$ по построению бесследовы и наследуют симметрию тензоров $\psi \in \mathcal{V}^{(\lambda_n)}$, а поему образуют пространства неприводимых представлений группы $SO(p, q)$. Симметрия тензоров $(n-1)$ -ого ранга $\bar{\psi}$ должна характеризоваться диаграммами Юнга с $(n-1)$ -й клетками, которые вкладываются как поддиаграммы в диаграмму λ_n , а это и есть диаграммы $\lambda_{n-1}(j)$, которые получаются из λ_n удалением одной из клеток во внутренних углах λ_n .

Полное доказательство того, почему в разложении (5.1.44) возникают все представления, отвечающие диаграммам $\lambda_{n-1}(j)$, как и то, почему кратность этих представлений в (5.1.44) равна единице, выходит за рамки нашей книги.

Указанное выше правило добавления или стирания у λ_n одной клетки в случае $n = 0, 1, 2, 3$ иллюстрируется с помощью графа ветвления Юнга, представленного на Рис. 5.3 (аналог графа Юнга на Рис. 4.11 в случае линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$). На этом графе все клетки диаграмм Юнга схематично изображены точками. На графе 5.3 каждая диаграмма Юнга λ , расположенная на уровне n , связана ориентированными ребрами с некоторыми диаграммами, расположенными на уровне $(n+1)$, то есть на один уровень ниже. Эти ребра показывают как добавляются или уничтожаются клетки у диаграммы λ , и тем самым демонстрирует правило ветвления представлений.

Простой пример разложения тензорного произведения $T^{\otimes 2}$ в сумму конечномерных неприводимых представлений группы $SO(p, q)$ дается формулами (5.1.31), (5.1.33), которые мы перепишем в виде условия полноты (см. Задачу 151)

$$\mathfrak{t}^{ik} = \mathfrak{t}_a^{ik} + \bar{\mathfrak{t}}_s^{ik} + \frac{1}{N} \mathfrak{t}_0^{ik} \quad \Leftrightarrow \quad I = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3. \quad (5.1.45)$$

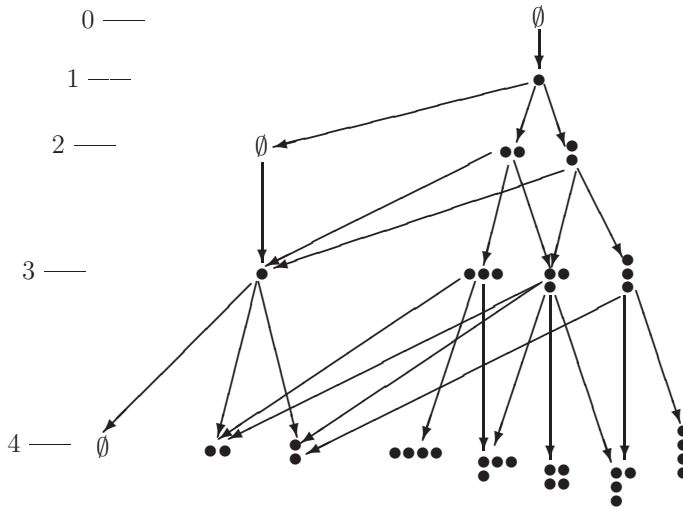


Рис. 5.3: Граф Юнга, иллюстрирующий разбиение прямого произведения четырех определяющих представлений группы $SO(p, q)$ на неприводимые и демонстрирующий ветвление представлений группы $SO(p, q)$ (для случая $N = p + q \geq 8$). Если продолжить этот граф ветвления ниже, то на некотором уровне будут появляться диаграммы с числом строк больше $\lfloor N/2 \rfloor$. Такие диаграммы необходимо сразу заменить на эквивалентные в смысле Рис.5.1.

В терминах диаграмм Юнга это разложение представляется в виде

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \oplus \emptyset, \tag{5.1.46}$$

где \emptyset обозначает тривиальное представление $SO(p, q)$. Этот же пример иллюстрируется вторым уровнем на Рис. 5.3, на котором изображены те же диаграммы Юнга, что и в правой части (5.1.46). В качестве более сложного примера рассмотрим процедуру выделения конечномерных неприводимых представлений группы $SO(p, q)$ из тензорного произведения трех определяющих представлений $SO(p, q)$. В результате получается следующая цепочка равенств:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \oplus \emptyset \right) \otimes \square = \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \square \oplus 3 \square \right), \tag{5.1.47}$$

правая часть которой составляет третий уровень графа Юнга на Рис.5.3. Наконец, рассмотрим произведение четырех определяющих представлений (сравните с (4.5.84))

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \square \oplus 3 \square \right) \otimes \square = \\ &= \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square \square \square \oplus 6 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 6 \square \square \oplus 3 \emptyset \right). \end{aligned} \tag{5.1.48}$$

Данный результат также иллюстрируется с помощью графа ветвления Юнга на Рис. 5.3, а именно, сумма (5.1.48) соответствует самому низкому четвертому уровню графа Юнга на Рис. 5.3. Нетрудно понять, что коэффициенты (кратности) перед каждой диаграммой Юнга λ в (5.1.47), или (5.1.48), по построению совпадают с числом

путей на графе Юнга на Рис. 5.3, которые идут из верхней вершины \emptyset графа до вершины, пронумерованной диаграммой λ и располагающейся на третьем, или на четвертом, нижнем уровне графа. Отметим, что указанные в правой части (5.1.48) кратности эквивалентных представлений $T^{(\lambda)}$, которые следуют из правила ветвления представлений группы $SO(p, q)$, проиллюстрированного на Рис. 5.3, не равны числу стандартных таблиц, имеющих форму λ (как это было в случае тензорного произведения представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, см. формулу (4.5.84) и граф Юнга на Рис.4.8). Это связано с тем, что пути, идущие из верхней вершины \emptyset в вершину λ на нижнем уровне графа, представленного на Рис.5.3, проходят через последовательность диаграмм, которые получаются не только добавлением клеток (как это было в случае графа Юнга на Рис.4.8, демонстрирующего ветвление представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$), но и стиранием клеток. Например, один из путей на Рис.5.3, идущий из вершины \emptyset на нулевом уровне в вершину \bullet на четвертом уровне, соответствует следующей последовательности диаграмм

$$\{ \emptyset \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet\bullet \}. \quad (5.1.49)$$

Такие последовательности диаграмм Юнга называются **осциллирующими таблицами Юнга** (мы будем обсуждать осциллирующие таблицы Юнга ниже, в разделе 5.2.3). Число стрелок (ориентированных ребер) в осциллирующей таблице Юнга называется длиной этой таблицы. Например, длина таблицы (5.1.49) равна 4.

Итак, все, сказанное выше, резюмируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 5.1.3 Пусть $\{T^{(\lambda)}\}$ набор **неприводимых** представлений группы $SO(p, q)$, соответствующих диаграммам Юнга λ , с числом строк $t \leq r$, если $N = (p + q) = (2r + 1)$, и с числом строк $t < r$, если $N = (p + q) = 2r$. В случае $N = (p + q) = 2r$ в набор $\{T^{(\lambda)}\}$ включим еще представления $T^{(\lambda')}$, соответствующие диаграммам λ' с числом строк $t = r$ (такие представления приводимы, так как являются суммой самодуального и антисамодуального неприводимых представлений). Тензорное произведение $T^{\otimes n}$ определяющих представлений T группы $SO(p, q)$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений $T^{(\lambda)}$ и представлений $T^{(\lambda')}$, где λ (или λ') — последняя диаграмма Юнга в осциллирующей таблице Юнга

$$\Lambda = \{\lambda_0 = \emptyset, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \lambda\}, \quad (5.1.50)$$

длины n . Кратность вхождения представления $T^{(\lambda)}$ (или $T^{(\lambda')}$) в $T^{\otimes n}$ равна числу осциллирующих таблиц Юнга (5.1.50) длины n , то есть кратность равна числу путей на графе Юнга для $T^{\otimes n}$, которые начинаются из вершины \emptyset на нулевом уровне и кончатся диаграммой λ (или λ') на последнем n -ом уровне. Если на некотором уровне графа Юнга возникает диаграмма λ'' с числом строк больше $[N/2]$, ее нужно заменить на дополнительную диаграмму (см. Рис.5.1 и подпись к Рис.5.3).

Отметим, что разбиение (5.1.40) представлений $[1^r]$ на самодуальное и антисамодуальное представления в случае групп $SO(2r, \mathbb{C})$ на графе Юнга для $T^{\otimes r}$ (см. Рис. 5.3 для случая $T^{\otimes 4}$ и $(p + q) = 8$) никак не отражается. Все представления групп $SO(2r, \mathbb{C})$, соответствующие диаграммам λ на графе Юнга с числом строк, равным r , следует считать приводимыми, и разбивать их на два неприводимых представления (самодуальное и антисамодуальное) не следует, так как это может нарушить

правило ветвления при добавлении или уничтожении клетки на следующем уровне графа.

Проекторы $P^{(\lambda)}$, которые выделяют неприводимые^{5.3} представления в прямом произведении представлений $T^{\otimes n}$ (обобщения проекторов (5.1.34), найденных для случая $T^{\otimes 2}$), строятся как идемпотенты алгебры Брауэра, действующие в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ представления $T^{\otimes n}$. В следующих разделах мы определим алгебру Брауэра и подробно опишем конструкцию идемпотентов для этой алгебры.

5.2 Алгебра Брауэра $\mathcal{B}r_n$ и ее представления

В данном разделе мы реконструируем теорию представлений алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n$ (см. определение в разделе 5.2.1) используя подход, который обобщает подход Окунькова–Вершика [45] для групповой алгебры группы перестановок $\mathbb{C}[S_n]$. Здесь мы будем следовать методике работ [46] и [47] (см. также работы [48] и [49]).

В конце этого раздела мы предъядвим явную конструкцию полной системы взаимно ортогональных идемпотентов алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n$, специальное представление которых в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ тензоров ранга n (здесь \mathcal{V} — комплексное пространство определяющего представления группы $SO(N, \mathbb{C})$, или вещественное пространство определяющего представления группы $SO(p, q)$) дает проекторы, выделяющие в $\mathcal{V}^{\otimes n}$ инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ неприводимых представлений ортогональных групп.

5.2.1 Алгебра Брауэра $\mathcal{B}r_n$. Элементы Юциса–Мёрфи для алгебры $\mathcal{B}r_n$

С помощью матриц P и K , которые мы использовали в (5.1.34):

$$P_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_1}^{j_2}, \quad K_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \eta^{j_1 j_2} \eta_{i_1 i_2}, \quad (5.2.1)$$

где $\eta_{i_1 i_2}$ — метрика в пространстве \mathcal{V} определяющего представления вещественной подгруппы $SO(p, q) \subset SO(N, \mathbb{C})$, определим набор операторов P_k и K_k ($k = 1, \dots, n-1$), действующих в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ тензоров ранга n , согласно правилам (сравните с (4.2.9)):

$$\begin{aligned} P_k \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_n}) &= (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_n}) = \\ &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_k} \otimes \vec{e}_{j_{k+1}} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_n}) \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_{k-1}}^{j_{k-1}} P_{i_k i_{k+1}}^{j_k j_{k+1}} \delta_{i_{k+2}}^{j_{k+2}} \dots \delta_{i_n}^{j_n}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} K_k \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_n}) &= \\ &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_k} \otimes \vec{e}_{j_{k+1}} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_n}) \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_{k-1}}^{j_{k-1}} K_{i_k i_{k+1}}^{j_k j_{k+1}} \delta_{i_{k+2}}^{j_{k+2}} \dots \delta_{i_n}^{j_n}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

В безиндексных обозначениях матрицы операторов P_k и K_k можно записать в виде

$$P_k = I^{\otimes(k-1)} \otimes P \otimes I^{\otimes(n-k-1)}, \quad K_k = I^{\otimes(k-1)} \otimes K \otimes I^{\otimes(n-k-1)}. \quad (5.2.4)$$

^{5.3}С точностью до только что обсуждавшегося случая групп $SO(2r, \mathbb{C})$ в части их представлений, характеризуемых диаграммами Юнга с r строками.

Пользуясь простыми соотношениями для матриц P и K

$$PK = KP = K, \quad K_1 K_2 K_1 = K_2, \quad P_1 K_2 K_1 = P_2 K_1,$$

и так далее, а также представлением (5.2.1), (5.2.4), можно проверить, что операторы $P_k \equiv \mathfrak{s}(\sigma_k)$ и $K_k \equiv \mathfrak{s}(\kappa_k)$ реализуют представление \mathfrak{s} образующих σ_k и κ_k некоторой ассоциативной алгебры с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= e, \quad \kappa_i^2 = \omega \kappa_i, \quad \sigma_i \kappa_i = \kappa_i \sigma_i = \kappa_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad \kappa_i \kappa_j = \kappa_j \kappa_i, \quad \sigma_i \kappa_j = \kappa_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \kappa_i \kappa_{i+1} \kappa_i = \kappa_i, \quad \kappa_{i+1} \kappa_i \kappa_{i+1} = \kappa_{i+1}, \\ \sigma_i \kappa_{i+1} \kappa_i &= \sigma_{i+1} \kappa_i, \quad \kappa_{i+1} \kappa_i \sigma_{i+1} = \kappa_{i+1} \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Здесь элемент e обозначает единицу и ω – параметр, характеризующий алгебру. В дальнейшем нам понадобится рассматривать различные значения ω (то есть различные алгебры), а к группе $SO(N, \mathbb{C})$ имеет отношение алгебра с $\omega = N$: формулы (5.2.2)–(5.2.4) задают представление алгебры (5.2.4) с параметром ω , равным N .

Определение 5.2.1 Ассоциативная алгебра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ над полем комплексных чисел с единицей и образующими σ_k и κ_k (где $k = 1, \dots, n-1$), которые удовлетворяют определяющим соотношениям (5.2.5), называется **алгеброй Брауэра**.

Все базисные элементы алгебры $\mathcal{B}r_n(\omega)$ строятся как произведения образующих σ_k и κ_k . Ниже (см. обсуждение перед Рис.5.4) мы покажем, что алгебра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ конечномерна и ее размерность равна

$$\dim(\mathcal{B}r_n) = (2n-1)!! \equiv (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1. \quad (5.2.6)$$

Сравнивая соотношения в (5.2.5), включающие только σ_k , с соотношениями (4.6.1), мы видим, что элементы σ_k образуют подалгебру $\mathbb{C}[S_n] \subset \mathcal{B}r_n(\omega)$, то есть алгебра Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ является расширением групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ группы перестановок S_n . Соответственно, как и в (4.2.13), операторы P_k , заданные в (5.2.2) и (5.2.4), являются представлениями образующих σ_k (соседних транспозиций) группы S_n . Алгебра Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ играет ту же роль в теории представлений ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ (и их вещественных подгрупп $SO(p, q)$), что и групповая алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ в теории представлений линейных групп $SL(N, \mathbb{C})$ (см. Главу 4, раздел 4.2). Это связано с тем, что для алгебры $\mathcal{B}r_n(\omega = N)$ в представлении \mathfrak{s} , заданном в (5.2.2) и (5.2.3), справедлив аналог Утверждения 4.2.2.

Утверждение 5.2.1 Пусть T – определяющее представление полной ортогональной группы $O(N, \mathbb{C})$ в пространстве \mathcal{V} с метрикой η . Оператор X , действующий в $\mathcal{V}^{\otimes n}$, является $O(N, \mathbb{C})$ -инвариантным оператором

$$X \cdot (T^{\otimes n}(g)) = (T^{\otimes n}(g)) \cdot X, \quad \forall g \in O(N, \mathbb{C}). \quad (5.2.7)$$

если и только если $X = \mathfrak{s}(a)$, где $a \in \mathcal{B}r_n(N)$, то есть оператор X представляется в виде линейной комбинации:

$$X = \sum_i x_i \mathfrak{s}(a_i), \quad (5.2.8)$$

где сумма идет по всем базисным элементам a_i алгебры $\mathcal{B}r_n(N)$ (индекс i пробегает значения $i = 1, \dots, (2n-1)!!$) и x_i – комплексные коэффициенты.

Замечание. Утверждение 5.2.1 почти всегда справедливо и для специальных ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(N - q, q)$. Исключение для этих групп возникает только в четномерном случае $N = 2r$, когда в (5.2.7) рассматривается их представление $T^{\otimes n}$ для $n \geq r$. В этом случае есть еще одна возможность построить инвариантные операторы, действующие в $\mathcal{V}^{\otimes n}$ и не представимые в виде (5.2.8). Они конструируются с помощью полностью антисимметричного тензора с компонентами $\varepsilon_{i_1 \dots i_{2r}}$. В частности к таким операторам относится оператор с матрицей $\varepsilon_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r}$, который действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes r}$. С помощью этого оператора строятся два проектора (5.1.41) на пространства самодуальных и антисамодуальных полностью антисимметричных тензоров ранга r (см. подробное обсуждение (анти)самодуальных представлений групп $SO(2r, \mathbb{C})$ и $SO(2r - q, q)$ в конце Раздела 5.1.3).

Имеется чрезвычайно удобное графическое представление элементов алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$. Аналогичное представление рассматривалось для группы перестановок S_n в разделе I-1.1.4 в первой части книги. Образующую $\sigma_i \in \mathcal{B}r_n(\omega)$ представляют в виде косы

$$\sigma_i = \begin{array}{cccccccc} & 1 & & 2 & \dots & i & & i+1 & & i+2 & \dots & n-1 & & n \\ & | & & | & \dots & \diagdown & & \diagup & & | & \dots & | & & | \\ \bullet & \bullet & & \bullet & \dots & \bullet & & \bullet & & \bullet & \dots & \bullet & & \bullet \end{array}, \quad (5.2.9)$$

причем в силу соотношения $\sigma_i^2 = 1$ из (5.2.5) неважно, проходит ли линия, соединяющая вершины i и $i + 1$, сверху линии, соединяющей вершины $i + 1$ и i , или снизу этой линии. Для соотношения локальности $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ из (5.2.5) мы имеем ($i + 1 < j < n - 1$)

$$\sigma_j \sigma_i = \begin{array}{cccccccc} & \dots & i & & i+1 & & \dots & j & & j+1 & & \dots \\ & \dots & \diagdown & & \diagup & & \dots & \diagdown & & \diagup & & \dots \\ \bullet & \dots & \bullet & & \bullet & & \dots & \bullet & & \bullet & & \dots \end{array} = \begin{array}{cccccccc} & \dots & i & & i+1 & & \dots & j & & j+1 & & \dots \\ & \dots & | & & | & & \dots & \diagdown & & \diagup & & \dots \\ \bullet & \dots & \bullet & & \bullet & & \dots & \bullet & & \bullet & & \dots \end{array} = \sigma_i \sigma_j.$$

Соотношение кос $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ из (5.2.5) имеет следующее графическое представление

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \begin{array}{cccc} & i & & i+1 & & i+2 \\ & | & & \diagdown & & \diagup \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & \diagup & & | & & \diagdown \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array} = \begin{array}{cccc} & i & & i+1 & & i+2 \\ & \diagdown & & \diagup & & | \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & | & & | & & \diagdown \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i.$$

Наконец элемент $\kappa_i \in \mathcal{B}r_n(\omega)$ графически представляется как

$$\kappa_i = \begin{array}{cccccccc} & 1 & & \dots & & i-1 & & i & & i+1 & & i+2 & & \dots & & n-1 & & n \\ & | & & & & | & & \diagdown & & \diagup & & | & & & & | & & | \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & & & \bullet & & \bullet \end{array}. \quad (5.2.10)$$

Пользуясь графами (5.2.9), (5.2.10) для образующих $\sigma_i, \kappa_i \in \mathcal{B}r_n(\omega)$, любой элемент, построенный как произведение этих образующих, можно изобразить графически в виде косы. При этом возникающие петли:

$$\text{петля} = \text{оваль} = \omega . \tag{5.2.11}$$

необходимо заменить на константу ω .

- **Задача 155.** Пользуясь графами (5.2.9), (5.2.10), (5.2.11) изобразить все определяющие соотношения (5.2.5).

Согласно графическому представлению (5.2.9), (5.2.10), любой моном алгебры $\mathcal{B}r_n$ изображается в виде графа (см. Рис.5.4) с n линиями, где каждая из $2n$ вершин, находящихся в верхнем или нижнем ряду, связана одной линией с какой-то из $(2n - 1)$ оставшихся вершин в этих рядах. Разные графы такого типа определяют базисные элементы в алгебре $\mathcal{B}r_n$ и их число находится так. Первая из $2n$ вершин графа имеет $(2n - 1)$ возможность соединиться с другими вершинами. Следующая из оставшихся $(2n - 2)$ вершин имеет $(2n - 3)$ возможности соединиться с другими свободными вершинами и т.д. Произведение чисел $(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot (2n - 5) \cdot \dots$ дает число разных графов указанного типа, то есть размерность (5.2.6) алгебры $\mathcal{B}r_n$.

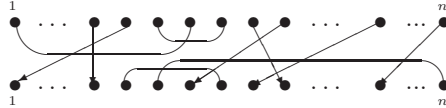


Рис. 5.4: Графическое изображение любого монома алгебры $\mathcal{B}r_n$, построенного как произведение образующих $\sigma_i, \kappa_j \in \mathcal{B}r_n$.

В представлении s алгебры $\mathcal{B}r_n(\omega)$, заданном в (5.2.2), (5.2.3), каждое ребро на графах (5.2.9) и (5.2.10), соединяющее k -ю вершину в верхнем ряду и j -ю вершину в нижнем ряду, соответствует дельта-символу δ_{ij}^{ik} , при этом кривые на графе (5.2.10), соединяющие две верхние, или две нижние, вершины с номерами k и j , соответствуют метрикам η^{ikij} или η_{ikij} . Поэтому в представлении s петли (5.2.11) выражаются в виде свертки двух метрик и параметр ω алгебры $\mathcal{B}r_n(\omega)$ фиксируется как $\omega = \eta^{ik}\eta_{ik} = N$, что согласуется с уже известными нам фактами.

Определим для алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n$ (далее мы не будем в обозначении алгебры Брауэра указывать зависимость от параметра ω) набор элементов $\{y_m\}$ ($m = 1, \dots, n$) (сравните с (4.6.2)):

$$y_1 = 0, \quad y_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\sigma_{k,m} - \kappa_{k,m}) = \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{m-1} \dots \sigma_{k+1} (\sigma_k - \kappa_k) \sigma_{k+1} \dots \sigma_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots, n, \tag{5.2.12}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{k,m} &= \sigma_{m-1} \dots \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \dots \sigma_{m-1} = (k, m), \\ \kappa_{k,m} &= \sigma_{m-1} \dots \sigma_{k+1} \cdot \kappa_k \cdot \sigma_{k+1} \dots \sigma_{m-1}. \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

- **Задача 156.** Пользуясь представлением (5.2.9), (5.2.10) изобразить графически элементы (5.2.13).

Операторы y_m называются **элементами Юциса–Мёрфи** алгебры Брауэра и играют такую же важную роль при построении примитивных идемпотентов в алгебре $\mathcal{B}r_n$

(см. ниже), как и элементы Юциса–Мёрфи в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ при построении примитивных идемпотентов в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$. Отметим, что элементы Юциса–Мёрфи (5.2.12) можно задать с помощью индуктивной процедуры

$$y_1 = 0, \quad y_{m+1} = \sigma_m - \kappa_m + \sigma_m \cdot y_m \cdot \sigma_m. \quad (5.2.14)$$

Из определений (5.2.12), (5.2.14) и соотношений (5.2.5) следует, что элементы y_m удовлетворяют равенствам (они понадобятся нам в дальнейшем):

$$y_{m+1} \cdot \sigma_m = \sigma_m \cdot y_m + 1 - \kappa_m, \quad \sigma_m \cdot y_{m+1} = y_m \cdot \sigma_m + 1 - \kappa_m, \quad (5.2.15)$$

$$\kappa_m(y_m + y_{m+1} + \omega - 1) = 0, \quad (y_m + y_{m+1} + \omega - 1)\kappa_m = 0, \quad (5.2.16)$$

$$[y_m + y_{m+1}, \sigma_m] = 0, \quad [y_m, \sigma_i] = 0, \quad m \neq i, i + 1. \quad (5.2.17)$$

Здесь и далее единичный элемент $e \in \mathcal{B}r_n$, умноженный на константу c , будет записываться как c . Докажем первое равенство в (5.2.16) по индукции (второе равенство доказывается аналогично). Подставим в левую часть первого соотношения в (5.2.16) определение (5.2.14) и воспользуемся (5.2.5), в результате получаем

$$\begin{aligned} \kappa_m(y_m + y_{m+1} + \omega - 1) &= \kappa_m(y_m + (\sigma_m - \kappa_m + \sigma_m y_m \sigma_m) + \omega - 1) = \\ &= \kappa_m y_m (1 + \sigma_m) = \kappa_m (\sigma_{m-1} - \kappa_{m-1} + \sigma_{m-1} y_{m-1} \sigma_{m-1}) (1 + \sigma_m) = \\ &= \kappa_m \sigma_{m-1} y_{m-1} \sigma_{m-1} (1 + \sigma_m). \end{aligned}$$

Таким образом, первое соотношение в (5.2.16) эквивалентно переписывается в виде

$$\kappa_k \sigma_{k-1} y_{k-1} \sigma_{k-1} (1 + \sigma_k) = 0. \quad (5.2.18)$$

Для $k = 2$ соотношение (5.2.18) очевидно выполняется в силу условия $y_1 = 0$. Докажем, что если (5.2.18) выполняется для $k = m$, то оно выполняется и для $k = m + 1$. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \kappa_{m+1} \sigma_m y_m \sigma_m (1 + \sigma_{m+1}) &= \kappa_{m+1} \sigma_m \sigma_{m+1}^2 y_m \sigma_m (1 + \sigma_{m+1}) = \\ &= \kappa_{m+1} \kappa_m y_m \sigma_{m+1} \sigma_m (1 + \sigma_{m+1}) = \kappa_{m+1} \kappa_m y_m (1 + \sigma_m) \sigma_{m+1} \sigma_m = \\ &= \kappa_{m+1} \kappa_m (\sigma_{m-1} - \kappa_{m-1} + \sigma_{m-1} y_{m-1} \sigma_{m-1}) (1 + \sigma_m) \sigma_{m+1} \sigma_m = \\ &= \kappa_{m+1} [\kappa_m \sigma_{m-1} y_{m-1} \sigma_{m-1} (1 + \sigma_m)] \sigma_{m+1} \sigma_m = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает первое соотношение в (5.2.16).

- **Задача 157.** Используя (5.2.5), проверить, что элемент $y_2 = (\sigma_1 - \kappa_1)$ удовлетворяет характеристическому тождеству третьего порядка

$$(y_2 - 1)(y_2 + 1)(y_2 + \omega - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Spec}(y_2) = \{+1, -1, 1 - \omega\}. \quad (5.2.19)$$

Определим подалгебру $Y_n \subset \mathcal{B}r_n$, которая порождается всеми элементами Юциса–Мёрфи $\{y_2, \dots, y_n\}$. Имеет место следующее Утверждение [46] (аналог Утверждения 4.6.1, которое было сформулировано для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$).

Утверждение 5.2.2 Операторы Юциса–Мёрфи $\{y_2, \dots, y_n\}$, заданные в (5.2.12), образуют полный набор коммутирующих элементов в $\mathcal{B}r_n$:

$$[y_i, y_j] = 0, \quad \forall i, j, \quad (5.2.20)$$

то есть алгебра Y_n — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{B}r_n$. В данном случае полнота набора коммутирующих элементов означает, что любой элемент $y \in \mathcal{B}r_n$, коммутирующий со всеми элементами y_i , представляется в виде полинома от элементов y_i .

Доказательство. Коммутативность элементов Юциса–Мёрфи следует из соотношений ($k < \ell < r$)

$$[\sigma_{k\ell} - \kappa_{k\ell}, \sigma_{kr} - \kappa_{kr} + \sigma_{\ell r} - \kappa_{\ell r}] = 0,$$

которые в свою очередь вытекают из тождеств

$$\sigma_{k\ell}\sigma_{kr} = \sigma_{\ell r}\sigma_{k\ell}, \quad \sigma_{k\ell}\kappa_{kr} = \kappa_{\ell r}\sigma_{k\ell}, \quad \kappa_{k\ell}(\sigma_{kr} - \kappa_{\ell r}) = 0, \quad \kappa_{k\ell}(\sigma_{\ell r} - \kappa_{kr}) = 0,$$

и зеркальных к ним тождеств. Все эти тождества легко доказываются с помощью графического представления (5.2.9), (5.2.10) (см. Задачу 156). Доказательство того, что Y_n — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{B}r_n$ мы здесь приводить не будем. ■

5.2.2 Сплетающие элементы и идемпотенты в алгебре $\mathcal{B}r_n$. Спектр операторов Юциса–Мёрфи

Введем *сплетающие* элементы $U_k \in \mathcal{B}r_n$ (сравните с (4.6.11))

$$\begin{aligned} U_k &= [\sigma_k, y_k] W_k = W_k [\sigma_k, y_k] = \\ &= W_k ((y_{k+1} - y_k)\sigma_k - 1) = W_k (\sigma_k(y_k - y_{k+1}) + 1), \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

где мы ввели обозначение

$$W_k \equiv (y_k + y_{k+1} + \omega - 1),$$

и использовали тождества (5.2.16), (5.2.17), которые в терминах элементов W_k записываются в виде:

$$\kappa_k W_k = W_k \kappa_k = 0, \quad \sigma_k W_k = W_k \sigma_k. \quad (5.2.22)$$

Имеет место следующее Утверждение (сравните с Утверждением 4.6.2).

Утверждение 5.2.3 Элементы U_k удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} U_k y_k &= y_{k+1} U_k, \quad U_k y_{k+1} = y_k U_k, \quad U_k y_i = y_i U_k \quad \text{для } i \neq k, k+1, \\ U_k [\sigma_k, y_k] &= (1 + y_{k+1} - y_k)(1 - y_{k+1} + y_k) W_k, \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

$$U_{k+1} U_k U_{k+1} = U_k U_{k+1} U_k, \quad \kappa_k U_k = U_k \kappa_k = 0. \quad (5.2.24)$$

Доказательство. Сплетающий оператор U_k для алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n$ отличается по форме от сплетающего оператора (4.6.11) для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ на фактор W_k , который согласно (5.2.22) при умножении на элемент κ_k обращается в нуль. Учитывая то, что алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ получается из алгебры $\mathcal{B}r_n$ факторизацией по соотношениям $\kappa_k = 0$, доказательство всех формул (5.2.23) и первой формулы из (5.2.24) проводится так же как и доказательство формул (4.6.13)–(4.6.15) из Утверждения 4.6.2. Последняя формула в (5.2.24) является тривиальным следствием (5.2.22). ■

Элементы U_k дают важную информацию о спектре элементов Юциса-Мёрфи $\{y_j\}$ алгебры $\mathcal{B}r_n$ (сравните с Утверждением 4.6.4).

Утверждение 5.2.4 *Спектр элементов $y_j \in \mathcal{B}r_n$ удовлетворяет условию*

$$\text{Spec}(y_j) \subset \{[1 - j, j - 1], [2 - j, j - 2] + 1 - \omega\}, \quad (5.2.25)$$

где $j \geq 2$, скобка $[-z, z]$ обозначает набор целых чисел (сравните с (4.6.28))

$$[-z, z] = \{-z, \dots, -1, 0, 1, \dots, z\}, \quad z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (5.2.26)$$

и $[-z, z] + a$ обозначает набор сдвинутых на a чисел

$$[-z, z] + a = \{a - z, \dots, a - 1, a, a + 1, \dots, a + z\}.$$

Доказательство. Докажем данное утверждение по индукции. Условие (5.2.25) очевидно выполнено для y_2 (см. (5.2.19)). Предположим, что условие (5.2.25) выполнено для некоторого y_{j-1} , где $(j - 1) \geq 2$:

$$\text{Spec}(y_{j-1}) \subset \{[2 - j, j - 2], [3 - j, j - 3] + 1 - \omega\}. \quad (5.2.27)$$

Докажем, что это условие выполнено и для y_j . Пусть $f(y_{j-1}) = 0$ — характеристическое тождество для оператора y_{j-1} (см. (5.2.19)). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= U_{j-1}f(y_{j-1})[\sigma_{j-1}, y_{j-1}] = f(y_j)U_{j-1}[\sigma_{j-1}, y_{j-1}] \\ &= f(y_j)(1 + y_{j-1} - y_j)(1 + y_j - y_{j-1})(y_j + y_{j-1} + \omega - 1). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались последним равенством из (5.2.23). Таким образом, мы имеем

$$\text{Spec}(y_j) \subset \text{Spec}(y_{j-1}) \cup \{\text{Spec}(y_{j-1}) \pm 1\} \cup \{-\text{Spec}(y_{j-1}) + 1 - \omega\},$$

что с учетом (5.2.27) доказывает (5.2.25). ■

Нашей целью является построение полного набора примитивных взаимно ортогональных идемпотентов $e_\alpha \in \mathcal{B}r_n$ (индекс α нумерует идемпотенты), для которых выполняются соотношения (4.5.3), (4.5.4):

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \quad \sum_\alpha e_\alpha = e. \quad (5.2.28)$$

Так же, как и в случае построения идемпотентов для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ в подходе Вершика-Окунькова (см. раздел 4.6.2), мы потребуем, чтобы идемпотенты $e_\alpha \in \mathcal{B}r_n$ являлись собственными векторами операторов Юциса-Мёрфи (5.2.12) в левом регулярном представлении алгебры $\mathcal{B}r_n$:

$$y_k \cdot e_\alpha = a_k^{(\alpha)} e_\alpha \quad (a_k^{(\alpha)} \in \mathbb{R}) \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (5.2.29)$$

Такой выбор идемпотентов для алгебры $\mathcal{B}r_n$ всегда возможен, так как элементы Юциса-Мёрфи $\{y_1, \dots, y_n\}$ коммутируют друг с другом (образуют коммутативную подалгебру в $\mathcal{B}r_n$). При этом, как и в случае алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, можно показать, что идемпотенты e_α , удовлетворяющие (5.2.28) и (5.2.29), коммутируют^{5.4} со всеми элементами Юциса-Мёрфи y_k и соответственно являются функциями от y_k . Отметим, что в силу Утверждения 5.2.4 все собственные значения $a_k^{(\alpha)}$ в (5.2.29) — вещественные числа.

Пример. Для алгебры $\mathcal{B}r_2$, кроме тривиального элемента $y_1 \equiv 0$, имеется еще один элемент Юциса-Мёрфи $y_2 = \sigma_1 - \kappa_1$, который удовлетворяет характеристическому тождеству (5.2.19). Пользуясь этим характеристическим тождеством находим полную систему взаимно ортогональных примитивных идемпотентов для $\mathcal{B}r_2$

$$e_a = \frac{(1 - y_2)(y_2 + \omega - 1)}{2(\omega - 2)}, \quad e_s = \frac{(1 + y_2)(y_2 + \omega - 1)}{2\omega}, \quad e_0 = \frac{(1 - y_2)(1 + y_2)}{\omega(2 - \omega)}. \quad (5.2.30)$$

Эти идемпотенты по построению удовлетворяют соотношениям (5.2.29):

$$y_2 \cdot e_a = (-1) e_a, \quad y_2 \cdot e_s = (+1) e_s, \quad y_2 \cdot e_0 = (1 - \omega) e_0, \quad (5.2.31)$$

а также соотношениям (5.2.28), и в представлении \mathfrak{s} , заданном в (5.2.2) и (5.2.3), совпадают с проекторами (5.1.34), которые выделяют неприводимые представления в прямом произведении двух определяющих представлений группы $SO(p, q)$.

Каждый примитивный идемпотент $e_\alpha \in \mathcal{B}r_n$ является собственным вектором для всех элементов y_i ($i = 1, \dots, n$) с собственными значениями $a_i^{(\alpha)}$, которые образуют спектральный набор

$$\Lambda_\alpha = (a_1^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)}) \in \mathbb{R}^n,$$

где по определению $a_1^{(\alpha)} = 0$. Таким образом, каждому примитивному идемпотенту в алгебре $\mathcal{B}r_n$ соответствует свой спектральный набор. Множество всех спектральных наборов будем обозначать как $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$.

Для алгебры $\mathcal{B}r_n$ имеет место следующий аналог Теоремы 4.6.8, которая описывает свойства спектральных наборов. Часть утверждений этой Теоремы мы доказали выше. Полное доказательство этой Теоремы мы не приводим (см. [46]).

Теорема 5.2.5 *Рассмотрим спектральный набор*

$$\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad (5.2.32)$$

соответствующий некоторому примитивному идемпотенту $e_\Lambda \in \mathcal{B}r_n$.

^{5.4}Надо умножить обе части (5.2.19) слева на e_β и просуммировать по α .

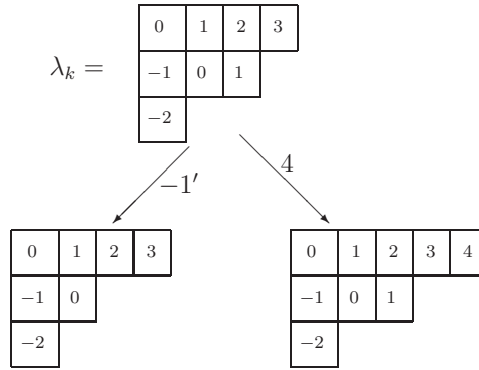


Рис. 5.5: Добавление или удаление одной клетки на шаге $\lambda_k \rightarrow \lambda_{k+1}$ в осциллирующей таблице Юнга $\Lambda = (\dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots)$. При фиксированной диаграмме λ_k диаграмма λ_{k+1} может принимать много форм, две из которых указаны на рисунке. Индексы $(-1')$ и 4 , приписанные стрелкам, соответствуют содержаниям удаленной или добавленной клетки к диаграмме λ_k ; для компактности записи мы используем обозначение $(-n') = (1 - \omega) - n$.

на стрелках. Итак, каждой осциллирующей таблице Юнга соответствует последовательность переходов между диаграммами Юнга

$$\Lambda = \{\emptyset \xrightarrow{a_1=0} \lambda_1 \xrightarrow{a_2} \lambda_2 \xrightarrow{a_3} \lambda_3 \xrightarrow{a_4} \dots \xrightarrow{a_n} \lambda_n\} \tag{5.2.33}$$

где каждому переходу $\lambda_{k-1} \rightarrow \lambda_k$ приписывается содержание a_k добавленной или удаленной клетки у диаграммы λ_{k-1} . Таким образом, каждой осциллирующей таблице Юнга Λ длины n соответствует **вектор содержаний** длины n

$$\Lambda = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где в соответствии с определением содержаний добавленных и удаленных клеток мы имеем (сравните с Утверждением 5.2.4)

$$a_i \in \{[1 - i, i - 1], [2 - i, i - 2] + 1 - \omega\}. \tag{5.2.34}$$

Определение 5.2.2 Множество последовательностей (a_1, a_2, \dots, a_n) чисел, полученных как наборы содержаний всех осциллирующих таблиц Юнга длины n (а потому удовлетворяющих (5.2.34)), называется **множеством векторов содержания длины n** и обозначается Cont_n .

Справдливо следующее утверждение.

Теорема 5.2.6 Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством спектральных наборов $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ и множеством векторов содержаний Cont_n .

В силу утверждения, приведенного после Теоремы 5.2.5, это означает, что имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством векторов содержаний Cont_n и множеством примитивных взаимно ортогональных идемпотентов в алгебре $\mathcal{B}r_n$.

Как и в случае обсуждения теории представлений алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ в разделах 4.6.2 и 4.6.3, утверждения Теорем 5.2.5 и 5.2.6 можно проиллюстрировать с помощью специального раскрашенного графа Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_n$.

5.2.4 Осциллирующий граф Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_n$

Мы проиллюстрируем результаты, изложенные в предыдущих разделах 5.2.1, 5.2.2 и 5.2.3, на примере раскрашенного (в смысле, указанном в разделе 4.6.3) графа Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_4$, изображенного на рис. 5.6. Данный граф содержит всю информацию о неприводимых представлениях алгебр $\mathcal{B}r_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и правилах ветвления этих представлений.

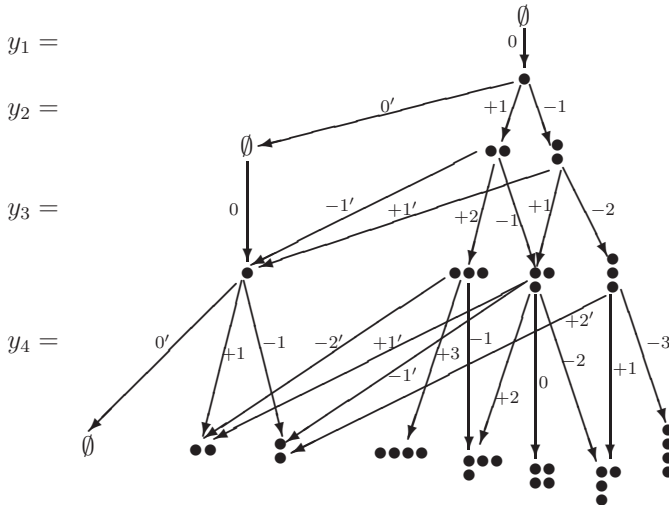


Рис. 5.6: Раскрашенный осциллирующий граф Юнга, иллюстрирующий ветвление неприводимых представлений алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_4(\omega)$ (индексы на линиях — собственные значения операторов Юциса-Мёрфи y_k алгебры $\mathcal{B}r_k$; для компактности записи использованы обозначения $\pm n' \equiv (1 - \omega) \pm n$).

Каждая вершина графа нумеруется двойным индексом $\{\lambda; k\}$, который соответствует диаграмме Юнга λ и уровню k графа, на котором эта диаграмма расположена (уровни графа считаются сверху, и нумерация начинается с 0). Вершина $\{\lambda; k\}$ графа соответствует неприводимому представлению $\rho^{\{\lambda; k\}}$ алгебры $\mathcal{B}r_k$. Например, каждая вершина $\{\emptyset; 4\}$ на самом низком уровне графа Рис.5.6 соответствует неприводимому представлению $\rho^{\{\emptyset; 4\}}$ алгебры $\mathcal{B}r_4$ (мы обсудим это подробнее чуть ниже). Пути, идущие из верхней вершины \emptyset , расположенной на уровне 0, до нижнего уровня (в рассматриваемом случае это пути длины 4) сопоставляются осциллирующим таблицам Юнга (5.2.33), которые в свою очередь соответствуют спектральным наборам $\Lambda = (a_1, \dots, a_n)$. Например, один из трех путей, идущих из верхней вершины $\{\emptyset; 0\}$ до вершины $\{\emptyset; 4\}$ на четвертом уровне, дается осциллирующей таблицей $\Lambda = \{\emptyset \xrightarrow{a_1=0} [1] \xrightarrow{a_2=-1} [1^2] \xrightarrow{a_3=+1'} [1] \xrightarrow{a_4=0'} \emptyset\}$ или спектральным набором $\Lambda = (0, -1, 2 - \omega, 1 - \omega)$. Таким образом, все пути в осциллирующем графе Юнга соответствуют примитивным идемпотентам $e_\Lambda \in \mathcal{B}r_4$ — собственным векторам элементов Юциса-Мёрфи (y_1, \dots, y_4) с собственными значениями $\Lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Собственные значения (a_1, a_2, a_3, a_4) указаны на ребрах путей и равны содержаниям добавленных или удаленных клеток у диаграмм Юнга, через которые проходит данный путь. Каждый примитивный идемпотент e_Λ при действии на него слева (справа) всей алгеброй $\mathcal{B}r_4$ порождает (см. раздел 4.5.1) в регулярном представлении непри-

водимое подпредставление в пространстве левого идеала \mathcal{L}_Λ (правого идеала \mathcal{R}_Λ). Поэтому каждый путь Λ в осциллирующем графе Юнга, заканчивающийся в вершине $\{\lambda; 4\}$, ассоциируется с неприводимым представлением алгебры $\mathcal{B}r_4$ в пространстве \mathcal{L}_Λ , которое мы обозначаем $\rho^{\{\lambda; 4\}}$. При этом разные пути, которые нумеруются разными наборами Λ_i , но заканчиваются в одной и той же вершине $\{\lambda; 4\}$, соответствуют различным идемпотентам, а, следовательно, различным, но эквивалентным представлениям $\rho^{\{\lambda; 4\}}$, действующим в изоморфных пространствах \mathcal{L}_{Λ_i} . Это следует из общего рассмотрения Раздела 4.5.1 (см., в частности, Замечание 3 из указанного Раздела). Итак, неприводимые представления алгебры $\mathcal{B}r_k$ нумеруются вершинами $\{\lambda; k\}$ в осциллирующем графе Юнга, при этом кратность вхождения представления $\rho^{\{\lambda; 4\}}$ в регулярное представление равна числу путей, ведущих к вершине $\{\lambda; k\}$. С другой стороны, в соответствии с дуальностью, обсуждавшейся в Замечании 3 из Раздела 4.5.1, разные пути, заканчивающиеся в одной и той же вершине $\{\lambda; 4\}$ и ассоциированные с примитивными идемпотентами e_{Λ_i} с разными весами Λ_i , нумеруют базисные вектора в пространстве представления $\rho^{\{\lambda; 4\}}$. Поэтому число различных путей, идущих из верхней вершины \emptyset в вершину $\{\lambda; 4\}$, равно также размерности представления $\rho^{\{\lambda; 4\}}$. Упомянем снова, что тот факт, что число эквивалентных неприводимых представлений $\rho^{\{\lambda; 4\}}$ в пространствах \mathcal{L}_{Λ_i} , входящих в регулярное представление (кратность вхождения), равно размерности этих представлений, является частным случаем Утверждения 4.5.2.

- *Задача 158. Найти размерности неприводимых представлений алгебр $\mathcal{B}r_3$ и $\mathcal{B}r_4$, которые соответствуют диаграммам Юнга на 3-м и 4-м уровне графа Юнга на Рис.5.6. Пользуясь формулами (4.3.63), (4.5.27) вычислить размерности алгебр $\mathcal{B}r_3$ и $\mathcal{B}r_4$ и сравнить их с размерностью (5.2.6).*

Раскрашенный осциллирующий граф Юнга на Рис.5.6 содержит подграфы, которые состоят из путей длины 2 и соединяют вершины $\{\lambda; i-1\}$ и $\{\lambda'; i+1\}$ на $(i-1)$ -ом и $(i+1)$ -ом уровнях. Все типы таких подграфов представлены на Рис.5.7 (сравните с Рис.4.9 в разделе 4.6.2). На Рис.5.7А и Рис.5.7В изображены подграфы, соответствующие спектральным условиям (3а) и (3б) из Утверждения 5.2.5. На подграфах А и В все переходы от верхней диаграммы λ к нижней диаграмме λ' сопровождаются только добавлением клеток, поэтому эти подграфы образуют в осциллирующем графе Юнга на Рис. 5.6 раскрашенный подграф Юнга, соответствующий алгебре $\mathbb{C}[S_4]$ (см. Рис.4.8 из Раздела 4.6.3). Подграфы С и D на Рис.5.7 соответствуют спектральному условию (4) из Утверждения 5.2.5. Отметим, что каждый путь из набора $(2m+1)$ путей в подграфе D на Рис.5.7 сопровождается на первом шаге добавлением (удалением) одной клетки из λ , а на втором шаге — удалением (добавлением) той же самой клетки так, что диаграмма λ' на уровне $(i+1)$ совпадает с начальной диаграммой λ на уровне $(i-1)$. Подграфу на Рис.5.7С соответствует значение $m=0$ (один путь), а остальные подграфы такого типа в графе Юнга на Рис.5.6 состоят из трех путей и соответствуют значению $m=1$. Подграфы с $m>1$ (5,7,... путей) реализуются в осциллирующих графах Юнга для алгебр $\mathcal{B}r_n$, начиная с $n>4$.

Подчеркнем еще раз, что неприводимые представления групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ (группы перестановок S_n) нумеровались диаграммами Юнга $\lambda \vdash n$ с n клетками, а примитивные идемпотенты в $\mathbb{C}[S_n]$ соответствовали стандартным таблицам Юнга, имеющим форму $\lambda \vdash n$. Неприводимые представления алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n$ нумеруются парой $\{\lambda; n\}$, где λ — диаграмма Юнга и n — последний уровень, на котором

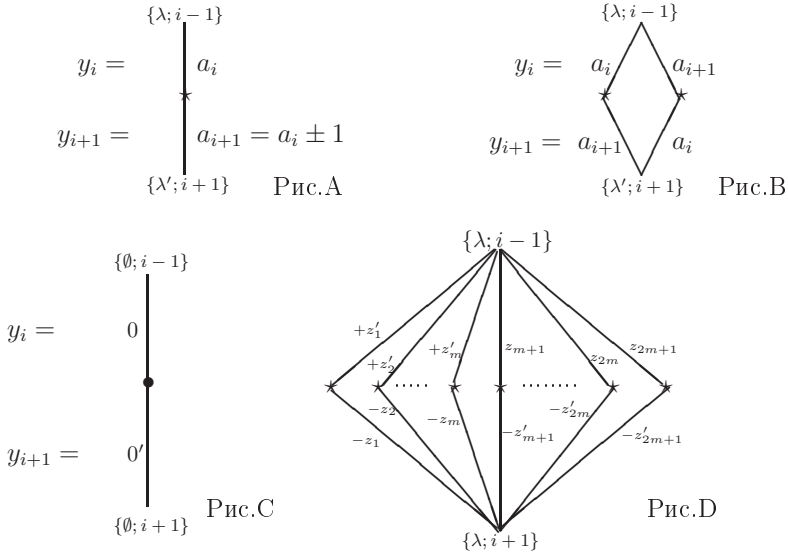


Рис. 5.7: Подграфы в раскрашенном осциллирующем графе Юнга на Рис.5.6, состоящие из путей длины 2, которые соединяют вершины $\{\lambda; i-1\}$ и $\{\lambda'; i+1\}$. Звездами обозначены промежуточные диаграммы Юнга на уровне i . На рисунках C и D использованы краткие обозначения $\pm z' = (1 - \omega) \pm z$ для собственных значений $a_i^{(k)}$ и $a_{i+1}^{(k)}$ таких, что $a_i^{(k)} + a_{i+1}^{(k)} = (1 - \omega)$; см. условие (4) из Утверждения 5.2.5.

диаграмма λ появляется в осциллирующем графе Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_n$. Прimitives идемпотенты в алгебре $\mathcal{B}r_n$ соответствуют осциллирующим таблицам Юнга: $\Lambda = \{\lambda_1 = \emptyset, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \lambda\}$ длины n , или, что то же самое, соответствуют путям в раскрашенном осциллирующем графе Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_n$, которые начинаются в верхней вершине \emptyset и заканчиваются в вершине $\{\lambda; n\}$. Множество всех таких путей, которые имеют длину n , обозначается как $X(n)$.

Для алгебры $\mathcal{B}r_n$ также справедлив аналог Теоремы 4.6.12.

Теорема 5.2.7 *Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством Tab_n осциллирующих таблиц Юнга длины n , для которых указаны вектора содержаний, множеством $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ и множеством $X(n)$ всех путей длины n в раскрашенном осциллирующем графе Юнга*

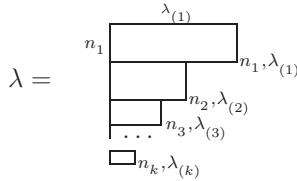
$$\text{Tab}_n \simeq \text{Spec}(y_1, \dots, y_n) \simeq X(n) . \tag{5.2.35}$$

5.2.5 Прimitives идемпотенты для алгебры Брауэра

Конструкция primitives взаимно ортогональных идемпотентов для алгебре Брауэра $\mathcal{B}r_n$ во многом повторяет конструкцию идемпотентов для алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, которая была изложена в разделе 4.6.4.

Раскрашенный осциллирующий граф Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_n$ (см. пример на Рис.5.6) дает правило построения полного набора ортогональных primitives идемпотентов для $\mathcal{B}r_n$. Полнота набора primitives идемпотентов является следствием максимальности коммутативного набора элементов Юциса-Мёрфи. Пусть $\{\lambda; n\}$ —

вершина в графе Юнга с диаграммой (та же диаграмма рассматривалась в разделе 4.6.4):



Здесь $(n_i, \lambda_{(i)})$ — координаты клеток, расположенных в углах диаграммы Юнга $\lambda = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2-n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k-n_{k-1}}]$. Рассмотрим в осциллирующем графе Юнга алгебры $\mathcal{B}r_{n+1}$ любой путь $T_{\{\lambda;n\}}$, идущий вниз из вершины \emptyset в вершину $\{\lambda; n\}$, то есть рассмотрим путь, соответствующий осциллирующей таблице $\Lambda = \{\lambda_1 = \emptyset, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \lambda\}$. Пусть $E_{T_{\{\lambda;n\}}} \in \mathcal{B}r_n$ — примитивный идемпотент, соответствующий $T_{\{\lambda;n\}}$. Используя правило ветвления, которое диктуется осциллирующим графом Юнга для алгебры $\mathcal{B}r_{n+1}$ мы получаем, что для продолжения пути $T_{\{\lambda;n\}}$ до уровня $(n+1)$ нам необходимо добавить к осциллирующей таблице $\Lambda = \{\lambda_1 = \emptyset, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \lambda\}$ еще одну диаграмму Юнга λ_{n+1} , которая получается из λ либо добавлением клеток во внешние углы λ , либо удалением клеток, образующих внутренние углы λ . Зная содержания добавленных или удаленных клеток, мы знаем все возможные собственные значения элемента y_{n+1} и следовательно имеем тождество

$$E_{T_{\{\lambda;n\}}} \cdot \prod_{r=1}^{k+1} (y_{n+1} - (\lambda_{(r)} - n_{r-1})) \prod_{r=1}^k (y_{n+1} - (1 - \omega + n_r - \lambda_{(r)})) = 0,$$

где $\lambda_{(k+1)} = n_0 = 0$. Таким образом, для новой диаграммы $\lambda_{n+1} = \lambda'$, полученной добавлением к λ одной клетки с координатами $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$, соответствующий примитивный идемпотент (после подходящей нормировки) имеет вид

$$E_{T_{\{\lambda';n+1\}}} = E_{T_{\{\lambda;n\}}} \cdot \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{k+1} \frac{(y_{n+1} - (\lambda_{(r)} - n_{r-1}))}{((\lambda_{(j)} - n_{j-1}) - (\lambda_{(r)} - n_{r-1}))} \prod_{r=1}^k \frac{(y_{n+1} - (1 - \omega + n_r - \lambda_{(r)}))}{((\lambda_{(j)} - n_{j-1}) - (1 - \omega + n_r - \lambda_{(r)}))}. \quad (5.2.36)$$

Для новой диаграммы $\lambda_{n+1} = \lambda''$, полученной из λ удалением клетки с координатами $(n_j, \lambda_{(j)})$ мы строим примитивный идемпотент

$$E_{T_{\{\lambda'';n+1\}}} = E_{T_{\{\lambda;n\}}} \cdot \prod_{r=1}^{k+1} \frac{(y_{n+1} - (\lambda_{(r)} - n_{r-1}))}{((1 - \omega + (n_j - \lambda_{(j)})) - (\lambda_{(r)} - n_{r-1}))} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^k \frac{(y_{n+1} - (1 - \omega + n_r - \lambda_{(r)}))}{((n_j - \lambda_{(j)}) - (n_r - \lambda_{(r)}))}. \quad (5.2.37)$$

Используя эти формулы, а также "начальные данные" $E_{T_{\{\emptyset;0\}}} = 1$, можно вывести шаг за шагом явные выражения для всех примитивных ортогональных идемпотентов связанных с путями в осциллирующем графе Юнга для алгебры Брауэра. Свойства взаимной ортогональности и полноты для построенной таким образом системы примитивных идемпотентов следуют автоматически (см. Утверждение 4.6.13 в разделе 4.6.4).

Пример. Построим для алгебры $\mathcal{B}r_n$ явное выражение для симметризатора $E_{T_{\{[n];n\}}}$. В пространстве левого регулярного представления алгебры $\mathcal{B}r_n$ идемпотент $E_{T_{\{[n-1];n-1\}}}$ вырезает подпространство, в котором элемент y_n может принимать три собственных значения. Действительно, согласно правилу ветвления представлений имеется две

возможности добавить клетку к диаграмме $[n-1]$, как это показано звездочками в (5.2.38), или удалить последнюю в ряду клетку с содержанием $(n-2)$:

$$\begin{array}{c} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{\dots} \boxed{n-3} \boxed{n-2} * \\ * \end{array} . \quad (5.2.38)$$

Соответственно процедуре построения идемпотентов, изложенной выше, мы имеем характеристическое уравнение на элемент y_n

$$E_{T_{\{[n-1];n-1\}}} \cdot (y_n - (n-1)) \cdot (y_n + 1) \cdot (y_n + \omega + n - 3) = 0, \quad (5.2.39)$$

которое дает рекуррентное соотношение для симметризатора ($n \geq 2$)

$$E_{T_{\{[n];n\}}} = E_{T_{\{[n-1];n-1\}}} \cdot \frac{(y_n + 1) \cdot (y_n + \omega + n - 3)}{n \cdot (2n - 2 + \omega)}. \quad (5.2.40)$$

Решая это рекуррентное соотношение, мы получаем явную формулу для симметризатора (сравните при $n = 2$ с формулой (5.2.30))

$$E_{T_{\{[n];n\}}} = \frac{(y_2 + 1) \cdots (y_n + 1)}{n!} \cdot \frac{(y_2 + \omega - 1) \cdot (y_3 + \omega) \cdots (y_n + \omega + n - 3)}{\omega \cdot (2 + \omega) \cdots (2n - 4 + \omega)}. \quad (5.2.41)$$

- *Задача 159.* Доказать, что явная формула для антисимметризатора $E_{T_{\{[1^n];n\}}} \in \mathcal{B}r_n$ имеет вид ($n \geq 2$):

$$E_{T_{\{[1^n];n\}}} = \frac{(1 - y_2) \cdots (1 - y_n)}{n!} \cdot \frac{(y_2 + \omega - 1) \cdots (y_n + \omega - n + 1)}{(\omega - 2) \cdots (\omega + 2 - 2n)}. \quad (5.2.42)$$

Замечание 1. Итак, мы предъявили индуктивную процедуру, основанную на формулах (5.2.36) и (5.2.37), позволяющую явно строить полную систему взаимно ортогональных примитивных идемпотентов алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n$. Эти идемпотенты в представлении \mathfrak{s} (заданном в (5.2.2), (5.2.3)) дают проекторы $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ тензоров ранга n . Здесь \mathcal{V} — пространство определяющего представления T группы $SO(N, \mathbb{C})$ или ее вещественных подгрупп $SO(N - q, q)$. Образы $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ примитивных идемпотентов $E_{T_{\{\lambda;n\}}}$, коммутируют с действием группы $SO(N, \mathbb{C})$ (группы $SO(p, q)$, $p + q = N$) в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ и вырезают инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)} \subset \mathcal{V}^{\otimes n}$ неприводимых^{5.5} представлений $T^{(\lambda)}$. Вид проектора $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ зависит от осциллирующей таблицы Юнга $\Lambda = \{\emptyset \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_{n-1} \rightarrow \lambda\}$, имеющей диаграмму λ на последнем уровне n . В общем случае есть несколько путей $T_{\{\lambda;n\}}$ в графе Юнга (осциллирующих таблиц Юнга Λ), имеющих в качестве последней вершины одну и ту же диаграмму Юнга. Однако, так же как и в случае линейных групп, неприводимые представления ортогональных групп, полученные с помощью разных проекторов $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ для разных путей $T_{\{\lambda;n\}}$, оканчивающихся на одной и той же диаграмме Юнга λ , оказываются эквивалентными и **нумеруются только этой диаграммой** λ . Действительно, последняя диаграмма λ определяет ранг бесследового тензора и его симметрию, поэтому проекторы $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ на такие тензоры,

^{5.5}Имеется важное для физики исключение в случае $N = 2r$ и диаграмм λ , имеющих r строк (см. Замечания 1 - 3 в конце раздела 5.1.3), когда соответствующие представления приводимы и разлагаются в сумму самодуального и антисамодуального представлений.

построенные с помощью разных примитивных идемпотентов, должны давать эквивалентные представления. Более конструктивное объяснение этого факта основывается на использовании сплетающих операторов U_k , заданных в (5.2.21); см. формулу (4.6.89) и аналогичное Утверждение 4.4.1 в случае представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$.

Замечание 2. Кроме эквивалентности представлений групп $SO(N, \mathbb{C})$, указанной в предыдущем замечании, в случае ортогональных групп имеются дополнительные эквивалентности представлений, которые нумеруются разными диаграммами Юнга λ и λ' , связанными перестроениями, изображенными на Рис. 5.1. При этом, как и в предыдущем случае, примитивные идемпотенты $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ и $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda';n\}}})$ в алгебре Брауэра, построенные по разным путям $T_{\{\lambda;n\}}$ и $T_{\{\lambda';n\}}$ в графе Юнга для $\mathcal{B}r_n$ (по разным осциллирующим таблицам) и их образы в представлении \mathfrak{s} будут разными. Тем не менее неприводимые представления групп $SO(N, \mathbb{C})$, вложенные в представление $T^{\otimes n}$ и выделенные с помощью проекторов $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ и $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda';n\}}})$ будут эквивалентными.

Замечание 3. Отметим, что граф ветвления неприводимых представлений (вложенных в представление $T^{\otimes n}$) группы $SO(N, \mathbb{C})$, изображенный для частного случая $n = 4$ на Рис. 5.3, и граф ветвления неприводимых представлений алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$, аналогичный изображенному на рисунке 5.6, будут совпадать только в случае $n \leq [N/2]$. В случае $n > [N/2]$ согласно Утверждению 5.1.3 граф ветвления представлений группы $SO(N, \mathbb{C})$, в отличие от графа ветвления представлений алгебры Брауэра, не будет содержать диаграмм Юнга с числом строк, превышающим $[N/2]$. Граф Юнга ветвления представлений (вложенных в представление $T^{\otimes n}$) группы $SO(N, \mathbb{C})$ (Рис.5.3) и граф Юнга ветвления представлений алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ (Рис.5.6) отличаются также интерпретацией числа путей $T_{\{\lambda;n\}}$, которые имеют в качестве последней вершины пути одну и ту же диаграмму Юнга λ на уровне n . Если в первом случае (ветвление представлений группы $SO(N, \mathbb{C})$) — это кратность вхождения неприводимого^{5,6} представления $T^{(\lambda)}$ в представление $T^{\otimes n}$ (см. Раздел 5.1.4), то во втором случае (ветвление представлений алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$) — это не только кратность вхождения неприводимого представления $\rho^{\{\lambda;n\}}$ в регулярное представление алгебры $\mathcal{B}r_n(\omega)$, но и размерность этого представления, причем представление $\rho^{\{\lambda;n\}}$ индексируется как диаграммой Юнга λ , так и уровнем n , на котором эта диаграмма появляется в графе Юнга (см. Раздел 5.2.4). Представления $\rho^{\{\lambda;n\}}$ и $\rho^{\{\lambda;n'\}}$, индексированные одной и той же диаграммой λ , расположенной на разных уровнях n и n' графа Юнга, являются представлениями разных алгебр Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ и $\mathcal{B}r_{n'}(\omega)$.

5.3 Тензорные представления группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ и ее подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, r - p)$

Напомним определение групп $Sp(2r, \mathbb{C})$ и их подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, q)$, а также напомним определения соответствующих алгебр Ли (см. разделы I-1.2.5 и I-2.2.3 в первой части книги). Симплектическая группа $Sp(2r, \mathbb{C})$ — это множество

^{5,6}В случае группы $SO(2r, \mathbb{C})$ представления $T^{(\lambda)}$, соответствующие диаграммам λ с r строками, являются приводимыми и разбиваются на самодуальные и антисамодуальные представления.

комплексных $(2r \times 2r)$ матриц T , удовлетворяющих условию:

$$T^T \cdot J \cdot T = J, \quad (5.3.1)$$

где фиксированная невырожденная кососимметрическая матрица

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad J = -J^T, \quad (5.3.2)$$

называется симплектической метрикой. Иначе говоря, $Sp(2r, \mathbb{C})$ – это группа линейных операторов в \mathbb{C}^{2r} , которые для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^{2r}$ сохраняют невырожденную антисимметричную билинейную форму $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_i J_{ij} y_i$. Отметим, что любой другой выбор невырожденной матрицы J в (5.3.1), удовлетворяющей $J = -J^T$, приводит к определению групп, изоморфных $Sp(2r, \mathbb{C})$.

- *Задача 160.* Доказать, что $\forall T \in Sp(2r, \mathbb{C})$ выполняется условие $\det(T) = +1$.

Указание: вычислить пфаффиан от обеих частей равенства (5.3.1).

Для симплектических матриц (5.3.1), лежащих на кривой $T(t) = I_{2r} + tA + O(t^2)$ и близких к единичному элементу (параметр t – мал), имеем

$$A^T \cdot J + J \cdot A = 0. \quad (5.3.3)$$

Согласно принятой нами идеологии (см. первую часть книги [1]) все группы Ли, даже состоящие из комплексных матриц, определяются нами как вещественные многообразия, имеющие в качестве касательных пространств (алгебр Ли) – вещественные векторные пространства. Таким образом, (вещественная) алгебра Ли $ASp(2r, \mathbb{C})$ – это вещественное векторное пространство комплексных матриц A , удовлетворяющих условию (5.3.3). Естественно определить комплексную алгебру $sp(2r, \mathbb{C})$ как комплексное векторное пространство комплексных матриц A , подчиняющихся (5.3.3). Подчеркнем, что $ASp(2r, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$ – разные объекты.

В группе $Sp(2r, \mathbb{C})$ содержится несколько важных подгрупп, алгебры Ли которых – вещественные формы комплексной алгебры Ли $sp(2r, \mathbb{C})$. Первая подгруппа $Sp(2r, \mathbb{R})$ – это множество **вещественных** $2r \times 2r$ матриц T , удовлетворяющих условию (5.3.1). Вторая подгруппа $USp(2r)$ – это множество комплексных $2r \times 2r$ матриц T , удовлетворяющих как условию симплектичности (5.3.1), так и условию унитарности $T^\dagger \cdot T = I_n$, поэтому $USp(2r) = Sp(2r, \mathbb{C}) \cap U(2r)$. Кроме того, в группе $Sp(2r, \mathbb{C})$ имеется еще целая серия подгрупп, которые обозначаются $Sp(p, q)$ (здесь $p + q = r$). Данные группы определяются как множества комплексных $2r \times 2r$ матриц T , удовлетворяющих одновременно условию симплектичности (5.3.1) и условию (псевдо)унитарности

$$T^\dagger \cdot \tilde{I}_{2p, 2q} \cdot T = \tilde{I}_{2p, 2q}, \quad \tilde{I}_{2p, 2q} := \begin{pmatrix} I_{p, q} & 0 \\ 0 & I_{p, q} \end{pmatrix}, \quad (5.3.4)$$

где матрица $I_{p, q}$ определена в (5.1.1). Таким образом, мы получаем, что $Sp(p, q) = Sp(2r, \mathbb{C}) \cap U(2p, 2q)$. Очевидно, что $Sp(r, 0) = Sp(0, r) = USp(2r)$, поэтому иногда для группы $USp(2r)$ используют краткое обозначение $Sp(r)$.

Векторное пространство вещественных матриц A , удовлетворяющих условию (5.3.3), образует алгебру Ли $sp(2r, \mathbb{R})$. Это – алгебра Ли группы $Sp(2r, \mathbb{R})$, то есть

$sp(2r, \mathbb{R}) = ASp(2r, \mathbb{R})$. Ясно, что эта вещественная алгебра — вещественная форма алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$. Рассматривая элементы группы $Sp(p, q)$ (здесь $r = (p+q)$), удовлетворяющие условиям (5.3.1) и (5.3.4) и близкие к единичному, получаем, что алгебра Ли $sp(p, q)$ — это вещественное векторное пространство $2r \times 2r$ комплексных матриц A , которые одновременно подчиняются соотношениям (5.3.3) и

$$A^\dagger \cdot \tilde{I}_{2p,2q} + \tilde{I}_{2p,2q} \cdot A = 0 \quad (5.3.5)$$

(матрица $\tilde{I}_{2p,2q}$ определена в (5.3.4)). Из рассмотрения кривой, близкой к единице, в группе $USp(2r)$ следует, что алгебра Ли $usp(2r)$ — это вещественное векторное пространство комплексных матриц A , одновременно удовлетворяющих (5.3.3) и условию (5.3.5), в котором вместо матрицы $\tilde{I}_{2p,2q}$ необходимо взять единичную матрицу I_{2r} . Таким образом, $usp(2r) = sp(r, 0) = sp(0, r)$. Все алгебры $sp(p, q)$, включая компактную алгебру $usp(2r)$ — вещественные формы алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$.

Пусть $T_{(1)}$ — определяющее комплексное представление алгебры Ли $sp(2r, \mathbb{C})$. В разделе 3.4.2, пункт 5, мы показали, что **все** фундаментальные представления $T_{(f)}$ (здесь $f = 1, \dots, r$) алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ строятся как внешние произведения $T_{(1)}^{\wedge f}$ определяющего представления $T_{(1)}$. Далее, основываясь на этом факте, мы показали, что **все** комплексные конечномерные неприводимые представления, которые являются представлениями со старшими весами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$, возникают как неприводимые подпредставления в тензорном произведении фундаментальных представлений $T_{(f)}$ и характеризуются диаграммами Юнга $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$. Отсюда следует, что все конечномерные неприводимые представления алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ вкладываются в тензорное произведение определяющих представлений, и аналогов спинорных представлений (которые имелись у алгебры $so(n, \mathbb{C})$) у алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ нет.

Пусть T — определяющее комплексное представление группы $Sp(2r, \mathbb{C})$, которое одновременно выступает в качестве определяющего комплексного представления всех подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, q)$ в группе $Sp(2r, \mathbb{C})$, которые мы рассмотрели выше. С представлением T естественным образом связано определяющее представление $T_{(1)}$ алгебры Ли $sp(2r, \mathbb{C})$. Вблизи единичного элемента любая матрица $U \in Sp(2r, \mathbb{C})$ представима в виде $U = \exp(tA)$, где $A \in sp(2r, \mathbb{C})$ и t — малый **комплексный** параметр. Связь между определяющим представлением группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ и определяющим представлением $T_{(1)}$ алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ дается формулой (сравните с Замечанием 3 в разделе 2.1)

$$T(\exp(tA)) = I_{2r} + tT_{(1)}(A) + O(t^2). \quad (5.3.6)$$

Мы будем пользоваться одним и тем же обозначением $T \equiv T_{(1)}$ для определяющих представлений группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ и алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$. Эта конструкция, как обычно, обобщается на тензорные произведения определяющих представлений группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ и алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$. В дальнейшем мы, не оговаривая каждый раз специально, будем рассматривать только те представления группы $Sp(2r, \mathbb{C})$, которые содержатся в тензорном произведении определяющих представлений. С ними взаимнооднозначным образом связаны **все** представления алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ (поскольку все ее представления содержатся в тензорном произведении определяющих представлений) и **все** представления подгрупп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$ и $Sp(p, q)$. Итак, мы будем искать неприводимые представления группы $Sp(2r, \mathbb{C})$, содержащиеся в тензорном

произведении ее определяющих представлений, и таким образом найдем все неприводимые комплексные представления алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ и групп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, q)$. Кроме того, указывая способ разложения тензорного произведения определяющих представлений группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ на неприводимые, мы одновременно получим такой способ для алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$ и групп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$, $Sp(p, q)$. Отметим, что этот же подход (разложение на неприводимые тензорных произведений определяющих представлений) мы использовали в случае группы $SU(2)$ и алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ в разделе 2.1, а также в случае группы $SU(N)$ и алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ в Главе 4.

Итак, будем выделять неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ в тензорном произведении $T^{\otimes n}$ определяющих представлений $T \equiv T_{(1)}$. Представление $T^{\otimes n}$ группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ тензоров ранга n . Отметим, что определяющее T и коопределяющие \tilde{T} представления симплектических групп (так же как и ортогональных групп) оказываются эквивалентными. Вектора соответствующих пространств \mathcal{V} и $\tilde{\mathcal{V}}$ представлений T и \tilde{T} переводятся друг в друга с помощью симплектической метрики. В общем случае тензор смешанного типа

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{k_{s+1} \dots k_{s+t}}^{k_1 \dots k_s} \vec{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{k_s} \otimes \vec{e}^{k_{s+1}} \otimes \dots \otimes \vec{e}^{k_{s+t}} \in \mathcal{V}^{\otimes s} \otimes \tilde{\mathcal{V}}^{\otimes t}, \quad (5.3.7)$$

где \vec{e}_k и $\vec{e}^{k_{s+t}}$ — базисные вектора в пространствах \mathcal{V} и $\tilde{\mathcal{V}}$, переводится в тензор $\mathbf{t}' \in \mathcal{V}^{\otimes(s+t)}$ с помощью подъема индексов у компонент

$$\mathbf{t}'^{k_1 \dots k_s k_{s+1} \dots k_{s+t}} = J^{k_{s+1} \ell_{s+1}} \dots J^{k_{s+t} \ell_{s+t}} \mathbf{t}_{\ell_{s+1} \dots \ell_{s+t}}^{k_1 \dots k_s}. \quad (5.3.8)$$

Поэтому, с точки зрения теории представлений симплектических групп нет необходимости рассматривать смешанные представления $T^{\otimes s} \otimes \tilde{T}^{\otimes t}$, достаточно рассмотреть только представления $T^{\otimes(s+t)}$ и выделять неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ в тензорных произведениях определяющих представлений T .

Инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ в $\mathcal{V}^{\otimes n}$, на которых действуют неприводимые представления $T^{(\lambda)}$ групп $Sp(2r, \mathbb{C})$, строятся так же, как и в случае групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$ с помощью специальных проекторов, аналогичных симметризаторам Юнга. Подпространство $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ образовано тензорами, симметрия которых диктуется диаграммой Юнга λ и которые при этом обладают свойством бесследовости по отношению к кососимметричной симплектической метрике J (сравните с условием (5.1.32))

$$\mathbf{t}^{k_1 k_2 \dots k_n} J_{k_i k_j} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.3.9)$$

Таким образом, в методе построения инвариантных подпространств $\mathcal{V}^{(\lambda)}$, который применялся для групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$, нужно просто заменить (псевдо) евклидову метрику η на симплектическую метрику J .

Пример. Рассмотрим способ выделения инвариантных подпространств в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ представления $T^{\otimes 2}$, то есть в пространстве тензоров \mathbf{t} второго ранга с компонентами \mathbf{t}^{ik} . Сначала, так же как и в случае групп $SL(N, \mathbb{C})$ и $SO(N, \mathbb{C})$, необходимо разбить тензор \mathbf{t} на симметричную и антисимметричную части: $\mathbf{t} = \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_a$; см. (5.1.31). Далее ясно, что по отношению к кососимметричной метрике J симметричные тензоры \mathbf{t}_s с компонентами $\mathbf{t}_s = \mathbf{t}^{(ik)}$ — бесследовы и образуют пространство неприводимого представления группы $Sp(2r, \mathbb{C})$, а пространство антисимметричных тензоров \mathbf{t}_a распадается на два инвариантных подпространства $\mathcal{V}^{([1^2])}$ и $\mathcal{V}^{(0)}$, составленных из бесследовых антисимметричных тензоров с компонентами

$$\mathbf{t}'_a{}^{ik} = \mathbf{t}^{[ik]} + \frac{1}{2r} J^{ik} (J_{rs} \mathbf{t}^{[rs]}), \quad \mathbf{t}'_a \in \mathcal{V}^{([1^2])}, \quad (5.3.10)$$

и тензора, соответствующего тривиальному представлению (сравните с (5.1.33)):

$$\mathbf{t}_0^{ik} = J^{ik} (\bar{J}_{rs} \mathbf{t}^{[rs]}), \quad \mathbf{t}_0 \in \mathcal{V}^{(0)}, \quad (5.3.11)$$

где J^{ik} — компоненты матрицы $\bar{J} = \|J^{ik}\|$ обратной к матрице метрики $J = \|J_{ik}\|$, то есть $J^{ik} J_{kj} = \delta_j^i$ и $J_{ik} J^{ik} = (-2r)$.

Из определений тензора \mathbf{t}_s и формул (5.3.10), (5.3.11) следует, что неприводимые тензоры с компонентами $\mathbf{t}'_a{}^{i_1 i_2}$, $\mathbf{t}'_s{}^{i_1 i_2}$ и $\mathbf{t}'_0{}^{i_1 i_2}$ выделяются из любого тензора второго ранга с компонентами $\mathbf{t}^{k_1 k_2}$ с помощью нормированных проекторов (сравните с (5.1.34))

$$\begin{aligned} (\Pi_s)_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{2} (I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} + P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}), \\ (\Pi_a)_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} &= \frac{1}{2} (I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} - P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}) + \frac{1}{2r} \tilde{K}_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}, \quad (\Pi_0)_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = -\frac{1}{2r} \tilde{K}_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}, \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

где

$$P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = \delta_{k_2}^{i_1} \delta_{k_1}^{i_2}, \quad I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = \delta_{k_1}^{i_1} \delta_{k_2}^{i_2}, \quad \tilde{K}_{k_1 k_2}^{i_1 i_2} = J^{i_1 i_2} J_{k_1 k_2}, \quad (5.3.13)$$

$P_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}$ — матрица оператора перестановки, $I_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}$ — единичная матрица и $\tilde{K}_{k_1 k_2}^{i_1 i_2}$ — матрица единичного ранга.

- *Задача 161. Доказать, что операторы Π_α , заданные в (5.3.12), образуют полную систему взаимно ортогональных проекторов*

$$\Pi_a + \Pi_s + \Pi_0 = I, \quad \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta = \Pi_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.3.14)$$

Для решения общей проблемы выделения неприводимых подпредставлений $T^{(\lambda)}$ из прямого произведения $T^{\otimes n}$ определяющих представлений группы $Sp(2r, \mathbb{C})$ (или представлений групп $Sp(2r, \mathbb{R})$, $USp(2r)$ и $Sp(p, r-p)$) необходимо построить полную систему взаимно ортогональных и примитивных проекторов $P^{(\lambda)}$ (здесь индекс λ нумерует проекторы), которые будут вырезать в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ (в пространстве тензоров ранга n) инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$. Замечательно, что эта проблема решается тем же методом, что и аналогичная проблема в случае ортогональных групп. Действительно, пользуясь структурами (5.3.13), мы можем построить операторы, действующие в $\mathcal{V}^{\otimes n}$, (сравните с (5.2.2), (5.2.3)):

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\sigma_k) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n}) &= \\ = -(\vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_k} \otimes \vec{e}_{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_n}) \delta_{i_1}^{j_1} \cdots \delta_{i_{k-1}}^{j_{k-1}} P_{i_k i_{k+1}}^{j_k j_{k+1}} \delta_{i_{k+2}}^{j_{k+2}} \cdots \delta_{i_n}^{j_n}, \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\kappa_k) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_k} \otimes \vec{e}_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_n}) &= \\ = (\vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_k} \otimes \vec{e}_{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_n}) \delta_{i_1}^{j_1} \cdots \delta_{i_{k-1}}^{j_{k-1}} \tilde{K}_{i_k i_{k+1}}^{j_k j_{k+1}} \delta_{i_{k+2}}^{j_{k+2}} \cdots \delta_{i_n}^{j_n}, \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

(обратите внимание на знак минус в правой части (5.3.15)). В безиндексных обозначениях операторы (5.3.15), (5.3.16) можно записать в виде

$$\mathfrak{s}(\sigma_k) = -I^{\otimes(k-1)} \otimes P \otimes I^{\otimes(n-k-1)} \equiv -P_k, \quad \mathfrak{s}(\kappa_k) = I^{\otimes(k-1)} \otimes \tilde{K} \otimes I^{\otimes(n-k-1)} \equiv \tilde{K}_k. \quad (5.3.17)$$

Эти операторы задают представление алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_n(\omega)$ с образующими $\{\sigma_k, \kappa_k\}$ ($k = 1, \dots, n-1$) и определяющими соотношениями (5.2.5). Данное представление действует в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$, при этом параметр ω алгебры $\mathcal{B}r_n(\omega)$ фиксируется как $\omega = -2r$ (здесь \mathcal{V} — пространство определяющего представления симплектических групп).

- **Задача 162.** Проверить, что операторы (5.3.15) и (5.3.16) задают представление алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_r(\omega)$ с параметром $\omega = -2r$. Указание: воспользоваться соотношениями для матриц P и \tilde{K} : $P\tilde{K} = \tilde{K}P = -\tilde{K}$, $(\tilde{K})^2 = -2r\tilde{K}$, $\tilde{K}_1\tilde{K}_2\tilde{K}_1 = \tilde{K}_2$, $P_1\tilde{K}_2\tilde{K}_1 = P_2\tilde{K}_1$ и так далее, где P_k и \tilde{K}_k определены в (5.3.17).

В разделе 5.2 мы обсудили теорию представлений алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_r(\omega)$ и предъявили индуктивную процедуру (см. формулы (5.2.36), (5.2.37) в разделе 5.2.5), позволяющую явно построить полную систему взаимно ортогональных идемпотентов $E_{T_{\{\lambda;n\}}} \in \mathcal{B}r_r(\omega)$. Эти идемпотенты в представлении \mathfrak{s} (см. (5.3.17)) дают проекторы $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}}) = P^{(\lambda)}$, действующие в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes n}$ тензоров ранга n , то есть в пространстве приводимого представления $T^{\otimes n}$ группы $Sp(2r, \mathbb{C})$. Проекторы $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ вырезают в $\mathcal{V}^{\otimes n}$ инвариантные подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda)}$ неприводимых представлений симплектических групп, которые нумеруются диаграммой Юнга λ , расположенной на последнем уровне n в осциллирующей таблице Юнга $T_{\{\lambda;n\}}$. Таким образом, все, что было сказано в последнем Замечании в конце раздела 5.2.5 практически без изменений переносится на случай симплектических групп.

Замечание 1. Так как операторы (5.3.17) вещественны, то построенные с их помощью проекторы $\mathfrak{s}(E_{T_{\{\lambda;n\}}})$ также вещественны и могут использоваться для выделения неприводимых вещественных представлений группы $Sp(2r, \mathbb{R}) \subset Sp(2r, \mathbb{C})$ из тензорного произведения $T^{\otimes n}$ вещественных определяющих представлений T группы $Sp(2r, \mathbb{R})$.

Замечание 2. Пользуясь эквивалентностью для полностью антисимметричных представлений групп $Sp(2r, \mathbb{K})$ и $Sp(r - q, q)$, характеризуемых диаграммами Юнга $[1^k]$ и $[1^{N-k}]$, основанной на соответствии (сравните с (5.1.36))

$$\mathfrak{t}_1^{[j_1 \dots j_k]} \leftrightarrow \mathfrak{t}_2^{[i_1 \dots i_{N-k}]} \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-k} i_{N-k+1} \dots i_N} J^{i_{N-k+1} j_1} \dots J^{i_N j_k}, \quad N = 2r, \quad (5.3.18)$$

мы можем, так же как и в случае ортогональных групп $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(N - q, q)$ (см. Раздел 5.1.3), доказать эквивалентность представлений, характеризуемых диаграммами λ' с числом строк $m > r$ и представлений, характеризуемых диаграммами λ , которые дополнительны диаграммам λ' в смысле рисунка 5.1. Таким образом, неприводимые и неэквивалентные представления групп $Sp(2r, \mathbb{K})$ и $Sp(r - q, q)$ характеризуются диаграммами Юнга с числом строк $m \leq r$.

Замечание 3. Так же как и в случае ортогональных групп $SO(2r, \mathbb{K})$ и $SO(p, 2r - p)$ (см. Замечания 1, 2 и 3 в конце Раздела 5.1.3), представление $T^{\wedge r}$ групп $Sp(2r, \mathbb{C})$ и $Sp(p, r - p)$, действующее в пространстве $\mathcal{V}^{\wedge r}$ антисимметричных (и "бесследовых" (5.3.9)) тензоров ранга r , является приводимым. Действительно, с помощью полностью антисимметричного тензора с компонентами $\varepsilon_{i_1 \dots i_{2r}}$ мы можем определить, пользуясь теми же формулами (5.1.40), (анти)самодуальные тензоры и в случае групп $Sp(2r, \mathbb{C})$ и $Sp(p, r - p)$. При этом необходимо помнить, что подъем и опускание индексов в случае тензоров симплектических групп осуществляется с помощью антисимметричной метрики J (см. (5.3.8)). Самодуальные $\mathfrak{t}^{(+)}$ и антисамодуальные $\mathfrak{t}^{(-)}$ тензоры образуют два инвариантных подпространства в $\mathcal{V}^{\wedge r}$ и представление $T^{\wedge r}$ разлагается в прямую сумму самодуального и антисамодуального представлений. Обобщая этот результат, мы получаем, что все представления групп $Sp(2r, \mathbb{C})$ и $Sp(p, r - p)$, характеризуемые диаграммами Юнга с числом строк $m = r$, являются приводимыми и разлагаются в прямую сумму самодуального и антисамодуального неприводимых

представлений (сравните со второй частью Утверждения 5.1.2, которая касается групп $SO(2r, \mathbb{C})$ и $SO(2r - q, \mathbb{C})$).

5.4 Спинорные представления алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$

Как и прежде \mathfrak{Y}_r обозначает r -мерные корневые пространства алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r + 1, \mathbb{C})$ ранга r . В разделе 3.4.2 (пункты 3 и 4) было показано, что для алгебр $so(2r, \mathbb{C})$ существуют два специальных неприводимых представления с фундаментальными весами

$$\lambda_{(r-1)} = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in \mathfrak{Y}_r, \quad \lambda_{(r)} = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathfrak{Y}_r, \quad (5.4.1)$$

а для алгебр $so(2r + 1, \mathbb{C})$ — одно неприводимое представление с фундаментальным весом

$$\lambda_{(r)} = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathfrak{Y}_r. \quad (5.4.2)$$

Эти представления невозможно вложить в прямое произведение $T^{\otimes n}$ определяющих представлений T алгебр $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r + 1, \mathbb{C})$. Соответственно, эти представления не могут быть представлениями групп $SO(N, \mathbb{C})$ и их вещественных подгрупп^{5.7} $SO(p, q)$. Эти представления были названы *спинорными*. В данном разделе для алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$ и $so(2r + 1, \mathbb{C})$ мы явно построим фундаментальные неприводимые спинорные представления со старшими весами (5.4.1) и (5.4.2). Для этого нам понадобится реализация алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$ в терминах комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$. Алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ и их представления мы обсуждали в Разделе 1.3.

5.4.1 Спинорные представления алгебр Ли $so(2r, \mathbb{C})$

Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ с четным числом $N = 2r$ образующих:

$$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2r}) = \sqrt{2}(z_1, \dots, z_r, \bar{z}_r, \dots, \bar{z}_1), \quad (5.4.3)$$

где свободные фермионы $\{z_k, \bar{z}_i\}$ удовлетворяют соотношениям (1.3.19)

$$[z_i, z_k]_+ = 0, \quad [\bar{z}_i, \bar{z}_k]_+ = 0, \quad [z_i, \bar{z}_k]_+ = \delta_{ik} I \quad (\forall i, k = 1, \dots, r). \quad (5.4.4)$$

Согласно (5.4.3) и (5.4.4) определяющие соотношения для образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{2r}$ записываются в виде (1.3.20):

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\eta_{mn} I, \quad \eta_{nm} = \delta_{n, N-m+1}, \quad (5.4.5)$$

где $m, n = 1, \dots, 2r$ и $\|\eta_{mn}\|$ — антидиагональная матрица.

Стандартный набор базисных элементов алгебры $\mathcal{C}\ell_{2r}$ указан в (1.3.5). Выберем в этом наборе базисные элементы 2-го порядка (сравните с (1.3.34))

$$L_{mn} \equiv \frac{1}{4}(\Gamma_m \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_m) = \frac{1}{2}\Gamma_{[mn]} \in \mathcal{C}\ell_{2r}. \quad (5.4.6)$$

^{5.7}Эти представления являются представлениями групп $\text{Spin}(N, \mathbb{C})$ и $\text{Spin}(p, q)$, которые накрывают группы $SO(N, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$, см. также Главу 6. В физической литературе эти представления иногда называются двузначными представлениями ортогональных групп.

Элементы L_{mn} удовлетворяют коммутационным соотношениям для образующих алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ (сравните с (5.1.12))

$$[L_{nm}, L_{k\ell}] = \eta_{mk}L_{n\ell} + \eta_{n\ell}L_{mk} - \eta_{nk}L_{m\ell} - \eta_{m\ell}L_{nk}, \quad (5.4.7)$$

с антидиагональной метрикой $\eta = \eta^{-1}$, которая определена в (5.4.5). Соотношения (5.4.7) легко выводятся, если воспользоваться тождествами

$$L_{n\ell} = \frac{1}{2}\Gamma_n\Gamma_\ell \quad (n \neq \ell), \quad [L_{nm}, \Gamma_k] = \eta_{mk}\Gamma_n - \eta_{nk}\Gamma_m, \quad (5.4.8)$$

которые в свою очередь проверяются с помощью (5.4.5). Напомним (см. пункт 2 раздела 3.1.1), что выбор антидиагональной метрики η в (5.4.7) удобен при построении корневых систем алгебр Ли so -типа.

В алгебре Ли $so(2r, \mathbb{C})$ с элементами (5.4.6), реализованными в терминах образующих алгебры Клиффорда, зафиксируем базис Картана–Вейля следующим образом. Пусть подалгебра Картана образована элементами ($k = 1, \dots, r$):

$$H_k = \frac{1}{4}(\Gamma_k\Gamma_{k'} - \Gamma_{k'}\Gamma_k) = \frac{1}{2}I - \bar{z}_k z_k, \quad [H_m, H_k] = 0. \quad (5.4.9)$$

где $k' = 2r - k + 1$. Тогда положительные корни соответствуют корневым образующим ($i < j$)

$$E_{ij} = \frac{1}{4}(\Gamma_i\Gamma_j - \Gamma_j\Gamma_i) = z_i z_j, \quad E_{ij'} = \frac{1}{4}(\Gamma_i\Gamma_{j'} - \Gamma_{j'}\Gamma_i) = -\bar{z}_j z_i, \quad (5.4.10)$$

а отрицательные корни — корневым образующим ($i < j$)

$$E_{i'j} = \frac{1}{4}(\Gamma_{i'}\Gamma_j - \Gamma_j\Gamma_{i'}) = \bar{z}_i z_j, \quad E_{i'j'} = \frac{1}{4}(\Gamma_{i'}\Gamma_{j'} - \Gamma_{j'}\Gamma_{i'}) = -\bar{z}_j \bar{z}_i. \quad (5.4.11)$$

То, что элементы (5.4.10) и (5.4.11) действительно являются корневыми образующими алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ следует из соотношений ($i < j$)

$$\begin{aligned} [H_k, E_{ij}] &= (\delta_{kj} + \delta_{ki}) E_{ij}, & [H_k, E_{ij'}] &= (\delta_{ki} - \delta_{kj}) E_{ij'}, \\ [H_k, E_{i'j}] &= (\delta_{kj} - \delta_{ki}) E_{i'j}, & [H_k, E_{i'j'}] &= -(\delta_{kj} + \delta_{ki}) E_{i'j'}, \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

которые идентичны структурным соотношениям (3.1.22) и (3.1.23).

В Разделе 1.3.2 было построено неприводимое 2^r -мерное представление ρ алгебры свободных фермионов (5.4.4), которое в силу равенств (5.4.3) задает представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r}$ с определяющими соотношениями (5.4.5). Напомним, что представление ρ действует (см. (1.3.25)) в фермионном пространстве Фока \mathcal{F} с базисом, состоящим из векторов (1.3.22):

$$|j_1, \dots, j_k\rangle = \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_k} |0\rangle \quad (1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r). \quad (5.4.13)$$

где вакуумный вектор $|0\rangle$ задается соотношениями (1.3.21):

$$z_k |0\rangle = 0 \quad (\forall k = 1, \dots, r). \quad (5.4.14)$$

Алгебра Ли $so(2r, \mathbb{C})$ с образующими (5.4.6) вложена в алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r}$, поэтому представление ρ алгебры свободных фермионов и алгебры $\mathcal{C}\ell_{2r}$ одновременно

является представлением и алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$. Явная реализация базиса Картана–Вейля алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ в терминах свободных фермионов дается формулами (5.4.9)–(5.4.11). Покажем, что это представление алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ приводимо и оно разбивается в прямую сумму двух неприводимых представлений алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ со старшими весами (5.4.1).

Прежде всего заметим, что в силу (5.4.14) вакуумный вектор $|0\rangle \in \mathcal{F}$ удовлетворяет соотношениям

$$E_{ij}|0\rangle = 0 = E_{ij'}|0\rangle \quad (i < j), \quad H_k|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle \quad (\forall k = 1, \dots, r), \quad (5.4.15)$$

где E_{ij} и $E_{ij'}$ — образующие (5.4.10), соответствующие положительным корням алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, а H_k — образующие подалгебры Картана. Из соотношений (5.4.15) следует, что вакуум $|0\rangle \in \mathcal{F}$ является старшим вектором неприводимого представления алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ со старшим весом $\lambda_{(r)} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, указанным в (5.4.1); напомним, что компоненты весового вектора $\lambda_{(r)}$ определяются собственными значениями операторов H_k .

Действуя на старший вектор $|\lambda_{(r)}\rangle \equiv |0\rangle$ образующими (5.4.11), которые соответствуют отрицательным корням, мы порождаем все инвариантное подпространство $\mathcal{V}_{(r)} \subset \mathcal{F}$ неприводимого представления со старшим весом $\lambda_{(r)}$. Из явного вида образующих (5.4.11) следует, что пространство $\mathcal{V}_{(r)}$ состоит из всех линейных комбинаций базисных векторов (5.4.13), имеющих четную степень по операторам рождения \bar{z}_k :

$$|j_1, \dots, j_{2k}\rangle = \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_{2k}}|0\rangle \quad (1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq r). \quad (5.4.16)$$

Далее, рассмотрим вектор

$$|\lambda_{(r-1)}\rangle \equiv \bar{z}_r|0\rangle \in \mathcal{F}, \quad (5.4.17)$$

который не принадлежит пространству $\mathcal{V}_{(r)}$ и удовлетворяет соотношениям

$$E_{ij}|\lambda_{(r-1)}\rangle = 0 = E_{ij'}|\lambda_{(r-1)}\rangle \quad (i < j), \\ H_k|\lambda_{(r-1)}\rangle = \frac{1}{2}|\lambda_{(r-1)}\rangle \quad (\forall k = 1, \dots, r-1), \quad H_r|\lambda_{(r-1)}\rangle = -\frac{1}{2}|\lambda_{(r-1)}\rangle.$$

Из этих соотношений следует, что вектор $|\lambda_{(r-1)}\rangle$ — старший вектор со старшим весом (см. (5.4.1)) $\lambda_{(r-1)} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Действуя на старший вектор $|\lambda_{(r-1)}\rangle$ образующими (5.4.11), которые соответствуют отрицательным корням, мы порождаем инвариантное подпространство $\mathcal{V}_{(r-1)} \subset \mathcal{F}$ неприводимого представления со старшим весом $\lambda_{(r-1)}$, которое состоит из всех линейных комбинаций базисных векторов из набора (5.4.13), имеющих нечетную степень по операторам рождения \bar{z}_j :

$$|j_1, \dots, j_{2k-1}\rangle = \bar{z}_{j_1} \cdots \bar{z}_{j_{2k-1}}|0\rangle \quad (1 \leq j_1 < \dots < j_{2k-1} \leq r). \quad (5.4.18)$$

Итак, все пространство Фока \mathcal{F} , имеющее размерность 2^r (см. формулу (1.3.24)), разлагается в прямую сумму двух подпространств $\mathcal{V}_{(r-1)}$ и $\mathcal{V}_{(r)}$ (нечетного и четного по степеням операторов рождения \bar{z}_k), на которых реализуются неприводимые (2^{r-1}) -мерные спинорные представления алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ со старшими весами $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$, указанными в (5.4.1).

- *Задача 163.* Доказать, что размерности подпространств $\mathcal{V}_{(r-1)}$ и $\mathcal{V}_{(r)}$ совпадают и равны $\dim(\mathcal{V}_{(r-1)}) = \dim(\mathcal{V}_{(r)}) = 2^{r-1}$.

В заключение этого подраздела покажем, как спинорные представления с весами (5.4.1) строятся для алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ в случае стандартной диагональной метрики $\eta_{ik} = \delta_{ik}$. Для этого сделаем линейную замену (1.3.18)

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k-1} &= z_k + \bar{z}_k = \Gamma_k + \Gamma_{k'} , & \Gamma_{2k} &= i(\bar{z}_k - z_k) = i(\Gamma_{k'} - \Gamma_k) , \\ z_k &= \frac{1}{2}(\Gamma_{2k-1} + i\Gamma_{2k}) , & \bar{z}_k &= \frac{1}{2}(\Gamma_{2k-1} - i\Gamma_{2k}) . \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

которая переводит образующие Γ_k , удовлетворяющие соотношениям (5.4.5), в образующие Γ_k , удовлетворяющие стандартным соотношениям (1.3.1) с диагональной метрикой

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\delta_{mn} I . \quad (5.4.20)$$

Далее, построим элементы (сравните с (1.3.34) и (5.4.6))

$$M_{(k,j)} = \frac{1}{4}(\Gamma_k \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_k) = \frac{1}{2}(\Gamma_k \Gamma_j - \delta_{kj}) \in \mathcal{C}\ell_{2r} , \quad (5.4.21)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (5.1.12)

$$[M_{(n,m)}, M_{(k,\ell)}] = \eta_{mk} M_{(n,\ell)} + \eta_{nl} M_{(m,k)} - \eta_{nk} M_{(m,\ell)} - \eta_{ml} M_{(n,k)} , \quad (5.4.22)$$

для образующих алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ с евклидовой метрикой $\eta = I_{2r}$. В терминах образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{2r}$ элементы (5.4.9) – (5.4.11) базиса Картана–Вейля алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$ записываются в виде ($i < j$)

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{2}I - \bar{z}_k z_k = -i M_{(2k-1,2k)} \quad (k = 1, \dots, r) , \\ E_{ij} &= z_i z_j = \frac{1}{4}(\Gamma_{2i-1} + i\Gamma_{2i})(\Gamma_{2j-1} + i\Gamma_{2j}) = \frac{1}{2}M_{(2i-1,2i;2j-1,2j)}^{(+1,+1)} , \\ E_{ij'} &= -\bar{z}_j z_i = \frac{1}{4}(\Gamma_{2i-1} + i\Gamma_{2i})(\Gamma_{2j-1} - i\Gamma_{2j}) = \frac{1}{2}M_{(2i-1,2i;2j-1,2j)}^{(+1,-1)} , \\ E_{i'j} &= \bar{z}_i z_j = \frac{1}{4}(\Gamma_{2i-1} - i\Gamma_{2i})(\Gamma_{2j-1} + i\Gamma_{2j}) = \frac{1}{2}M_{(2i-1,2i;2j-1,2j)}^{(-1,+1)} , \\ E_{i'j'} &= -\bar{z}_j \bar{z}_i = \frac{1}{4}(\Gamma_{2i-1} - i\Gamma_{2i})(\Gamma_{2j-1} - i\Gamma_{2j}) = \frac{1}{2}M_{(2i-1,2i;2j-1,2j)}^{(-1,-1)} , \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

где мы применили второе равенство из (5.4.21) и использовали обозначения для корневых образующих

$$M_{(2i-1,2i;2j-1,2j)}^{(\epsilon,\eta)} \equiv (M_{(2i-1,2j-1)} + i\epsilon M_{(2i,2j-1)}) + i\eta(M_{(2i-1,2j)} + i\epsilon M_{(2i,2j)}) .$$

Данные корневые образующие были введены нами в первой части книги (см. Раздел **I-5.2.3**) для построения корневых систем алгебр Ли $so(N, \mathbb{C})$ в случае стандартной диагональной метрики $\eta = I_{2r}$. Таким образом, построение неприводимых спинорных представлений со старшими весами (5.4.1) в случае диагональной метрики полностью эквивалентно построению таких спинорных представлений в случае антидиагональной метрики.

Замечание. Напомним (см. раздел **1.3.1**), что в алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r}$ с определяющими соотношениями (5.4.20) имеется самый длинный элемент

$$\Gamma_{2r+1} = (-i)^\nu \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2r} \in \mathcal{C}\ell_{2r} , \quad (5.4.24)$$

который антикоммутирует со всеми образующими Γ_k (или Γ_k) алгебры $\mathcal{C}\ell_{2r}$, а его квадрат равен единице:

$$[\Gamma_{2r+1}, \Gamma_k]_+ = 0 = [\Gamma_{2r+1}, \Gamma_k]_+ , \quad (\Gamma_{2r+1})^2 = I . \quad (5.4.25)$$

Из первого условия следует, что элемент (5.4.24) коммутирует со всеми образующими (5.4.6), или (5.4.21), алгебры Ли $so(2r, \mathbb{C})$

$$[\Gamma_{2r+1}, L_{mn}] = 0 = [\Gamma_{2r+1}, M_{(m,n)}] .$$

Поэтому согласно Лемме Шура в неприводимых комплексных представлениях алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, основанных на реализациях (5.4.6) и (5.4.21), элемент Γ_{2r+1} должен быть пропорционален единичному оператору, а согласно последнему равенству в (5.4.25) коэффициент пропорциональности должен равняться одному из двух возможных собственных значений элемента (5.4.24): $+1$ или -1 . В представлении Фока свободных фермионов элемент (5.4.24) записывается в виде

$$\Gamma_{2r+1} = (z_1 \bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_1) \cdot (z_2 \bar{z}_2 - \bar{z}_2 z_2) \cdots (z_r \bar{z}_r - \bar{z}_r z_r) = 2^r H_1 \cdot H_2 \cdots H_r . \quad (5.4.26)$$

Его значения на неприводимых представлениях, действующих в нечетном $\mathcal{V}_{(r-1)}$ и четном $\mathcal{V}_{(r)}$ подпространствах в \mathcal{F} равны

$$\Gamma_{2r+1} \cdot \mathcal{V}_{(r-1)} = -I \cdot \mathcal{V}_{(r-1)} , \quad \Gamma_{2r+1} \cdot \mathcal{V}_{(r)} = +I \cdot \mathcal{V}_{(r)} ,$$

то есть подпространства $\mathcal{V}_{(r-1)}$ и $\mathcal{V}_{(r)}$ являются образами проекторов

$$P_- = \frac{1}{2}(I - \Gamma_{2r+1}) , \quad P_+ = \frac{1}{2}(I + \Gamma_{2r+1}) . \quad (5.4.27)$$

Отметим, что элемент Γ_{2r+1} определяется в (5.4.24) с точностью до знака, поэтому знаки в формуле (5.4.27) могут меняться в зависимости от определения элемента Γ_{2r+1} .

Определение 5.4.1 Вектора в 2^r -мерном комплексном пространстве Фока \mathcal{F} с базисом (5.4.13), на котором действует комплексная алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r}$ с образующими (5.4.19) и алгебра $so(2r, \mathbb{C})$ с образующими (5.4.23), называются **дираковскими спинорами** в $2r$ -мерном пространстве. Вектора в 2^{r-1} -мерных комплексных подпространствах $\mathcal{V}_{(r-1)}, \mathcal{V}_{(r)} \subset \mathcal{F}$, инвариантных относительно действия алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ с образующими (5.4.23) и являющихся образами проекторов (5.4.27), называются **вейлевскими спинорами** в $2r$ -мерном пространстве.

5.4.2 Спинорные представления алгебр Ли $so(2r + 1, \mathbb{C})$

Для того, чтобы построить спинорные представления алгебр $so(2r + 1, \mathbb{C})$ со старшим фундаментальным весом (5.4.2) нам необходимо использовать неприводимое представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ с нечетным числом $N = 2r + 1$ образующих, удовлетворяющих определяющим соотношениям (5.4.20). В Разделе 1.3.1 мы показали, что такие представления алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ можно получить из неприводимого представления ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r}$, воспользовавшись вложением $\mathcal{C}\ell_{2r+1} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{2r}$, при котором первые $2r$ образующих алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ отображаются в $2r$ образующих Γ_k ($k = 1, \dots, 2r$) ее подалгебры $\mathcal{C}\ell_{2r}$, а последняя образующая $\Gamma_{2r+1} \in \mathcal{C}\ell_{2r+1}$ строится в терминах $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{2r}$ как самый длинный элемент

$$\Gamma_{2r+1} = \pm(-i)^\nu \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2r} \in \mathcal{C}\ell_{2r} . \quad (5.4.28)$$

Выбор знака $+$, или $-$, в (5.4.28) приводит к двум неэквивалентным неприводимым представлениям алгебры $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$, которые характеризуются двумя возможными собственными значениями ± 1 центрального элемента

$$\Gamma \equiv (-i)^\nu \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2r} \cdot \Gamma_{2r+1} \in \mathcal{C}\ell_{2r+1}. \quad (5.4.29)$$

Воспользуемся реализацией (5.4.19) образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{2r}$ в терминах свободных фермионов, в результате при вложении $\mathcal{C}\ell_{2r+1} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{2r}$ для последней образующей (5.4.28) алгебры $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ мы получаем два представления ρ^\pm :

$$\rho^+ : \Gamma_{2r+1} = +\Gamma_{2r+1}, \quad \rho^- : \Gamma_{2r+1} = -\Gamma_{2r+1}, \quad (5.4.30)$$

$$(\Gamma_{2r+1})^2 = I, \quad [\Gamma_{2r+1}, z_k]_+ = 0 = [\Gamma_{2r+1}, \bar{z}_k]_+ \quad (k = 1, \dots, r),$$

где элемент $\Gamma_{2r+1} \in \mathcal{C}\ell_{2r}$ определен в (5.4.24), (5.4.26).

Рассмотрим случай представления ρ^+ . Так же как и в предыдущем разделе зададим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ с антидиагональной метрикой, для чего выберем образующие $\Gamma'_k \in \mathcal{C}\ell_{2r+1}$ в виде (сравните с (5.4.3))

$$\begin{aligned} (\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_r, \Gamma'_{r+1}, \Gamma'_{r+2}, \dots, \Gamma'_{2r+1}) &= \sqrt{2}(z_1, \dots, z_r, \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_{2r+1}, \bar{z}_r, \dots, \bar{z}_1) = \\ &= (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r, \Gamma_{2r+1}, \Gamma_{r+1}, \dots, \Gamma_{2r}). \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

Далее, для построения всего базиса алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ добавим к базисным элементам (5.4.6), (5.4.9), (5.4.10), (5.4.11) алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ набор дополнительных корневых образующих

$$\begin{aligned} L_{i,2r+1} &= \frac{1}{4}(\Gamma_i \Gamma_{2r+1} - \Gamma_{2r+1} \Gamma_i) = \frac{1}{2}z_i \Gamma_{2r+1}, \\ L_{i',2r+1} &= \frac{1}{4}(\Gamma_{i'} \Gamma_{2r+1} - \Gamma_{2r+1} \Gamma_{i'}) = \frac{1}{2}\bar{z}_i \Gamma_{2r+1}, \\ i &= 1, \dots, r, \quad i' = 2r - i + 1, \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

где $L_{i,2r+1}$ соответствуют положительным, а $L_{i',2r+1}$ — отрицательным корням (сравните с (3.1.24))

$$[H_k, L_{i,2r+1}] = \delta_{ki} L_{i,2r+1}, \quad [H_k, L_{i',2r+1}] = -\delta_{ki} L_{i',2r+1}.$$

Отметим, что выбор в (5.4.30) другого неэквивалентного представления ρ^- алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$, приводит лишь к изменению знака у дополнительных образующих (5.4.32). Знаки дополнительных образующих в (5.4.32) можно изменить преобразованием эквивалентности

$$\Gamma_{2r+1} L_{i,2r+1} \Gamma_{2r+1} = -L_{i,2r+1}, \quad \Gamma_{2r+1} L_{i',2r+1} \Gamma_{2r+1} = -L_{i',2r+1},$$

поэтому неэквивалентные представления ρ^+ и ρ^- алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ определяют эквивалентные представления алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$.

- *Задача 164. Показать, что образующие (5.4.32) вместе с образующими (5.4.6), (5.4.9), (5.4.10), (5.4.11) удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$.*

Наличие в алгебре $so(2r+1, \mathbb{C})$ дополнительных корневых образующих (5.4.32) приводит к тому, что два неприводимых представления подалгебры $so(2r, \mathbb{C}) \subset so(2r+1, \mathbb{C})$, действующие в двух инвариантных подпространствах $\mathcal{V}_{(r-1)} \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{V}_{(r)} \subset \mathcal{F}$, объединяются в одно неприводимое представление алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ со старшим весом (5.4.2), действующее во всем пространстве Фока \mathcal{F} . Действительно, вектора из пространства $\mathcal{V}_{(r-1)}$ переводятся в вектора из пространства $\mathcal{V}_{(r)}$ (и наоборот) с помощью дополнительных образующих (5.4.32). Например, вакуумный вектор $|0\rangle$ можно получить из вектора (5.4.17) действием образующей $L_{r,2r+1}$, соответствующей положительному корню:

$$L_{r,2r+1} \bar{z}_r |0\rangle = -\frac{1}{2} |0\rangle. \quad (5.4.33)$$

Поэтому, старший вектор (5.4.17) для подалгебры $so(2r, \mathbb{C}) \subset so(2r+1, \mathbb{C})$ уже не является старшим вектором для всей алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$. В пространстве Фока \mathcal{F} остается единственный старший вектор $|0\rangle$, который уничтожается всеми корневыми образующими алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$, соответствующими положительным корням, и имеет вес $\lambda_{(r)} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. Действительно, именно для вакуума $|0\rangle$ кроме соотношений (5.4.15) выполняются равенства

$$L_{k,2r+1} |0\rangle = 0, \quad k = 1, \dots, r,$$

где $L_{k,2r+1}$ — дополнительные корневые образующие, соответствующие положительным корням. Поэтому для алгебры Ли $so(2r+1, \mathbb{C})$ имеется единственное неприводимое спинорное представление со старшим фундаментальным весом (5.4.2), порождаемое из старшего вектора $|0\rangle$ и действующее во всем пространстве \mathcal{F} . Размерность этого представления равна $\dim(\mathcal{F}) = 2^r$.

В заключение отметим, что в случае выбора образующих $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{2r+1}$, удовлетворяющих структурным соотношениям (5.4.20) с диагональной метрикой $\eta_{kn} = \delta_{kn}$, добавочные к (5.4.21) базисные элементы имеют вид

$$M_{(k,2r+1)} = \frac{1}{2} \Gamma_k \Gamma_{2r+1} \in so(2r+1, \mathbb{C}) \quad (k = 1, \dots, 2r), \quad (5.4.34)$$

где образующие Γ_k связаны со свободными фермионами соотношениями (5.4.19). В терминах элементов (5.4.34) корневые образующие (5.4.32) выражаются следующим образом ($i = 1, \dots, r$)

$$M_{(i)}^{(+)} = M_{(2i-1,2r+1)} + iM_{(2i,2r+1)} = z_i \Gamma_{2r+1}, \quad M_{(i)}^{(-)} = M_{(2i-1,2r+1)} - iM_{(2i,2r+1)} = \bar{z}_i \Gamma_{2r+1}.$$

Корневые образующие $M_{(i)}^{(+)}$ и $M_{(i)}^{(-)}$ использовались нами для построения корневых систем алгебр Ли $so(2r+1, \mathbb{C})$ для случая диагональной метрики η , в первой части книги (см. Раздел **I-5.2.3**).

Глава 6

Группы $\text{Spin}(p, q)$ и их представления

В приложениях оказываются важными и широко используются комплексные и вещественные представления (включая спинорные) вещественных алгебр Ли $so(p, q)$. Все эти представления одновременно являются представлениями групп $\text{Spin}(p, q)$, которые локально изоморфны группам $SO(p, q)$ и накрывают связную компоненту $SO^\uparrow(p, q)$ групп $SO(p, q)$.

В данной Главе мы определим группы $\text{Spin}(p, q)$ и изучим их представления. Для того, чтобы это сделать, нам необходимо ввести в рассмотрение вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$, ассоциированные с пространствами $\mathbb{R}^{p,q}$, и построить их представления.

6.1 Алгебры Клиффорда и их представления

В разделе **1.3** мы ввели комплексную алгебру Клиффорда \mathcal{Cl}_N с N образующими (см. Определение **1.3.1**). Для четного числа $N = 2\nu$ мы показали, что алгебра $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ изоморфна алгебре свободных фермионов \mathcal{A}_ν (алгебре фермионных осцилляторов) и построили 2^ν -мерное неприводимое комплексное представление ρ алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, действующее в пространстве Фока \mathcal{F} фермионных осцилляторов. Далее мы показали, что ρ является минимальным (имеет минимальную размерность 2^ν) точным представлением алгебры \mathcal{Cl}_N , и все другие 2^ν -мерные неприводимые комплексные представления алгебры \mathcal{Cl}_N эквивалентны ρ . В данном разделе, для случая произвольного N (не обязательно четного), мы будем изучать вещественные формы $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ ($p+q = N$) комплексной алгебры Клиффорда \mathcal{Cl}_N и их неприводимые представления, как комплексные так и вещественные.

6.1.1 Вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$

Прежде всего, для полноты изложения мы дадим общее определение алгебр Клиффорда. Пусть \mathcal{V} — векторное пространство над полем \mathbb{K}' , снабженное билинейным скалярным произведением (\cdot, \cdot) . Сопоставим каждому вектору $v \in \mathcal{V}$ образующие \hat{v} некоторой ассоциативной алгебры (над полем \mathbb{K} , которое включает в себя поле \mathbb{K}') с

единицей I и определяющими соотношениями^{6.1}

$$\hat{v} \cdot \hat{u} + \hat{u} \cdot \hat{v} = 2(v, u) I. \quad (6.1.1)$$

Алгебра $\mathcal{Cl}(\mathcal{V}, (\cdot, \cdot))$ с указанными выше свойствами, называется алгеброй Клиффорда, ассоциированной с векторным пространством \mathcal{V} .

Рассмотрим в качестве \mathcal{V} псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q = N$) с метрикой (5.1.1): $\eta = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$ и базисными векторами \vec{e}_m ($m = 1, \dots, N$) в $\mathbb{R}^{p,q}$ такими, что $(\vec{e}_m, \vec{e}_k) = \eta_{mk}$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{p,q}$. Сопоставим базисным векторам $\vec{e}_m \in \mathbb{R}^{p,q}$ образующие Γ_m ассоциативной алгебры с единицей I и определяющими соотношениями (6.1.1):

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\eta_{mn} I. \quad (6.1.2)$$

Определение 6.1.1 Ассоциативная алгебра $\mathcal{Cl}_{(p,q)}^{\mathbb{R}}$ над полем \mathbb{R} с единичным элементом I и образующими Γ_m ($m = 1, 2, \dots, N$), которые удовлетворяют определяющим соотношениями (6.1.2), называется **алгеброй Клиффорда, ассоциированной с пространством $\mathbb{R}^{p,q}$** .

В дальнейшем нам понадобится комплексификация алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}^{\mathbb{R}}$, которую мы обозначим как $\mathcal{Cl}_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$.

Пример. Определим 4×4 матрицы γ_m , имеющие блочную структуру

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_m \\ \tilde{\sigma}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad m = 0, 1, 2, 3. \quad (6.1.3)$$

Здесь, следуя традиции мы начинаем нумерацию m с нуля, $\mathbf{0}$ — нулевой (2×2) блок, двумерные блоки σ_m и $\tilde{\sigma}_m$ выступают в качестве компонент 4-векторов

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \tilde{\sigma} = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3), \quad \sigma_0 \equiv I_2, \quad (6.1.4)$$

а матрицы Паули $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ заданы в (2.1.16) и подчиняются тождествам:

$$\sigma_i \sigma_k = i \varepsilon_{ikj} \sigma_j + \delta_{ik} I_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik} I_2 \quad (i, k, j = 1, 2, 3). \quad (6.1.5)$$

В силу этих тождеств матрицы (6.1.3) удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2\eta_{mn} I_4, \quad \|\eta_{mn}\| = \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (6.1.6)$$

то есть реализуют четырехмерное представление алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(1,3)}^{\mathbb{K}}$. Матрицы (6.1.3) называются **матрицами Дирака** в киральном представлении. В общем случае матрицами Дирака называется любой набор четырех 4×4 матриц, удовлетворяющих соотношениям (6.1.6). Как мы укажем ниже (см. Замечание 2 в Разделе 6.1.2), все такие наборы $\{\gamma_n\}$, $\{\tilde{\gamma}_n\}$ эквивалентны друг другу, $\tilde{\gamma}_n = U \gamma_n U^{-1}$, причем в данном случае матрицу U можно выбрать унитарной.

Замечание 1. Алгебры Клиффорда, которые получаются из $\mathcal{Cl}_{(p,q)}^{\mathbb{K}}$ в результате перестановок $\sigma \in S_{2\nu}$ образующих

$$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}) \rightarrow (\Gamma_{\sigma(1)}, \dots, \Gamma_{\sigma(2\nu)}), \quad (6.1.7)$$

^{6.1}Сопоставление $v \rightarrow \hat{v}$ должно быть согласовано со всеми операциями в \mathcal{V} . Например, вектор $(\alpha v + \beta u)$ должен отображаться в элемент $(\alpha \hat{v} + \beta \hat{u})$ для всех $v, u \in \mathcal{V}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}'$.

(при таком отображении диагональные элементы метрики η переставляются соответствующим образом) изоморфны изначальной алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{K}}$ и в дальнейшем мы не будем различать такие алгебры.

Замечание 2. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ мы будем называть алгебру Клиффорда **вещественной** и использовать краткое обозначение $\mathcal{C}\ell_{(p,q)} = \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{R}}$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ то мы имеем дело с **комплексной** алгеброй Клиффорда, и, делая комплексную замену

$$\Gamma_m \rightarrow \Gamma_m \quad (m = 1, \dots, p), \quad \Gamma_m \rightarrow i\Gamma_m \quad (m = p + 1, \dots, p + q), \quad (6.1.8)$$

мы сводим определяющие соотношения (6.1.2) для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ к определяющим соотношениям алгебры $\mathcal{C}\ell_{(N,0)}^{\mathbb{C}}$ с евклидовой метрикой $\eta_{mn} = \delta_{mn}$:

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\delta_{mn} I. \quad (6.1.9)$$

Поэтому, все комплексные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ (при фиксированном $p+q = N$) изоморфны алгебре $\mathcal{C}\ell_{(N,0)}^{\mathbb{C}}$, и следовательно изоморфны друг другу. Для комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(N,0)}^{\mathbb{C}}$ мы будем использовать краткое обозначение $\mathcal{C}\ell_N$, которое ввели ранее в Разделе 1.3.1.

Так как замена (6.1.8), меняющая сигнатуру метрики в соотношениях (6.1.2), является комплексным преобразованием, то может возникнуть предположение, что все вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ для разных p и q ($p+q = N$ — фиксировано) не изоморфны друг другу. Однако, это не так.

Утверждение 6.1.1 Для вещественных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ имеют место изоморфизмы

$$\mathcal{C}\ell_{(p,q)} = \mathcal{C}\ell_{(q+1,p-1)} \quad (p \geq 1), \quad (6.1.10)$$

$$\mathcal{C}\ell_{(p,q)} = \mathcal{C}\ell_{(p-4,q+4)} \quad (p \geq 4). \quad (6.1.11)$$

Доказательство. Пусть Γ_i — образующие алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, которые удовлетворяют соотношениям (6.1.2) с метрикой $\eta = I_{p,q}$. Сделаем замену образующих $\Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i$:

$$\Gamma'_i = \begin{cases} \Gamma_1, & i = 1; \\ \Gamma_{N-i+2} \Gamma_1, & i = 2, \dots, N. \end{cases} \quad (6.1.12)$$

Нетрудно проверить, что для $p \geq 1$ элементы Γ'_i удовлетворяют соотношениям (6.1.2) с метрикой $\eta = I_{q+1,p-1}$ и следовательно образуют алгебру $\mathcal{C}\ell_{(q+1,p-1)}$. Так как замена (6.1.12) обратима, то она устанавливает изоморфизм (6.1.10) между вещественными алгебрами $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и $\mathcal{C}\ell_{(q+1,p-1)}$.

Пусть теперь $p \geq 4$ и рассмотрим другую замену образующих $\Gamma_i \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$:

$$\Gamma'_i = \begin{cases} \Gamma_i \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4, & i = 1, 2, 3, 4; \\ \Gamma_i, & i = 5, \dots, N. \end{cases} \quad (6.1.13)$$

Элементы Γ'_i , заданные в (6.1.13), после перестановки индексов $(1, \dots, p+q) \rightarrow (5, \dots, p+q, 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяют соотношениям (6.1.2) с метрикой $\eta = I_{p-4,q+4}$ и следовательно образуют алгебру $\mathcal{C}\ell_{(p-4,q+4)}$. Таким образом, обратимые преобразования (6.1.13) устанавливают изоморфизм (6.1.11). ■

Отметим, что иногда вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ удобно нумеровать не параметрами $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а двумя другими параметрами: размерностью $N = p + q$ пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ и параметром сигнатуры $s = (p - q)$. Тогда второй изоморфизм (6.1.11) связывает вещественные алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, у которых параметр сигнатуры $s = (p - q)$ совпадает по модулю числа 8. Данная периодичность важна при изучении вещественных алгебр $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (в частности она проявляется при изучении их вещественных представлений; см. ниже Разделы 6.3.1 и 6.4.2), а также важна при изучении гомотопических групп ортогональных и симплектических групп Ли; в математической литературе она называется *периодичностью Картана–Ботта*.

Утверждение 6.1.2 *Вещественная алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ для конечного числа $N = (p + q)$ конечномерна и ее размерность равна*

$$\dim(\mathcal{C}\ell_{(p,q)}) = 2^N. \quad (6.1.14)$$

Доказательство буквально повторяет доказательство аналогичного Утверждения 1.3.1 (см. Раздел 1.3.1) для комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$. Оно основано на том, что базис вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, так же как и базис комплексной алгебры $\mathcal{C}\ell_N$, образуют элементы вида

$$\begin{aligned} \Gamma_A = \{I, \Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_1 m_2}, \Gamma_{m_1 m_2 m_3}, \dots, \Gamma_{12\dots N}\}, \\ \Gamma_{m_1 m_2 \dots m_k} \equiv \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2} \dots \Gamma_{m_k}, \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

где в каждом мономе $\Gamma_{m_1 m_2 \dots m_k}$ произведение образующих Γ_{m_i} упорядочено лексикографически: $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq N = p + q$. Мы оставляем читателю выполнить это доказательство. ■

Будем говорить, что моном $\Gamma_{m_1 m_2 \dots m_k}$, у которого k – четное (нечетное), имеет четный (нечетный) порядок. Соответственно линейные комбинации мономов четного (нечетного) порядка будем называть элементами алгебры Клиффорда четного (нечетного) порядка. Очевидно, что алгебра Клиффорда \mathbb{Z}_2 -градуирована в соответствии с порядком ее элементов.

Рассмотрим последний, самый длинный, базисный элемент в (6.1.15):

$$\Gamma_{1\dots N} = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \dots \Gamma_N = \frac{(-1)^q}{N!} \varepsilon^{i_1 \dots i_N} \Gamma_{i_1} \dots \Gamma_{i_N}, \quad (6.1.16)$$

который представлен здесь и как упорядоченное произведение всех образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, и как антисимметризованное произведение этих образующих, свернутое с полностью антисимметричным тензором ε в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\dots i_k \dots i_\ell \dots} = -\varepsilon^{\dots i_\ell \dots i_k \dots}, \quad \varepsilon_{12\dots N} = +1, \\ \varepsilon^{j_1 \dots j_k}_{i_{k+1} \dots i_N} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \eta^{i_1 j_1} \dots \eta^{i_k j_k} \Rightarrow \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = (-1)^q \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}. \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

Для элемента (6.1.16), пользуясь (6.1.2), мы получаем тождество

$$(\Gamma_{1\dots N})^2 = (-1)^{N(N-1)/2} (\Gamma_N \dots \Gamma_2 \cdot \Gamma_1) (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \dots \Gamma_N) = \alpha_{(p,q)} I, \quad (6.1.18)$$

$$\alpha_{(p,q)} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2} + q} = (-1)^{\nu + q} = e^{i\pi(\nu + q)},$$

где $\nu = \left[\frac{N}{2} \right]$ — целая часть числа $\frac{N}{2}$, то есть, целое неотрицательное число ν связано с $N \geq 0$ соотношениями $N = 2\nu, 2\nu + 1$. Формула (6.1.18), обобщает соотношение (1.3.9) на случай $q \neq 0$.

- **Задача 165.** Пусть $s = p - q$. Показать, что коэффициент $\alpha_{(p,q)}$ равен $(-1)^{\frac{s}{2}}$ для четных N и равен $(-1)^{\frac{s-1}{2}}$ для нечетных N .

Для дальнейшего удобно определить нормированный элемент

$$\Gamma_{N+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+q)} \Gamma_{1\dots N} = e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+q)} \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_N, \quad (6.1.19)$$

такой, что

$$\Gamma_{N+1}^2 = I. \quad (6.1.20)$$

Элемент (6.1.19) для нечетных $(\nu + q)$ принадлежит комплексной алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$, а для четных $(\nu + q)$ — вещественной алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, и определяется из соотношения (6.1.20) с точностью до знака $\Gamma_{N+1} \rightarrow -\Gamma_{N+1}$.

Покажем теперь, что изучение вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ для нечетного числа образующих $p + q = 2\nu + 1$, можно свести к изучению алгебр $\mathcal{C}\ell_{(p-1,q)}$ или $\mathcal{C}\ell_{(p,q-1)}$ с четным числом образующих (см. аналогичное рассуждение для комплексных алгебр $\mathcal{C}\ell_N$ в Разделе 1.3.1). Действительно, пусть размерность пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ — нечетная: $N = p + q = 2\nu + 1$. В этом случае для элемента (6.1.19):

$$\Gamma_{N+1} = \Gamma_{2\nu+2} = e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+q)} \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2\nu+1}, \quad (6.1.21)$$

а также для элемента (6.1.16), пользуясь соотношениями (6.1.2), мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\dots N} \cdot \Gamma_k &= \Gamma_k \cdot \Gamma_{1\dots N} \iff \Gamma_{N+1} \cdot \Gamma_k = \Gamma_k \cdot \Gamma_{N+1}, \\ \forall k &= 1, \dots, N = 2\nu + 1. \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Таким образом, элементы (6.1.16) и (6.1.21) являются центральными для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, так как они коммутируют со всеми образующими $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, а следовательно и со всеми элементами алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Напомним, что $\Gamma_{1\dots N} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, а Γ_{N+1} принадлежит вещественной алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ только, если $(\nu + q)$ — четное число. Для общности рассмотрим алгебру $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ с произвольной расстановкой образующих (6.1.7), то есть в определяющих соотношениях (6.1.2) в метрике $\eta = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_{NN})$ диагональные элементы $\eta_{ii} = +1$ и $\eta_{ii} = -1$ (число таких элементов равно p и q , соответственно) стоят в произвольном порядке. Выделим одну из образующих в алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, скажем последнюю образующую $\Gamma_N = \Gamma_{2\nu+1}$. Так как $\Gamma_N^2 = \eta_{NN}I$, то любой элемент $a \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ представим в виде $a = a_1 + \Gamma_N \cdot a_2$, где a_1, a_2 элементы алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$ с образующими $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$, причем $p' = p - 1, q' = q$, если $\eta_{NN} = +1$, и $p' = p, q' = q - 1$, если $\eta_{NN} = -1$. Таким образом, справедливо разложение

$$\mathcal{C}\ell_{(p,q)} = \mathcal{C}\ell_{(p',q')} + \Gamma_{2\nu+1} \cdot \mathcal{C}\ell_{(p',q')}. \quad (6.1.23)$$

Заменяем здесь последнюю образующую $\Gamma_N = \Gamma_{2\nu+1} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ на центральный элемент $\Gamma_{1\dots N} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, то есть сделаем подстановку (вытекающую из (6.1.16)):

$$\Gamma_{2\nu+1} = (-1)^q \Gamma_{1\dots N} \cdot (\Gamma_{2\nu} \cdots \Gamma_1). \quad (6.1.24)$$

Тогда разложение (6.1.23) примет вид

$$\mathcal{C}\ell_{(p,q)} = \mathcal{C}\ell_{(p',q')} + \Gamma_{1\dots N} \cdot \mathcal{C}\ell_{(p',q')}, \quad (6.1.25)$$

и алгебру $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ можно рассматривать как центральное расширение ее подалгебры $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$. Правая часть (6.1.25) составлена из $p' + q' = 2\nu$ образующих $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$ и дополнительного центрального элемента $\Gamma_{1\dots N} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. В любом комплексном неприводимом представлении алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ центральный элемент $\Gamma_{1\dots N}$ пропорционален единичному элементу, поэтому образующая (6.1.24) будет пропорциональна произведению $\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu} \in \mathcal{C}\ell_{(p',q')}$.

Замечание 3. В частном случае, когда $(\nu + q)$ – четное, мы имеем $\Gamma_{1\dots N}^2 = I$ и любой элемент $a \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ представим в виде $a = a_1 \cdot P_+ + a_2 \cdot P_-$, где $P_{\pm} = (I \pm \Gamma_{1\dots N})/2$ и $a_1, a_2 \in \mathcal{C}\ell_{(p',q')}$. То есть, вместо (6.1.25) мы можем использовать разложение

$$\mathcal{C}\ell_{(p,q)} = \mathcal{C}\ell_{(p',q')} \cdot P_+ + \mathcal{C}\ell_{(p',q')} \cdot P_- = \mathcal{C}\ell_{(p',q')}^{(+)} \oplus \mathcal{C}\ell_{(p',q')}^{(-)}, \quad (6.1.26)$$

где $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}^{(-)}$ и $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}^{(+)}$ две подалгебры в $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, изоморфные $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$, причем, если $b_1 \in \mathcal{C}\ell_{(p',q')}^{(-)}$ и $b_2 \in \mathcal{C}\ell_{(p',q')}^{(+)}$, то $b_1 \cdot b_2 = 0 = b_2 \cdot b_1$. Таким образом, в случае когда $(\nu + q)$ – четное, алгебра $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ изоморфна прямой сумме двух своих подалгебр $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$.

Если $(\nu + q)$ – нечетное, то согласно (6.1.18) мы имеем $\Gamma_{1\dots N}^2 = -I$, собственные значения элемента $\Gamma_{1\dots N}$ равны $(\pm i)$ и аналоги проекторов P_{\pm} становятся комплексными $P_{\pm} = (I \pm i\Gamma_{1\dots N})/2$. Поэтому в данном случае невозможно построить разложение (6.1.26) вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в прямую сумму двух ее подалгебр $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$.

6.1.2 Матричные представления комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ и их вещественных форм $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$

Как и прежде положим $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $(p + q) = N$. В предыдущем разделе мы показали, что комплексная алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$, ассоциированная с евклидовой метрикой $\eta = I_N$ пространства \mathbb{R}^N , изоморфна любой из комплексных алгебр $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$, ассоциированных с метрикой $\eta = I_{p,q}$, для всех p и $q = N - p$. Данный изоморфизм дается преобразованием (6.1.8), который переводит образующие алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ в образующие комплексной алгебры $\mathcal{C}\ell_N$. Обратное преобразование выражает образующие $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ через образующие комплексной алгебры $\mathcal{C}\ell_N$. Полученные таким образом элементы $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ можно использовать и в качестве образующих вещественных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Отсюда следует, что комплексные неприводимые представления комплексной алгебры $\mathcal{C}\ell_N$ и комплексные неприводимые представления вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ совпадают. В предыдущем разделе мы также показали, что в неприводимых представлениях образующие алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, когда $p + q = 2\nu + 1$, можно построить из образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p',q')}$, где $p' = p, q' = q - 1$, или $p' = p - 1, q' = q$ (то есть когда $p' + q' = 2\nu$).

Из всего вышесказанного вытекает, что изучение комплексных представлений для вещественных $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и комплексных $\mathcal{C}\ell_N$ алгебр Клиффорда в общем случае $(p + q) = N = 2\nu, 2\nu + 1$ сводится к изучению комплексных представлений алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с **четным числом образующих**. Прежде чем перейти к изучению таких представлений отметим, что вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ для разных p и q (и фиксированном $p + q = N$) вообще говоря не изоморфны друг другу (об изоморфизмах алгебр $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ см. Утверждение 6.1.1 в предыдущем подразделе), поэтому их **вещественные** представления (которые будут рассматриваться

в Разделе 6.4) могут различаться для разных p и q , и в каждом конкретном случае требуется специальное рассмотрение.

Точное 2^ν -мерное неприводимое комплексное представление ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с четным числом образующих было построено в Разделе 1.3.2 (см. также Раздел 5.4.1), где мы воспользовались изоморфизмом алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ и алгебры свободных фермионов \mathcal{A}_ν . Напомним, что изоморфизм $\mathcal{C}\ell_{2\nu} = \mathcal{A}_\nu$ устанавливался с помощью формул (1.3.17), (1.3.18), (5.4.19):

$$\begin{aligned} z_\alpha &= \frac{1}{2}(\Gamma_{2\alpha-1} + i\Gamma_{2\alpha}), & \bar{z}_\alpha &= \frac{1}{2}(\Gamma_{2\alpha-1} - i\Gamma_{2\alpha}), \\ \Gamma_{2\alpha-1} &= z_\alpha + \bar{z}_\alpha, & \Gamma_{2\alpha} &= i(\bar{z}_\alpha - z_\alpha), \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

где $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{2\nu}$, а фермионные образующие $z_\alpha, \bar{z}_\beta \in \mathcal{A}_\nu$ удовлетворяют соотношениям (1.3.19), (5.4.4):

$$[z_\alpha, z_\beta]_+ = 0, \quad [\bar{z}_\alpha, \bar{z}_\beta]_+ = 0, \quad [z_\alpha, \bar{z}_\beta]_+ = \delta_{\alpha\beta} \quad (\forall \alpha, \beta = 1, \dots, \nu). \quad (6.1.28)$$

Далее, в Разделе 1.3.2 (см. также Раздел 5.4.1) было построено неприводимое представление Фока ρ для алгебры свободных фермионов (6.1.28), которое действует в соответствующем пространстве Фока \mathcal{F} . Пространство \mathcal{F} , состоит из линейных комбинаций базисных векторов ($k = 0, 1, \dots, \nu$):

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle = \bar{z}_{\alpha_1} \cdots \bar{z}_{\alpha_k} |0\rangle \quad (1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq \nu), \quad (6.1.29)$$

полученных из вакуумного вектора $|0\rangle \in \mathcal{F}$ действием операторов рождения \bar{z}_α . В свою очередь вакуумный вектор $|0\rangle$ определялся соотношениями:

$$z_\alpha |0\rangle = 0 \quad (\forall \alpha = 1, \dots, \nu), \quad (6.1.30)$$

и элементы z_α называются операторами уничтожения. Размерность пространства \mathcal{F} равна числу независимых векторов (6.1.29), то есть равна числу (1.3.24):

$$\dim(\mathcal{F}) = 2^\nu = 2^{N/2},$$

Соотношения (6.1.27) однозначно связывают образующие $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с фермионными операторами z_{α_i} и \bar{z}_{β_i} . Поэтому неприводимое представление алгебры свободных фермионов \mathcal{A}_ν определяет неприводимое представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ (и наоборот), а действие любого элемента алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с образующими (6.1.27) на пространство Фока \mathcal{F} задается действием на это пространство фермионных операторов z_{α_i} и \bar{z}_{β_i} , то есть — соотношениями (1.3.25), которые для удобства мы выпишем здесь снова:

$$\begin{aligned} z_\beta |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \delta_{\beta\alpha_i} |\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k\rangle, \\ \bar{z}_\beta |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle &= (-1)^i |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k\rangle \quad (\alpha_i < \beta < \alpha_{i+1}), \\ \bar{z}_\beta |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle &= 0 \quad (\beta = \alpha_i). \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

Итак, с учетом (6.1.27) действие (6.1.31) задает 2^ν -мерное комплексное представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$. Для того, чтобы реализовать данное представление в терминах $2^\nu \times 2^\nu$ матриц, введем любую сквозную нумерацию базисных векторов (6.1.29): $\{|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle\} \rightarrow \{v_i\}$, где $i = 1, \dots, 2^\nu$; явный пример такой сквозной

нумерации будет представлен ниже. Тогда, операторам z_β и \bar{z}_β , действующим согласно (6.1.31), будут соответствовать 2^ν -мерные матрицы $\rho(z_\beta)$ и $\rho(\bar{z}_\beta)$, задаваемые стандартным образом

$$z_\beta \cdot v_i = v_j \rho_{ji}(z_\beta), \quad \bar{z}_\beta \cdot v_i = v_j \rho_{ji}(\bar{z}_\beta). \quad (6.1.32)$$

При этом, в силу определения (1.3.30) эрмитова сопряжения в \mathcal{F} , мы имеем $\bar{z}_\beta = z_\beta^\dagger$ и матрицы $\rho(\bar{z}_\beta)$ эрмитово сопряжены матрицам $\rho(z_\beta)$, то есть $\rho_{ij}(\bar{z}_\beta) = \rho_{ji}(z_\beta)^*$. Соответственно, из формул (6.1.27) следует, что матрицы образующих $\Gamma_m \in \mathcal{Cl}_{2\nu}$, будут эрмитовыми $\rho_{ij}(\Gamma_m) = \rho_{ji}(\Gamma_m)^*$ (см. ниже явные формулы (6.1.50), (6.1.51)).

- *Задача 166.* Доказать, что матрицы $\rho(\bar{z}_\beta)$ эрмитово сопряжены матрицам $\rho(z_\beta)$.

Замечание 1. Комплексная алгебра $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, имеющая размерность $2^{2\nu}$, реализуется в точном представлении ρ комплексными матрицами $2^\nu \times 2^\nu$. Таким образом, имеет место изоморфизм:

$$\mathcal{Cl}_{2\nu} = \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}), \quad (6.1.33)$$

и согласно рассмотрению раздела 4.5.1 (см. Пример 1), алгебра $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ — проста. Мы поясним изоморфизм (6.1.33) более подробно ниже; см. Замечание 4 в конце этого подраздела.

Замечание 2. Напомним (см. Утверждение 1.3.2 в Разделе 1.3.2), что комплексное 2^ν -мерное представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, которое строится по формулам (6.1.27) и (6.1.31), является неприводимым, а все другие неприводимые комплексные представления алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ имеют размерность 2^ν и эквивалентны представлению ρ . Таким образом, все неприводимые комплексные представления алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ имеют размерность 2^ν и эквивалентны друг другу. Отметим, что утверждение об эквивалентности всех комплексных представлений алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ с помощью отождествления (6.1.8) переносится на случай всех комплексных представлений вещественной алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$, где $(p+q) = 2\nu$. Утверждение о том, что все неприводимые комплексные 2^ν -мерные представления алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ (или $\mathcal{Cl}_{2\nu}$) эквивалентны, в литературе называют *теоремой Паули*.

Приведем здесь другое, отличное от данного в Утверждении 1.3.2, доказательство эквивалентности всех неприводимых комплексных представлений алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$. Для этого воспользуемся замечательным тождеством (4.3.63) (см. также (4.5.27)), которое справедливо для всех конечных групп и всех ассоциативных (полу)простых конечномерных алгебр, а значит справедливо и для алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, которая проста. Подставим в левую часть (4.3.63) размерность алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, равную $2^{2\nu}$. Так как нам известно 2^ν -мерное неприводимое представление ρ алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, то правая часть тождества (4.3.63), представляющая собой сумму по всем неприводимым и неэквивалентным представлениям алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, насыщается единственным слагаемым $(N_\rho)^2 = (2^\nu)^2$, соответствующим представлению ρ . Отсюда следует, что существует только одно неэквивалентное неприводимое представление алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ с четным числом образующих, а все другие неприводимые представления эквивалентны представлению ρ .

Замечание 3. Пусть ρ — любое 2^ν -мерное матричное представление алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$. Тогда отображения, которые получаются в результате перестановок $\sigma \in S_{2\nu}$ матриц

образующих:

$$\rho(\Gamma_1), \dots, \rho(\Gamma_{2\nu}) \rightarrow \rho(\Gamma_{\sigma(1)}), \dots, \rho(\Gamma_{\sigma(2\nu)}), \quad (6.1.34)$$

также определяют матричные представления алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, так как сохраняют соотношения (6.1.9), причем в силу теоремы Паули все такие представления для разных $\sigma \in S_{2\nu}$ эквивалентны друг другу.

Примеры матричных представлений алгебр \mathcal{A}_ν и $\mathcal{Cl}_{2\nu}$.

1. Представление ρ фермионной алгебры \mathcal{A}_ν с определяющими соотношениями (6.1.28) в случае $\nu = 1$ двумерно, и базис (6.1.29) в пространстве \mathcal{F} состоит из двух векторов

$$v_1 = |0\rangle, \quad v_2 = \bar{z}_1 |0\rangle. \quad (6.1.35)$$

Далее, согласно (6.1.31) мы получаем

$$z_1 \cdot v_1 = 0, \quad z_1 \cdot v_2 = v_1, \quad \bar{z}_1 \cdot v_1 = v_2, \quad \bar{z}_1 \cdot v_2 = 0,$$

и матричное представление ρ в базисе (v_1, v_2) задается следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot v_i &= v_k \rho_{ki}(z_1), \quad \bar{z}_1 \cdot v_i = v_k \rho_{ki}(\bar{z}_1) \Rightarrow \\ \rho(z_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv e_+, \quad \rho(\bar{z}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv e_-. \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

В дальнейшем для краткости, где это не будет вызывать путаницы, буква ρ , обозначающая представление, будет опускаться, то есть, вместо $\rho(z)$ мы будем писать z . Используя представление (6.1.36) в формулах (6.1.27), мы получаем неприводимые представления образующих (Γ_1, Γ_2) двумерной алгебры Клиффорда \mathcal{Cl}_2 :

$$\Gamma_1 = \sigma_1, \quad \Gamma_2 = \sigma_2 \Rightarrow \Gamma_3 = (-i)\Gamma_1\Gamma_2 = \sigma_3, \quad (6.1.37)$$

где σ_k — матрицы Паули и $\Gamma_3 = \sigma_3$ равна Γ_{N+1} -матрице (6.1.19) в случае $N = 2$ ($\nu = 1, q = 0$). Добавляя к двум матрицам (Γ_1, Γ_2) третью матрицу $\Gamma_3 = \sigma_3$ (6.1.37), мы получаем набор из трех образующих, которые, в силу (6.1.5), удовлетворяют соотношениям (6.1.9) для алгебры Клиффорда \mathcal{Cl}_3 и реализуют ее двумерное представление.

2. В случае $\nu = 2$ представление ρ фермионной алгебры (6.1.28) четырехмерно, и в качестве базисных элементов (6.1.29) в пространстве \mathcal{F} мы выбираем четыре вектора

$$v_1 = |0\rangle, \quad v_2 = \bar{z}_2 |0\rangle, \quad v_3 = \bar{z}_1 |0\rangle, \quad v_4 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 |0\rangle, \quad (6.1.38)$$

(обратите внимание на расстановку индексов в определении v_2 и v_3). Действуя на эти вектора операторами z_α, \bar{z}_α и используя (6.1.31) и (6.1.32), мы получаем

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_+ \otimes I_2, \quad \bar{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_- \otimes I_2, \\ z_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3 \otimes e_+, \quad \bar{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3 \otimes e_-. \end{aligned} \quad (6.1.39)$$

Здесь уместно напомнить (см. разделы **I-1.2.2** и **I-3.3.1** в первой части книги), что тензорное произведение матриц (в данном случае размерности 2×2 каждая) представляет собой следующую конструкцию. Пусть A и W – две матрицы 2×2 . Им ставится в соответствие матрица $A \otimes W$ размерности 4×4 , имеющая вид

$$A \otimes W = \begin{pmatrix} A_{11}W & A_{12}W \\ A_{21}W & A_{22}W \end{pmatrix}, \quad (6.1.40)$$

где A_{ij} – матричные элементы матрицы A и $A_{ij}W$ – блоки 2×2 . При этом операция умножения матриц 4×4 удовлетворяет соотношению (см. раздел **I-1.2.2** в первой части книги)

$$(A \otimes W) \cdot (B \otimes V) = (A \cdot B) \otimes (W \cdot V). \quad (6.1.41)$$

Кроме того, выполняются равенства

$$(A + B) \otimes W = A \otimes W + B \otimes W, \quad A \otimes (W + V) = A \otimes W + A \otimes V. \quad (6.1.42)$$

Таким образом, матрица 4×4 общего вида записывается как блочная 2×2 матрица

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W & V \\ U & T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes W + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes V + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes U + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes T \\ &= \frac{1}{2}I_2 \otimes (W + T) + \frac{1}{2}\sigma_3 \otimes (W - T) + e_+ \otimes V + e_- \otimes U, \end{aligned}$$

где блоки W, V, U, T – (2×2) матрицы. Данный факт является частным случаем более общего утверждения.

- *Задача 167. Доказать, что любая комплексная $(n \cdot m) \times (n \cdot m)$ матрица A разлагается в виде $A = (e_{ij} \otimes E_{\alpha\beta}) A_{i\alpha,j\beta}$, где $A_{i\alpha,j\beta} \in \mathbb{C}$, а e_{ij} и $E_{\alpha\beta}$ – соответственно $(n \times n)$ и $(m \times m)$ матричные единицы.*

Отметим, что соотношения (6.1.41) и (6.1.42) – очевидны, если вспомнить, что прямое произведение $(A \otimes B)$ двух $(n \times n)$ и $(m \times m)$ матриц A и B действует в прямом произведении $\mathcal{V}_n \otimes \mathcal{V}_m$ двух векторных пространств \mathcal{V}_n и \mathcal{V}_m (см. раздел **I-3.3.1** в первой части книги).

Окончательно, в соответствии с (6.1.39) и (6.1.27), мы получаем неприводимое представление для образующих алгебры \mathcal{Cl}_4 :

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \Gamma_2 = \sigma_2 \otimes I_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_3 \otimes \sigma_1, \quad \Gamma_4 = \sigma_3 \otimes \sigma_2. \quad (6.1.43)$$

Матрица (6.1.19) для самого длинного элемента в данном случае ($N = 2\nu = 4, q = 0$) имеет вид

$$\Gamma_5 = -\Gamma_1 \cdots \Gamma_4 = \sigma_3 \otimes \sigma_3, \quad (6.1.44)$$

и вместе с (6.1.43) формула (6.1.44) задает представление образующих алгебры \mathcal{Cl}_5 . Подчеркнем, что специальное представление (6.1.3) алгебры $\mathcal{Cl}_{(1,3)}$ с помощью замены $\Gamma_1 = \gamma_0, \Gamma_{k+1} = -i\gamma_k$ ($k = 1, 2, 3$) сводится к представлению алгебры \mathcal{Cl}_4

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \Gamma_{k+1} = \sigma_2 \otimes \sigma_k, \quad \Gamma_5 = -\Gamma_1 \cdots \Gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2, \quad (6.1.45)$$

(здесь Γ_5 – самый длинный элемент в \mathcal{Cl}_4) которое отличается от представления (6.1.43), (6.1.44), но в силу теоремы Паули эквивалентно ему.

Матричные представления алгебр $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ для общего случая произвольного конечного ν строятся так же, как и представления этих алгебр в частных случаях $\nu = 1, 2$ (см. Примеры **1,2**). Конструкция (6.1.40) очевидным образом обобщается на случай матриц $2^\nu \times 2^\nu$, а именно, матрица $A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}$, где $A^{(i)}$ – матрицы 2×2 , равна

$$A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} \cdot (A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) & A_{12}^{(1)} \cdot (A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) \\ A_{21}^{(1)} \cdot (A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) & A_{22}^{(1)} \cdot (A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) \end{pmatrix}.$$

Возникшая здесь матрица $(A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)})$ имеет размерность $2^{\nu-1} \times 2^{\nu-1}$ и равна

$$A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} \cdot (A^{(3)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) & A_{12}^{(2)} \cdot (A^{(3)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) \\ A_{21}^{(2)} \cdot (A^{(3)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) & A_{22}^{(2)} \cdot (A^{(3)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) \end{pmatrix},$$

и т.д. При этом имеет место свойство, обобщающее (6.1.41):

$$(A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}) \cdot (B^{(1)} \otimes B^{(2)} \otimes \dots \otimes B^{(\nu)}) = (A^{(1)} \cdot B^{(1)}) \otimes (A^{(2)} \cdot B^{(2)}) \otimes \dots \otimes (A^{(\nu)} \cdot B^{(\nu)}).$$

Имеем также аналог формул (6.1.42):

$$\begin{aligned} A^{(1)} \otimes \dots \otimes A^{(k-1)} \otimes (A^{(k)} + B^{(k)}) \otimes A^{(k+1)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)} &= \\ &= A^{(1)} \otimes \dots \otimes A^{(k-1)} \otimes A^{(k)} \otimes A^{(k+1)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)} \\ &+ A^{(1)} \otimes \dots \otimes A^{(k-1)} \otimes B^{(k)} \otimes A^{(k+1)} \otimes \dots \otimes A^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Учитывая эти формулы, представления (6.1.36) и (6.1.39) обобщаются на случай $\nu > 2$ следующим образом:

$$z_\alpha = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes e_+ \otimes \underbrace{I_2 \otimes \dots \otimes I_2}_{\nu-\alpha}, \quad (6.1.46)$$

$$\bar{z}_\alpha = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes e_- \otimes \underbrace{I_2 \otimes \dots \otimes I_2}_{\nu-\alpha}. \quad (6.1.47)$$

Данное представление, как и ожидалось, является 2^ν -мерным. Последовательность (v_1, \dots, v_{2^ν}) базисных фоковских векторов (6.1.29), удовлетворяющих (6.1.31), при которой согласно (6.1.32) реализуется матричное представление (6.1.46), (6.1.47) для ν -мерной алгебры свободных фермионов, может быть получена индуктивным способом. Пусть $(v'_1, \dots, v'_{2^{\nu-1}})$ – нумерация базисных фоковских векторов (6.1.29), необходимая для построения представления (6.1.46), (6.1.47) в случае $(\nu-1)$ -мерной алгебры свободных фермионов $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, \nu-1$). Добавим к этой алгебре еще один фермион (z_ν, \bar{z}_ν) и сделаем в определении (6.1.29) векторов $(v'_1, \dots, v'_{2^{\nu-1}})$ замену всех операторов рождения $\bar{z}_\alpha \rightarrow \bar{z}_{\alpha+1}$. То есть, в обозначениях (6.1.29) сделаем преобразование

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle \rightarrow |\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_k + 1\rangle \Rightarrow v'_k \rightarrow v_k \quad (k = 1, \dots, 2^{\nu-1}).$$

В результате мы получаем новый набор фоковских векторов $(v_1, \dots, v_{2^{\nu-1}})$. Построим из этих векторов еще один набор из $2^{\nu-1}$ фоковских векторов следующим образом: $v_{2^{\nu-1}+k} = \bar{z}_1 \cdot v_k$, где $k = 1, \dots, 2^{\nu-1}$. Тогда последовательность из 2^ν векторов

$$(v_1, v_2, \dots, v_{2^\nu}) \equiv (v_1, v_2, \dots, v_{2^{\nu-1}}, \bar{z}_1 \cdot v_1, \bar{z}_1 \cdot v_2, \dots, \bar{z}_1 \cdot v_{2^{\nu-1}}),$$

дает правильную последовательность базисных фоковских векторов для построения с помощью (6.1.31) и (6.1.32) представления (6.1.46), (6.1.47) в случае ν -мерной алгебры свободных фермионов.

- *Задача 168. Доказать последнее утверждение. Получить указанным способом базис (6.1.38) из базиса (6.1.35).*

Заметим, что представление (6.1.46), (6.1.47) можно также построить с помощью другой простой индуктивной процедуры. Эта процедура заключается в следующем. Пусть матрицы (6.1.46) и (6.1.47) реализуют представление алгебры \mathcal{A}_ν фермионных осцилляторов $\{z_\alpha, \bar{z}_\beta\}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \nu$), тогда $2^{(\nu+1)}$ -мерное представление ρ' алгебры свободных фермионов $\mathcal{A}_{\nu+1}$ строится следующим образом

$$\begin{aligned} \rho'(z_\alpha) &= z_\alpha \otimes I_2, & \rho'(\bar{z}_\alpha) &= \bar{z}_\alpha \otimes I_2, & (\alpha = 1, \dots, \nu), \\ \rho'(z_{\nu+1}) &= \Gamma_{2\nu+1} \otimes e_+, & \rho'(\bar{z}_{\nu+1}) &= \Gamma_{2\nu+1} \otimes e_-, \end{aligned} \quad (6.1.48)$$

где элемент $\Gamma_{2\nu+1}$ равен самому длинному элементу (6.1.19) для случая $q = 0$, $N = 2\nu$, и в представлении (6.1.46), (6.1.47) с помощью (6.1.27) мы имеем (см. также (5.4.26))

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\nu+1} &= (-i)^\nu \Gamma_1 \cdots \Gamma_N = (-i \Gamma_1 \Gamma_2) \cdot (-i \Gamma_3 \Gamma_4) \cdots (-i \Gamma_{N-1} \Gamma_N) = \\ &= (z_1 \bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_1) \cdots (z_\nu \bar{z}_\nu - \bar{z}_\nu z_\nu) = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_\nu, \end{aligned} \quad (6.1.49)$$

(сравните с матрицами Γ_3 в (6.1.37) и Γ_5 в (6.1.44), которые были получены для частных случаев $\nu = 1$ и $\nu = 2$).

- *Задача 169. Проверить, что если $\{z_\alpha, \bar{z}_\beta\}$ образуют алгебру свободных фермионов \mathcal{A}_ν с определяющими соотношениями (6.1.28), то операторы (6.1.48) реализуют алгебру $\mathcal{A}_{\nu+1}$ с теми же определяющими соотношениями. Исходя из представления (6.1.36) для $\mathcal{C}\ell_2$, с помощью индуктивной процедуры (6.1.48) построить представление (6.1.46) и (6.1.47) для $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$. Проверить явно, что операторы (6.1.46) и (6.1.47) удовлетворяют соотношениям (6.1.28).*

Итак, подставляя матрицы (6.1.46), (6.1.47) в равенства (6.1.27), которые связывают образующие $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с операторами свободных фермионов z_α, \bar{z}_β , мы получаем матричное представление для образующих Γ_k :

$$\Gamma_{2\alpha-1} = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{I_2 \cdots \otimes I_2}_{\nu-\alpha}, \quad (6.1.50)$$

$$\Gamma_{2\alpha} = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{I_2 \cdots \otimes I_2}_{\nu-\alpha}. \quad (6.1.51)$$

Согласно Утверждению 1.3.2 данное 2^ν -мерное представление алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ неприводимо, а все другие 2^ν -мерные представления получаются из него преобразованиями эквивалентности (включая все представления, возникающие в результате перестановок номеров k у образующих Γ_k ; см. (6.1.34)). Представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, приведенное в (6.1.50), (6.1.51), было построено Р.Брауэром и Г.Вейлем в [17].

- *Задача 170.* Проверить, что в четном случае $N = 2\nu$ самый длинный элемент $\Gamma_{N+1} \in \mathcal{C}\ell_N$ в представлении (6.1.50), (6.1.51), то есть матрица (6.1.49), удовлетворяет соотношениям

$$\Gamma_{N+1}^2 = I, \quad [\Gamma_{N+1}, \Gamma_m]_+ = 0 \quad (\forall m = 1, \dots, N). \quad (6.1.52)$$

- *Задача 171.* Построить представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, определив свободные фермионы другим способом (сравните с (6.1.27))

$$z_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_\alpha + i\Gamma_{\nu+\alpha}), \quad \bar{z}_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_\alpha - i\Gamma_{\nu+\alpha}) \quad (\alpha = 1, \dots, \nu),$$

(выбирается другое разбиение множества образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ на две группы). Пояснить, почему это представление сводится к (6.1.50), (6.1.51) перестановкой образующих Γ_k .

Из явного вида матриц Паули σ_i для Γ -матриц в представлении (6.1.50), (6.1.51) следуют свойства $\Gamma_{2\alpha-1}^* = \Gamma_{2\alpha-1}^\top = \Gamma_{2\alpha-1}$ и $\Gamma_{2\alpha}^* = \Gamma_{2\alpha}^\top = -\Gamma_{2\alpha}$, которые можно записать единым образом

$$\Gamma_m^* = \Gamma_m^\top = (-1)^{m+1} \Gamma_m. \quad (6.1.53)$$

Кроме того мы имеем соотношения $(\Gamma_k)^2 = I_{2\nu}$ и все Γ -матрицы (6.1.50), (6.1.51) эрмитовы и унитарны

$$\Gamma_k^\dagger = \Gamma_k, \quad \Gamma_k^\dagger \Gamma_k = I_{2\nu}. \quad (6.1.54)$$

Замечание 4. Для доказательства изоморфизма (6.1.33): $\mathcal{C}\ell_{2\nu} = \text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ построим явное соответствие между матричными единицами в алгебре $\text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ и элементами алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$. Пусть e_{ij} ($i, j = 1, 2$) — матричные единицы в $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$, тогда матричные единицы в $\text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ можно записать в виде

$$e_{i_1 j_1} \otimes e_{i_2 j_2} \otimes \dots \otimes e_{i_\nu j_\nu} = \prod_{\alpha=1}^{\nu} e_{i_\alpha j_\alpha}^{(\alpha)}, \quad (6.1.55)$$

$$e_{i_\alpha j_\alpha}^{(\alpha)} := I_2^{\otimes(\alpha-1)} \otimes e_{i_\alpha j_\alpha} \otimes I_2^{\otimes(\nu-\alpha)}, \quad (6.1.56)$$

Реализация матриц (6.1.56), а следовательно и матриц (6.1.55), в терминах свободных фермионов легко выводится из представления (6.1.46), (6.1.47)

$$e_{11}^{(\alpha)} = z_\alpha \bar{z}_\alpha, \quad e_{22}^{(\alpha)} = \bar{z}_\alpha z_\alpha, \quad e_{12}^{(\alpha)} = \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} [z_\beta, \bar{z}_\beta] \cdot z_\alpha, \quad e_{21}^{(\alpha)} = \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} [z_\beta, \bar{z}_\beta] \cdot \bar{z}_\alpha. \quad (6.1.57)$$

Наконец, выражая с помощью формул (6.1.27) свободные фермионы в терминах образующих $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{2\nu}$ и используя равенства (6.1.55), (6.1.57), мы устанавливаем явное соответствие между матричными единицами в алгебре $\text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ и элементами алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$. Отметим, что диагональные матрицы в (6.1.55): $\prod_\alpha e_{i_\alpha i_\alpha}^{(\alpha)}$, выраженные в терминах свободных фермионов (или образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$) с помощью двух первых формул в (6.1.57), образуют полную систему примитивных идемпотентов (см. подраздел 4.5.1) в алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$.

Рассмотрим теперь комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ с определяющими соотношениями (6.1.9) в случае, когда число образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_N$ нечетно $N = 2\nu + 1$. В этом случае самый длинный элемент (элемент (6.1.21) при $q = 0$; см. также (1.3.10))

$$\Gamma_{N+1} = (-i)^\nu \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu} \cdot \Gamma_{2\nu+1} \in \mathcal{C}\ell_{2\nu+1}. \quad (6.1.58)$$

является центральным в алгебре $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ и из условия (1.3.11): $\Gamma_{N+1}^2 = I$ следует, что он имеет только два собственных значения ± 1 . Тогда согласно лемме Шура в неприводимом комплексном представлении алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ элемент (6.1.58) должен быть пропорционален единичному элементу и коэффициент пропорциональности принимает только одно из этих двух значений. Другими словами, алгебра $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ имеет по крайней мере два (ниже мы покажем, что их только два) неэквивалентных неприводимых представления ρ_+ и ρ_- , которые характеризуются двумя разными возможными собственными значениями центрального элемента Γ_{N+1} :

$$\rho_+(\Gamma_{N+1}) = +I_+, \quad \rho_-(\Gamma_{N+1}) = -I_-, \quad (6.1.59)$$

где I_\pm – единичные операторы в представлениях ρ_\pm . Пользуясь соотношениями (6.1.59), а также определением Γ_{N+1} , которое дано в (6.1.58), мы можем выразить (в неприводимом представлении ρ_+ , или ρ_-) одну из образующих $\Gamma_m \in \mathcal{C}\ell_N$, например последнюю образующую $\Gamma_N = \Gamma_{2\nu+1}$, через произведение предыдущих образующих Γ_m ($m = 1, \dots, N - 1 = 2\nu$):

$$\begin{aligned} \rho_+(\Gamma_{2\nu+1}) &= +\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\nu\right) \rho_+(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}), \\ \rho_-(\Gamma_{2\nu+1}) &= -\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\nu\right) \rho_-(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}), \end{aligned} \quad (6.1.60)$$

(сравните эти равенства с изоморфизмом (1.3.16) для элемента $\Gamma_{2\nu+1}$, или с формулой (6.1.19) в случае $q = 0$ и $N = 2\nu$). В частности, если представления ρ_+ и ρ_- для подалгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu} \subset \mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ с образующими $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$ совпадают и реализуются как 2^ν -мерное представление ρ (например, заданное в (6.1.50) и (6.1.51)), то неэквивалентные представления ρ_+ и ρ_- для всей алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ будут отличаться только знаком в определении последней образующей $\Gamma_{2\nu+1}$ (см. (6.1.60))

$$\rho_+(\Gamma_{2\nu+1}) = +(-i)^\nu \rho(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}), \quad \rho_-(\Gamma_{2\nu+1}) = -(-i)^\nu \rho(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}). \quad (6.1.61)$$

Итак, согласно результатам, изложенным выше, мы имеем два 2^ν -мерных неприводимых и неэквивалентных представления ρ_+ и ρ_- для алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$, которые отличаются согласно (6.1.59) только значениями $(+1)$ или (-1) для центрального элемента Γ_{N+1} , заданного в (6.1.58).

Заметим теперь, что изоморфизм (1.3.15) для алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ с учетом отождествления (6.1.33)) записывается в виде:

$$\mathcal{C}\ell_{2\nu+1} = \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}). \quad (6.1.62)$$

Отсюда в соответствии с теоремой Веддербёрна 4.5.1 следует, что алгебра $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ полупроста. Тогда, для алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu+1}$ (с нечетным числом образующих), также как и для простой алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, применимо тождество (4.3.63), которое в данном случае записывается в виде

$$2^{2\nu+1} = (2^\nu)^2 + (2^\nu)^2, \quad (6.1.63)$$

где в левой части стоит размерность алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$, а в правой — сумма квадратов размерностей неприводимых представлений ρ_{\pm} алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$. Из тождества (6.1.63) следует, что у алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ имеется не более двух неэквивалентных неприводимых представлений ρ_+ и ρ_- , которые 2^ν -мерны, характеризуются значениями (6.1.59) и были построены выше. В силу изоморфизма (6.1.62) и формулы (6.1.63) становится очевидным, что неприводимые 2^ν -мерные представления ρ_+ и ρ_- алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ не могут быть точными.

- **Задача 172.** Построить пространства \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- неэквивалентных представлений алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ (с нечетным числом образующих) как пространства Фока для алгебры свободных фермионов.

Итак, с учетом Утверждения 1.3.2 мы доказали следующее.

Утверждение 6.1.3 *Комплексная алгебра*

$$\mathcal{Cl}_{2\nu} = \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}),$$

имеет единственное (с точностью до преобразований эквивалентности) неприводимое представление ρ размерности 2^ν , например, представление (6.1.50), (6.1.51). Все остальные неприводимые представления имеют такую же размерность 2^ν и эквивалентны ρ . Комплексная алгебра

$$\mathcal{Cl}_{2\nu+1} = \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}),$$

имеет только два неэквивалентных неприводимых представления ρ_{\pm} размерности 2^ν , которые различаются знаком центрального элемента (6.1.58): $\rho_+(\Gamma_{N+1}) = -\rho_-(\Gamma_{N+1}) = I$, где $N = 2\nu + 1$. Представления ρ_{\pm} строятся как неприводимое представление ρ для подалгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu} \subset \mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ после чего к образующим $\Gamma_k \in \mathcal{Cl}_{2\nu}$ в представлении ρ добавляется образующая $\Gamma_{2\nu+1}$ в одной из двух реализаций (6.1.61).

Обсудим теперь неприводимые комплексные представления вещественных алгебр $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ с нечетным числом $(p+q) = N = 2\nu + 1$ образующих Γ_m ($m = 1, \dots, 2\nu + 1$), которые удовлетворяют определяющим соотношениям (6.1.2). Такие представления вещественных $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ и комплексных $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ алгебр совпадают, поэтому рассмотрение будет во многом повторять схему, изложенную для комплексных алгебр $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ с определяющими соотношениями (6.1.9). Из условия (6.1.20) следует, что центральный элемент Γ_{N+1} имеет только два собственных значения ± 1 . Тогда вещественная алгебра $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ с нечетным числом $(p+q) = 2\nu + 1$ образующих имеет, как и комплексная алгебра $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$, два неэквивалентных неприводимых представления ρ_+ и ρ_- , которые характеризуются двумя разными возможными собственными значениями (6.1.59) центрального элемента Γ_{N+1} : Пользуясь соотношениями (6.1.59), а также определением Γ_{N+1} , которое дано в (6.1.21), мы можем выразить (в неприводимом представлении ρ_+ , или ρ_-) одну из образующих $\Gamma_m \in \mathcal{Cl}_{(p,q)}$, например последнюю образующую $\Gamma_N = \Gamma_{2\nu+1} \in \mathcal{Cl}_{(p,q)}$, через произведение предыдущих образующих Γ_m (сравните с (6.1.60)):

$$\begin{aligned} \rho_+(\Gamma_{2\nu+1}) &= + \exp\left(-\frac{i\pi}{2}(\nu + q)\right) \eta_{NN} \rho_+(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}), \\ \rho_-(\Gamma_{2\nu+1}) &= - \exp\left(-\frac{i\pi}{2}(\nu + q)\right) \eta_{NN} \rho_-(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}). \end{aligned} \tag{6.1.64}$$

Заметим, что для метрики η такой, что $\eta_{NN} = -1$, образующие $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu})$ генерируют подалгебру $\mathcal{C}\ell_{(p,q-1)} \subset \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, а для $\eta_{NN} = +1$ генерируют подалгебру $\mathcal{C}\ell_{(p-1,q)} \subset \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Обе подалгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q-1)}$ и $\mathcal{C}\ell_{(p-1,q)}$ соответствует четномерному случаю: $(p+q-1) = 2\nu$.

- **Задача 173.** Пользуясь определениями (6.1.64) доказать равенства $(\rho_{\pm}(\Gamma_{2\nu+1}))^2 = \eta_{NN}$, где $N = 2\nu + 1$. Указание: воспользоваться соотношением $e^{-i\pi q} = \eta_{11} \cdots \eta_{2\nu,2\nu} \eta_{NN}$.

Пусть $\eta_{NN} = -1$ (или $\eta_{NN} = +1$) и ρ — неприводимое 2ν -мерное представление подалгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q-1)} \subset \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (или подалгебры $\mathcal{C}\ell_{(p-1,q)}$) с четным числом $(p+q-1) = 2\nu$ образующих $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$. Определим два 2ν -мерных представления ρ_{\pm} для всей алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ с нечетным числом образующих $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}, \Gamma_{2\nu+1}\}$ следующим образом

$$\rho_+(\Gamma_m) = \rho_-(\Gamma_m) = \rho(\Gamma_m) \quad (\forall m = 1, \dots, 2\nu), \quad (6.1.65)$$

$$\rho_{\pm}(\Gamma_{2\nu+1}) = \pm e^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+q)} \eta_{NN} \rho(\Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}), \quad (6.1.66)$$

то есть для первых 2ν образующих представления одинаковы $\rho_+ = \rho_- = \rho$, а представления последней образующей $\rho_{\pm}(\Gamma_{2\nu+1})$ отличаются знаком в соответствии с (6.1.64). В результате для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ с нечетным числом образующих $p+q = 2\nu+1$ мы имеем два неприводимых и неэквивалентных представления ρ_+ и ρ_- , которые определяются представлением ρ ее подалгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q-1)}$ (или $\mathcal{C}\ell_{(p-1,q)}$). То, что таких неэквивалентных представления только два, гарантируется соотношением (6.1.63), которое справедливо и в случае вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$.

Замечание 5. Аналоги изоморфизмов (6.1.33), (6.1.62) в случае вещественных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ менее тривиальны. Это связано с тем, что соотношения типа (6.1.27), связывающие образующие $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и образующие алгебры свободных фермионов, являются комплексными. Соответственно, связь матричных единиц (6.1.57) с образующими Γ_k будет также комплексной. Кроме того в нечетном случае $N = (p+q) = 2\nu+1$ аналог разложения (1.3.14) вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в прямую сумму двух вещественных подалгебр будет справедлив только, если центральный элемент Γ_{N+1} принадлежит вещественной алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, а это выполняется (см. формулу (6.1.19)) только для четных $(\nu+q)$, то есть, когда сигнатура $s = (p-q)$ равна $1 \pmod{4}$. Детальное рассмотрение изоморфизмов между вещественными алгебрами Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и вещественными матричными алгебрами содержится например в обзоре [50].

6.1.3 Вейлевские представления алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_N$ и $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$

Рассмотрим еще один индуктивный способ построения неприводимых представлений алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с определяющими соотношениями (6.1.9), который приводит к представлениям, отличающимся от представлений (6.1.50), (6.1.51) (но эквивалентным им). Этот способ основан на следующем факте.

Утверждение 6.1.4 Пусть $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2\nu-1}\}$ — образующие алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{2\nu-1}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma'_m \Gamma'_k + \Gamma'_k \Gamma'_m = 2\delta_{km} \quad (k, m = 1, \dots, 2\nu-1), \quad (6.1.67)$$

тогда образующие $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$ алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ можно построить следующим образом

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_{2^{\nu-1}}, \quad \Gamma_{m+1} = \sigma_2 \otimes \Gamma'_m \quad (m = 1, \dots, 2\nu - 1). \quad (6.1.68)$$

Доказательство. Прямая проверка показывает, что элементы (6.1.68) удовлетворяют определяющим соотношениям (6.1.9) для алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, при условии выполнения соотношений (6.1.67) для образующих $\Gamma'_k \in \mathcal{Cl}_{2^{\nu-1}}$. ■

Из Утверждения 6.1.4 вытекает индуктивный способ построения представлений алгебр $\mathcal{Cl}_{2\nu}$. Действительно, если задано $2^{\nu-1}$ -мерное представление ρ' алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-1}}$ с образующими $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2^{\nu-1}}\}$, то образующие $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$ алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ реализуются в виде 2^ν -мерных матриц с помощью формул (6.1.68). При этом $2^{\nu-1}$ -мерное представление ρ' алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-1}}$ можно построить по $2^{\nu-1}$ -мерному представлению ρ' алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-2}}$; в качестве последней образующей в алгебре $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-1}}$ выбирается самый длинный элемент $\Gamma'_{2^{\nu-1}} \in \mathcal{Cl}_{2^{\nu-2}}$, который определяется в соответствии с (6.1.49) следующим образом

$$\Gamma'_{2^{\nu-1}} = (-i)^{\nu-1} \Gamma'_1 \cdots \Gamma'_{2^{\nu-2}}, \quad (\Gamma'_{2^{\nu-1}})^2 = I_{2^{\nu-1}}. \quad (6.1.69)$$

Таким образом, формулы (6.1.68) можно применять и при индуктивном построении представлений алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, исходя из представлений алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-2}}$.

- *Задача 174. Проверить, что два неэквивалентных представления алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-1}}$, которые отличаются знаком последней образующей (6.1.69): $\Gamma'_{2^{\nu-1}} \rightarrow -\Gamma'_{2^{\nu-1}}$ определяют с помощью формул (6.1.68) два эквивалентных друг другу представления алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$. Указание: рассмотреть преобразование эквивалентности с матрицей $(\sigma_1 \otimes \Gamma'_{2^{\nu-1}})$.*

Отметим, что если представление ρ' алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu-2}}$ эрмитово: $(\Gamma'_k)^\dagger = \Gamma'_k$, то согласно (6.1.69) мы имеем $\Gamma'_{2^{\nu-1}}{}^\dagger = \Gamma'_{2^{\nu-1}}$ и представление (6.1.68) алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ также эрмитово^{6.2}. Поэтому, выбирая в качестве первого шага для индуктивной процедуры (6.1.68) эрмитово представление ρ' исходной алгебры Клиффорда \mathcal{Cl}_2 в виде матриц Паули (6.1.37), мы получаем в результате применения индукции эрмитово представление алгебры $\mathcal{Cl}_{2^{\nu+1}}$ для всех ν :

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \sigma_2^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes(\nu-n)} \quad (n = 1, \dots, \nu), \quad \Gamma_{\nu+1} = \sigma_2^{\otimes \nu}, \\ \Gamma_{\nu+1+k} &= \sigma_2^{\otimes(\nu-k)} \otimes \sigma_3 \otimes I_2^{\otimes(k-1)} \quad (k = 1, \dots, \nu), \quad (\Gamma_m)^\dagger = \Gamma_m \quad (\forall m). \end{aligned} \quad (6.1.70)$$

Удаляя из этого набора последнюю образующую $\Gamma_{2^{\nu+1}} = \sigma_3 \otimes I_2^{\otimes(\nu-1)}$, которая как нетрудно проверить (см. Задачу 175 ниже) удовлетворяет тождеству (6.1.19), мы получаем эрмитово представление образующих подалгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu} \subset \mathcal{Cl}_{2^{\nu+1}}$.

Используя явный вид матриц Паули σ_1 и σ_2 и соглашение (6.1.40) о прямом произведении матриц, представление (6.1.68) для $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ можно переписать в блочном виде

$$\Gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{s}_m \\ \bar{\mathbf{s}}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, 2\nu, \quad (6.1.71)$$

^{6.2}Мы называем матричное представление алгебры Клиффорда \mathcal{Cl}_N эрмитовым, если все образующие Γ_k этой алгебры реализуются эрмитовыми матрицами.

где $2^{\nu-1}$ -мерные матрицы \mathbf{s}_m и $\bar{\mathbf{s}}_m$ равны

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= I_{2^{\nu-1}}, & \mathbf{s}_{k+1} &= -i\Gamma'_k, \\ \bar{\mathbf{s}}_1 &= I_{2^{\nu-1}}, & \bar{\mathbf{s}}_{k+1} &= i\Gamma'_k, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, 2\nu - 1,$$

и согласно (6.1.9) удовлетворяют тождествам

$$\mathbf{s}_m \bar{\mathbf{s}}_n + \mathbf{s}_n \bar{\mathbf{s}}_m = 2 \delta_{mn} I_{2^{\nu-1}}, \quad \bar{\mathbf{s}}_m \mathbf{s}_n + \bar{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_m = 2 \delta_{mn} I_{2^{\nu-1}}. \quad (6.1.72)$$

Матрица для самого длинного элемента (6.1.19) алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ (в этом случае $q = 0$) в представлении (6.1.68), (6.1.71) записывается в виде (см. (6.1.70))

$$\Gamma_{2\nu+1} = (-i)^\nu \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu} = \sigma_3 \otimes I_{2^{\nu-1}} = \begin{pmatrix} I_{2^{\nu-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_{2^{\nu-1}} \end{pmatrix}, \quad (6.1.73)$$

где $I_{2^{\nu-1}} = I_2^{\otimes(\nu-1)}$. Полезно сравнить матрицу (6.1.73) для представления (6.1.68) и матрицу (6.1.49) для представления (6.1.50), (6.1.51).

- *Задача 175. Проверить второе равенство в (6.1.73), подставив явное представление для Γ_k (6.1.68) и воспользовавшись (6.1.69).*

Представление, в котором гамма-матрицы Γ_m ($m = 1, \dots, 2\nu$) имеют блочную структуру (6.1.71), а матрица $\Gamma_{2\nu+1}$ имеет вид (6.1.73), называется *вейлевским*. Заметим, что в вейлевском представлении (6.1.68), (6.1.71) элемент Γ_1 имеет стандартную форму

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{2^{\nu-1}} \\ I_{2^{\nu-1}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \sigma_1 \otimes I_{2^{\nu-1}}, \quad (6.1.74)$$

а операторы \mathbf{s}_k и $\bar{\mathbf{s}}_k$, входящие в определение гамма-матриц (6.1.71), связаны условиями $\bar{\mathbf{s}}_k = \mathbf{s}_k^\dagger = -\mathbf{s}_k$ ($k \neq 1$) и образуют 2ν -мерные вектора (сравните с (6.1.4))

$$\mathbf{s} = (I_{2^{\nu-1}}, -i\Gamma'_1, \dots, -i\Gamma'_{2\nu-1}), \quad \bar{\mathbf{s}} = (I_{2^{\nu-1}}, i\Gamma'_1, \dots, i\Gamma'_{2\nu-1}), \quad (6.1.75)$$

где $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2\nu-1}\}$ реализуют представление алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{2\nu-1}$ с нечетным числом образующих.

Вейлевские представления алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, которые определяются с помощью (6.1.68) и (6.1.71), отличаются от представлений, предъявленных в (6.1.50), (6.1.51), однако в силу теоремы Паули (согласно Утверждению **6.1.3**) эти представления эквивалентны.

Пример. Начиная с представления (6.1.37) для алгебры \mathcal{Cl}_2 , с помощью процедуры (6.1.68), (6.1.69) на первом шаге возникает четырехмерное неприводимое представление (6.1.45) алгебры \mathcal{Cl}_4

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \Gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \Gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_4 = \sigma_2 \otimes \sigma_3. \quad (6.1.76)$$

Это же представление можно получить из общих формул (6.1.70), положив там $\nu = 2$. Представление (6.1.76) отличается от представления (6.1.43), но в силу теоремы Паули эти представления эквивалентны.

- *Задача 176. Найти явный вид преобразования подобия, связывающего представления (6.1.43) и (6.1.76).*

Наконец, умножая в (6.1.76) образующие $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ на i (см. (6.1.8)), мы превращаем это представление в представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, которое приведено в (6.1.3).

Пусть матрицы $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$ реализуют некоторое неприводимое представление образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, которые удовлетворяют соотношениям (6.1.9). Тогда, неприводимое представление вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, где $p + q = 2\nu$, строится по представлению алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, с помощью преобразования (6.1.8):

$$\gamma_1 = \Gamma_1, \dots, \gamma_p = \Gamma_p, \quad \gamma_{p+1} = i\Gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q} = i\Gamma_{p+q}, \quad (6.1.77)$$

где матрицы $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{p+q}\}$ удовлетворяют соотношениям (6.1.2)

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2\eta_{mn} I_{2\nu}, \quad \|\eta_{mn}\| = I_{p,q}. \quad (6.1.78)$$

Представление всех базисных элементов (6.1.15) алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ определяется стандартным образом ($k = 0, \dots, p + q$)

$$\gamma_{m_1 m_2 \dots m_k} = \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}, \quad 1 < m_1 < m_2 < \dots < m_k, \quad (6.1.79)$$

то есть мы требуем, чтобы представление (6.1.77) распространялось на всю алгебру $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ как гомоморфизм.

Выберем в формулах (6.1.77) в качестве 2^ν -мерного неприводимого представления элементов $\Gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{2\nu}$ вейлевское представление (6.1.68), тогда получаем:

$$\gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_{2^{\nu-1}}, \quad \gamma_{m+1} = \sigma_2 \otimes \gamma'_m \quad (m = 1, \dots, 2\nu - 1), \quad (6.1.80)$$

где матрицы

$$\begin{aligned} \gamma'_1 = \Gamma'_1, \dots, \gamma'_{p-1} = \Gamma'_{p-1}, \quad \gamma'_p = i\Gamma'_p, \dots, \gamma'_{2\nu-2} = i\Gamma'_{2\nu-2}, \\ \gamma'_{2\nu-1} = i\Gamma'_{2\nu-1} = (-i)^{\nu-2} \Gamma'_1 \dots \Gamma'_{2\nu-2} = (-i)^{\nu+q-1} \gamma'_1 \dots \gamma'_{2\nu-2}, \end{aligned} \quad (6.1.81)$$

реализуют представление образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{p-1,q}$. Учитывая явный блочный вид (6.1.71), (6.1.74) матриц Γ_k , образующие (6.1.77), (6.1.80) алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ также реализуются в блочном виде

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{s}_m \\ \bar{\mathbf{s}}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (m = 1, \dots, 2\nu), \quad (6.1.82)$$

где $2^{\nu-1}$ -мерные блоки^{6.3} \mathbf{s}_m и $\bar{\mathbf{s}}_m$ удовлетворяют тождествам (сравните с (6.1.72))

$$\mathbf{s}_m \bar{\mathbf{s}}_n + \mathbf{s}_n \bar{\mathbf{s}}_m = 2\eta_{mn} I_{2^{\nu-1}}, \quad \bar{\mathbf{s}}_m \mathbf{s}_n + \bar{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_m = 2\eta_{mn} I_{2^{\nu-1}}, \quad (6.1.83)$$

$$\bar{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_1 = I_{2^{\nu-1}}, \quad \bar{\mathbf{s}}_m = -\mathbf{s}_m \quad (m = 2, \dots, 2\nu). \quad (6.1.84)$$

Блоки \mathbf{s}_m и $\bar{\mathbf{s}}_m$ как и ранее (см. (6.1.4), (6.1.75)) можно рассматривать в качестве компонент векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{2\nu}) = (I_{2^{\nu-1}}, -i\Gamma'_1, \dots, -i\Gamma'_{p-1}, \Gamma'_p, \dots, \Gamma'_{2\nu-1}), \\ \bar{\mathbf{s}} = (\bar{\mathbf{s}}_1, \dots, \bar{\mathbf{s}}_{2\nu}) = (I_{2^{\nu-1}}, i\Gamma'_1, \dots, i\Gamma'_{p-1}, -\Gamma'_p, \dots, -\Gamma'_{2\nu-1}), \end{aligned} \quad (6.1.85)$$

^{6.3}Использование тех же обозначений $\mathbf{s}_m, \bar{\mathbf{s}}_m$ для блоков, часть из которых согласно (6.1.77) отличаются от соответствующих матриц (6.1.75) умножением на мнимую единицу, не приводит к путанице.

Матрицы \mathbf{s}_m и $\bar{\mathbf{s}}_m$, заданные в (6.1.85), являются обобщением матриц σ_m и $\bar{\sigma}_m$ возникающих в четырехмерном случае (6.1.4). В формуле (6.1.85) матрицы $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2\nu-2}\}$ (образующие алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu-2}$ в любом представлении) входят в определение представления (6.1.68), а матрица $\Gamma'_{2\nu-1}$ задана в (6.1.69) так, что

$$(-i)^{\nu-1} \Gamma'_1 \cdots \Gamma'_{2\nu-2} \cdot \Gamma'_{2\nu-1} = 1.$$

С учетом формулы (6.1.16) самый длинный элемент (6.1.19) алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$, где $(p+q) = 2\nu$, записывается в терминах образующих (6.1.77) следующим образом:

$$\gamma_{2\nu+1} = (-i)^{\nu+q} \gamma_1 \cdots \gamma_{2\nu} = \frac{(-i)^\nu (i)^q}{(2\nu)!} \varepsilon^{i_1 \cdots i_{2\nu}} \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_{2\nu}}, \quad (6.1.86)$$

и в представлении (6.1.82) он принимает тот же вид, что и матрица (6.1.73) элемента $\Gamma_{2\nu+1} \in \mathcal{Cl}_{2\nu}$:

$$\gamma_{2\nu+1} = \sigma_3 \otimes I_{2\nu-1} = \begin{pmatrix} I_{2\nu-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_{2\nu-1} \end{pmatrix}. \quad (6.1.87)$$

Определение 6.1.2 *Неприводимое представление алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ с четным числом образующих $(p+q) = 2\nu$, в котором образующие $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2\nu}\}$ имеют блочную структуру (6.1.82), а самый длинный элемент представляется в виде (6.1.87) называется представлением Вейля (или вейлевским представлением).*

Представление (6.1.70) алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, а также только что описанное неприводимое представление алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$, заданное формулами (6.1.82) и (6.1.85), относятся к классу вейлевских представлений.

6.2 Спинорные группы $\text{Pin}(p, q)$ и $\text{Spin}(p, q)$

В дальнейшем, если не оговорено специально, что рассматриваются случаи четной $N = 2\nu$ или нечетной $N = 2\nu + 1$ размерности, то считаем $N = p + q$ — произвольным целым неотрицательным числом.

6.2.1 Определения спинорных групп $\text{Pin}(p, q)$ и $\text{Spin}(p, q)$

Вернемся снова к обсуждению случая произвольного неприводимого представления (не фиксируя его явный вид) образующих γ_k вещественной алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ с определяющими соотношениями (6.1.78) и рассмотрим элемент первого порядка

$$X = x^m \gamma_m \in \mathcal{Cl}_{(p,q)}, \quad (6.2.1)$$

где $\vec{x} = (x^1, \dots, x^N)$ — вектор в $\mathbb{R}^{p,q}$. Используя (6.1.78), мы получаем

$$X^2 = \vec{x}^2 I, \quad \vec{x}^2 \equiv \eta_{mn} x^m x^n. \quad (6.2.2)$$

Пусть U — обратимый элемент алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ такой, что преобразования

$$X \rightarrow X' = U \cdot X \cdot U^{-1}, \quad X \rightarrow X' = -U \cdot X \cdot U^{-1}, \quad (6.2.3)$$

переводят любой элемент первого порядка X из (6.2.1) снова в элемент первого порядка $X' = x'^m \gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, где $\vec{x}' = (x'^1, \dots, x'^N) \in \mathbb{R}^{p,q}$ (подчеркнем, что первое и второе преобразования в (6.2.3) связаны отражением $X' \rightarrow -X'$). То есть преобразования (6.2.3) являются линейными отображениями $\mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ и согласно (6.2.2) эти отображения сохраняют квадраты векторов:

$$(X')^2 = U \cdot X^2 \cdot U^{-1} = X^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'^2 = \vec{x}^2.$$

Отсюда следует, что отображения (6.2.3) задают некоторые вращения в $\mathbb{R}^{p,q}$, которые принадлежат группе $O(p, q)$:

$$x'^k = \Lambda^k_m x^m, \quad \|\Lambda^k_m\| \in O(p, q). \quad (6.2.4)$$

Учитывая (6.2.4), преобразования (6.2.3) переписываются в виде

$$\gamma_m \rightarrow U \cdot \gamma_m \cdot U^{-1} = \gamma_k \Lambda^k_m, \quad (6.2.5)$$

$$\gamma_m \rightarrow -U \cdot \gamma_m \cdot U^{-1} = \gamma_k \Lambda^k_m. \quad (6.2.6)$$

В четном случае $N = p + q = 2\nu$, делая замену $U \rightarrow U \cdot \gamma_{2\nu+1}$, мы сводим (для фиксированной матрицы Λ) преобразование (6.2.5) к (6.2.6). Поэтому в четном случае достаточно рассматривать только одно из этих преобразований. В нечетном случае $N = p + q = 2\nu + 1$ преобразования (6.2.5) и (6.2.6) не могут быть сведены друг к другу. Действительно, (6.2.5) не меняет, а (6.2.6) меняет знак у центрального элемента (6.1.19) (аналог элемента (6.1.86) для нечетного случая):

$$\begin{aligned} \gamma_{N+1} &= (-i)^{\nu+q} \gamma_{1\dots N} = \frac{(-i)^\nu (i)^q}{(2\nu+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{2\nu+1}} \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_{2\nu+1}} \in \mathcal{C}\ell_{2\nu+1}^{\mathbb{C}}, \\ &\gamma_{1\dots N} \equiv \gamma_1 \dots \gamma_{2\nu+1}, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

так как для этих преобразований мы имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{1\dots N} &\rightarrow \frac{(-1)^q}{(2\nu+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{2\nu+1}} \gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_{2\nu+1}} \Lambda^{k_1}_{i_1} \dots \Lambda^{k_{2\nu+1}}_{i_{2\nu+1}} = \det(\Lambda) \gamma_{1\dots N}, \\ \gamma_{1\dots N} &\rightarrow (\pm 1)^{2\nu+1} U \cdot \gamma_{1\dots N} \cdot U^{-1} = \pm \gamma_{1\dots N}, \end{aligned}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют (6.2.5) и (6.2.6). Таким образом, (6.2.5) и (6.2.6) самосогласованы только, если мы имеем соответственно $\det(\Lambda) = +1$ и $\det(\Lambda) = -1$. Поэтому в нечетномерном случае ($p + q = 2\nu + 1$) преобразования (6.2.5) и (6.2.6) следует записать в виде

$$\gamma_m \rightarrow U \cdot \gamma_m \cdot U^{-1} = \gamma_k \Lambda^k_m, \quad \det(\Lambda) = +1, \quad (6.2.8)$$

$$\gamma_m \rightarrow -U' \cdot \gamma_m \cdot U'^{-1} = \gamma_k \Lambda'^k_m \quad \det(\Lambda') = -1, \quad (6.2.9)$$

где $U, U' \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, и они необходимы для описания собственных и несобственных вращений из группы $O(p, q)$. Заметим теперь, что в нечетномерном случае ($p + q = 2\nu + 1$, если $\Lambda \in SO(p, q)$ – собственное вращение, то $\Lambda' = -\Lambda \in O_-(p, q)$ – несобственное вращение и равенства $U \cdot \gamma_m \cdot U^{-1} = \gamma_k \Lambda^k_m$ и $-U' \cdot \gamma_m \cdot U'^{-1} = \gamma_k \Lambda'^k_m$ в (6.2.8) и (6.2.9) переходят друг в друга с помощью замены

$$U' \leftrightarrow U, \quad \Lambda' \leftrightarrow -\Lambda. \quad (6.2.10)$$

То есть, если элемент $U \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ согласно (6.2.8) определяет собственное вращение $\Lambda \in SO(p, q)$, то тот же самый элемент $U' = U$ будет согласно (6.2.9) определять несобственное вращение $-\Lambda \in O_-(p, q)$, а преобразование (6.2.9) можно интерпретировать как композицию собственного вращения (6.2.8) и отражения $\gamma_m \rightarrow -\gamma_m$. Данный факт устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством всех собственных вращений (6.2.8) и множеством всех несобственных вращений (6.2.9).

Преобразования (6.2.3) определялись для элементов U вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Однако, мы можем рассмотреть такие преобразования для более широкого набора элементов U , принадлежащих не вещественной, а комплексной алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}} = \mathcal{C}\ell_N$. Заметим, что в формулах (6.2.3), (6.2.5) и (6.2.6) имеется свобода в выборе элемента U :

$$U \rightarrow a \cdot U, \quad (6.2.11)$$

где a – произвольный обратимый элемент центра алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$.

Утверждение 6.2.1 *Пользуясь произволом (6.2.11), элементы $U \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ в левых частях (6.2.5) и (6.2.6) всегда можно преобразовать так, чтобы они принадлежали вещественной алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$.*

Доказательство. Рассмотрим соотношения (6.2.5) и (6.2.6) как равенства двух элементов алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$:

$$U \cdot \gamma_m = +\gamma_k \cdot U \Lambda_m^k, \quad U \cdot \gamma_m = -\gamma_k \cdot U \Lambda_m^k,$$

и сделаем комплексное сопряжение в обеих частях этих равенств по правилу комплексного сопряжения векторов, сформулированному в первой части книги (см. там Раздел I-1.2.1):

$$\left(\psi_0 I + \sum_{k=1}^N \psi_k^{[m_1 \dots m_k]} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k} \right)^* = \psi_0^* I + \sum_{k=1}^N (\psi_k^{[m_1 \dots m_k]})^* \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}. \quad (6.2.12)$$

В результате, учитывая вещественность матрицы $||\Lambda_m^k|| \in O(p, q)$, мы получаем

$$U^* \cdot \gamma_m = \pm \gamma_k \cdot U^* \Lambda_m^k \Rightarrow U^* \cdot \gamma_m \cdot U^{*-1} = \pm \gamma_k \Lambda_m^k, \quad (6.2.13)$$

где U^* – элемент, комплексно сопряженный к элементу $U \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$. Из соотношений (6.2.5), (6.2.6) и (6.2.13) вытекает, что $U^{-1} \cdot U^* \cdot \gamma_m = \gamma_m \cdot U^{-1} \cdot U^*$ для всех образующих γ_m . Таким образом, элемент $U^{-1} \cdot U^*$ принадлежит центру алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$.

В четном случае ($p + q = 2\nu$) центр тривиален, и мы имеем $U^{-1} \cdot U^* = a \cdot I$, или $U^* = a \cdot U$, где a – комплексный параметр такой, что $aa^* = 1$. Отсюда следует, что $(a^{1/2} \cdot U)^* = (a^{1/2} \cdot U) \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и замена $U \rightarrow a^{1/2} \cdot U$ в (6.2.5) (аналогично в (6.2.6)) дает требуемый выбор. В нечетном случае $N = 2\nu + 1$ центр алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ имеет два базисных элемента $\{I, \gamma_{1\dots N}\}$ и мы получаем

$$U^{-1} \cdot U^* = (a_1 \cdot I + a_2 \cdot \gamma_{1\dots N}) \equiv a, \quad (6.2.14)$$

где a_1, a_2 – комплексные параметры такие, что $a \cdot a^* = I$. Из элемента a всегда можно извлечь квадратный корень $a = a^{1/2} \cdot a^{1/2}$, причем центральный элемент $a^{1/2}$ будет удовлетворять соотношению $a^{1/2} \cdot (a^{1/2})^* = I$. Поэтому и в нечетном случае замена $U \rightarrow a^{1/2} \cdot U$ в (6.2.5) (аналогично в (6.2.6)) сводит элемент U комплексной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ к элементу вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. ■

Определение 6.2.1 Все обратимые элементы U вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, реализующие преобразования (6.2.5), как в четном так и нечетном случаях, образуют группу по отношению к умножению в алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Эта группа обозначается как $CL(p, q)$ и называется **группой Клиффорда**^{6.4}. Множество всех преобразований (6.2.5), (6.2.6) также образуют группу, которую мы обозначим $\overline{CL}(p, q)$; при этом преобразования (6.2.5), (6.2.6) с разными U мы считаем разными элементами $\overline{CL}(p, q)$.

Для четного случая $(p + q) = 2\nu$ преобразования (6.2.5) сводятся к преобразованиям (6.2.6) с помощью замены $\Lambda' \rightarrow \Lambda$, $U' \rightarrow U \cdot \gamma_{2\nu+1}$, поэтому группа $\overline{CL}(p, q)$ сводится к группе $CL(p, q)$. Для нечетного случая $(p + q) = 2\nu + 1$, как мы указывали выше, преобразования (6.2.5), (6.2.6) записываются как (6.2.8) и (6.2.9) и также сводятся друг к другу с помощью замены (6.2.10), но при этом они соответствуют разным (собственным и несобственным) вращениям из $O(p, q)$. Два последовательных преобразования из (6.2.9) дают преобразование из (6.2.8), а два последовательных преобразования из (6.2.9) и (6.2.8) дают преобразование из (6.2.9). Поэтому, для нечетного случая группу $\overline{CL}(p, q)$ можно воспринимать как множество пар (U, z) , где $U \in CL(p, q)$ и $z = \pm 1$, причем $z = +1$ соответствует собственному вращению (6.2.8), а $z = -1$ соответствует несобственному вращению (6.2.9). Закон умножения в $\overline{CL}(p, q)$ определяется следующим образом $(U_1, z_1) \cdot (U_2, z_2) = (U_1 \cdot U_2, z_1 \cdot z_2)$. Таким образом, для случая $(p + q) = 2\nu + 1$ мы имеем $\overline{CL}(p, q) = CL(p, q) \times \mathbb{Z}_2$ и группа $(CL(p, q), +1) = CL(p, q)$ является подгруппой в $\overline{CL}(p, q)$.

- **Задача 177.** Доказать, что для нечетномерного случая $(p + q) = 2\nu + 1$ имеет место изоморфизм $O(p, q) = SO(p, q) \times \mathbb{Z}_2$.

В группе $CL(p, q)$ есть подгруппа $CL^{(0)}(p, q)$ элементов $U \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ четной степени (произведение элементов четной степени снова дает элемент четной степени). Пусть $CL^{(1)}(p, q)$ – подмножество элементов $CL(p, q)$, имеющих нечетную степень. Очевидно, что если $g \in CL^{(0)}(p, q)$, то $\gamma \cdot g \in CL^{(1)}(p, q)$, где $\gamma \in CL^{(1)}(p, q)$ – любой наперед заданный элемент нечетной степени. Наоборот, если $g \in CL^{(1)}(p, q)$, то $\gamma \cdot g \in CL^{(0)}(p, q)$. Выбирая элемент $\gamma \in CL^{(1)}(p, q)$ обратимым, мы устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между множествами $CL^{(0)}(p, q)$ и $CL^{(1)}(p, q)$.

Утверждение 6.2.2 Пусть $p + q = 2\nu$ и $U = a + b \in CL(p, q)$, где a и b соответственно четный и нечетный элементы алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Тогда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Другими словами $CL(p, q) = CL^{(0)}(p, q) \cup CL^{(1)}(p, q)$.

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Пусть $U = a + b \in CL(p, q)$, где четный a и нечетный b элементы $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ не равны нулю. Из (6.2.5) имеем $(a + b) \gamma_m = \gamma_k \Lambda_m^k (a + b)$, откуда, так как $b \cdot \gamma_m$ и $\gamma_k \cdot b$ – четные, а $a \cdot \gamma_m$ и $\gamma_k \cdot a$ – нечетные элементы, мы получаем

$$a \cdot \gamma_m = \gamma_k \Lambda_m^k \cdot a, \quad b \cdot \gamma_m = \gamma_k \Lambda_m^k \cdot b. \quad (6.2.15)$$

Тогда для элемента $\gamma_{2\nu+1}$ (6.1.86) имеют место соотношения

$$a \cdot \gamma_{2\nu+1} = \det(\Lambda) \gamma_{2\nu+1} \cdot a, \quad b \cdot \gamma_{2\nu+1} = \det(\Lambda) \gamma_{2\nu+1} \cdot b. \quad (6.2.16)$$

^{6.4}Иногда группой Клиффорда называют совершенно другой объект – множество всех обратимых элементов в $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$.

С другой стороны для четного и нечетного элементов a и b справедливы равенства

$$a \cdot \gamma_{2\nu+1} = + \gamma_{2\nu+1} \cdot a, \quad b \cdot \gamma_{2\nu+1} = - \gamma_{2\nu+1} \cdot b, \quad (6.2.17)$$

сравнивая которые с (6.2.16) мы получаем, что если $\det(\Lambda) = +1$, то $b = 0$, а если $\det(\Lambda) = -1$, то $a = 0$. \blacksquare

Замечание 1. Пусть $p + q = 2\nu$. Тогда формула (6.2.5) (или эквивалентная ей формула (6.2.6)) задает гомоморфное отображение

$$T: CL(p, q) \rightarrow O(p, q). \quad (6.2.18)$$

Из сравнения соотношений (6.2.16) и (6.2.17) следует, что четные элементы $U \in CL^{(0)}(p, q)$ отображаются с помощью T в элементы Λ из собственной группы $SO(p, q)$, так как в этом случае $\det(\Lambda) = +1$. Соответственно, нечетные элементы $U \in CL^{(1)}(p, q)$ отображаются в несобственные элементы $T(U) = \Lambda \in O_-(p, q)$, для которых $\det(\Lambda) = -1$. Таким образом, мы имеем

$$T: CL^{(0)}(p, q) \rightarrow SO(p, q), \quad T: CL^{(1)}(p, q) \rightarrow O_-(p, q). \quad (6.2.19)$$

Замечание 2. Пусть $N = p + q = 2\nu + 1$. Тогда с помощью нечетного центрального элемента $\gamma_{1\dots N} \equiv i^{\nu+q} \gamma_{N+1} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, заданого в (6.2.7), мы можем установить взаимнооднозначное соответствие $b = a \cdot \gamma_{1\dots N}$ между множеством четных элементов $a \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и множеством нечетных элементов $b \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и соответственно между четными элементами $U \in CL^{(0)}(p, q)$ и нечетными элементами $U \cdot \gamma_{1\dots N} \in CL^{(1)}(p, q)$, которые будут осуществлять идентичные преобразования (6.2.8).

Утверждение 6.2.3 Для нечетного случая $(p + q) = 2\nu + 1$ любой элемент $U \in CL(p, q)$ представим в виде $U = z \cdot a$, где z – элемент центра алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и $a \in CL^{(0)}(p, q)$.

- *Задача 178.* ★ Доказать последнее утверждение.

Далее, в случае $p + q = 2\nu + 1$ для центрального элемента (6.2.7) при преобразованиях (6.2.8) мы получаем

$$\gamma_{N+1} \rightarrow \gamma_{N+1} = \det(\Lambda) \gamma_{N+1} \Rightarrow \det(\Lambda) = +1, \quad (6.2.20)$$

а при преобразованиях (6.2.9) получаем

$$\gamma_{N+1} \rightarrow -\gamma_{N+1} = \det(\Lambda') \gamma_{N+1} \Rightarrow \det(\Lambda') = -1. \quad (6.2.21)$$

То есть, как мы указывали выше, преобразования (6.2.8) и (6.2.9) определяют соответственно собственные и несобственные вращения из $O(p, q)$ и тем самым задают гомоморфизмы (сравните с (6.2.18) и (6.2.19)):

$$\begin{aligned} T: \overline{CL}(p, q) = CL(p, q) \times \mathbb{Z}_2 &\rightarrow O(p, q), \\ T: (CL(p, q), +1) &\rightarrow SO(p, q), \quad T: (CL(p, q), -1) \rightarrow O_-(p, q). \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

При этом элементы $(U, +1) \in (CL^{(0)}(p, q), +1)$ и $(U \cdot \gamma_{1\dots N}, +1) \in (CL^{(1)}(p, q), +1)$ отображаются в один и тот же элемент $SO(p, q)$. Поэтому гомоморфное отображение подгруппы четных элементов

$$T : (CL^{(0)}(p, q), +1) = CL^{(0)}(p, q) \rightarrow SO(p, q) \quad (6.2.23)$$

таково, что его образ совпадает с образом отображения T всей группы $(CL(p, q), +1) = CL(p, q)$.

Пусть $(p+q) = 2\nu, 2\nu+1$ и алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, а соответственно и группа $CL(p, q)$ реализована в некотором фиксированном неприводимом 2^ν -мерном представлении ρ . Множество матриц $\rho(U)$ для всех $U \in CL(p, q)$ образует матричную группу $CL_\rho(p, q)$. Соответственно, множество пар $(\rho(U), \pm 1)$, обслуживающих преобразования (6.2.8) и (6.2.9), образует группу $\overline{CL}_\rho(p, q)$.

Для четного случая $p+q = 2\nu$ все неприводимые матричные представления ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ имеют размерность 2^ν и эквивалентны, поэтому соответствующие всем этим представлениям матричные группы $CL_\rho(p, q)$ изоморфны. Для нечетного случая $N = p+q = 2\nu+1$ все неприводимые матричные представления ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ также имеют размерность 2^ν и эквивалентны либо представлению ρ_+ либо представлению ρ_- , которые отличаются знаком центрального элемента (6.2.7) (сравните с (6.1.59)):

$$\rho_+(\gamma_{N+1}) = +I, \quad \rho_-(\gamma_{N+1}) = -I. \quad (6.2.24)$$

Поэтому соответствующая представлению ρ группа преобразований (6.2.8) и (6.2.9) изоморфна либо группе $\overline{CL}_{\rho_+}(p, q)$, либо группе $\overline{CL}_{\rho_-}(p, q)$.

Утверждение 6.2.4 1.) В четном случае $(p+q = 2\nu)$ гомоморфизм (6.2.18) отображает $CL(p, q)$ на всю группу $O(p, q)$. То есть, для любой матрицы $\Lambda \in O(p, q)$ существует оператор $U \in CL(p, q)$, для которого выполняется соотношение (6.2.5). При этом для заданной Λ оператор $U \in CL(p, q)$ — единственный с точностью до умножения на константу a . 2.) В нечетном случае $(p+q = 2\nu+1)$ гомоморфизм (6.2.22) отображает группу $\overline{CL}(p, q)$ на всю группу $O(p, q)$. Более детально, для любой матрицы $\Lambda \in SO(p, q)$ существует оператор $U = U(\Lambda) \in CL(p, q)$ такой, что выполняется соотношение (6.2.8) и для любой матрицы $\Lambda' \in O_-(p, q)$ существует оператор $U' = U'(\Lambda') \in CL(p, q)$, для которого выполняется соотношение (6.2.9). При этом операторы U, U' — единственны с точностью до умножения на обратимые центральные элементы $(a_1 I + a_2 \gamma_{1\dots N}) \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1.) Пусть $(p+q) = 2\nu$ и ρ — точное неприводимое представление алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Элементы $\rho^{(\Lambda)}(\gamma_m) = \rho(\gamma_k) \Lambda_m^k$ удовлетворяют тем же определяющим соотношениям (6.1.78), что и $\rho(\gamma_m)$, и следовательно отображение $\rho^{(\Lambda)}$ реализует новое неприводимое представление алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Все неприводимые представления $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в случае $(p+q) = 2\nu$ эквивалентны, поэтому должна существовать матрица $A \in \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$ такая, что $A \cdot \rho(\gamma_m) \cdot A^{-1} = \rho(\gamma_k) \Lambda_m^k$. Так как алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ и $\text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$ изоморфны, то всегда существует такой элемент U вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (в силу Утверждения 6.2.1 элемент $U \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$ всегда можно перевести в элемент $U \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$), что $A = \rho(U)$. Это и доказывает существование для любой матрицы $\Lambda \in O(p, q)$ элемента U , удовлетворяющего соотношению (6.2.5). Далее, пусть существуют два элемента U и U' , которые удовлетворяют соотношению (6.2.5) для

одной и той же матрицы $\Lambda \in O(p, q)$. Тогда для всех образующих γ_m алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ мы имеем $U^{-1} \cdot U' \cdot \gamma_m = \gamma_m \cdot U^{-1} \cdot U'$, то есть элемент $U^{-1} \cdot U'$ принадлежит центру $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, который в четномерном случае тривиален. Таким образом, мы получаем $U^{-1} \cdot U' = a \cdot I$, или $U' = a \cdot U$, где a – некоторая константа.

2.) Рассмотрим нечетный случай $N = (p+q) = 2\nu+1$ и пусть ρ – неприводимое 2^ν -мерное представление алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Для определенности будем считать, что $\rho = \rho_+$, то есть представление ρ соответствует значению центрального элемента $\rho(\gamma_{N+1}) = +I$ (случай $\rho = \rho_-$, при котором $\rho(\gamma_{N+1}) = -I$, рассматривается аналогично). Элементы $\rho_+^{(\Lambda)}(\gamma_m) = \rho(\gamma_k) \Lambda_m^k$ и $\rho_-^{(\Lambda)}(\gamma_m) = -\rho(\gamma_k) \Lambda_m^k$ реализуют для каждой фиксированной матрицы $\Lambda \in O(p, q)$ новые неприводимые представления $\rho_+^{(\Lambda)}$ и $\rho_-^{(\Lambda)}$ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, причем в случае $(p+q) = 2\nu+1$ представления $\rho_+^{(\Lambda)}$ и $\rho_-^{(\Lambda)}$ неэквивалентны, так как они отличаются знаком центрального элемента γ_{N+1} (6.2.7): $\rho_+^{(\Lambda)}(\gamma_{N+1}) = \det(\Lambda)\rho(\gamma_{N+1}) = -\rho_-^{(\Lambda)}(\gamma_{N+1})$ (см. (6.2.24)). При $\det(\Lambda) = +1$ представление ρ эквивалентно $\rho_+^{(\Lambda)}$, при $\det(\Lambda) = -1$ представление ρ эквивалентно $\rho_-^{(\Lambda)}$, поэтому существуют матрицы $A_\pm(\Lambda) \in \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$ такие, что

$$\begin{aligned} A_+ \cdot \rho(\gamma_m) \cdot A_+^{-1} &= \rho(\gamma_k) \Lambda_m^k & (\det(\Lambda) = +1), \\ A_- \cdot \rho(\gamma_m) \cdot A_-^{-1} &= -\rho(\gamma_k) \Lambda_m^k & (\det(\Lambda) = -1). \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Заметим, что для нечетномерного случая $(p+q) = 2\nu+1$, если $\Lambda \in SO(p, q)$, то $-\Lambda \in O_-(p, q)$. Поэтому из (6.2.25) мы имеем $A_-(-\Lambda) = A_+(\Lambda)$ и нам достаточно вместо двух матричных функций $A_+(\Lambda)$ и $A_-(-\Lambda)$ от элементов $\Lambda \in SO(p, q)$ и $\Lambda' \in O_-(p, q)$ рассмотреть только одну функцию, например $A_+(\Lambda)$. Напомним, что представление ρ соответствует значению центрального элемента $\rho(\gamma_{N+1}) = +I$ и в этом представлении мы имеем (см. (1.3.14))

$$\rho(\mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}) = \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C}).$$

Из этого изоморфизма следует, что существуют элементы $U_+(\Lambda) = U_-(-\Lambda) \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$, для которых $\rho(U_\pm) = A_\pm$, а из Утверждения 6.2.1 вытекает, что элементы U_\pm с помощью (6.2.11) всегда можно перевести в элементы вещественной алгебры $U_+(\Lambda) = U_-(-\Lambda) \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. Итак, мы доказали, что в нечетном случае $(p+q) = 2\nu+1$ для произвольной собственной матрицы $\Lambda \in SO(p, q)$ всегда найдется элемент $U = U_+ \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, обслуживающий преобразование (6.2.5), а для любой несобственной матрицы $\Lambda' = -\Lambda \in O_-(p, q)$ всегда найдется элемент $U = U_- \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, обслуживающий преобразование (6.2.6). Доказательство единственности U_\pm (с точностью до умножения на элементы центра) проводится так же как и в пункте 1.); см. выше. Отметим, что в любом из неприводимых представлений ρ_+ или ρ_- алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ элементы центра становятся константами. ■

Согласно Утверждению 6.2.4 элементы $U \in CL(p, q)$, задающие преобразования (6.2.5) для вращений $\Lambda \in O(p, q)$ в четном случае $(p+q) = 2\nu$, а также собственные $(U, +1)$ и несобственные $(U, -1)$ преобразования (6.2.8) и (6.2.9) в $\overline{CL}(p, q)$ в нечетном случае $(p+q) = 2\nu+1$, определены однозначно с точностью до умножения на обратимые элементы центра, который тривиален в четном случае и представляется в виде (6.2.14) в нечетном случае. Для того, чтобы избавиться от этого произвола, естественно рассматривать вместо групп Клиффорда $\overline{CL}(p, q)$ (в нечетномерном случае) и $CL(p, q)$ (в четномерном) их подгруппы, элементы которых $(U, \pm 1)$ и U , нормированы специальным образом.

Определение 6.2.2 Определим подгруппы $\overline{\text{Pin}}(p, q) \subset \overline{CL}(p, q)$ и $\text{Pin}(p, q) \subset CL(p, q)$, элементы которых $(U, \pm 1)$ и U нормированы дополнительными соотношениями

$$\det(\rho(U)) = 1, \quad (6.2.26)$$

или $\det(\rho(U)) = -1$, где ρ — неприводимое представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$.

Ниже (см. конец данного подраздела) мы покажем, что $\det(\rho(U)) = -1$ реализуется только для двумерного и трехмерного случаев $p + q = 2$ и $p + q = 3$, и только для элементов U нечетной степени. Подчеркнем, что соотношения $\det(\rho(U)) = \pm 1$ будут справедливы для любого неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, эквивалентного представлению ρ (преобразования эквивалентности не меняют детерминант). Для нечетного случая $(p + q) = 2\nu + 1$ имеется два неэквивалентных неприводимых 2^ν -мерных представления ρ_+ и ρ_- , которые переходят друг в друга (с точностью до эквивалентности) посредством замены $\gamma_k \rightarrow -\gamma_k$. Тогда в силу Утверждения 6.2.3 для любого $U \in CL(p, q)$ мы имеем $\rho_+(U) = z_U \cdot \rho_-(U)$, где z_U — некоторая константа, которая с помощью условий $\det(\rho(U)) = \pm 1$ фиксируется как $z_U = 1$. Таким образом, в нечетном случае $(p + q) = 2\nu + 1$ два неэквивалентных представления ρ_\pm алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ становятся эквивалентными для групп $\overline{\text{Pin}}(p, q)$ и $\text{Pin}(p, q)$.

Отметим еще, что поскольку неприводимые представления ρ алгебр Клиффорда имеют четную размерность 2^ν , мы получаем $\det(\rho(U)) = \det(\rho(-U))$, и поэтому подгруппы $\overline{\text{Pin}}(p, q)$ и $\text{Pin}(p, q)$ включают, наряду с элементами U , также элементы $-U$, которые согласно (6.2.5) и (6.2.6) будут соответствовать одним и тем же преобразованиям $\Lambda \in O(p, q)$.

Далее вместо группы $CL^{(0)}(p, q)$ мы будем рассматривать ее подгруппу $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$, элементы U которой также нормируются дополнительным соотношением (6.2.26). Очевидно, что $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ — подгруппа в группе $\text{Pin}(p, q)$ и, как в четномерном так и нечетномерном случаях, в соответствии с гомоморфизмами (6.2.19), (6.2.23) группа $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ будет гомоморфно отображаться на группу $SO(p, q)$.

Рассмотрим набор базисных элементов 2-го порядка

$$\Sigma_{mn} = \frac{1}{4}(\gamma_m \gamma_n - \gamma_n \gamma_m) = \frac{1}{2} \gamma_{[mn]} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}. \quad (6.2.27)$$

Элементы Σ_{mn} удовлетворяют коммутационным соотношениям для образующих алгебры Ли группы $SO(p, q)$ (сравните с (5.1.12) и (5.4.7))

$$[\Sigma_{nm}, \Sigma_{kl}] = \eta_{mk} \Sigma_{nl} + \eta_{nl} \Sigma_{mk} - \eta_{nk} \Sigma_{ml} - \eta_{ml} \Sigma_{nk}, \quad (6.2.28)$$

которые легко выводятся с помощью определяющих соотношений (6.1.78) и вытекающих из них тождеств (сравните с (5.4.8))

$$[\Sigma_{nm}, \gamma_k] = \eta_{mk} \gamma_n - \eta_{nk} \gamma_m. \quad (6.2.29)$$

Определение 6.2.3 Определим подгруппу $\text{Spin}(p, q)$ в группе $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$, как множество всех элементов $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$, лежащих в связной компоненте единичного элемента.

Утверждение 6.2.5 Все элементы $U \in \text{Spin}(p, q)$ в локальной окрестности единичного элемента представляются в виде

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{mn}\Sigma_{mn}\right) \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}, \quad (6.2.30)$$

где $\omega^{mn} = -\omega^{nm}$ – вещественные параметры.

Доказательство. Прежде всего покажем, что элементы (6.2.30) принадлежат группе $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$. Соотношения (6.2.29) гарантируют, что в результате преобразований $\gamma_m \rightarrow \gamma'_m = U \cdot \gamma_m \cdot U^{-1}$, где элемент U задан в (6.2.30), новая образующая γ'_m будет представляться в виде

$$\gamma'_m = \gamma_j \Lambda^j_m, \quad \|\Lambda^j_m\| := \exp\|\omega^j_m\|, \quad \omega^j_m = \omega^{jk} \eta_{km}, \quad (6.2.31)$$

то есть мы имеем преобразование (6.2.5). Отсюда следует, что четный элемент U , заданный в (6.2.30), принадлежит подгруппе $CL^{(0)}(p, q) \subset CL(p, q)$. Кроме того, для любого представления ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ мы получаем $\text{Tr}(\rho(\Sigma_{mn})) = 0$, поэтому пользуясь формулой $\det(e^A) = e^{\text{Tr}A}$, где A – любая матрица, мы имеем $\det(\rho(U)) = 1$. Следовательно, элементы вида (6.2.30) принадлежат группе $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$.

- **Задача 179.** Доказать формулу (6.2.31). Указание: воспользоваться тождеством

$$e^A \cdot B \cdot e^{-A} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{[A, [A, \dots, [A, B] \dots]]}_k.$$

Покажем теперь, что любой элемент $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ из локальной окрестности единицы представляется в виде (6.2.30). Воспользуемся определением группы $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$, как подгруппы в $CL^{(0)}(p, q)$, элементы U которой удовлетворяют условию (6.2.26). Из этого определения прежде всего вытекает требование, чтобы для $U \in \text{Pin}^{(0)}(p, q) \subset CL^{(0)}(p, q)$ выполнялось соотношение (6.2.5), где в качестве $\Lambda^k_m \in SO(p, q)$ мы возьмем матрицу, близкую к единичной $\Lambda^k_m = (\delta^k_m + \omega^k_m + \dots)$. В этом случае, подставляя в соотношение (6.2.5) инфинитезимальную форму для $U = \exp(T) = I + T + \dots$, мы получаем условие

$$[T, \gamma_m] = \gamma_k \omega^k_m. \quad (6.2.32)$$

Пусть T и T' – два элемента, удовлетворяющие этому условию, тогда $[\gamma_m, T - T'] = 0$, то есть $(T - T')$ коммутирует со всеми элементами $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. В неприводимом представлении ρ , согласно лемме Шура, мы имеем $\rho(T - T') = \text{const} \cdot I$, поэтому матрица $\rho(T)$ определяется с точностью до прибавления к ней матрицы, пропорциональной единичной. Фиксируем этот произвол в определении $\rho(T)$ (а соответственно и произвол в определении элемента T) требованием $\text{Tr}(\rho(T)) = 0$, которое (как мы указывали выше) эквивалентно условию $\det(\rho(U)) = 1$. Из соотношений (6.2.29) и (6.2.32) следует, что T можно выбрать в виде $T = \frac{1}{2}\omega^{mn}\Sigma_{mn}$, а так как $\text{Tr}(\rho(\Sigma_{mn})) = 0$, то этот выбор единственный и $\rho(U)$ вблизи единичного элемента однозначно представляется как

$$\rho(U) = I + \frac{1}{2}\omega^{mn}\rho(\Sigma_{mn}) + \dots = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{mn}\rho(\Sigma_{mn})\right) \Rightarrow U \in \text{Pin}^{(0)}(p, q).$$

С учетом того, что элементы $U \in \text{Pin}^{(0)}(p, q)$ вида (6.2.30) принадлежат связной компоненте единицы, мы имеем $U \in \text{Spin}(p, q) \subset \text{Pin}^{(0)}(p, q)$, что и доказывает сделанное утверждение. ■

Итак, все элементы $\text{Spin}(p, q)$ в локальной окрестности единицы записываются в виде (6.2.30), или в инфинитезимальной форме

$$U = I + \frac{1}{2}\omega^{mn}\Sigma_{mn} + \dots, \quad \omega^{mn} \in \mathbb{R}, \quad (6.2.33)$$

и, следовательно, элементы Σ_{mn} образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{spin}(p, q)$ группы $\text{Spin}(p, q)$. Так как определяющие соотношения (6.2.28) (при отождествлении $\Sigma_{mn} \leftrightarrow L_{mn}$ и выборе метрики $\eta = \eta^{-1}$ пространства $\mathbb{R}^{p,q}$) совпадают с определяющими соотношениями (5.1.12) алгебры Ли $\mathfrak{so}(p, q)$, то имеет место изоморфизм $\mathfrak{spin}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q)$, и группа $\text{Spin}(p, q)$ локально изоморфна группе $SO(p, q)$.

- **Задача 180.** ★ Доказать, что если $U \in \text{Spin}(p, q)$, то матрица $(-U)$ также принадлежит группе $\text{Spin}(p, q)$.

Гомоморфизмы (6.2.19) и (6.2.23): $CL^{(0)}(p, q) \rightarrow SO(p, q)$, определяемые соотношениями (6.2.5) и (6.2.8), задают отображение $\text{Pin}^{(0)}(p, q) \rightarrow SO(p, q)$ и соответственно для подгруппы $\text{Spin}(p, q) \subset \text{Pin}^{(0)}(p, q)$ (так как она находится в связной компоненте единичного элемента) мы имеем: $\text{Spin}(p, q) \rightarrow SO^\dagger(p, q)$. Справедливо следующее утверждение (см., например, [53]).

Утверждение 6.2.6 *Группа $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ дважды покрывает группу $SO(p, q)$, а группа $\text{Spin}(p, q)$ дважды покрывает группу $SO^\dagger(p, q)$.*

Доказательство. Пусть два элемента $U, U' \in \text{Pin}^{(0)}(p, q)$ осуществляют преобразования (6.2.5) с одним и тем же элементом $\Lambda \in SO(p, q)$. Тогда $[U^{-1} \cdot U', \gamma_m] = 0$ для всех образующих $\gamma_m \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и $U^{-1} \cdot U' = z$, или $U' = z \cdot U$, где z – центральный элемент в $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. В неприводимом представлении ρ мы имеем $\rho(z) = \alpha I_{2\nu}$, где $(p+q) = 2\nu, 2\nu+1$ и так как U, U' – элементы вещественной алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, то α – вещественная константа. Из условия нормировки (6.2.26) следует, что $\det(\rho(z)) = 1$, поэтому $\alpha^{2\nu} = 1$, и если $\nu \geq 1$, то $\alpha = \pm 1$. Таким образом, в группе $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ имеется ровно два элемента $\pm U$, которые с помощью (6.2.5) отображаются в один элемент $\Lambda \in SO(p, q)$, и следовательно группа $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ дважды покрывает группу $SO(p, q)$. Отсюда сразу же вытекает, что связная компонента единичного элемента в $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$, то есть группа $\text{Spin}(p, q)$, дважды покрывает группу $SO^\dagger(p, q)$. ■

Таким образом, согласно Утверждению 6.2.6 имеют место изоморфизмы

$$\text{Spin}(p, q)/\mathbb{Z}_2 = SO^\dagger(p, q), \quad \text{Pin}^{(0)}(p, q)/\mathbb{Z}_2 = SO(p, q). \quad (6.2.34)$$

Очевидно, что в случае $p \neq 0, q \neq 0$, так же как и у группы $SO(p, q)$, у группы $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ имеются несвязные компоненты. Группы $\text{Spin}(p, q)$, $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$ и $\text{Pin}(p, q)$ называются *спинорными (или спинорными) группами*.

Подчеркнем, что в многообразии группы $SO^\dagger(p, q)$ имеется ровно два типа негомотопных замкнутых кривых только в случае $p \leq 1, q > 2$ (или $q \leq 1, p > 2$). В этом случае группы $\text{Spin}(N)$ и $\text{Spin}(1, N-1)$ оказываются универсальными покрывающими групп $SO(N)$ и $SO^\dagger(1, N-1)$, соответственно. В случае $p \geq 2$ и $q \geq 2$ группа

$\text{Spin}(p, q)$ не является универсальной накрывающей группы $SO^\dagger(p, q)$. Этот факт (см. например [52]) мы здесь не доказываем^{6.5}.

Далее, следуя традиции, принятой в физической литературе, мы часть координат векторов $\vec{x} \in \mathbb{R}^{p,q}$ будем называть временными, а другую часть — пространственными.

Определение 6.2.4 Пусть метрика η в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ приведена к диагональному виду. Базисный вектор $\vec{e}_k \in \mathbb{R}^{p,q}$, для которого компонента метрики $\eta_{kk} = (\vec{e}_k, \vec{e}_k)$ положительна (отрицательна), называется **временным (пространственным)**. Соответственно, координата x^k вектора $\vec{x} = x^i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^{p,q}$ называется **временной (пространственной)**, если базисный вектор $\vec{e}_k \in \mathbb{R}^{p,q}$ — временной (пространственный).

Следует отметить, что в ряде книг (см., например, [20]) принято другое соглашение, когда временные координаты соответствуют отрицательным компонентам метрики η_{kk} , а пространственные — положительным^{6.6}. Такое соглашение эквивалентно нашему, однако может приводить к некоторым техническим различиям, например, в определении операции зарядового сопряжения и в описании специальных вещественных представлений групп $\text{Spin}(p, q)$, которые называются майорановскими (см. ниже подраздел 6.4.2).

Пусть $p + q = 2\nu$. Кроме преобразований из группы $\text{Spin}(p, q)$, элементы которой представляются в виде произведения операторов (6.2.30), интерес (например, с точки зрения описания дискретных преобразований, таких как временные и пространственные отражения) представляют элементы, принадлежащие полной группе $\text{Pin}(p, q)$, которая с помощью (6.2.5) гомоморфно отображается на полную группу $O(p, q)$. Для того, чтобы описать такие преобразования, необходимо рассмотреть матрицы $\Lambda \in O(p, q)$, соответствующие всевозможным отражениям координат $\{x^1, \dots, x^{p+q}\}$, первая часть $\{x^1, \dots, x^p\}$ из которых (в соответствии с выбором метрики $\eta = I_{p,q}$ и определением 6.2.4) называется “временными”, а вторая часть $\{x^{p+1}, \dots, x^{p+q}\}$ “пространственными”. Такие отражения осуществляются базисными элементами (6.1.15) алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$. Действительно, базисный элемент первого порядка $U_k = \gamma_k \in \mathcal{Cl}_{(p,q)}$ задает согласно (6.2.3) отражение всех координат x^m , кроме координаты x^k , согласно правилу $x^m \rightarrow (-1)^{1-\delta_{km}} x^m$, что следует из соотношений

$$U_k \cdot \gamma_m \cdot U_k^{-1} = \gamma_k \cdot \gamma_m \cdot \gamma^k = (-1)^{1-\delta_{km}} \gamma_m, \quad (6.2.35)$$

(здесь суммирование по k не производится и $\gamma^k = \eta^{ki} \gamma_i$). Соответственно, базисный элемент второго порядка $U_{m_1, m_2} = \gamma_{m_1} \gamma_{m_2}$ ($m_1 < m_2$) определяет отражение только координат x^{m_1} и x^{m_2} .

^{6.5} Универсальная накрывающая должна покрывать ортохронную специальную группу $SO^\dagger(p, q)$ столько раз, сколько элементов в фундаментальной группе $\pi_1(SO^\dagger(p, q))$ (см. определение группы π_1 , например, в книгах [22], [57]). Так как максимальная компактная подгруппа в $SO^\dagger(p, q)$ — это $SO(p) \times SO(q)$, то утверждается, что $\pi_1(SO^\dagger(p, q)) = \pi_1(SO(p)) \times \pi_1(SO(q))$, где как мы знаем $\pi_1(SO(1)) = 1$, $\pi_1(SO(2)) = Z$ и $\pi_1(SO(p)) = Z_2$, если $p > 2$. Поэтому, если группа $\text{Spin}(p, q)$ дважды накрывает $SO^\dagger(p, q)$, то она может быть универсальной накрывающей только в случае $p < 2$, или $q < 2$. При этом случай $p = 1, q = 2$ (или $p = 2, q = 1$) следует исключить, так как $\text{Spin}(1, 2) = SL(2, \mathbb{R})$, а $\pi_1(SL(2, \mathbb{R})) = Z$.

^{6.6} Например, мы считаем, что физическое пространство Минковского имеет метрику $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, а некоторые авторы выбирают метрику в виде $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

- **Задача 181.** Доказать, что полное отражение всех координат $x_m \rightarrow -x_m$ в $\mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q = 2\nu$) задается самым длинным четным элементом $U = \gamma_{1\dots 2\nu} \in \text{CL}^{(0)}(p, q)$. Показать, что операторы

$$T_t = \gamma_t \cdot \gamma_{1\dots 2\nu}, \quad P_s = \gamma_s \cdot \gamma_{1\dots 2\nu} \quad (t = 1, \dots, p; \quad s = p + 1, \dots, 2\nu),$$

отражают только одну “временную” x^t , или только одну “пространственную” x^s , координату, соответственно.

Учитывая все вышесказанное, любой элемент полной спинорной группы $\text{Pin}(p, q)$ можно записать в виде

$$U = U' \cdot \gamma_{m_1\dots m_k}, \quad (6.2.36)$$

где $\gamma_{m_1\dots m_k}$ – базисные элементы алгебры Клиффорда (см. (6.1.15)), а U' – элемент группы $\text{Spin}(p, q)$, который представляется в виде произведения операторов (6.2.30).

- **Задача 182.** Доказать последнее утверждение. Указание: учесть то, что любой элемент $\Lambda \in O(p, q)$ представим в виде $\Lambda = \Lambda' \cdot R$, где $\Lambda' \in \text{SO}^\dagger(p, q)$ и R – некоторое отражение, и далее воспользоваться Утверждением 6.2.4 и Определением 6.2.2.

Для четномерного случая $(p + q) = 2\nu$ элемент (6.2.36), когда k – четно, принадлежит подгруппе $\text{Pin}^{(0)}(p, q)$, которая с помощью соотношений (6.2.5) отображается в собственную группу $\text{SO}(p, q)$, а когда k – нечетно, то элемент (6.2.36) принадлежит компоненте группы $\text{Pin}(p, q)$, которая отображается на несобственную компоненту $O_-(p, q)$. Для нечетномерного случая $(p + q) = 2\nu + 1$ произвольный элемент $\text{Pin}(p, q)$ также записывается в виде (6.2.36). При этом следует помнить, что собственные преобразования $\Lambda \in \text{SO}(p, q)$ задаются отображением (6.2.5), а несобственные – отображением (6.2.6).

- **Задача 183.** Доказать, что в нечетномерном случае $(p + q) = 2\nu + 1$ преобразования (6.2.5), где в качестве U выбраны базисные элементы $\gamma_{m_1\dots m_k} \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, соответствуют для любого k отражениям четного числа координат и тем самым задают преобразования Λ из собственной подгруппы $\text{SO}(p, q)$.

Замечание 3. Пусть ρ – неприводимое представление алгебры Клиффорда. Тогда в случае $(p + q) > 3$ мы имеем $\det(\rho(\gamma_k)) = +1$ для всех образующих γ_k .

- **Задача 184.** Доказать последнее утверждение. Указание: воспользоваться тем, что либо $\gamma_k^2 = +1$, либо $\gamma_k^2 = -1$, и собственные значения любой образующей γ_k равны либо ± 1 , либо $\pm i$, причем в случае, когда $N = p + q \geq 4$, мы имеем $\dim(\rho) = 4 \cdot 2^{\lfloor (N-4)/2 \rfloor}$ и четное число собственных значений $+1(+i)$ равно, как это следует из явного вида представления (6.1.50), (6.1.51), четному числу собственных значений $-1(-i)$.

Поэтому для элемента (6.2.36) всегда будет выполняться условие $\det(\rho(U)) = +1$, так как по определению мы имеем $\det(\rho(U')) = +1$.

В случае $(p + q) \leq 3$ возможна ситуация, когда элемент (6.2.36) нормирован соотношением $\det(\rho(U)) = -1$. Действительно, в данном случае $\rho(\gamma_k)$ – матрицы 2×2 , пропорциональные матрицам Паули (или эквивалентные им), и если $\rho(\gamma_k)^2 = \eta_{kk} = +1$, то $\rho(\gamma_k) = \sigma_k$ и $\det(\rho(\gamma_k)) = -1$.

6.2.2 Представления алгебр Клиффорда, алгебр $\mathfrak{spin}(p, q)$ и групп $\text{Spin}(p, q)$

Пусть ρ – представление алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$. Тогда ρ будет одновременно представлением алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q)$, базисные элементы (6.2.27) которой пропорциональны базисным элементами второго порядка алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$, а также будет представлением соответствующей группы $\text{Spin}(p, q): U \rightarrow \rho(U)$. При этом, как мы вскоре убедимся, в четномерном случае $(p + q) = 2\nu$ **неприводимому** 2^ν -мерному представлению ρ алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$ соответствует **приводимое** представление группы Ли $\text{Spin}(p, q)$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q)$, которое разлагается в прямую сумму двух неэквивалентных друг другу неприводимых фундаментальных спинорных представлений Δ_+ и Δ_- размерности $2^{\nu-1}$ (аналоги представлений $T_{(r)}$ и $T_{(r-1)}$; см. подраздел 5.4.1), что согласуется с общим рассмотрением (см. подраздел 3.4.2, пункт 3). С другой стороны напомним, что в нечетном случае $(p + q) = 2\nu + 1$ мы имеем два неэквивалентных 2^ν -мерных представления ρ_+ и ρ_- алгебры $\mathcal{Cl}_{(p,q)}^{\mathbb{C}}$. В представлениях ρ_+ и ρ_- образующие (6.2.27) задают два представления алгебры $so(p, q)$, которые оказываются эквивалентными (см. Раздел 5.4.2), то есть в нечетном случае $(p + q) = 2\nu + 1$ мы имеем единственное фундаментальное спинорное 2^ν -мерное представление алгебры $so(p, q)$, что также полностью согласуется с общим рассмотрением (см. подраздел 3.4.2, пункт 4).

Справедливость данного замечания в четномерном случае^{6.7} $p + q = 2\nu$ можно продемонстрировать явно, рассмотрев представление алгебры $\mathfrak{spin}(p, q) = so(p, q)$, которое возникает из вейлевского представления (6.1.82) алгебры Клиффорда. Для этого случая в представлении (6.1.82) элементы базиса $\Sigma_{nm} \in \mathfrak{spin}(p, q)$ (6.2.27) имеют блочно-диагональный вид

$$\rho(\Sigma_{mn}) = \frac{1}{4}(\gamma_m \gamma_n - \gamma_n \gamma_m) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\mathbf{s}_m \bar{\mathbf{s}}_n - \mathbf{s}_n \bar{\mathbf{s}}_m) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{4}(\bar{\mathbf{s}}_m \mathbf{s}_n - \bar{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{mn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{s}}_{mn} \end{pmatrix}, \quad (6.2.37)$$

и реализуют полностью приводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q)$, которое соответствует полностью приводимому представлению группы $\text{Spin}(p, q)$

$$U = \begin{pmatrix} \exp(\frac{1}{2}\omega^{mn} \mathbf{s}_{mn}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp(\frac{1}{2}\omega^{mn} \bar{\mathbf{s}}_{mn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{A} \end{pmatrix}. \quad (6.2.38)$$

Это представление, как мы сейчас покажем, разлагается в прямую сумму двух неприводимых и неэквивалентных друг другу представлений Δ_+ и Δ_- .

Утверждение 6.2.7 Для случая $(p + q) = 2\nu$ диагональные блоки \mathbf{s}_{mn} и $\bar{\mathbf{s}}_{mn}$ в (6.2.37) определяют два неэквивалентных неприводимых представления Δ_+ и Δ_- базисных элементов алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q) = so(p, q)$. Соответственно, диагональные блоки A и \bar{A} в (6.2.38) образуют неэквивалентные и неприводимые $2^{\nu-1}$ -мерные представления Δ_+ и Δ_- группы $\text{Spin}(p, q)$.

Доказательство. Будем доказывать данное Утверждение от противного. Сначала докажем неэквивалентность. Пусть представления алгебры $\mathfrak{spin}(p, q)$, реализованные

^{6.7}Справедливость этого замечания в нечетномерном случае $p + q = 2\nu + 1$ мы продемонстрируем ниже, в Замечании 2.

матрицами \mathbf{s}_{mn} и $\bar{\mathbf{s}}_{mn}$, эквивалентны. Это означает, что существует невырожденная $2^{\nu-1}$ -мерная матрица S такая, что $\bar{\mathbf{s}}_{mn} = S \mathbf{s}_{mn} S^{-1}$. Положим здесь $m = 1$, или $n = 1$, и учтем (6.1.84). В результате получаем $\bar{\mathbf{s}}_n = S \mathbf{s}_n S^{-1}$, $\mathbf{s}_n = S \bar{\mathbf{s}}_n S^{-1}$. Тогда с помощью S можно определить матрицу $\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & S \\ -S & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, которая антикоммутирует со всеми образующими алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в представлении (6.1.82) и следовательно коммутирует с матрицей (6.1.86): $\gamma \gamma_{2\nu+1} = \gamma_{2\nu+1} \gamma$. Это, однако, противоречит равенству $\gamma \gamma_{2\nu+1} = -\gamma_{2\nu+1} \gamma$, которое следует из явного вида (6.1.87) матрицы $\gamma_{2\nu+1}$.

Перейдем к доказательству неприводимости. Пусть комплексные представления алгебры $\mathfrak{spin}(p, q)$, реализованные матрицами \mathbf{s}_{mn} приводимы (рассуждения для образующих $\bar{\mathbf{s}}_{mn}$ аналогичны). Тогда существует ненулевая матрица $S' \neq \lambda I_{2^{\nu-1}}$ такая, что $S' \cdot \mathbf{s}_{mn} = \mathbf{s}_{mn} \cdot S'$. Полагая $m = 1$ (или $n = 1$), мы получаем $S' \cdot \mathbf{s}_n = \mathbf{s}_n \cdot S'$ (или $S' \cdot \bar{\mathbf{s}}_m = \bar{\mathbf{s}}_m \cdot S'$). Отсюда следует, что матрица $\gamma' = \begin{pmatrix} S' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S' \end{pmatrix} \neq \lambda I_{2^\nu}$ коммутирует со всеми γ_m , что противоречит неприводимости представления образующих γ_m алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$. ■

Итак, в четномерном случае $p + q = 2\nu$ пространство \mathcal{F} неприводимого представления (6.1.82) алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ разбивается на два инвариантных подпространства \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- неприводимых представлений Δ_+ и Δ_- алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q)$ и группы Ли $\text{Spin}(p, q)$, которые вытекают из блочной структуры (6.2.37) и (6.2.38). Инвариантные подпространства \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- выделяются из \mathcal{F} с помощью двух проекторов

$$P_+ = \frac{1}{2}(I_{2^\nu} + \gamma_{2\nu+1}) = \begin{pmatrix} I_{2^{\nu-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_- = \frac{1}{2}(I_{2^\nu} - \gamma_{2\nu+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{2^{\nu-1}} \end{pmatrix}, \quad (6.2.39)$$

записанных здесь в вейлевском представлении (6.1.82). Эти проекторы соответствуют (при $\nu = r$) проекторам (5.4.27), которые использовались при построении двух неприводимых спинорных представлений $T_{(r-1)}$ и $T_{(r)}$ со старшими фундаментальными весами $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$ (см. Раздел 5.4.1). Таким образом, два неприводимых представления Δ_+ и Δ_- алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q)$, выделяемые с помощью проекторов (6.2.39), эквивалентны (при $\nu = r$) двум неприводимым фундаментальным спинорным представлениям $T_{(r-1)}$ и $T_{(r)}$, которые были анонсированы в Разделе 3.4.2 (пункт 3) и явно построены в Разделе 5.4.1. В математической литературе, следуя Картану [54], представления $T_{(r-1)} = \Delta_+$ и $T_{(r)} = \Delta_-$ называются *полустинорными*, а в физической литературе эти представления называются *вейлевскими*.

Замечание 1. При спинорных вычислениях удобно различать индексы у матриц A и \bar{A} неэквивалентных представлений Δ_+ и Δ_- элементов группы $\text{Spin}(p, q)$. Для этого индексы у матриц \bar{A} второго представления Δ_- , следуя Ван-дер-Вардену [18], обычно отмечаются точкой. Соответственно различают индексы и у компонент вейлевских спиноров $\xi \in \mathcal{V}_+$ и $\eta \in \mathcal{V}_-$, обозначая эти компоненты соответственно как ξ_α и $\eta^{\dot{\alpha}}$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, \dots, 2^{\nu-1}$), а действие элемента $U \in \text{Spin}(p, q)$, заданного в (6.2.38), в подпространствах $\mathcal{V}_+ \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{F}$ записывая следующим образом

$$\xi_\alpha \rightarrow \xi'_\alpha = A_\alpha^\beta \xi_\beta, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \rightarrow \eta'^{\dot{\alpha}} = \bar{A}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}. \quad (6.2.40)$$

В вейлевском представлении (6.1.82) преобразование (6.2.5), заданное элементом U

из (6.2.38), записывается в виде

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{s}_m \\ \bar{\mathbf{s}}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow U\gamma_m U^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A\mathbf{s}_m\bar{A}^{-1} \\ \bar{A}\bar{\mathbf{s}}_m A^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (6.2.41)$$

Отсюда вытекает расстановка индексов у матриц $(\mathbf{s}_m)_{\alpha\dot{\beta}}$ и $(\bar{\mathbf{s}}_m)^{\dot{\alpha}\beta}$. Учитывая этот факт в определении (6.2.37) образующих \mathbf{s}_{mn} , $\bar{\mathbf{s}}_{mn}$ алгебры $\mathfrak{spin}(p, q)$, мы получаем индексную запись матриц образующих $\|(\mathbf{s}_{mn})_{\alpha}^{\beta}\|$ и $\|(\bar{\mathbf{s}}_{mn})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\|$, что с учетом экспоненциального представления (6.2.38) согласуется с расстановкой индексов для матриц A и \bar{A} , которая указана в (6.2.40).

Замечание 2. Для нечетномерного случая $(p+1) + q = 2\nu + 1$ представление группы $\mathfrak{Spin}(p+1, q)$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p+1, q) = \mathfrak{so}(p+1, q)$, которое строится по представлению (6.1.82) четномерной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, оказывается неприводимым. Это вытекает из явного вида (6.1.87) представления последней матрицы $\gamma_{2\nu+1}$, из-за которого элементы $\rho(\Sigma_{mn})$ с номерами $n = 2\nu + 1$ (или $m = 2\nu + 1$) уже не имеют блочно-диагональной формы, а записываются в виде

$$\rho(\Sigma_{m,2\nu+1}) = \frac{1}{4}(\gamma_m \gamma_{2\nu+1} - \gamma_{2\nu+1} \gamma_m) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{s}_m \\ \bar{\mathbf{s}}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, 2\nu, \quad (6.2.42)$$

и осуществляют переходы между подпространствами \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- в \mathcal{F} . Неприводимое комплексное представление (6.1.82), (6.2.42) алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p+1, q) = \mathfrak{so}(p+1, q)$ эквивалентно (при $r = \nu$) неприводимому спинорному представлению $T_{(r)}$ алгебры $\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$ со старшим фундаментальным весом $\lambda_{(r)}$, которое было анонсировано в Разделе 3.4.2 (пункт 4) и построено в Разделе 5.4.2.

- *Задача 185.* Показать, что для $p+q = 2\nu$ матрицы $L_{mn} = \rho(\Sigma_{mn})$ (6.2.37) и

$$P_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{s}}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad K_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{s}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_{2\nu-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_{2\nu-1} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{2\nu+1}}{2},$$

задают матричное (спинорное) представление для образующих конформной алгебры $\mathfrak{conf}(\mathbb{R}^{p,q}) = \mathfrak{so}(p+1, q+1)$ (см. раздел I-2.2.11 в первой части книги) с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} [D, P_m] &= -P_m, & [D, K_m] &= K_m, & [D, L_{jm}] &= 0, \\ [K_j, K_m] &= 0, & [P_j, P_m] &= 0, & [P_k, K_m] &= 2(\eta_{km}D - L_{km}), \\ [P_j, L_{km}] &= \eta_{kj}P_m - \eta_{mj}P_k, & [K_j, L_{km}] &= \eta_{kj}K_m - \eta_{mj}K_k, \\ [L_{ij}, L_{k\ell}] &= \eta_{jk}L_{i\ell} + \eta_{j\ell}L_{ki} + \eta_{ik}L_{\ell j} + \eta_{i\ell}L_{jk}. \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

6.3 Матрицы сопряжения

6.3.1 Матрицы сопряжения В, С, D для представлений алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и свойства этих матриц

Пусть ρ — 2ν -мерное неприводимое представление алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$: $\Gamma_m \rightarrow \rho(\Gamma_m)$ (четномерный случай). Рассмотрим новые представления ρ' и ρ'' , полученные из ρ комплексным сопряжением и транспонированием

$$\Gamma_m \xrightarrow{\rho'} \eta_m \rho(\Gamma_m)^*, \quad \Gamma_m \xrightarrow{\rho''} \eta'_m \rho(\Gamma_m)^{\Gamma}. \quad (6.3.1)$$

где константы η_m, η'_m могут принимать только два значения ± 1 , то есть $\eta_m^2 = \eta'^2_m = 1$ ($\forall m$). В отличие от (6.2.12) комплексное сопряжение в (6.3.1) – это комплексное сопряжение всех матричных элементов. Отображения (6.3.1) действительно определяют представления ρ' и ρ'' алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$, так как сохраняют структурные соотношения (6.1.9) и могут быть доопределены как гомоморфизм на всей алгебре $\mathcal{Cl}_{2\nu}$. Представление ρ и все возникающие из него представления (6.3.1) эквивалентны друг другу в силу Утверждений **1.3.2** и **6.1.3** (теорема Паули).

Поясним эквивалентность представления ρ и сопряженных с ним представлений ρ', ρ'' , заданных в (6.3.1), взяв в качестве ρ конкретное матричное представление, указанное в (6.1.50), (6.1.51):

$$\Gamma_{2\alpha-1} = \sigma_3^{\otimes(\alpha-1)} \otimes \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes(\nu-\alpha)}, \quad \Gamma_{2\alpha} = \sigma_3^{\otimes(\alpha-1)} \otimes \sigma_2 \otimes I_2^{\otimes(\nu-\alpha)}, \quad (6.3.2)$$

где $\alpha = 1, \dots, \nu$. В этом представлении имеют место соотношения

$$\Gamma_m^* = \Gamma_m^\top = (-1)^{m+1} \Gamma_m \quad (m = 1, \dots, N = 2\nu), \quad (6.3.3)$$

а матрица для самого длинного элемента Γ_{N+1} определена в (6.1.49):

$$\Gamma_{N+1} = (-i)^\nu \Gamma_1 \cdots \Gamma_N = \sigma_3^{\otimes \nu} \Rightarrow \Gamma_{N+1}^2 = I_{2\nu}, \quad [\Gamma_{N+1}, \Gamma_m]_+ = 0. \quad (6.3.4)$$

Рассмотрим два специальных случая представлений ρ', ρ'' , когда $\eta_m = \eta'_m = 1$ и $\eta_m = \eta'_m = -1$ ($\forall m$), и продемонстрируем (см. ниже Утверждение **6.3.1**), что эквивалентность представлений ρ и ρ', ρ'' в этих случаях обслуживается $(2^\nu \times 2^\nu)$ -матрицами:

$$C = \underbrace{\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots}_\nu, \quad C^2 = I, \quad (6.3.5)$$

$$C' = \underbrace{\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots}_\nu, \quad (C')^2 = I, \quad (6.3.6)$$

которые связаны друг с другом соотношениями

$$C' \cdot C = (-1)^\nu C \cdot C' = (-1)^{[\nu/2]} (i)^\nu \Gamma_{N+1}, \quad (6.3.7)$$

где $[\nu/2]$ – целая часть $\nu/2$. Кроме (6.3.7), матрицы C и C' удовлетворяют условиям

$$C^\top = C^* = (-1)^{[\frac{\nu+1}{2}]} C, \quad C'^\top = C'^* = (-1)^{[\frac{\nu}{2}]} C', \quad (6.3.8)$$

и выражаются через произведения гамма-матриц (6.3.2):

$$(-i)^k \Gamma_2 \Gamma_4 \cdots \Gamma_{2\nu} = \begin{cases} \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_2 = C', & \text{если } \nu = 2k; \\ \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_2 = C, & \text{если } \nu = 2k + 1; \end{cases} \quad (6.3.9)$$

$$i^k \Gamma_1 \Gamma_3 \cdots \Gamma_{2\nu-1} = \begin{cases} \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_1 = C, & \text{если } \nu = 2k; \\ \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_1 = C', & \text{если } \nu = 2k + 1. \end{cases} \quad (6.3.10)$$

Утверждение 6.3.1 В представлении (6.3.2) образующие Γ_k алгебры $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ и сопряженные к ним образующие Γ_k^* и Γ_k^\top связаны друг с другом с помощью матриц эквивалентности (6.3.5), (6.3.6):

$$-C \cdot \Gamma_m \cdot C = C' \cdot \Gamma_m \cdot C' = \Gamma_m^* = \Gamma_m^\top \quad (m = 1, \dots, N = 2\nu), \quad (6.3.11)$$

то есть, если $\eta_m = \eta'_m = +1$, то $\rho'(\Gamma_m) = \rho''(\Gamma_m) = C' \cdot \Gamma_m \cdot C'$, а если $\eta_m = \eta'_m = -1$, то $\rho'(\Gamma_m) = \rho''(\Gamma_m) = C \cdot \Gamma_m \cdot C$. Кроме того мы имеем

$$C \cdot \Gamma_{N+1} \cdot C = C' \cdot \Gamma_{N+1} \cdot C' = (-1)^\nu \Gamma_{N+1}. \quad (6.3.12)$$

Доказательство. Рассмотрим равенства (6.3.11) для случая матрицы C . Для случая матрицы C' эти равенства будут вытекать из соотношений (6.3.7) и (6.3.4). При коммутировании матрицы $\Gamma_{2\alpha-1}$ с C мы имеем две возможности: 1) фактор σ_1 из $\Gamma_{2\alpha-1}$ попадает на фактор σ_1 из C , в этом случае σ_1 из $\Gamma_{2\alpha-1}$ при проносе через C знак не меняет; 2) фактор σ_1 из $\Gamma_{2\alpha-1}$ попадает на фактор σ_2 из C , в этом случае σ_1 из $\Gamma_{2\alpha-1}$ при проносе через C знак меняет. В первом случае число $(\alpha - 1)$ и соответственно число факторов σ_3 в $\Gamma_{2\alpha-1}$ нечетно, а во втором случае — четно. Таким образом, учитывая, что все факторы σ_3 из $\Gamma_{2\alpha-1}$ при проносе через C меняют свои знаки, в обоих случаях мы имеем $\Gamma_{2\alpha-1} C = -C \Gamma_{2\alpha-1}$. Проводя аналогичные рассуждения для $\Gamma_{2\alpha}$, мы получаем $\Gamma_{2\alpha} C = C \Gamma_{2\alpha}$, что дает $\Gamma_m C = (-1)^m C \Gamma_m$, и с учетом (6.3.3) это доказывает равенство (6.3.11) в случае матрицы C . Соотношения (6.3.12) следуют из (6.3.5), (6.3.6) и (6.3.4). ■

Для дальнейшего нам необходимо рассмотреть эквивалентность представления ρ и сопряженных к нему представлений ρ', ρ'' (6.3.1) вещественных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ не фиксируя при этом явный вид этих представлений. Мы рассмотрим отдельно четный $(p+q) = 2\nu$ и нечетный $(p+q) = (2\nu+1)$ случаи.

1. Матрицы сопряжения для алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в четном случае $(p+q) = 2\nu$.

Пусть мы имеем набор 2ν -мерных матриц $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2\nu}\}$, которые реализуют некоторое неприводимое представление ρ образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ ($p+q = 2\nu$) и удовлетворяют структурным соотношениям (6.1.78). Определим неприводимые представления ρ_i алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ как отображения образующих

$$\gamma_m \xrightarrow{\rho_1} \gamma_m^\dagger, \quad \gamma_m \xrightarrow{\rho_2} -\gamma_m^\top, \quad \gamma_m \xrightarrow{\rho_3} -\gamma_m^*, \quad (6.3.13)$$

которые сохраняют соотношения (6.1.78) и доопределяются на всей алгебре $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ как гомоморфизм: $\rho_i(a \cdot b) = \rho_i(a) \cdot \rho_i(b)$ (а не антигомоморфизм: $\rho_i(a \cdot b) = \rho_i(b) \cdot \rho_i(a)$, каковым являются операции транспонирования и эрмитового сопряжения). Согласно теореме Паули все неприводимые представления ρ_i будут эквивалентны представлению ρ , поэтому должны существовать матрицы $\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ такие, что

$$\begin{aligned} \gamma_k^\dagger &= \mathbf{D}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \mathbf{D}, \quad \gamma_k^\top = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \mathbf{C}, \quad \gamma_k^* = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \mathbf{B}, \\ k &= 1, \dots, 2\nu. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Знак минус во втором и третьем отображении (6.3.13), а также во второй и третьей формулах (6.3.14), введен для дальнейшего удобства; он легко убирается переопределениями $\mathbf{B} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}} = \gamma_{2\nu+1} \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} = \gamma_{2\nu+1} \mathbf{C}$, где использована матрица $\gamma_{2\nu+1} = (-i)^{\nu+q} \gamma_1 \cdots \gamma_{2\nu}$, введенная в (6.1.86). Как мы покажем ниже (см. раздел 6.4.2), этот знак оказывается важным при определении вещественных представлений алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, которые называются майорановскими.

Для матрицы $\gamma_{2\nu+1}$ с помощью соотношений (6.3.14) мы получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{2\nu+1}^\dagger &= (i)^{\nu+q} \mathbf{D}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu} \cdots \gamma_1 \cdot \mathbf{D} = (-1)^q \mathbf{D}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu+1} \cdot \mathbf{D}, \\ \gamma_{2\nu+1}^\top &= (-i)^{\nu+q} \mathbf{C}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu} \cdots \gamma_1 \cdot \mathbf{C} = (-1)^\nu \mathbf{C}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu+1} \cdot \mathbf{C}, \\ \gamma_{2\nu+1}^* &= (i)^{\nu+q} \mathbf{B}^{-1} \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_{2\nu} \cdot \mathbf{B} = (-1)^{\nu+q} \mathbf{B}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu+1} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

где, напомним, $(p + q) = 2\nu$. Отметим, что матрица \mathbf{C} , связывающая два представления γ_k и $-\gamma_k^\top$, называется **матрицей зарядового сопряжения**. Для частного представления (6.3.2) алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, которое было построено в Разделе 6.1.2, матрица \mathbf{C} согласно Утверждению 6.3.1 совпадает с матрицей эквивалентности C , заданной в (6.3.5).

Утверждение 6.3.2 Матрицы $\mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{C} \in \text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ фиксируются в (6.3.14) с точностью до умножения на константу и могут быть определены так, что

$$\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}, \quad \mathbf{C}^\top = \epsilon' \mathbf{C}, \quad (6.3.16)$$

$$\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* = \epsilon I_{2\nu}. \quad (6.3.17)$$

где постоянные $\epsilon' = \pm 1$ и $\epsilon = \pm 1$ не зависят от выбора представления γ_k , но зависят от значений p и q (зависят от сигнатуры метрики).

Доказательство. Пусть кроме матрицы \mathbf{V} имеется еще одна матрица $\bar{\mathbf{V}} \in \text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$, которая связывает представление γ_m и представление $-\gamma_m^*$:

$$\gamma_k^* = -\bar{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \bar{\mathbf{V}}, \quad (k = 1, \dots, 2\nu). \quad (6.3.18)$$

Сравнивая (6.3.18) и третье соотношение в (6.3.14), мы получаем

$$\gamma_m \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1} \gamma_m.$$

Так как представление ρ , реализованное матрицами γ_k , неприводимо, то согласно Лемме Шура мы имеем $\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \lambda I_{2\nu}$, где λ – некоторая константа. То есть $\bar{\mathbf{V}} = \lambda \mathbf{V}$, что и доказывает однозначность определения матрицы \mathbf{V} в (6.3.14) с точностью до ее умножения на константу λ . Доказательство того, что матрицы \mathbf{D} и \mathbf{C} также определены однозначно с точностью до умножения на константу проводится аналогично.

Эрмитово сопряжение первого и транспонирование второго соотношения в (6.3.14) дает $\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}^{-1} \gamma_k = \gamma_k \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}^{-1}$ и $\mathbf{C}^\top \mathbf{C}^{-1} \gamma_k = \gamma_k \mathbf{C}^\top \mathbf{C}^{-1}$, откуда в силу неприводимости представления ρ для матриц γ_m и согласно Лемме Шура мы имеем $\mathbf{D}^\dagger = \lambda \mathbf{D}$, $\mathbf{C}^\top = \epsilon' \mathbf{C}$, где $(\epsilon')^2 = 1$, а константа $\lambda = \lambda^{*-1}$ (фазовый множитель) переводится в единицу простой перенормировкой $\mathbf{D} \rightarrow \lambda^{-1/2} \mathbf{D}$. Из третьего соотношения в (6.3.14) и его комплексно сопряженного аналога легко вывести равенство $\gamma_m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* \gamma_m$ откуда, снова согласно лемме Шура, следуют тождества (6.3.17), где константа ϵ является вещественной и масштабным преобразованием матрицы \mathbf{V} эта константа может быть приведена к $\epsilon = \pm 1$.

Докажем теперь, что параметр ϵ в (6.3.17) не зависит от выбора представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (доказательство независимости параметра ϵ' в (6.3.16) от выбора представления проводится аналогично). Неприводимое представление $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, заданное матрицами γ_k , приводится к любому другому неприводимому представлению, заданному матрицами γ'_k , с помощью преобразования эквивалентности $\gamma'_k = T \gamma_k T^{-1}$. Для матриц γ'_k аналог третьего соотношения в (6.3.14) записывается в виде

$$(\gamma'_k)^* = T^* \gamma_k^* (T^{-1})^* = -(\bar{\mathbf{V}})^{-1} \gamma'_k \bar{\mathbf{V}}. \quad (6.3.19)$$

где

$$\bar{\mathbf{V}} = T \mathbf{V} (T^*)^{-1}, \quad (6.3.20)$$

является новой матрицей эквивалентности, связывающей представления γ'_k и $-\gamma'^*_k$. Для этой матрицы мы имеем

$$(\bar{\mathbf{B}})^* \cdot \bar{\mathbf{B}} = (T^* \mathbf{B}^* T^{-1}) (T \mathbf{B} (T^*)^{-1}) = T^* \mathbf{B}^* \mathbf{B} (T^*)^{-1} = \epsilon I_{2\nu},$$

что и доказывает сделанное выше утверждение. \blacksquare

Для того, чтобы определить еще один вариант зарядового сопряжения, а также ввести матрицы эквивалентности \mathbf{D}' , \mathbf{C}' и \mathbf{B}' в нечетном случае $N = p + q = 2\nu + 1$, нам понадобится следующий факт.

Утверждение 6.3.3 Пусть матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_k^\dagger &= -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \tilde{\mathbf{D}}, & \gamma_k^\top &= \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \tilde{\mathbf{C}}, & \gamma_k^* &= \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \tilde{\mathbf{B}}, \\ & \forall k \in (1, \dots, 2\nu), \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

а матрицы \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} удовлетворяют (6.3.14), (6.3.16) и (6.3.17). Тогда $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ определены в (6.3.21) с точностью до умножения на константу и могут быть зафиксированы так, что

$$\tilde{\mathbf{D}} = \gamma_{2\nu+1} \mathbf{D}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \gamma_{2\nu+1} \mathbf{C}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \gamma_{2\nu+1} \mathbf{B}. \quad (6.3.22)$$

Матрицы (6.3.22) подчиняются соотношениям

$$\tilde{\mathbf{D}}^\dagger = (-1)^q \tilde{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\mathbf{C}}^\top = \tilde{\epsilon}' \tilde{\mathbf{C}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^* \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^* = \tilde{\epsilon} I, \quad (6.3.23)$$

где параметры

$$\tilde{\epsilon}' = \epsilon' (-1)^\nu, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon (-1)^{\nu+q}, \quad (6.3.24)$$

универсальны, то есть не зависят от выбора представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$.

Доказательство. Доказательство того, что матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ определены в (6.3.21) однозначно с точностью до умножения на константу, а также доказательство универсальности параметров $\tilde{\epsilon}'$ и $\tilde{\epsilon}$ проводится так же как и доказательство аналогичных фактов в Утверждении 6.3.2. Представление (6.3.22) для матриц $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и соотношения (6.3.23) проверяются прямыми вычислениями с использованием равенств (6.3.14), (6.3.15), (6.3.16) и (6.3.17). \blacksquare

Пример. Для частного представления (6.3.2) алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, матрица $\tilde{\mathbf{C}}$ согласно Утверждению 6.3.1 пропорциональна матрице эквивалентности \mathbf{C}' , заданной в (6.3.6). Напомним, что в этом представлении справедливо равенство $\mathbf{C} = C$, поэтому в силу тождеств (6.3.8) мы имеем

$$\epsilon' = (-1)^{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor}, \quad \tilde{\epsilon}' = (-1)^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}. \quad (6.3.25)$$

Легко убедиться в том, что эти параметры связаны соотношением $\tilde{\epsilon}' = \epsilon' (-1)^\nu$, которое было указано в Утверждении 6.3.3.

Замечание 1. Преобразования $\gamma_k \rightarrow i \gamma_k$, выполненные для некоторых k , соответствуют изменению сигнатуры метрики в определяющих соотношениях (6.1.78) (то есть изменению параметра сигнатуры $s = p - q$). Они не меняют соотношения (6.3.14),

(6.3.21) для матриц \mathbf{C} и $\tilde{\mathbf{C}}$. Поэтому естественно, что параметры ϵ' и $\tilde{\epsilon}'$ в (6.3.25) зависят только от размерности пространства $N = 2\nu = p + q$ и не зависят от p и q по отдельности. Отметим также, что если мы сделаем преобразование $\gamma_k \rightarrow i\gamma_k$ для всех $k \in (1, \dots, N)$ одновременно, что переводит образующие алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в образующие алгебры $\mathcal{C}\ell_{(q,p)}$, то в соотношениях (6.3.14), (6.3.21) для матриц \mathbf{D}, \mathbf{B} и $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ знаки в правых частях поменяются на противоположные. Это означает, что при замене $p \leftrightarrow q$ (то есть, когда временные координаты в $\mathbb{R}^{p,q}$ меняются местами с пространственными) матрицы \mathbf{D}, \mathbf{B} для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ становятся матрицами $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(q,p)}$ и наоборот (при этом во всех формулах происходит замена $\epsilon \leftrightarrow \tilde{\epsilon}$).

Параметры ϵ, ϵ' и $\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}'$ в формулах (6.3.16), (6.3.17) и (6.3.23) зависят только от значений p, q и ν и играют важную роль в теории. Далее мы покажем (см. подраздел 6.4.2), что значения параметров ϵ и $\tilde{\epsilon}$ говорят нам о возможности, или невозможности, определения майорановских спиноров, на которых реализуются вещественные представления алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ и спинорных групп $\mathbf{Spin}(p, q)$. Значение параметра ϵ' определяет тип группы (симплектическая или ортогональная), в которую вкладывается группа $\mathbf{Spin}(p, q)$.

- *Задача 186.* С учетом (6.3.14) и (6.3.16) доказать тождества

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^{-1}\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r})^\dagger &= (-1)^{r(r-1)/2} (\mathbf{D}^{-1}\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r}), \\ (\mathbf{C}^{-1}\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r})^\top &= \epsilon' (-1)^{r(r+1)/2} (\mathbf{C}^{-1}\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r}), \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

где $m_1 < m_2 < \dots < m_r$. Эти тождества, в частности, означают, что все матрицы $(\mathbf{D}^{-1}\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r})$ либо эрмитовы, либо антиэрмитовы, а все матрицы $(\mathbf{C}^{-1}\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r})$ либо симметричны, либо антисимметричны.

Соотношение $\gamma^\dagger = \gamma^{*\top}$ предполагает связь между матрицами \mathbf{B}, \mathbf{D} и \mathbf{C} .

Утверждение 6.3.4 Матрица \mathbf{B} выражается через матрицы \mathbf{D} и \mathbf{C} двумя способами:

$$\mathbf{B} = \beta_1 \mathbf{C} (\mathbf{D}^{-1})^\top, \quad \mathbf{B} = \beta_2 \mathbf{D} (\mathbf{C}^{-1})^\dagger, \quad (6.3.27)$$

где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ — некоторые константы, которые связаны равенством

$$\beta_1^* \beta_2 = \epsilon' \in \mathbb{R}. \quad (6.3.28)$$

Пользуясь остаточным произволом в определении матриц \mathbf{D}, \mathbf{C} и \mathbf{B} , константы β_1, β_2 всегда можно зафиксировать так, что

$$\beta_1 = \epsilon', \quad \beta_2 = 1. \quad (6.3.29)$$

Доказательство. Связь между матрицами \mathbf{B}, \mathbf{D} и \mathbf{C} можно реализовать двумя способами, записав $\gamma_k^* = (\gamma_k^\top)^\dagger = (\gamma_k^\dagger)^\top$, откуда сразу же следуют соотношения (6.3.27). Равенство (6.3.28) вытекает из соотношения (6.3.17), если в него подставить (6.3.27) и учесть (6.3.16):

$$\epsilon I_{2\nu} = \mathbf{B}^* \mathbf{B} = \beta_1^* \beta_2 \mathbf{C}^* (\mathbf{D}^{-1})^\dagger \mathbf{D} (\mathbf{C}^{-1})^\dagger = \beta_1^* \beta_2 \epsilon' I_{2\nu}. \quad (6.3.30)$$

Заметим, что в определении (6.3.16), (6.3.17) для матриц \mathbf{C} , \mathbf{D} и \mathbf{B} остается произвол

$$\mathbf{B} \rightarrow e^{i\phi} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} \rightarrow a \mathbf{D}, \quad \mathbf{C} \rightarrow b \mathbf{C},$$

где $\phi, a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{C}$. С помощью этого произвола константы β_1 и β_2 в (6.3.27) можно всегда зафиксировать так, как указано в (6.3.29). ■

Из соотношений (6.3.27), (6.3.28) с учетом (6.3.16) следует тождество

$$\mathbf{B}^\dagger \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} = (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^\dagger \mathbf{B} = \beta_2^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} = \beta_2^* \beta_1 (\mathbf{D}^{-1})^\top = \epsilon \epsilon' (\mathbf{D}^{-1})^\top, \quad (6.3.31)$$

которое понадобится нам в дальнейшем.

- *Задача 187.* Проверить для матриц $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ выполнение следующих тождеств

$$\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{C}^\dagger = \beta_2 \tilde{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{D}}^\top = (-1)^\nu \beta_1 \mathbf{C}.$$

Утверждение 6.3.5 *Инвариантные параметры ϵ' и ϵ в (6.3.16) и (6.3.17) принимают следующие значения:*

$$\epsilon' = (-1)^k, \quad \text{где } k = \left[\frac{\nu+1}{2} \right] \Leftrightarrow \nu = 2k - 1, 2k; \quad (6.3.32)$$

$$\epsilon = (-1)^{k+\beta}, \quad \text{где } \begin{cases} 1.) k = \left[\frac{\nu+1}{2} \right], & \text{если } p = 2\beta - 1, \\ 2.) k = \left[\frac{\nu}{2} \right], & \text{если } p = 2\beta; \end{cases} \quad (6.3.33)$$

β — целые числа и $[x]$ — целая часть числа x . Пусть $s = (p - q)$ — параметр сигнатуры метрики, тогда значения (6.3.33) для параметра ϵ кратко записываются в виде

$$\epsilon = +1, \quad \text{если } s = -2, 0 \pmod{8}; \quad \epsilon = -1, \quad \text{если } s = 2, 4 \pmod{8}. \quad (6.3.34)$$

Доказательство. Так как параметры ϵ' и ϵ не зависят от выбора неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ ($p + q = 2\nu$), то проще всего вычислить эти параметры в некотором фиксированном представлении. Выберем 2^ν -мерное неприводимое представление ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$, заданное в (6.3.2) и построим представление образующих $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, воспользовавшись отображением (6.1.77). Так как в представлении (6.3.2) матрицы Γ_k эрмитовы, то для матриц γ_k , заданных в (6.1.77), мы имеем

$$\gamma_1^\dagger = \gamma_1, \dots, \gamma_p^\dagger = \gamma_p, \quad \gamma_{p+1}^\dagger = -\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q}^\dagger = -\gamma_{p+q}. \quad (6.3.35)$$

Таким образом, в качестве матрицы \mathbf{D} , которая осуществляет первое преобразование в (6.3.14), мы можем выбрать

$$1.) \quad \mathbf{D} = (-i)^\beta \Gamma_1 \cdots \Gamma_p \cdot \Gamma_{N+1} = I_2^{\otimes \beta} \otimes \sigma_3^{\otimes (\nu-\beta)}, \quad \text{если } p = 2\beta, \quad (6.3.36)$$

$$2.) \quad \mathbf{D} = (-i)^{(\beta-1)} \Gamma_1 \cdots \Gamma_p = I_2^{\otimes (\beta-1)} \otimes \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes (\nu-\beta)}, \quad \text{если } p = 2\beta - 1.$$

В обоих случаях нормировка подобрана так, чтобы для \mathbf{D} выполнялось соотношение (6.3.16). Из тождеств (6.3.11) следует, что в качестве матрицы \mathbf{C} , которая осуществляет второе преобразование в (6.3.14), мы можем выбрать матрицу (6.3.5) с условиями (6.3.8):

$$1.) \quad \mathbf{C} = (\sigma_2 \otimes \sigma_1)^{\otimes k}, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^* = (-1)^{\left[\frac{\nu+1}{2} \right]} \mathbf{C}, \quad \text{если } \nu = 2k; \quad (6.3.37)$$

$$2.) \quad \mathbf{C} = (\sigma_2 \otimes \sigma_1)^{\otimes k} \otimes \sigma_2, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^* = (-1)^{\left[\frac{\nu+1}{2} \right]} \mathbf{C}, \quad \text{если } \nu = 2k + 1.$$

Сравнивая с (6.3.16), получаем, что параметр ϵ' определяется по формуле (6.3.32). Во всех случаях, рассмотренных в (6.3.36) и (6.3.37), матрицы \mathbf{D} и \mathbf{C} удовлетворяют тождествам

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{C}^2 = I_{2\nu}, \quad \mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D}, \quad \mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}. \quad (6.3.38)$$

Согласно второму соотношению из (6.3.27), где как было указано выше мы можем положить $\beta_2 = 1$, для матрицы \mathbf{B} имеем выражение:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{C}^{-1})^\dagger = \mathbf{D} \cdot \mathbf{C},$$

с помощью которого, а также учитывая (6.3.17) и (6.3.37), получаем условие

$$\begin{aligned} \epsilon I_{2\nu} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* = \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{C}^* &= (-1)^{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} &= \epsilon (-1)^{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

С другой стороны, правило перестановки $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \eta \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$ можно вывести, пользуясь явными выражениями (6.3.36) и (6.3.37) для \mathbf{D} и \mathbf{C} . В результате: 1.) для $p = 2\beta - 1$, если β – четное, мы имеем $\eta = +1$, а если β – нечетное, то $\eta = -1$, поэтому $\eta = (-1)^\beta$; 2.) для $p = 2\beta$ мы получаем $\eta = (-1)^{\nu-\beta}$. Учитывая равенство $\eta = (-1)^{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} \epsilon$, вытекающее из (6.3.39), мы приходим к значениям для ϵ , указанным в (6.3.33).

Заметим, что $\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor$ – четное (нечетное), если $\nu = 3, 4 \pmod{4}$ ($\nu = 1, 2 \pmod{4}$). Соответственно $\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor$ – четное (нечетное), если $\nu = 0, 1 \pmod{4}$ ($\nu = 2, 3 \pmod{4}$). Тогда, согласно (6.3.33), параметр ϵ равен $+1$ в следующих четырех случаях:

$$\begin{aligned} p = 1 \pmod{4}, \quad N = 2, 4 \pmod{8}; \quad p = 3 \pmod{4}, \quad N = 6, 8 \pmod{8}; \\ p = 0 \pmod{4}, \quad N = 0, 2 \pmod{8}; \quad p = 2 \pmod{4}, \quad N = 4, 6 \pmod{8}. \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

Эти случаи можно записать единым образом

$$p = k \pmod{4}, \quad N = 2k, 2k + 2 \pmod{8} \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (6.3.41)$$

Вводя (см. Задачу 165) параметр сигнатуры $s = p - q = 2p - N$, условия (6.3.41) переписываются совсем просто, как $s = 0, 6 \pmod{8}$, и мы приходим к (6.3.34). ■

Замечание 2. Для произведения $\epsilon \cdot \epsilon'$, которое фигурирует в (6.3.28) и так же, как и сами параметры ϵ и ϵ' , не зависит от выбора представления γ -матриц, мы получаем с помощью (6.3.32) и (6.3.33) следующие значения

$$1.) \epsilon \cdot \epsilon' = (-1)^\beta, \quad \text{если } p = 2\beta - 1; \quad 2.) \epsilon \cdot \epsilon' = (-1)^{\beta+\nu}, \quad \text{если } p = 2\beta. \quad (6.3.42)$$

Подчеркнем, что равенство $\epsilon = +1$ является, как мы увидим ниже, условием существования майорановских спиноров^{6.8} — специального вещественного представления группы $\text{Spin}(p, q)$.

Примеры.

1.) Для любого неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, ассоциированной с

^{6.8}При этом будет существенно, что мы интерпретируем координаты (x^1, \dots, x^p) пространства $\mathbb{R}^{p,q}$, которые соответствуют положительной сигнатуре в метрике $\eta = I_{p,q}$, как временные координаты (см. Определение 6.2.4).

четномерным пространством $\mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q = 2\nu = N$), с помощью формул (6.3.25) и (6.3.32) мы получаем

$$\epsilon' = -1 \quad \text{для } N = 2, 4 \bmod(8), \quad \epsilon' = +1 \quad \text{для } N = 6, 8 \bmod(8). \quad (6.3.43)$$

$$\tilde{\epsilon}' = -1 \quad \text{для } N = 4, 6 \bmod(8), \quad \tilde{\epsilon}' = +1 \quad \text{для } N = 0, 2 \bmod(8). \quad (6.3.44)$$

2.) Для случая евклидова пространства \mathbb{R}^N , где $N = 2\nu$, все координаты (измерения) являются согласно определению **6.2.4** "временными" и мы имеем $p = 2\beta = 2\nu$, или $\beta = \nu$. Поэтому, для любого неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_N$ параметры ϵ и $\tilde{\epsilon}$ с помощью формул (6.3.33), (6.3.34) и $\tilde{\epsilon} = \epsilon(-1)^{\nu+q}$ (см. (6.3.24)) фиксируются следующим образом

$$\begin{aligned} \epsilon = -1 \quad \text{для } N = 2, 4 \bmod(8), \quad \epsilon = +1 \quad \text{для } N = 6, 8 \bmod(8), \\ \tilde{\epsilon} = -1 \quad \text{для } N = 4, 6 \bmod(8), \quad \tilde{\epsilon} = +1 \quad \text{для } N = 2, 8 \bmod(8). \end{aligned}$$

Заметим, что для этого случая матрица \mathbf{D} из первого пункта в (6.3.36) равна единичной матрице, что естественно, так как представление (6.3.2) алгебры $\mathcal{C}\ell_N$ – эрмитово.

3.) Для случая четномерного пространства $\mathbb{R}^{0,N}$, когда все координаты (измерения) являются "пространственными" ($p = 2\beta = 0$, $q = 2\nu$), мы, согласно (6.3.33), (6.3.34) и (6.3.24), имеем^{6,9}

$$\begin{aligned} \epsilon = +1 \quad \text{для } N = 2, 8 \bmod(8); \quad \epsilon = -1 \quad \text{для } N = 4, 6 \bmod(8), \\ \tilde{\epsilon} = +1 \quad \text{для } N = 6, 8 \bmod(8); \quad \tilde{\epsilon} = -1 \quad \text{для } N = 2, 4 \bmod(8). \end{aligned}$$

В этом случае представление образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{0,N}$ (полученное из представления (6.3.2) с помощью замены $\gamma_k = i\Gamma_k$) антиэрмитово: $\gamma_k^\dagger = -\gamma_k$, и согласно (6.3.36) мы имеем $\mathbf{D} = \Gamma_{N+1} = \sigma_3^{\otimes \nu}$.

4.) Для случая четномерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$, где $N = 2\nu$, мы имеем $p = 2\beta - 1 = 1$, или $\beta = 1$. Поэтому для любого неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{1,N-1}$ параметры ϵ и $\tilde{\epsilon}$ с помощью формул (6.3.33), (6.3.34) и (6.3.24) фиксируются следующим образом

$$\begin{aligned} \epsilon = +1 \quad \text{для } N = 2, 4 \bmod(8), \quad \epsilon = -1 \quad \text{для } N = 6, 8 \bmod(8), \\ \tilde{\epsilon} = +1 \quad \text{для } N = 2, 8 \bmod(8), \quad \tilde{\epsilon} = -1 \quad \text{для } N = 4, 6 \bmod(8), \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

и в представлении (6.3.36) мы имеем $\mathbf{D} = \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes(\nu-1)}$. Соответственно, учитывая Замечание **1**, сформулированное после Утверждения **6.3.3**, для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(N-1,1)}$, ассоциированной с $\mathbb{R}^{N-1,1}$, где $N = 2\nu$, мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} = +1 \quad \text{для } N = 2, 4 \bmod(8), \quad \tilde{\epsilon} = -1 \quad \text{для } N = 6, 8 \bmod(8), \\ \epsilon = +1 \quad \text{для } N = 2, 8 \bmod(8), \quad \epsilon = -1 \quad \text{для } N = 4, 6 \bmod(8). \end{aligned} \quad (6.3.46)$$

^{6,9} Данные формулы получаются из формул случая **2** заменой $\epsilon \leftrightarrow \tilde{\epsilon}$, что полностью согласуется с Замечанием **1**, сформулированным после Утверждения **6.3.3**.

- *Задача 188.* Доказать, что для любого неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{2,N-2}$, ассоциированной с четномерным пространством $\mathbb{R}^{2,N-2}$, мы имеем

$$\begin{aligned} \epsilon &= -1 \quad \text{для } N = 2, 8 \pmod{8}, & \epsilon &= +1 \quad \text{для } N = 4, 6 \pmod{8}, \\ \tilde{\epsilon} &= -1 \quad \text{для } N = 6, 8 \pmod{8}, & \tilde{\epsilon} &= +1 \quad \text{для } N = 2, 4 \pmod{8}. \end{aligned}$$

Вывести отсюда значения параметров $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ для представлений алгебры $\mathcal{C}\ell_{N-2,2}$, ассоциированной с четномерным пространством $\mathbb{R}^{N-2,2}$.

2. Матрицы сопряжения для алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в нечетном случае $p+q=2\nu+1$.

Пусть для нечетной размерности $N=(p+q)=(2\nu+1)$ матрицы $(\pm\gamma_k) \in \text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ реализуют для образующих Γ_k алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ с определяющими соотношениями (6.1.2) неприводимые представления ρ_{\pm} :

$$\rho_+(\Gamma_k) = \gamma_k, \quad \rho_-(\Gamma_k) = -\gamma_k, \quad k = 1, \dots, 2\nu+1.$$

Представление ρ_- алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ неэквивалентно представлению ρ_+ , так как для центрального элемента (6.1.19)

$$\Gamma_{N+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+q)} \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2\nu+1},$$

мы имеем равенство $\rho_+(\Gamma_{N+1}) = -\rho_-(\Gamma_{N+1})$. Как было показано выше, в случае нечетной размерности $N=p+q=2\nu+1$ существуют всего два неэквивалентных представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (см. Утверждение 6.1.3 и обсуждение после него; явная конструкция таких представлений дана в (6.1.65), (6.1.66)), поэтому восемь представлений, реализованных образующими

$$\{\pm\gamma_k\}, \quad \{\pm\gamma_k^\dagger\}, \quad \{\pm\gamma_k^T\}, \quad \{\pm\gamma_k^*\},$$

разбиваются на два класса эквивалентности, один из которых включает представление ρ_+ , а второй $-\rho_-$. Укажем класс эквивалентности, который включает изначальное представление ρ_+ , образованное матрицами $\{+\gamma_k\}$:

1. ν – четное ($N=2\nu+1=1 \pmod{4}$), q – четное : $\{\gamma_k, \gamma_k^\dagger, \gamma_k^T, \gamma_k^*\}$;
2. ν – четное ($N=1 \pmod{4}$), q – нечетное : $\{\gamma_k, -\gamma_k^\dagger, \gamma_k^T, -\gamma_k^*\}$;
3. ν – нечетное ($N=3 \pmod{4}$), q – четное : $\{\gamma_k, \gamma_k^\dagger, -\gamma_k^T, -\gamma_k^*\}$;
4. ν – нечетное ($N=3 \pmod{4}$), q – нечетное : $\{\gamma_k, -\gamma_k^\dagger, -\gamma_k^T, \gamma_k^*\}$.

(6.3.47)

Этот результат сразу же следует из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_1^\dagger \gamma_2^\dagger \cdots \gamma_{2\nu+1}^\dagger &= (-1)^q \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2\nu+1}, & \gamma_1^T \gamma_2^T \cdots \gamma_{2\nu+1}^T &= (-1)^\nu \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2\nu+1}, \\ \gamma_1^* \gamma_2^* \cdots \gamma_{2\nu+1}^* &= (-1)^{\nu+q} \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2\nu+1}, \end{aligned} \quad (6.3.48)$$

которые вытекают из (6.3.14), (6.3.15) для случая $(\gamma_{2\nu+1})^2 = I$. Эти же соотношения выполняются и для случая $(\gamma_{2\nu+1})^2 = -I$, что легко проверить, если сделать в (6.3.15) замену $\gamma_{2\nu+1} \rightarrow (-i)\gamma_{2\nu+1}$, $q \rightarrow q+1$.

Отметим, что в четномерном случае выбор знаков в правых частях (6.3.14) изменялся домножением операторов \mathbf{D} , \mathbf{V} и \mathbf{C} слева на матрицу $\gamma_{2\nu+1}$. В нечетномерном случае, в силу неэквивалентности представлений $\{\gamma_k\}$ и $\{-\gamma_k\}$, в соотношениях (6.3.14) знаки фиксируются, и согласно (6.3.47) эти соотношения переписываются следующим образом (сравните с (6.3.15))

$$\gamma_k^\dagger = (-1)^q \mathbf{D}'^{-1} \gamma_k \mathbf{D}', \quad \gamma_k^\top = (-1)^\nu \mathbf{C}'^{-1} \gamma_k \mathbf{C}', \quad \gamma_k^* = (-1)^{\nu+q} \mathbf{V}'^{-1} \gamma_k \mathbf{V}',$$

$$k = 1, \dots, p+q = 2\nu+1. \quad (6.3.49)$$

Утверждение 6.3.6 Пусть операторы \mathbf{D} , \mathbf{V} и \mathbf{C} зафиксированы в (6.3.14) для случая с четным числом измерений $N-1 = 2\nu$. Пусть матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ заданы в (6.3.22). Тогда матрицы \mathbf{D}' , \mathbf{V}' и \mathbf{C}' , определяющие эквивалентность (6.3.49) в нечетномерном случае $N = p+q = 2\nu+1$, представляются в виде

1. ν – четное ($N = 1 \pmod{4}$), q – четное : $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, $\mathbf{V}' = \tilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{C}}$;
 2. ν – четное ($N = 1 \pmod{4}$), q – нечетное : $\mathbf{D}' = \tilde{\mathbf{D}}$, $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, $\mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{C}}$;
 3. ν – нечетное ($N = 3 \pmod{4}$), q – четное : $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$;
 4. ν – нечетное ($N = 3 \pmod{4}$), q – нечетное : $\mathbf{D}' = \tilde{\mathbf{D}}$, $\mathbf{V}' = \tilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$.
- (6.3.50)

Доказательство. Пользуясь соотношениями (6.3.14) и (6.3.15) легко показать, что для нечетномерного случая $N = (p+q) = 2\nu+1$, эквивалентности 1.)– 4.) в (6.3.47) задаются матрицами \mathbf{D} , \mathbf{V} , \mathbf{C} , $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ и $\tilde{\mathbf{V}}$ следующим образом:

- 1.) $\gamma_k^\dagger = \mathbf{D}^{-1} \gamma_k \mathbf{D}$, $\gamma_k^\top = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{C}}$, $\gamma_k^* = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{V}}$
- 2.) $\gamma_k^\dagger = -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{D}}$, $\gamma_k^\top = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{C}}$, $\gamma_k^* = -\mathbf{V}^{-1} \gamma_k \mathbf{V}$
- 3.) $\gamma_k^\dagger = \mathbf{D}^{-1} \gamma_k \mathbf{D}$, $\gamma_k^\top = -\mathbf{C}^{-1} \gamma_k \mathbf{C}$, $\gamma_k^* = -\mathbf{V}^{-1} \gamma_k \mathbf{V}$
- 4.) $\gamma_k^\dagger = -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{D}}$, $\gamma_k^\top = -\mathbf{C}^{-1} \gamma_k \mathbf{C}$, $\gamma_k^* = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{V}}$.

Сравнивая эти соотношения с (6.3.49), мы получаем (6.3.50). ■

В нечетномерном случае $N = (p+q) = 2\nu+1$ имеет место утверждение, аналогичное 6.3.2.

Утверждение 6.3.7 Матрицы \mathbf{D}' , \mathbf{V}' , $\mathbf{C}' \in \text{Mat}_{2\nu}(\mathbb{C})$ фиксируются в (6.3.49) с точностью до умножения на константу и могут быть определены так, что

$$\mathbf{D}'^\dagger = (-1)^q \mathbf{D}', \quad \mathbf{C}'^\top = \epsilon' \mathbf{C}', \quad (6.3.51)$$

$$\mathbf{V}'^* \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{V}'^* = \epsilon I_{2\nu}. \quad (6.3.52)$$

где постоянные $\epsilon' = \pm 1$ и $\epsilon = \pm 1$ принимают те же значения, что и в случае четномерного пространства $\mathbb{R}^{p-1,q}$ на единицу меньшей размерности, ($(p-1)+q = 2\nu$ (см. (6.3.16) и (6.3.17)). Таким образом, значения параметров ϵ' и ϵ не зависят от выбора представления $\gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ (но зависят от значений p и q). Кроме того, для матриц \mathbf{D}' , \mathbf{V}' и \mathbf{C}' имеют место тождества (сравните с (6.3.27), (6.3.28))

$$\mathbf{V}' = \beta'_1 \mathbf{C}' (\mathbf{D}'^{-1})^\top, \quad \mathbf{V}' = \beta'_2 \mathbf{D}' (\mathbf{C}'^{-1})^\dagger, \quad (6.3.53)$$

где параметры β'_1 и β'_2 связаны соотношением $(\beta'_1)^* \beta'_2 = \epsilon' (-1)^q$.

Доказательство. То, что матрицы \mathbf{D}' , \mathbf{V}' , \mathbf{C}' фиксируются в (6.3.49) с точностью до умножения на константу, доказывается так же, как и аналогичный факт про матрицы \mathbf{D} , \mathbf{V} , \mathbf{C} из Утверждения 6.3.2. Соотношения (6.3.51), (6.3.52) следуют из (6.3.16), (6.3.17), (6.3.23) и определений (6.3.50) для матриц \mathbf{D}' , \mathbf{V}' и \mathbf{C}' . Докажем, например, соотношение (6.3.52). Если $(\nu+q)$ нечетно, то, согласно (6.3.50), в качестве матрицы \mathbf{V}' в (6.3.49) выступает матрица \mathbf{V} из (6.3.14), соответствующая четному числу измерений $(p-1)+q=2\nu$, и равенство (6.3.52) просто совпадает с тождеством (6.3.17). В случае, когда $(\nu+q)$ четно, в качестве матрицы \mathbf{V}' в (6.3.49), согласно (6.3.50), необходимо выбрать матрицу $\tilde{\mathbf{V}}$. При этом с учетом (6.3.23) мы также имеем

$$\mathbf{V}'^* \cdot \mathbf{V}' = \tilde{\mathbf{V}}^* \tilde{\mathbf{V}} = (-1)^{\nu+q} \epsilon I_{2\nu} = \epsilon I_{2\nu} .$$

Таким образом, параметр ϵ в нечетномерном случае $N = p + q = 2\nu + 1$ совпадает с параметром ϵ в четномерном случае $N - 1 = (p - 1) + q = 2\nu$.

Наконец, тождества (6.3.53) легко проверяются с помощью (6.3.49), а связь $\beta_1'^* \beta_2' = \epsilon \epsilon' (-1)^q$ следует из цепочки равенств, аналогичных (6.3.30). ■

Примеры.

1. Согласно Утверждению 6.3.7 параметр ϵ в нечетномерном случае $N = p + q = 2\nu + 1$ совпадает с параметром ϵ в четномерном случае $N - 1 = (p - 1) + q = 2\nu$. Тогда из условий (6.3.41) мы получаем, что $\epsilon = +1$ в нечетномерном случае $N = p + q = 2\nu + 1$, если выполнены условия

$$\begin{aligned} p - 1 = k \pmod{4}, \quad N - 1 = 2k, (2k + 2) \pmod{8} \quad (k = 0, 1, 2, 3) &\Rightarrow \\ s = (p - q) = 2p - N = -1, 1 \pmod{8}. \end{aligned} \tag{6.3.54}$$

При этом, так как четное и нечетное $(\nu + q)$ соответствует $(p - q) = 1 \pmod{4}$ и $(p - q) = -1 \pmod{4}$, то из доказательства Утверждения 6.3.7 следует, что

$$\begin{aligned} \epsilon = +1, \quad \gamma_k^* = \mathbf{V}'^{-1} \gamma_k \mathbf{V}' \quad \text{для} \quad (p - q) = 1 \pmod{8}, \\ \epsilon = +1, \quad \gamma_k^* = -\mathbf{V}'^{-1} \gamma_k \mathbf{V}' \quad \text{для} \quad (p - q) = -1 \pmod{8}. \end{aligned} \tag{6.3.55}$$

2. Для нечетномерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1, N-1}$, пользуясь примером 3.) после Утверждения 6.3.5, мы получаем

$$\epsilon = +1 \quad \text{для} \quad N = 1, 3 \pmod{8}; \quad \epsilon = -1 \quad \text{для} \quad N = 5, 7 \pmod{8}. \tag{6.3.56}$$

Условия для $\epsilon = +1$ в (6.3.56) согласуются с условиями (6.3.54).

6.3.2 Матрицы сопряжения \mathbf{D} , \mathbf{C} , \mathbf{V} и структура групп $\text{Spin}(p, q)$

Утверждение 6.3.8 Элементы U группы $CL(p, q)$ (см. Определение 6.2.1) в представлении, соответствующем неприводимому представлению ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, можно нормировать так, что для этих элементов будут выполняться соотношения

$$U^\dagger \mathbf{D}^{-1} U = \lambda(U) \mathbf{D}^{-1}, \quad U^\dagger \mathbf{C}^{-1} U = \mathbf{C}^{-1}, \tag{6.3.57}$$

где $\lambda(U) = \pm 1$, матрицы \mathbf{D} и \mathbf{C} для четного случая $(p+q) = 2\nu$ определены в (6.3.14), а для нечетного случая $(p+q) = (2\nu+1)$ необходимо сделать замену $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ и $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ и матрицы \mathbf{D}' и \mathbf{C}' удовлетворяют (6.3.49).

Доказательство. Вначале мы докажем второе равенство в (6.3.57) в четномерном случае (доказательство этого равенства для нечетномерного случая аналогично). Запишем преобразования (6.2.5) для образующих γ_m^T с учетом равенств (6.3.14) двумя способами. С одной стороны имеем

$$\gamma_m^T \rightarrow (U^{-1})^T \gamma_m^T U^T = -(U^{-1})^T \mathbf{C}^{-1} \gamma_m \mathbf{C} U^T, \quad (6.3.58)$$

а с другой стороны

$$\gamma_m^T \rightarrow (\gamma_k \Lambda_m^k)^T = -\mathbf{C}^{-1} \gamma_k \mathbf{C} \Lambda_m^k = -\mathbf{C}^{-1} U \gamma_m U^{-1} \mathbf{C}. \quad (6.3.59)$$

Сравнивая правые части в (6.3.58) и (6.3.59) получаем $[\mathbf{C} U^T \mathbf{C}^{-1} U, \gamma_m] = 0$, что согласно Лемме Шура дает

$$\mathbf{C} U^T \mathbf{C}^{-1} U = \rho_U I, \quad (6.3.60)$$

где $\rho_U \equiv \rho(U)$ — некоторая скалярная функция на группе $CL(p, q)$. Делая в (6.3.60) замену $U \rightarrow \rho_U^{1/2} U$, мы приходим ко второму соотношению в (6.3.57).

Аналогично, преобразование (6.2.5) для образующих γ_m^\dagger , записанное двумя способами с учетом равенств (6.3.14), дает $[\mathbf{D} U^\dagger \mathbf{D}^{-1} U, \gamma_m] = 0$ и согласно Лемме Шура мы имеем

$$\mathbf{D} U^\dagger \mathbf{D}^{-1} U = \lambda_U I, \quad (6.3.61)$$

где $\lambda_U \equiv \lambda(U)$ — некоторая функция на группе $CL(p, q)$ такая, что $\lambda_U \lambda_{U'} = \lambda_{U \cdot U'}$. Применяя эрмитово сопряжение к равенству (6.3.61) и учитывая $\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}$ (см. (6.3.16)), мы получаем $\lambda_U^* = \lambda_U$, то есть, λ_U — вещественное одномерное представление группы $CL(p, q)$. Вычислим детерминант от обеих частей соотношений (6.3.60) (с $\rho_U = 1$) и (6.3.61). В результате получаем равенства $\det(U)^2 = 1$ и $\det(U)^* \det(U) = (\lambda_U)^d$, где $d = 2\nu$ — размерность представления ρ . Из этих равенств следует, что $(\lambda_U)^d = 1$ и так как λ_U — вещественная функция, то мы имеем $\lambda_U = \pm 1$. Таким образом, мы приходим к первому соотношению в (6.3.57), где $\lambda_U = \pm 1$. ■

Замечание. Значение $\lambda_U = -1$ в первой формуле в (6.3.57) возникает, например, в том случае, когда элемент $U \in CL(p, q)$ соответствует отражениям при преобразованиях (6.2.5). В частности, в четномерном случае $N = (p + q) = 2\nu$ для сигнатуры $p = 1, q = N - 1$ самый длинный элемент $U = \gamma_{N+1} \in CL(p, q)$ генерирует матрицу $\Lambda = -I$ отражения всех координат, а так как $\mathbf{D} = \gamma_0$ (см. Раздел 6.4.3), то мы имеем $\lambda(U) \equiv \lambda_U = -1$ в первой формуле в (6.3.57).

Элементы U подгруппы $\mathbf{Spin}(p, q) \subset CL(p, q)$ по определению нормированы так, что они удовлетворяют (6.3.57) с $\lambda(U) = +1$:

$$U^\dagger \mathbf{D}^{-1} U = \mathbf{D}^{-1}, \quad U^T \mathbf{C}^{-1} U = \mathbf{C}^{-1}. \quad (6.3.62)$$

Например, пользуясь равенствами (6.3.14) в четном случае $p + q = 2\nu = N$ (и равенствами (6.3.49) в нечетном случае), мы получаем для образующих $\rho(\Sigma_{mn})$ алгебры Ли $\mathbf{spin}(p, q)$, следующие соотношения

$$\rho(\Sigma_{mn})^\dagger = -\mathbf{D}^{-1} \rho(\Sigma_{mn}) \mathbf{D}, \quad \rho(\Sigma_{mn})^T = -\mathbf{C}^{-1} \rho(\Sigma_{mn}) \mathbf{C}, \quad (6.3.63)$$

и следовательно элементы (6.2.30) группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ действительно удовлетворяют условиям (6.3.62). Приведем также правила для комплексного сопряжения матриц

$\rho(\Sigma_{mn}) \in \mathfrak{spin}(p, q)$ и $U \in \mathfrak{Spin}(p, q)$, которые вытекают из третьих соотношений в (6.3.14) и (6.3.49)

$$\rho(\Sigma_{mn})^* = \mathbf{B}^{-1} \rho(\Sigma_{mn}) \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} U^* = U \mathbf{B}, \quad (\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'), \quad (6.3.64)$$

и из третьего соотношения в (6.3.21):

$$\rho(\Sigma_{mn})^* = \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \rho(\Sigma_{mn}) \tilde{\mathbf{B}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}} U^* = U \tilde{\mathbf{B}}. \quad (6.3.65)$$

Согласно (6.3.16), (6.3.37) и (6.3.43) мы имеем

$$\mathbf{C}^T = -\mathbf{C} \quad \text{для } N = 2, 4 \pmod{8}, \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \quad \text{для } N = 6, 8 \pmod{8},$$

и из второго соотношения в (6.3.62) следует, что

$$U \in Sp'(2^\nu, \mathbb{C}) \quad \text{для } N = 2, 4 \pmod{8}, \quad U \in SO'(2^\nu, \mathbb{C}) \quad \text{для } N = 6, 8 \pmod{8}, \quad (6.3.66)$$

где $SO'(N, \mathbb{C})$ и $Sp'(2r, \mathbb{C})$ – группы, изоморфные соответственно ортогональным $SO(N, \mathbb{C})$ и симплектическим $Sp(2r, \mathbb{C})$ группам, определения которых даны в (5.1.13) и (5.3.1). Ниже для упрощения формул мы будем опускать штрихи в обозначениях изоморфных групп, то есть будем писать $SO(N, \mathbb{C})$ вместо $SO'(N, \mathbb{C})$ и так далее. В силу явного представления (6.3.36) для эрмитовой матрицы $\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}$, которая для $p \neq 2\nu$ всегда имеет $2^{\nu-1}$ собственных значений $+1$ и столько же собственных значений -1 , мы заключаем, что группа $\mathfrak{Spin}(p, q)$ вкладывается в псевдо-унитарную группу, изоморфную группе $SU(2^{\nu-1}, 2^{\nu-1})$. В специальном случае $p = 2\nu$ имеется эрмитово представление (6.3.2), в котором $\mathbf{D} = I_{2\nu}$, и мы получаем $\mathfrak{Spin}(2\nu) \subset SU(2^\nu)$, то есть группа $\mathfrak{Spin}(2\nu)$ – компактна.

Учитывая (6.3.66), мы имеем в случае $p \neq 2\nu = N$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Spin}(p, q) &\subset Sp(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^{\nu-1}, 2^{\nu-1}) \quad \text{для } N = 2, 4 \pmod{8}, \\ \mathfrak{Spin}(p, q) &\subset SO(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^{\nu-1}, 2^{\nu-1}) \quad \text{для } N = 6, 8 \pmod{8}. \end{aligned} \quad (6.3.67)$$

и в случае $p = 2\nu = N$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Spin}(2\nu) &\subset Sp(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^\nu) = USp(2^\nu) \quad \text{для } N = 2, 4 \pmod{8}, \\ \mathfrak{Spin}(2\nu) &\subset SO(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^\nu) = SO(2^\nu) \quad \text{для } N = 6, 8 \pmod{8}. \end{aligned} \quad (6.3.68)$$

Подчеркнем еще раз, что здесь $SO(2^\nu)$ – это группа, изоморфная группе вещественных ортогональных матриц с единичным детерминантом.

- **Задача 189.** Доказать, что $SO(N, \mathbb{C}) \cap SU(N) = SO(N)$. Указание: разложить матрицу $A \in SO(N, \mathbb{C}) \cap SU(N)$ на вещественную и мнимую части.

В четном случае $p + q = 2\nu$ рассмотрим специальное вейлевское представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$, в котором образующие имеют вид (6.1.82), (6.1.87)

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{s}_m \\ \bar{\mathbf{s}}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (m = 2, \dots, 2\nu), \quad \Rightarrow \quad \gamma_{2\nu+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (6.3.69)$$

где $\mathbf{1} \equiv I_{2\nu-1}$ и $2^{\nu-1}$ -мерные блоки \mathbf{s}_m и $\bar{\mathbf{s}}_m$ являются компонентами векторов (6.1.85)

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{2\nu}) = (I_{2\nu-1}, -i\Gamma'_1, \dots, -i\Gamma'_{p-1}, \Gamma'_p, \dots, \Gamma'_{2\nu-1}), \\ \bar{\mathbf{s}} &= (\bar{\mathbf{s}}_1, \dots, \bar{\mathbf{s}}_{2\nu}) = (I_{2\nu-1}, i\Gamma'_1, \dots, i\Gamma'_{p-1}, -\Gamma'_p, \dots, -\Gamma'_{2\nu-1}),\end{aligned}\quad (6.3.70)$$

и удовлетворяют соотношениям (6.1.83), (6.1.84). Здесь матрицы $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2\nu-1}\}$ реализуют эрмитово представление образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu-1}$, поэтому для блоков \mathbf{s}_m и $\bar{\mathbf{s}}_m$ мы имеем правило $\mathbf{s}_m^\dagger = \eta_{mm}\bar{\mathbf{s}}_m$, где η_{mm} — диагональные элементы метрики $\eta = I_{p,q}$. Из последнего правила следует, что $\gamma_m^\dagger = \eta_{mm}\gamma_m$ ($m = 1, \dots, 2\nu$). Пользуясь (6.3.70), представление (6.3.69) можно записать в компактном виде (см. (6.1.80), (6.1.81))

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sigma_1 \otimes \mathbf{1}, \quad \gamma_{m+1} = \sigma_2 \otimes \gamma'_m = \sigma_2 \otimes \Gamma'_m \quad (m = 1, \dots, p-1), \\ \gamma_{m+1} &= \sigma_2 \otimes \gamma'_m = i\sigma_2 \otimes \Gamma'_m \quad (m = p, \dots, 2\nu-1), \quad \Rightarrow \quad \gamma_{2\nu+1} = \sigma_3 \otimes \mathbf{1},\end{aligned}\quad (6.3.71)$$

где матрицы γ'_k реализуют представление образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p-1,q)}$, причем матрица $\gamma'_{2\nu-1}$ строится из образующих $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2\nu-2}\}$ так, как указано в (6.1.81).

Утверждение 6.3.9 Для алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ ($p+q = 2\nu$) в вейлевском представлении (6.3.69) операторы \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} , удовлетворяющие (6.3.14), (6.3.15):

$$\gamma_k^\dagger = \mathbf{D}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \mathbf{D}, \quad \gamma_k^T = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \mathbf{C}, \quad \gamma_k^* = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \mathbf{B}, \quad (6.3.72)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{2\nu+1}^\dagger &= (-1)^q \mathbf{D}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu+1} \cdot \mathbf{D}, \quad \gamma_{2\nu+1}^T = (-1)^\nu \mathbf{C}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu+1} \cdot \mathbf{C}, \\ \gamma_{2\nu+1}^* &= (-1)^{\nu+q} \mathbf{B}^{-1} \cdot \gamma_{2\nu+1} \cdot \mathbf{B},\end{aligned}\quad (6.3.73)$$

записываются в виде

$$1.) \quad q, p \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow \mathbf{D} = I_2 \otimes \mathbf{d}; \quad q, p \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \mathbf{D} = \sigma_1 \otimes \mathbf{g}; \quad (6.3.74)$$

$$2.) \quad \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow \mathbf{C} = \sigma_3 \otimes \mathbf{c}; \quad \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \mathbf{C} = i\sigma_2 \otimes \mathbf{h}; \quad (6.3.75)$$

$$3.) \quad \nu + q \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow \mathbf{B} = \sigma_3 \otimes \mathbf{b}; \quad \nu + q \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \mathbf{B} = i\sigma_2 \otimes \mathbf{f}; \quad (6.3.76)$$

где $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ — четные, а $(2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1)$ — нечетные неотрицательные числа; $\mathbf{d}, \mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{h}, \mathbf{b}, \mathbf{f} \in \text{Mat}_{2^{\nu-1}}(\mathbb{C})$ и

$$\mathbf{d}^\dagger = \mathbf{d}, \quad \mathbf{g}^\dagger = \mathbf{g}, \quad \mathbf{c}^T = \epsilon' \mathbf{c}, \quad \mathbf{h}^T = -\epsilon' \mathbf{h}, \quad \mathbf{b}^* \mathbf{b} = \epsilon I_{2^{\nu-1}} = -\mathbf{f}^* \mathbf{f}, \quad (6.3.77)$$

$$\begin{aligned}1.) \quad q, \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} &\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{d} \mathbf{c}^{\dagger-1}; \quad q, \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \mathbf{b} = -\mathbf{g} \mathbf{h}^{\dagger-1}; \\ 2.) \quad q, (\nu + 1) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} &\Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{d} \mathbf{h}^{\dagger-1}; \quad (q + 1), \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow \mathbf{f} = -\mathbf{g} \mathbf{c}^{\dagger-1}.\end{aligned}\quad (6.3.78)$$

Доказательство. Прежде чем мы перейдем к доказательству данного Утверждения отметим, что условия $(\nu + q) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $(\nu + q) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1$ эквивалентны условиям $s/2 \in 2\mathbb{Z}$ и $s/2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ соответственно, где $s = (p - q)$ — параметр сигнатуры. Из трех представлений (6.3.74), (6.3.75) и (6.3.76) мы докажем только (6.3.74). Доказательство представлений (6.3.75) и (6.3.76) проводится аналогично. Запишем матрицу \mathbf{D} в блочном виде $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}' & \mathbf{d}' \end{pmatrix}$, где $\mathbf{d}, \mathbf{g}, \mathbf{d}', \mathbf{g}' \in \text{Mat}_{2^{\nu-1}}(\mathbb{C})$. Тогда из первого соотношения в (6.3.72) при $k = 1$ с учетом (6.3.69) мы получаем $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$ и $\mathbf{g}' = \mathbf{g}$, после

чего из первого соотношения в (6.3.73) с учетом явной формулы (6.3.69) для $\gamma_{2\nu+1}$ следуют формулы (6.3.74). Далее, подставим матрицы (6.3.74), (6.3.75) и (6.3.76) в условия (6.3.16), (6.3.17) в результате получаем (6.3.77). Соотношения (6.3.78) вытекают из второй формулы в (6.3.27). ■

Следствие. Запишем соотношения (6.3.72) для гамма-матриц в представлении (6.3.71) и воспользуемся блочным видом (6.3.74)-(6.3.76) для \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} . В результате получаем

$$\begin{aligned} 1.) \quad q, p \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} &\Rightarrow \gamma_k^\dagger = \mathbf{d}^{-1}\gamma'_k\mathbf{d}; \quad q, p \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \gamma_k^\dagger = -\mathbf{g}^{-1}\gamma'_k\mathbf{g}; \\ 2.) \quad \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} &\Rightarrow \gamma_k^\Gamma = -\mathbf{c}^{-1}\gamma'_k\mathbf{c}; \quad \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \gamma_k^\Gamma = \mathbf{h}^{-1}\gamma'_k\mathbf{h}; \\ 3.) \quad \nu + q \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} &\Rightarrow \gamma_k^{*\prime} = -\mathbf{b}^{-1}\gamma'_k\mathbf{b}; \quad \nu + q \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow \gamma_k^{*\prime} = \mathbf{f}^{-1}\gamma'_k\mathbf{f}; \end{aligned} \quad (6.3.79)$$

где γ'_k ($k = 1, \dots, 2\nu - 2$) — представления образующих алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p-1, q-1)}$. Таким образом, матрицы \mathbf{d} , \mathbf{c} и \mathbf{b} (матрицы \mathbf{g} , \mathbf{h} и \mathbf{f} после домножения их слева на $\gamma'_{2\nu-1}$) являются соответственно аналогами матриц \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p-1, q-1)}$. В рассматриваемых случаях формулы (6.3.74)-(6.3.76) можно считать рекуррентными соотношениями, позволяющими строить матрицы \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p, q)}$ из соответствующих матриц \mathbf{d} , \mathbf{c} и \mathbf{b} (\mathbf{g} , \mathbf{h} и \mathbf{f}) для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p-1, q-1)}$.

- **Задача 190.** ★ Пусть матрицы Γ'_k ($k = 1, \dots, 2\nu - 2$) в (6.3.70) взяты в представлении (6.3.2) (с заменой $\nu \rightarrow \nu - 1$). Доказать, что в этом случае мы имеем

$$\begin{aligned} p = 2\beta : \mathbf{d} &= I_2^{\otimes(\beta-1)} \otimes \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes(\nu-\beta-1)} \quad (\beta = 1, \dots, \nu - 1), \quad \mathbf{d} = I_{2\nu-1} \quad (\beta = \nu), \\ p = 2\beta + 1 : \mathbf{g} &= \sigma_3^{\otimes\beta} \otimes I_2^{\otimes(\nu-\beta-1)} \quad (\beta = 1, \dots, \nu - 1), \end{aligned} \quad (6.3.80)$$

$$\mathbf{c} = (\sigma_2 \otimes \sigma_1)^{\otimes(k-1)} \otimes \sigma_2 \quad (\nu = 2k), \quad (6.3.81)$$

$$\mathbf{h} = (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^{\otimes k} \quad (\nu = 2k + 1).$$

- **Задача 191.** Проверить для представления (6.3.80), (6.3.81) выполнение соотношений (6.3.77) с параметрами ϵ , ϵ' заданными в (6.3.32), (6.3.33).

Согласно представлениям (6.3.74), (6.3.75) и (6.3.76) из Утверждения 6.3.9 и с учетом формул (6.3.62), (6.3.64) мы получаем следующие условия на блоки A и \bar{A} неприводимых и неэквивалентных представлений ρ' и ρ'' (см. Утверждение 6.2.7) элемента $U \in \text{Spin}(p, q)$, заданного в (6.2.38),

$$1.) \quad q, p \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow A^\dagger \mathbf{d} A = \mathbf{d}, \quad \bar{A}^\dagger \mathbf{d} \bar{A} = \mathbf{d}; \quad q, p \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow A^\dagger \mathbf{g} \bar{A} = \mathbf{g}; \quad (6.3.82)$$

$$2.) \quad \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow A^\Gamma \mathbf{c} A = \mathbf{c}, \quad \bar{A}^\Gamma \mathbf{c} \bar{A} = \mathbf{c}; \quad \nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 \Rightarrow A^\Gamma \mathbf{h} \bar{A} = \mathbf{h}; \quad (6.3.83)$$

$$\begin{aligned} 3.) \quad \nu + q \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} &\Rightarrow \mathbf{b} A^* = A \mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{b}} \bar{A}^* = \bar{A} \bar{\mathbf{b}}; \\ \nu + q \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1 &\Rightarrow \mathbf{f} \bar{A}^* = A \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} A^* = \bar{A} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (6.3.84)$$

Рассмотрим неприводимые $2^{\nu-1}$ -мерные представления Δ_+ и Δ_- группы $\text{Spin}(p, q)$, которые были определены в Утверждении 6.2.7, и обозначим контраградиентное к

Δ_{\pm} представление как $\tilde{\Delta}_{\pm}$, а комплексно сопряженные к Δ_{\pm} и $\tilde{\Delta}_{\pm}$ представления, как Δ_{\pm}^* и $\tilde{\Delta}_{\pm}^*$. Например, если A – элемент $U \in \text{Spin}(p, q)$ в представлении Δ_+ , то $\Delta_+^*(U) = A^*$, $\tilde{\Delta}_+(U) = (A^T)^{-1}$ и $\tilde{\Delta}_+^*(U) = (A^\dagger)^{-1}$. Тогда из соотношений (6.3.82) – (6.3.84) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 6.3.10 Для неприводимых представлений Δ_{\pm} группы $\text{Spin}(p, q)$ в случае $(p + q) = 2\nu$ имеют место следующие соотношения эквивалентности :

- 1.) $\Delta_+ = \tilde{\Delta}_+^*$, $\Delta_- = \tilde{\Delta}_-^*$ при четных p, q и $\Delta_- = \tilde{\Delta}_+^*$ при нечетных p, q ;
- 2.) $\Delta_+ = \tilde{\Delta}_+$, $\Delta_- = \tilde{\Delta}_-$ при четном ν и $\Delta_- = \tilde{\Delta}_+$ при нечетном ν ;
- 3.) $\Delta_+ = \Delta_+^*$, $\Delta_- = \Delta_-^*$ при четном $(\nu + q)$ (четном $(p - q)/2$) и $\Delta_- = \Delta_+^*$ при нечетном $(\nu + q)$ (нечетном $(p - q)/2$).

Отметим, что третий случай в Утверждении 6.3.10 вытекает из первых двух.

- **Задача 192.** Пользуясь явным видом матриц \mathbf{d} (6.3.80) и \mathbf{c} (6.3.81), а также соотношениями (6.3.82), (6.3.83) и значениями (6.3.32) параметра ϵ' , доказать, что

$$\begin{aligned} A, \bar{A} \in SU(2^{\nu-2}, 2^{\nu-2}) \quad (p = 2\beta, \quad 1 \leq \beta \leq \nu - 1), \quad A, \bar{A} \in SU(2^{\nu-1}) \quad (p = 2\nu), \\ A, \bar{A} \in Sp(2^{\nu-1}, \mathbb{C}) \quad \nu = 2 \bmod(4), \quad A, \bar{A} \in SO(2^{\nu-1}, \mathbb{C}) \quad \nu = 4 \bmod(4). \end{aligned}$$

Примеры.

1. Рассмотрим вейлевское представление (6.1.3) алгебры $\mathcal{Cl}_{(1,3)}$:

$$\gamma_0 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \gamma_1 = i\sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = i\sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma_3 = i\sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad (6.3.85)$$

для которого мы имеем $\gamma_m^\dagger = (-1)^{1+\delta_{m,0}}\gamma_m$, $\gamma_m^T = (-1)^m\gamma_m$, $\gamma_m^* = \gamma_m^{T\dagger} = (-1)^{\delta_{m,2}}\gamma_m$. Поэтому, исходя из формул (6.3.72), и согласно (6.3.74)–(6.3.76), где необходимо положить $p = 1, q = 3, \nu = 2$, мы получаем для матриц \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} следующие представления

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \sigma_1 \otimes \mathbf{g} = \sigma_1 \otimes I_2 = \gamma_0, \quad \mathbf{C} = \sigma_3 \otimes \mathbf{c} = -\sigma_3 \otimes \sigma_2 = \gamma_0\gamma_2, \\ \mathbf{B} = i\sigma_2 \otimes \mathbf{f} = i\sigma_2 \otimes \sigma_2 = \gamma_2. \end{aligned} \quad (6.3.86)$$

- **Задача 193.** Проверить для матриц (6.3.86) выполнение тождеств (6.3.27) и соотношений (6.3.16), (6.3.17) с параметрами $\epsilon = -\epsilon' = +1$.

Тогда согласно (6.3.82) – (6.3.84) матрицы A и \bar{A} , определяющие элемент $U \in \text{Spin}(1, 3)$ (см. (6.2.38)), удовлетворяют соотношениям

$$\bar{A} = (A^\dagger)^{-1}, \quad A^T \sigma_2 A = \sigma_2 = \bar{A}^T \sigma_2 \bar{A}, \quad \bar{A} = \sigma_2 A^* \sigma_2, \quad (6.3.87)$$

которые сводятся к двум условиям $\bar{A} = (A^\dagger)^{-1}$ и $\det(A) = 1$, то есть $A \in SL(2, \mathbb{C}) = Sp(2, \mathbb{C})$. При этом преобразования (6.2.3), определяющие группу $\text{Spin}(1, 3)$, записываются в виде (6.2.41):

$$\gamma_m x^m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_m x^m \\ \tilde{\sigma}_m x^m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow U(\gamma_m x^m)U^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \sigma_m x^m A^\dagger \\ (A^\dagger)^{-1} \tilde{\sigma}_m x^m A^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где матрицы σ_m и $\tilde{\sigma}_m$ определены в (6.1.4). Таким образом, группа $\text{Spin}(1, 3)$ изоморфна группе $SL(2, \mathbb{C})$, которую необходимо рассматривать как шестимерную вещественную группу Ли.

2. Для вейлевского представления (6.1.76) алгебры $\mathcal{Cl}_{(4,0)}$:

$$\gamma_0 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad (6.3.88)$$

мы имеем $\gamma_m^\dagger = \gamma_m$ и $\gamma_m^\top = \gamma_m^* = (-1)^m \gamma_m$. Поэтому, согласно (6.3.74)–(6.3.76), полагая $p = 4, q = 0, \nu = 2$, мы получаем для \mathbf{D}, \mathbf{C} и \mathbf{B} следующие представления

$$\mathbf{D} = I_2 \otimes \mathbf{d} = I_2 \otimes I_2, \quad \mathbf{C} = \sigma_3 \otimes \mathbf{c} = \sigma_3 \otimes \sigma_2 = \sigma_3 \otimes \mathbf{b} = \mathbf{B}, \quad (6.3.89)$$

используя которые в (6.3.82) – (6.3.84), выводим условия для диагональных блоков A и \bar{A} элемента $U \in \text{Spin}(4)$:

$$A^\dagger A = I = \bar{A}^\dagger \bar{A}, \quad A^\top \sigma_2 A = \sigma_2 = \bar{A}^\top \sigma_2 \bar{A}, \quad A^* = \sigma_2 A \sigma_2, \quad \bar{A}^* = \sigma_2 \bar{A} \sigma_2. \quad (6.3.90)$$

Эти условия дают $A, \bar{A} \in SU(2)$ и мы имеем $\text{Spin}(4) = SU(2) \times SU(2)$.

- **Задача 194.** ★ Доказать изоморфизм $\text{Spin}(2, 4) = SU(2, 2)$. Указание: воспользоваться вейлевским представлением для алгебры $\mathcal{Cl}_{(2,4)}$, которое получается из (6.1.70), найти в этом представлении матрицы \mathbf{d}, \mathbf{h} и \mathbf{f} , и рассмотреть условия (6.3.82) – (6.3.84) для блоков A, \bar{A} .

Рассмотрим теперь **нечетный случай** $(p + q) = 2\nu + 1$. Заметим, что в этом случае для образующих $\Sigma_{mn} = \frac{1}{4}(\gamma_m \gamma_n - \gamma_n \gamma_m)$ алгебры Ли $\mathfrak{spin}(p, q)$ с помощью (6.3.49) мы получаем следующие соотношения

$$\mathbf{D}' \Sigma_{mn}^\dagger + \Sigma_{mn} \mathbf{D}' = 0, \quad \mathbf{C}' \Sigma_{mn}^\top + \Sigma_{mn} \mathbf{C}' = 0, \quad (6.3.91)$$

что дает условия на матрицы $U \in \text{Spin}(p, q)$, которые определены в (6.2.30):

$$U^\dagger \mathbf{D}'^{-1} U = \mathbf{D}'^{-1}, \quad U^\top \mathbf{C}'^{-1} U = \mathbf{C}'^{-1}. \quad (6.3.92)$$

Отсюда в частности следует эквивалентность $\rho = \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^*$ неприводимых представлений^{6.10} группы $\text{Spin}(p, q)$ в нечетномерном случае $(p + q) = 2\nu + 1$.

Учитывая формулы (6.3.51), матрицы \mathbf{D}' и $i\mathbf{D}'$ можно рассматривать как (псевдо) унитарную метрику для четного и нечетного q , соответственно; а матрицу \mathbf{C}' как метрику для ортогональной и симплектической группы в случае $\epsilon' = +1$ и $\epsilon' = -1$, соответственно. Тогда имеют место аналоги формул (6.3.67), (6.3.68) для группы $\text{Spin}(p, q)$ в нечетномерном случае, когда $p + q = 2\nu + 1$

$$\begin{aligned} \text{Spin}(p, q) &\subset Sp(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^{\nu-1}, 2^{\nu-1}) \quad \text{для } N = 3, 5 \pmod{8}, \quad q \neq 0, \\ \text{Spin}(p, q) &\subset SO(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^{\nu-1}, 2^{\nu-1}) \quad \text{для } N = 1, 7 \pmod{8}, \quad q \neq 0, \\ \text{Spin}(2\nu + 1) &\subset Sp(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^\nu) = USp(2^\nu) \quad \text{для } N = 3, 5 \pmod{8}, \\ \text{Spin}(2\nu + 1) &\subset SO(2^\nu, \mathbb{C}) \cap SU(2^\nu) = SO(2^\nu) \quad \text{для } N = 1, 7 \pmod{8}. \end{aligned} \quad (6.3.93)$$

^{6.10}Здесь $\tilde{\rho}$ – контраградиентное к ρ и $\tilde{\rho}^*$ – комплексно сопряженное к $\tilde{\rho}$ представления.

- *Задача 195.* Получить формулы (6.3.93), пользуясь (6.3.92), (6.3.51) и значениями (6.3.32) параметра ϵ' для четномерного случая $(p-1)+q=2\nu$. Указание: учесть спектр матрицы \mathbf{D}' для четного q и матрицы $i\mathbf{D}'$ для нечетного q , воспользовавшись явным видом (6.3.36) матрицы \mathbf{D} и явным видом (6.3.4) матрицы $\gamma_{2\nu+1}$ в выбранном представлении (6.3.2) и (6.1.77).

Матрицы эквивалентности \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} сопряженных представлений алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, которые были рассмотрены в этом подразделе, играют важную роль при определении операции дираковского сопряжения спиноров, а также при определении операций дискретных симметрий – зарядового сопряжения C , пространственной четности P и временной инверсии T . Кроме того, матрицы \mathbf{B} и \mathbf{C} используются при построении вещественных представлений алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, которые реализуются, например, на пространствах майорановских спиноров. Эти вопросы будут обсуждаться нами в следующем разделе.

6.4 Дираковские, вейлевские и майорановские спиноры в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$

В данном разделе мы изложим основы теории спиноров в N -мерных пространствах $\mathbb{R}^{p,N-p}$. Материал этого раздела основывается на результатах, изложенных в классических работах [17], [54]; см. также [55] (Приложение), [50], [51], [52].

6.4.1 Спиноры в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ и тензорные произведения спиноров

Рассмотрим неприводимое представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ с матрицами образующих γ_k , которые удовлетворяют соотношениям (6.1.78):

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2\eta_{mn} I_{2\nu}, \quad \|\eta_{mn}\| = I_{p,q}. \quad (6.4.1)$$

В соответствии с формулами (6.2.27) и (6.2.30) это представление алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ задает представление ρ группы $\mathbf{Spin}(p,q)$. Вектора пространства \mathcal{F} неприводимого представления алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ согласно определению 5.4.1 называются **дираковскими спинорами**. Действие элементов $U \in \mathbf{Spin}(p,q)$ в пространстве \mathcal{F} дираковских спиноров запишем следующим образом

$$\psi \rightarrow \psi' = U \psi, \quad (6.4.2)$$

где ψ – дираковский спинор, ассоциированный с пространством $\mathbb{R}^{p,q}$. Рассмотрим матрицу \mathbf{D} , удовлетворяющую первому соотношению в (6.3.14) (для четномерного случая), или матрицу \mathbf{D}' , удовлетворяющую первому соотношению в (6.3.49) (для нечетномерного случая). В дальнейшем, если формулы будут справедливы в обоих случаях, мы будем использовать единое обозначение \mathbf{D} для матриц \mathbf{D} и \mathbf{D}' . С помощью матрицы \mathbf{D}^{-1} определяются дираковски сопряженные спиноры (сопряженные спиноры по Дираку)

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \mathbf{D}^{-1}, \quad (6.4.3)$$

которые в соответствии с первой формулой в (6.3.62), справедливой и для нечетномерного случая $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$, преобразуются при преобразованиях (6.4.2) как контраградиентные спиноры

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^{-1} . \quad (6.4.4)$$

и образуют дуальное к \mathcal{F} пространство $\tilde{\mathcal{F}}$ контраградиентного представления $\tilde{\rho}$ группы $\text{Spin}(p, q)$. Определим в пространстве \mathcal{F} скалярное произведение

$$\bar{\psi} \phi = \psi^\dagger \mathbf{D}^{-1} \phi , \quad (6.4.5)$$

которое очевидно является $\text{Spin}(p, q)$ -инвариантным, если дираковский спинор $\phi \in \mathcal{F}$ преобразуется так же, как и спинор ψ в (6.4.2).

Из формул (6.4.2) и (6.4.4) следует, что величины типа

$$t_{k_1 \dots k_\ell} = \bar{\psi} (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi = \psi^\dagger \mathbf{D}^{-1} (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi , \quad (6.4.6)$$

преобразуются как компоненты тензора ранга ℓ по отношению к группе $SO(p, q)$, так как выполняется (сравните с преобразованиями (5.1.24))

$$\begin{aligned} t_{k_1 \dots k_\ell} &\rightarrow t'_{k_1 \dots k_\ell} = \bar{\psi}' (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi' = \bar{\psi} U^{-1} (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) U \phi = \\ &= \bar{\psi} (\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_\ell}) \phi \cdot (\Lambda^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (\Lambda^{-1})^{i_\ell}_{k_\ell} = t_{i_1 \dots i_\ell} \cdot (\Lambda^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (\Lambda^{-1})^{i_\ell}_{k_\ell} . \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Здесь мы воспользовались равенствами

$$\gamma'_k = U^{-1} \gamma_k U = \gamma_i (\Lambda^{-1})^i_k \quad (6.4.8)$$

которые вытекают из (6.2.5).

• *Задача 196. Доказать тождества*

$$\bar{\psi} (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi = (-1)^{q+\ell} \bar{\psi}' (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi' , \quad N = 2\nu , \quad (6.4.9)$$

$$\bar{\psi} (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi = \bar{\psi}' (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi' , \quad N = 2\nu + 1 , \quad (6.4.10)$$

где $\psi' := \gamma_{N+1} \psi$, $\phi' := \gamma_{N+1} \phi$ и $\gamma_{N+1} = (-i)^{q+\nu} \gamma_1 \dots \gamma_N$. Указание: воспользоваться формулами (6.3.15) и (6.3.49).

Отметим, что в силу соотношений (6.4.1) тензоры с компонентами $t_{k_1 \dots k_\ell}$ (6.4.6) всегда разлагаются в сумму полностью антисимметричных тензоров с компонентами $t_{[k_1 \dots k_n]} = \bar{\psi} \gamma_{[k_1} \dots \gamma_{k_n]} \phi$, где мы использовали обозначение для антисимметризованных произведений

$$\gamma_{[k_1} \dots \gamma_{k_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} \gamma_{k_{\sigma(1)}} \dots \gamma_{k_{\sigma(n)}} , \quad (6.4.11)$$

где $p(\sigma)$ — четность перестановки $\sigma \in S_n$. Таким образом, без ограничения общности мы можем считать тензоры типа (6.4.6) полностью антисимметризованными по всем индексам $\{k_1, \dots, k_\ell\}$. Такие тензоры образуют пространства неприводимых представлений $T^{(1^\ell)}$ группы $SO(p, q)$, которые соответствуют диаграммам Юнга $[1^\ell]$, включая определяющее представление, действующее в пространстве тензоров с компонентами

$t_k = \bar{\psi} \gamma_k \phi$. Представления $T^{(\{1^l\})}$ группы $SO^\uparrow(p, q)$ одновременно являются представлениями группы $\text{Spin}(p, q)$, вложенными в представление $\rho \otimes \tilde{\rho}$, причем, так как единичная матрица $I_{2\nu}$ и антисимметризованные произведения образующих $\gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ в неприводимом представлении ρ содержат базис в алгебре $\text{Mat}(2^\nu, \mathbb{C})$, то очевидно имеют место разложения

$$\rho \otimes \tilde{\rho} = T^{(\{0\})} + T^{(\{1\})} + \dots + T^{(\{1^N\})} = 2T^{(\{0\})} + \dots + 2T^{(\{1^{r-1}\})} + T_+^{(\{1^r\})} + T_-^{(\{1^r\})}, \quad N = 2r, \quad (6.4.12)$$

$$\rho \otimes \tilde{\rho} = T^{(\{0\})} + T^{(\{1^2\})} + \dots + T^{(\{1^{2r}\})} = T^{(\{0\})} + T^{(\{1\})} + \dots + T^{(\{1^r\})}, \quad N = 2r + 1, \quad (6.4.13)$$

где $r \equiv \nu = [N/2]$ – ранг группы $SO(p, N - p)$ и мы учли эквивалентность представлений группы $SO(p, N - p)$:

$$T^{(\{1^m\})} = T^{(\{1^{N-m}\})}. \quad (6.4.14)$$

Об этой эквивалентности шла речь в подразделе **5.1.3** (см. формулу (5.1.36)). В формуле (6.4.13) мы использовали то, что в нечетном случае $N = 2r + 1$ базис в алгебре $\text{Mat}(2^\nu, \mathbb{C})$ образуют либо четные, либо нечетные^{6,11}, степени антисимметризованных произведений $\gamma_{[k_1 \dots k_i]}$. В случае $N = 2r$ мы также учли приводимость представления $T^{(\{1^r\})}$, которое разлагается в сумму самодуального $T_+^{(\{1^r\})}$ и антисамодуального $T_-^{(\{1^r\})}$ представлений. Разложение (6.4.12) для четного случая $N = 2r$ будет записано в явной форме ниже, в разделе **6.4.4**, см. равенство (6.4.79).

- **Задача 197.** Проверить кратности вхождения представлений $T^{(\{1^m\})}$ в $(\rho \otimes \tilde{\rho})$ в формулах (6.4.12) и (6.4.13). Указание: сравнить размерности представлений в левой и правой части формул (6.4.12) и (6.4.13) для чего воспользоваться равенствами $\dim(\rho \otimes \tilde{\rho}) = 2^{2r}$ и $\dim(T^{(\{1^m\})}) = \frac{N!}{m!(N-m)!}$.
- **Задача 198.** ★ Доказать тождество для образующих $\gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$:

$$\gamma_{[k_1 \dots k_m]} \cdot \gamma_{N+1} = \alpha_m \varepsilon_{k_1 \dots k_m k_{m+1} \dots k_N} \gamma^{k_{m+1}} \dots \gamma^{k_N}, \quad (6.4.15)$$

$$\alpha_m = \frac{(-i)^{\nu+q} (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + q}}{(N-m)!},$$

где $N = (p + q)$, $\nu = r$, произведение $\gamma_{[k_1 \dots k_m]}$ определено в (6.4.11), $\gamma_{N+1} = (-i)^{\nu+q} \gamma_0 \dots \gamma_{N-1}$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ – целая часть $\frac{m}{2}$ и $\varepsilon_{01 \dots N-1} = 1$.

Отметим, что для полной группы $O(p, N - p)$ в случае $N = 2r$ эквивалентность (6.4.14) не выполняется. Вместо нее мы имеем эквивалентность (5.1.38): $T^{(\{1^k\})} = T^{(0)} \cdot T^{(\{1^{N-k}\})}$, где $T^{(0)}(\Lambda) = \det(\Lambda) = \pm 1$ – одномерное детерминантное представление группы $O(p, N - p)$. В данном случае пространство представления $T^{(\{0\})}$ образовано скалярами $\bar{\psi} \phi$, а пространство представления $T^{(\{1^N\})}$ образовано псевдоскалярами $\bar{\psi} \gamma_{N+1} \phi$; пространство представления $T^{(\{1\})}$ образовано векторами $\bar{\psi} \gamma_k \phi$, а пространство представления $T^{(\{1^{N-1}\})}$ образовано псевдовекторами $\bar{\psi} \gamma_k \gamma_{N+1} \phi$ и так далее. В общем случае согласно (6.4.15) мы получаем, что пространство представления $T^{(\{1^{N-m}\})}$ при $m < [N/2]$ образовано псевдотензорами с компонентами $\bar{\psi}(\gamma_{[k_1 \dots k_m]} \gamma_{N+1}) \phi$:

$$\bar{\psi}(\gamma^{[k_{m+1} \dots k_N]}) \phi = (-1)^m \alpha_{N-m} \varepsilon^{k_1 \dots k_m k_{m+1} \dots k_N} \bar{\psi}(\gamma_{[k_1 \dots k_m]} \cdot \gamma_{N+1}) \phi. \quad (6.4.16)$$

^{6,11} В нечетномерном случае $N = (p+q) = (2r+1)$ имеется (см. Замечание **2** в Разделе **6.2.1**) взаимно однозначное соответствие $b = \gamma_{1 \dots N} \cdot a$ между четными a и нечетными b элементами алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, где центральный элемент $\gamma_{1 \dots N} \equiv \gamma_1 \dots \gamma_N$ в неприводимых представлениях ρ_\pm принимает значения ± 1 или $\pm i$.

Этот факт важен для физических приложений. В результате разложение (6.4.12) для полной группы $O(p, N - p)$ принимает вид ($N = 2r$):

$$\rho \otimes \tilde{\rho} = (T^{(\emptyset)} + T^{(0)} \cdot T^{(\emptyset)}) + \dots + (T^{(1^{r-1})} + T^{(0)} \cdot T^{(1^{r-1})}) + T^{(1^r)}, \quad (6.4.17)$$

где представление $T^{(1^r)}$ уже не разбивается на два неприводимых представления $T_{\pm}^{(1^r)}$.

Для нечетного случая $N = 2r + 1$ и группы $SO(p, q)$ эквивалентность представлений $T^{(1^m)} = T^{(1^{N-m})}$, реализованных на тензорах $\bar{\psi}\gamma_{[k_1 \dots k_m]}\phi$ и $\bar{\psi}\gamma_{[k_1 \dots k_m]}\gamma_{N+1}\phi$, где $\gamma_{[k_1 \dots k_m]} \equiv \gamma_{[k_1} \dots \gamma_{k_m]}$ выполняется также в силу того, что элемент γ_{N+1} централен, и в неприводимых представлениях $\rho = \rho_{\pm}$ принимает значения $\rho_{\pm}(\gamma_{N+1}) = \pm I_{2^r}$, то есть мы имеем $\bar{\psi}\gamma_{[k_1 \dots k_m]}\gamma_{N+1}\phi = \pm \bar{\psi}\gamma_{[k_1 \dots k_m]}\phi$. При несобственных преобразованиях (6.2.9) из группы $O(p, q)$ центральный элемент меняет знак $\gamma_{N+1} \rightarrow -\gamma_{N+1}$, и разложение (6.4.13) для полной ортогональной группы следует переписать в виде ($N = 2r + 1$)

$$\rho \otimes \tilde{\rho} = T^{(\emptyset)} + T^{(1^2)} + \dots + T^{(1^{2r})} = T^{(\emptyset)} + T^{(0)} \cdot T^{(1)} + T^{(1^2)} + T^{(0)} \cdot T^{(1^3)} + \dots, \quad (6.4.18)$$

где сумма в правой части заканчивается на $T^{(1^r)}$ в случае четных r , или на $T^{(0)} \cdot T^{(1^r)}$ в случае нечетных r .

Для четномерного случая $N = (p + q) = 2r$ неприводимое представление ρ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ определяет приводимое представление группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ (см. Утверждение 6.2.7 в разделе 6.2.2): $\rho = \Delta_+ \oplus \Delta_-$, где Δ_{\pm} – два неприводимых и неэквивалентных вейлевских (полуспинорных) представления группы $\mathbf{Spin}(p, q)$. Напомним, что в четном случае $N = (p + q) = 2r$ неприводимые представления $T^{(1^m)}$ ($m = 1, \dots, r - 2$) группы $SO(p, q)$, реализованные в пространстве тензоров $t_{[k_1 \dots k_m]} = \bar{\psi}\gamma_{[k_1} \dots \gamma_{k_m]}\phi$, эквивалентны представлениям $T_{(m)}$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ со старшими весами λ_m , которые были перечислены в (3.4.47). А представления $T^{(1^{r-1})}$ и $T^{(1^r)}$, реализованные в пространстве тензоров $t_{[k_1 \dots k_{r-1}]}$ и $t_{[k_1 \dots k_r]}$, соответствуют неприводимым представлениям $T'_{(r-1)}$ и $T'_{(r)}$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$ с композитными старшими весами (3.4.50):

$$\lambda'_{(r-1)} = \lambda_{(r-1)} + \lambda_{(r)} = (1, 1, \dots, 1, 0), \quad \lambda'_{(r)} = 2\lambda_{(r)} = (1, 1, \dots, 1).$$

Эти веса являются старшими весами для представлений, которые выделяются соответственно из тензорных произведений $(\Delta_+ \otimes \Delta_-)$ и $(\Delta_+ \otimes \Delta_+)$ двух вейлевских представлений $\Delta_+ = T_{(r-1)}$ и $\Delta_- = T_{(r)}$ со старшими фундаментальными весами $\lambda_{(r-1)}$ и $\lambda_{(r)}$ (старшие вектора представлений $T'_{(r-1)}$ и $T'_{(r)}$ строятся как тензорные произведения старших векторов представлений Δ_+ и Δ_-). Представления Δ_+ и Δ_- действуют в двух инвариантных $2^{(r-1)}$ -мерных подпространствах \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- (см. Раздел 6.2.2). Напомним, что для вейлевских спиноров $\psi \in \mathcal{V}_+$ и $\phi \in \mathcal{V}_-$ в пространствах представлений Δ_+ и Δ_- мы имеем

$$P_- \psi = 0, \quad P_+ \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = P_+ \psi, \quad \phi = P_- \phi,$$

где проекторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{N+1})$ были введены в (6.2.39), а вейлевские спиноры ψ и ϕ вложены в пространство $\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$ дираковских спиноров.

Контраградиентное представление $\tilde{\rho}$ группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ в четном случае $(p + q) = 2r$ также приводимо и разлагается в сумму $\tilde{\rho} = \tilde{\Delta}_+ \oplus \tilde{\Delta}_-$ двух вейлевских неприводимых

контраградиентных представлений $\tilde{\Delta}_+$ и $\tilde{\Delta}_-$ в пространствах $\tilde{\mathcal{V}}_+$ и $\tilde{\mathcal{V}}_-$, образованных соответственно спинорами $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$, которые удовлетворяют условиям

$$\tilde{\xi} \frac{1}{2}(1 - \gamma_{N+1}) = \tilde{\xi} P_- = 0, \quad \tilde{\eta} \frac{1}{2}(1 + \gamma_{N+1}) = \tilde{\eta} P_+ = 0,$$

то есть $\tilde{\xi} = \tilde{\xi} P_+$ и $\tilde{\eta} = \tilde{\eta} P_-$. Учитывая свойства проекторов $P_{\pm} \gamma_k = \gamma_k P_{\mp}$ и $P_{\pm} P_{\mp} = 0$, мы имеем (верхние и нижние знаки коррелированы)

$$\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[k_1 \cdots k_{2i}] } \phi_{\mp} = 0, \quad \bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[k_1 \cdots k_{2i+1}] } \phi_{\pm} = 0, \quad (6.4.19)$$

где $\bar{\psi}_{\pm} = \bar{\psi} P_{\pm}$ и $\phi_{\pm} = P_{\pm} \phi$. Кроме того, из формулы (6.4.15) при $m = r$ следуют соотношения

$$\frac{(-i)^{r+q}}{r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_r} (\bar{\psi} \gamma^{[k_1 \cdots k_r]} \phi_{\pm}) = \pm (-1)^{[\frac{r}{2}] + q} (\bar{\psi} \gamma_{[i_1 \cdots i_r]} \phi_{\pm}), \quad (6.4.20)$$

то есть, согласно определению (анти)самодуальных тензоров в (5.1.40), компоненты $\mathbf{t}_{(+i_1 \dots i_r)} = \bar{\psi} \gamma_{[i_1 \cdots i_r]} \phi_{\pm}$ образуют самодуальные (антисамодуальные) тензоры если показатель $([\frac{r}{2}] + q)$ четный (нечетный), и наоборот, компоненты $\mathbf{t}_{(-i_1 \dots i_r)} = \bar{\psi} \gamma_{[i_1 \cdots i_r]} \phi_{\pm}$ образуют самодуальные (антисамодуальные) тензоры, если показатель $([\frac{r}{2}] + q)$ нечетный (четный).

В силу соотношений (6.4.19) и (6.4.20) часть слагаемых в разложениях произведений вейлевских представлений $(\Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm})$ и $(\Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\mp})$ алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, которые вытекают из (6.4.12), будут зануляться и мы получаем следующий результат.

Утверждение 6.4.1 Пусть $r \equiv \nu = N/2$ – четное, тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\mp} &= T^{[1]} + T^{[3]} + \cdots + T^{[1^{r-1}]}, \\ \Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm} &= T^{[0]} + T^{[2]} + \cdots + T^{[1^{r-2}]} + \begin{cases} T_{\pm}^{[1^r]}, & \text{если } (\frac{r}{2} + q) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ T_{\mp}^{[1^r]}, & \text{если } (\frac{r}{2} + q) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4.21)$$

Пусть $r \equiv \nu = N/2$ – нечетное, тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\mp} &= T^{[1]} + \cdots + T^{[1^{r-2}]} + \begin{cases} T_{\pm}^{[1^r]}, & \text{если } ([\frac{r}{2}] + q) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ T_{\mp}^{[1^r]}, & \text{если } ([\frac{r}{2}] + q) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1, \end{cases} \\ \Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm} &= T^{[0]} + T^{[2]} + \cdots + T^{[1^{r-1}]} \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

Верхние и нижние знаки в равенствах (6.4.21) и (6.4.22) коррелированы и для упрощения формул мы убрали круглые скобки в обозначениях $T^{(1^k)}$.

Явные формулы для разложений (6.4.21) и (6.4.22) будут получены ниже в разделе 6.4.4 в Утверждении 6.4.4.

- **Задача 199.** Проверить кратности вхождения представлений $T^{[1^m]}$ в $\Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\mp}$ и $\Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm}$ в равенствах (6.4.21) и (6.4.22). Указание: сравнить размерность $2^{r-1} \cdot 2^{r-1} = 2^{2r-2}$ представлений в левых частях соотношений (6.4.21) и (6.4.22) с размерностью представлений в правых частях (6.4.21) и (6.4.22) для чего воспользоваться формулами $\dim(T^{[1^m]}) = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ и $\dim(T_{\pm}^{[1^r]}) = \frac{N!}{2(r!)^2}$.

- **Задача 200.** Найти разложения на неприводимые представления для произведений $(\Delta_+ \otimes \Delta_-)$ и $(\Delta_\pm \otimes \Delta_\pm)$, учитывая (6.4.21) и (6.4.22) и эквивалентности из Утверждения 6.3.10 (пункт 2). Убедиться в том, что определяющее представление $T^{[1]}$ содержится в $(\Delta_+ \otimes \Delta_-)$ при четном $r = \nu$, и в $(\Delta_\pm \otimes \Delta_\pm)$ при нечетном $r = \nu \geq 3$.
- **Задача 201.** Проверить, что компоненты (6.4.6) в четномерном случае ведут себя при комплексном сопряжении следующим образом:

$$\left(\bar{\psi}(\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell})\phi\right)^* = (-1)^{\ell(\ell-1)/2+g} \bar{\phi}(\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell})\psi, \quad (6.4.23)$$

где фаза $(-1)^g$ определяется из соотношения $\phi\psi = (-1)^g\psi\phi$, то есть фактор $(-1)^g$ равен $+1$, если считать компоненты спиноров ψ и ϕ коммутирующими, и равен -1 , если считать компоненты спиноров ψ и ϕ как антикоммутирующими (статистика Ферми-Дирака), то есть элементами алгебры Грассмана (см. Раздел 1.3.3). Указание: воспользоваться первой формулой из (6.3.26).

Рассмотрим теперь нечетномерный случай $(p+q) = 2r+1$. В этом случае неприводимые представления $T^{[1^m]}$ ($m = 1, \dots, r-1$) группы $SO(p, q)$ соответствуют представлениям $T_{(m)}$ алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ со старшими весами λ_m , которые были даны в (3.4.51). Представление $T^{[1^r]}$ группы $SO(p, q)$ соответствует неприводимому представлению $T'_{(r)}$ алгебры $so(2r+1, \mathbb{C})$ со старшим композитным весом (3.4.53) и следовательно содержится в тензорном произведении $(\rho \otimes \rho)$ двух неприводимых спинорных представлений^{6.12} $\rho = T_{(r)}$ со старшим фундаментальным весом $\lambda_{(r)}$ из (3.4.51) (см. Замечание 2. в подразделе 6.2.2). Для группы $\text{Spin}(p, q)$ ($p+q = 2r+1$) определяющее неприводимое представление $\rho = T_{(r)}$ и котраградиентное к нему представление $\bar{\rho}$ эквивалентны, так как имеет место условие

$$(U^T)^{-1} = \mathbf{C}'^{-1} U \mathbf{C}', \quad \forall U \in \text{Spin}(p, q),$$

где матрица \mathbf{C}' определена во втором соотношении в (6.3.49). Поэтому разложение (6.4.12) представления $(\rho \otimes \bar{\rho})$ справедливо и для произведения $(\rho \otimes \rho)$. Таким образом, определяющее представление $T^{(1)}$ группы $SO(p, q)$ (алгебры Ли $so(p, q)$) содержится в представлении $(\rho \otimes \rho)$, что подтверждает вывод (сделанный в конце пункта 4 раздела 3.4.2) о том, что все конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $so(p, q)$ можно построить как подпредставления в тензорном произведении $T_{(r)}^{\otimes M}$ спинорных представлений $\rho = T_{(r)}$.

В заключение данного подраздела отметим, что формулы (6.4.12), (6.4.13), (6.4.17), (6.4.18), (6.4.21) и (6.4.22) есть не что иное как разложение Клебша–Гордана для тензорного произведения спинорных и полуспинорных представлений алгебры $so(p, q) = \text{spin}(p, q)$ (группы $\text{Spin}(p, q)$).

^{6.12}Напомним (см. Раздел 5.4.2), что в нечетном случае $N = 2r+1$ два неэквивалентных представления ρ_\pm алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ определяют два эквивалентных друг другу представления (то есть реально только одно спинорное представление $\rho = T_{(r)}$) алгебры Ли $so(p, q)$ и группы $\text{Spin}(p, q)$.

6.4.2 Зарядовое сопряжение спиноров в пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$

С помощью матрицы \mathbf{C} , заданной во втором соотношении в (6.3.14), или матрицы \mathbf{C}' , заданной во втором соотношении в (6.3.49), можно определить еще одну, в дополнение к (6.4.3), операцию сопряжения спиноров (мы снова используем единое обозначение \mathbf{C} в общем случае и четных, и нечетных измерений)

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi^T \mathbf{C}^{-1}, \quad (6.4.24)$$

где $\tilde{\psi}$ оказывается, как и $\bar{\psi}$, контраградиентным к ψ спинором. Действительно, при действии (6.4.2) группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ на спинор ψ сопряженный спинор $\tilde{\psi}$, заданный в (6.4.24), в силу второй формулы из (6.3.62) преобразуется по правилу (6.4.4). Поэтому согласно (6.2.5) величины типа

$$\tilde{t}_{k_1 \dots k_\ell} = \tilde{\psi}(\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi = \psi^T \mathbf{C}^{-1} (\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell}) \phi, \quad (6.4.25)$$

при действии (6.4.2) группы $\mathbf{Spin}(p, q)$ снова ведут себя как компоненты тензора ранга ℓ при действии группы $SO(p, q)$. В частности, скалярное произведение $\psi^T \mathbf{C}^{-1} \phi$ инвариантно относительно $\mathbf{Spin}(p, q)$ -преобразований (6.4.2) и таким образом является $SO(p, q)$ -скаляром.

- *Задача 202. Доказать, что компоненты (6.4.25) для четномерного случая меняются при преобразованиях спиноров (6.4.2) согласно правилам (6.4.7) и удовлетворяют следующим тождествам*

$$(\tilde{\psi} \gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell} \phi) = \epsilon' (-1)^{\ell(\ell+1)/2+g} (\tilde{\phi} \gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell} \psi), \quad (6.4.26)$$

где фаза $(-1)^g$ – та же, что и в Задаче 201. Указание: воспользоваться второй формулой из (6.3.26).

Далее мы будем рассматривать в основном четномерный случай $N = p + q = 2\nu$. Нечетномерный случай будет оговариваться специально. С помощью матрицы \mathbf{B} , которая задана в третьем соотношении в (6.3.14), определим новый спинор по формуле

$$\psi_c = \eta' \mathbf{B} \psi^*, \quad (6.4.27)$$

где η' – некоторый фазовый множитель, $|\eta'| = 1$. В третьей части книги будет показано, что при $p = 1$ и определении временных и пространственных координат в $\mathbb{R}^{p,q}$ так, как это сделано в Определении 6.2.4, спинор (6.4.27) будет описывать спиновую **античастицу** по отношению к частице, описываемой спинором ψ ; здесь и ниже будем называть спинор (6.4.27) зарядово-сопряженным к ψ .

Отметим, что зарядово-сопряженный спинор (6.4.27) можно определить с помощью матрицы \mathbf{C} . Для этого выразим правую часть (6.4.27) через матрицу \mathbf{C} и представим операцию \mathbf{C} зарядового сопряжения в виде

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{\mathbf{C}} \psi_c = \eta' \mathbf{B} \psi^* = \eta \mathbf{C}(\mathbf{D}^{-1})^T \psi^* = \eta \mathbf{C} \bar{\psi}^T, \\ \bar{\psi} &\xrightarrow{\mathbf{C}} \bar{\psi}_c = \psi_c^\dagger \mathbf{D}^{-1} = (\eta')^* \psi^T \mathbf{B}^\dagger \mathbf{D}^{-1} = (\eta')^* \psi^T \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.4.28)$$

где $\eta, \eta' = \epsilon \epsilon' \eta$ — фазовые множители, и в равенствах (6.4.28) мы воспользовались связью (6.3.27), (6.3.29) для матриц $\mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{B}$. Ввиду преобразований (6.4.28), матрица \mathbf{C} называется *матрицей зарядового сопряжения*. Заметим, что повторное применение операции C дает

$$(\psi_C)_C = \eta' \mathbf{B} \psi_C^* = \mathbf{B} \mathbf{B}^* \psi = \epsilon \psi ,$$

то есть на дираковских спинорах тождество $C^2 = I$ реализуется только в случае $\epsilon = +1$. При $\text{Spin}(p, q)$ -преобразованиях (6.4.2), согласно правилам (6.3.64), зарядово сопряженный к ψ спинор ψ_C меняется по тому же ковариантному закону: $\psi_C \rightarrow U \psi_C$, что и спинор ψ . Это позволяет ввести аналог условия вещественности в комплексном пространстве \mathcal{F} представления группы $\text{Spin}(p, q)$ в виде ковариантного соотношения $\psi_C = \eta'' \psi$, где фазовый множитель η'' без ограничения общности можно положить равным единице, так как его можно убрать переопределением множителя η' в (6.4.27).

Определение 6.4.1 Спинор ψ , равный своему зарядово сопряженному спинору ψ_C , то есть удовлетворяющий соотношению вещественности

$$\psi = \psi_C \Leftrightarrow \psi = \eta' \mathbf{B} \psi^* , \tag{6.4.29}$$

называется *майорановским*. Представление группы $\text{Spin}(p, q)$, действующее в пространстве майорановских спиноров, называется *майорановским представлением*.

По определению, майорановский спинор ψ описывает частицы, совпадающие со своими античастицами. Такие частицы имеют нулевые электрические заряды (заряд античастицы противоположен по знаку и равен по абсолютной величине заряду частицы).

Из второго уравнения в (6.4.29) и комплексно сопряженного к нему уравнения, с учетом (6.3.17), выводится соотношение $\psi = \mathbf{B} \mathbf{B}^* \psi = \epsilon \psi$, которое означает, что для существования майорановских спиноров необходимо иметь $\epsilon = +1$. Соответствующие случаи были перечислены в (6.3.34), (6.3.41). В частности, майорановские спиноры существуют в N -мерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{(1, N-1)}$ (при четном N) при

$$N = 2, 4 \pmod{8} .$$

Заметим, что условие майорановости (6.4.29) с помощью равенств (6.3.27) можно переписать в виде:

$$\psi^T \mathbf{C}^{-1} = \zeta \psi^\dagger \mathbf{D}^{-1} \Leftrightarrow \tilde{\psi} = \zeta \bar{\psi} , \tag{6.4.30}$$

где $\zeta = \eta' \epsilon' \beta_1 = \eta' \epsilon$ — фазовый множитель. Другими словами, для майорановских спиноров ψ дираковское сопряжение (6.4.3) с точностью до множителя ζ совпадает с сопряжением (6.4.24).

- *Задача 203. Вывести условие (6.4.30) из условия (6.4.29).*

Таким образом, в силу (6.4.30) для майорановских спиноров все тензоры с компонентами (6.4.6) оказываются равными (с точностью до умножения на фазу ζ) тензорам с компонентами (6.4.26). Для дираковских спиноров в общем случае это не так.

При $\ell = 0$ скаляры $(\bar{\psi}\psi)$ и $(\tilde{\psi}\psi)$, возникающие из (6.4.6) и (6.4.26), иногда называются соответственно **дираковским и майорановским массовыми членами**. Майорановский массовый член $(\tilde{\psi}\psi)$ в силу соотношения (6.4.26) (где необходимо положить $\ell = 0$ и $\phi = \psi$) не равен нулю, только если $\epsilon' = (-1)^g$. В фермионном случае $(-1)^g = -1$ и мы имеем $\epsilon' = -1$, что согласно Утверждению **6.3.5** (см. (6.3.32) и (6.3.43)) реализуется только, когда $N = 2, 4 \pmod{8}$.

Замечание 1. Если имеется два спинора ψ_i ($i = 1, 2$), то, вместо условия вещественности (6.4.29) для каждого из спиноров, можно наложить смешанное условие вещественности (условие $SU(2)$ вещественности [56])

$$\psi_i = \eta' \varepsilon_{ij} \mathbf{B} \psi_j^*, \quad (\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{12} = 1), \quad (6.4.31)$$

которое самосогласовано (необходимо рассмотреть уравнение (6.4.31) и комплексно сопряженное к нему уравнение) только в случае $\epsilon = -1$. Таким образом, условие (6.4.31) заменяет стандартное условие майорановости, которое требует того, чтобы $\epsilon = +1$.

Замечание 2. С помощью матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$, заданной в третьем соотношении в (6.3.21):

$$\gamma_k^* = \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \gamma_k \cdot \tilde{\mathbf{B}}, \quad \forall k \in (1, \dots, 2\nu), \quad (6.4.32)$$

мы определим еще одно зарядовое сопряжение (сравните с (6.4.27))

$$\psi_{\bar{c}} = \tilde{\eta}' \tilde{\mathbf{B}} \psi^*, \quad (6.4.33)$$

где $\tilde{\eta}'$ – некоторый фазовый множитель, $|\tilde{\eta}'| = 1$. Спинор (6.4.33) описывает спиновую **античастицу** при фиксации временных и пространственных координат, которая отличается от принятой в Определении **6.2.4**, а именно, пространственные (временные) координаты x^k соответствуют положительным (отрицательным) компонентам диагональной метрики^{6.13}. Так как мы обычно обозначаем число временных координат как p , а число пространственных координат как q , то спинор (6.4.33) описывает античастицу в пространстве $\mathbb{R}^{q,p}$ (обратите внимание на порядок индексов q, p) с метрикой

$$\eta = (\underbrace{+1, \dots, +1}_q, \underbrace{-1, \dots, -1}_p).$$

При $\text{Spin}(q, p)$ -преобразованиях (6.4.2), согласно правилам (6.3.65), зарядово сопряженный спинор $\psi_{\bar{c}}$ меняется по тому же ковариантному закону: $\psi_{\bar{c}} \rightarrow U \psi_{\bar{c}}$, что и спинор ψ . Это позволяет ввести еще один аналог условия вещественности (условия майорановости) в комплексном пространстве \mathcal{F} представления группы $\text{Spin}(q, p)$ (сравните с условием (6.4.29))

$$\psi = \psi_{\bar{c}} \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \tilde{\eta}' \tilde{\mathbf{B}} \psi^*. \quad (6.4.34)$$

Спиноры, удовлетворяющие такому условию, иногда называют **псевдо-майорановскими**. Комплексное сопряжение второго равенства в (6.4.34) дает $\psi = |\tilde{\eta}'|^2 \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^* \psi =$

^{6.13} Детальное объяснение феномена, почему при этом зарядовое сопряжение (6.4.27) меняется на (6.4.33), выходит за рамки нашей книги. Отметим только, что изменение сигнатуры метрики на противоположную приводит к изменению условия массовой поверхности $p_k p^k - m^2 = 0$ на $p_k p^k + m^2 = 0$, где p_k – компоненты импульса и m – масса. При сохранении структурных соотношений алгебры Клиффорда $\gamma_k \gamma_n + \gamma_n \gamma_k = 2\eta_{kn} I$ это диктует другую форму уравнения Дирака.

$\tilde{\epsilon}\psi$, где мы воспользовались последним условием в (6.3.23). Таким образом, условие майорановости (6.4.34), которое соответствует "неправильному" выбору временных и пространственных координат, непротиворечиво только в случае $\tilde{\epsilon} = +1$. При замене $p \leftrightarrow q$ мы имеем $\epsilon \leftrightarrow \tilde{\epsilon}$ и условие $\tilde{\epsilon} = \pm 1$ для представлений алгебры $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ определяется из (6.3.34) так:

$$\tilde{\epsilon} = +1, \text{ если } q-p = -2, 0 \pmod{8}; \quad \tilde{\epsilon} = -1, \text{ если } q-p = 2, 4 \pmod{8}. \quad (6.4.35)$$

Этот же результат вытекает из второго соотношения в (6.3.24). В частности для $\mathcal{C}\ell_{(N-1,1)}$ согласно (6.4.35) мы имеем $\tilde{\epsilon} = +1$, для $N = 2, 4 \pmod{8}$ (сравните с (6.3.45) в случае $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$). Таким образом, условие существования майорановских спиноров в N -мерном пространстве Минковского не зависит от того, используется ли метрика $\text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$ или метрика $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ (это верно и для нечетного N ; см. Утверждение 6.4.2).

Замечание 3. В нечетномерном случае $N = p + q = 2\nu + 1$ зарядово-сопряженный спинор (6.4.27) и операция зарядового сопряжения (6.4.28) определяются с помощью матриц \mathbf{C}' и \mathbf{B}'

$$\psi \xrightarrow{\mathbf{C}'} \psi_{\mathbf{C}} = \eta \mathbf{C}' \bar{\psi}^{\mathbf{T}} = \eta \mathbf{C}' (\mathbf{D}'^{-1})^{\mathbf{T}} \psi^* = \eta' \mathbf{B}' \psi^*, \quad (6.4.36)$$

где η, η' – фазовые множители, и здесь мы использовали (6.3.53). Условие майорановости (6.4.29) ($\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$) для $N = 2\nu + 1$

$$\psi = \psi_{\mathbf{C}} \Leftrightarrow \psi = \eta' \mathbf{B}' \psi^*, \quad (6.4.37)$$

так же как и в четномерном случае, в силу условия (6.3.52) самосогласовано только, если $\epsilon = +1$, то есть при выполнении условий (6.3.54), (6.3.55). Например, для нечетномерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$ условие $\epsilon = +1$ реализуется только, когда $N = 1, 3 \pmod{8}$ (см. формулу (6.3.56)).

Просуммируем все возможности определения майорановских спиноров [56].

Утверждение 6.4.2 Пусть метрика зафиксирована как $\eta = I_{p,q}$. Условия вещественности (майорановости) для спиноров ψ записываются следующим образом.

1.) Для четномерного случая $(p + q) = 2\nu = N$:

$$\begin{aligned} \psi &= \eta_1 \mathbf{B} \psi^*, \quad \gamma_k^* = -\mathbf{B}^{-1} \gamma_k \mathbf{B}, \quad \epsilon = +1 \Rightarrow (p - q) = -2, 0 \pmod{8}, \\ \psi &= \eta_2 \tilde{\mathbf{B}} \psi^*, \quad \gamma_k^* = \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \gamma_k \tilde{\mathbf{B}}, \quad \tilde{\epsilon} = +1 \Rightarrow (p - q) = 0, 2 \pmod{8}; \end{aligned} \quad (6.4.38)$$

2.) для нечетномерного случая $(p + q) = 2\nu + 1 = N$:

$$\begin{aligned} \psi &= \eta_3 \mathbf{B}' \psi^*, \quad \gamma_k^* = -\mathbf{B}'^{-1} \gamma_k \mathbf{B}', \quad \epsilon = +1 \Rightarrow (p - q) = -1 \pmod{8}, \\ \psi &= \eta_4 \mathbf{B}' \psi^*, \quad \gamma_k^* = \mathbf{B}'^{-1} \gamma_k \mathbf{B}', \quad \epsilon = +1 \Rightarrow (p - q) = 1 \pmod{8}; \end{aligned} \quad (6.4.39)$$

где постоянные $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ возникают в соотношениях (6.3.17), (6.3.23) и (6.3.52), а η_k – фазовые множители такие, что $\eta_k \eta_k^* = 1$.

Вернемся к четномерному случаю $(p + q) = 2\nu$. Пользуясь вейлевским представлением (6.3.69), определим два проектора (6.2.39):

$$P_L = \frac{1}{2}(I_{2\nu} + \gamma_{2\nu+1}) = \begin{pmatrix} I_{2\nu-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2}(I_{2\nu} - \gamma_{2\nu+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{2\nu-1} \end{pmatrix}. \quad (6.4.40)$$

Эти проекторы разбивают 2^ν -мерные дираковские спиноры ψ (ассоциированные с пространством $\mathbb{R}^{p,q}$) на два $2^{\nu-1}$ -мерных вейлевских спинора ξ и η :

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_L = P_L \psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (6.4.41)$$

где ξ_α и $\eta^{\dot{\alpha}}$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, \dots, 2^{\nu-1}$) — компоненты **вейлевских** спиноров ξ и η . Использование индексов с точкой $\dot{\alpha}$ и без точки α обсуждалось в Замечании 1 Раздела 6.2.2. В физике спиноры ψ_L и ψ_R называются соответственно левым и правым киральными спинорами^{6.14}. Еще говорят, что спинор ψ_L имеет левую, а ψ_R — правую киральность.

Из определений (6.4.41) и свойств проекторов $P_{R,L}$ следует, что киральные спиноры удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2}(I_{2^\nu} + \gamma_{2\nu+1})\psi_R = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}(I_{2^\nu} - \gamma_{2\nu+1})\psi_L = 0. \quad (6.4.42)$$

Пусть киральный спинор ψ_R (аналогично ψ_L) является еще и майорановским спинором, который удовлетворяет условию вещественности (6.4.29). Тогда, из уравнений (6.4.42) и последней формулы в (6.3.15) следует

$$\begin{aligned} 0 &= (I_{2^\nu} \pm \gamma_{2\nu+1}^*)\psi_{R(L)}^* = (I_{2^\nu} \pm (-1)^{\nu+q}\mathbf{B}^{-1}\gamma_{2\nu+1}\mathbf{B})\psi_{R(L)}^* = \\ &= \eta^{*\mathbf{B}^{-1}}(I_{2^\nu} \pm (-1)^{\nu+q}\gamma_{2\nu+1})\psi_{R(L)}, \end{aligned} \quad (6.4.43)$$

где в последнем равенстве мы использовали (6.4.29). Таким образом, условия "вейлевости" (6.4.42) совместны с условием майорановости (6.4.29) только для случая четных $(\nu + q)$, или, иначе говоря, при $(p - q)/2 = 2k$, где k — целое число. Окончательно эти условия можно записать в виде

$$N - 2p = 0 \pmod{4} \quad \Leftrightarrow \quad s \equiv p - q = 0 \pmod{4}. \quad (6.4.44)$$

С учетом условий (6.3.41), (6.4.38) существования майорановских спиноров (6.4.29), майорана-вейлевские спиноры могут быть определены только в следующих случаях

$$p = k \pmod{4}, \quad N = 2k \pmod{8} \quad \Leftrightarrow \quad s \equiv p - q = 0 \pmod{8}, \quad (6.4.45)$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. Аналогично, для псевдо-майорановских спиноров (6.4.34) условия вейлевости (6.4.42) и майорановости $\psi = \tilde{\eta}' \tilde{\mathbf{B}} \psi^*$ совместны также только при выполнении (6.4.44). Поэтому, с учетом второй строчки в (6.4.38), "псевдо"-майорано-вейлевские спиноры определены в тех же случаях (6.4.45), что и обычные майорана-вейлевские спиноры. Отметим, что у майорана-вейлевского спинора число независимых **вещественных** компонент равно $2^{\nu-1}$, то есть в четыре раза меньше, чем число независимых вещественных компонент у дираковского спинора.

Примеры.

1. Пусть $p = 1$ (пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$). Так как майорановские спиноры существуют в этом случае только при $N = 2, 4 \pmod{8}$ (см. (6.3.41)), а условие самосогласованности (6.4.44) в этом случае записывается как $N = 2 \pmod{4}$, то мы заключаем, что майорана-вейлевские спиноры могут быть определены в пространствах $\mathbb{R}^{1,N-1}$ только для $N = 2 \pmod{8} = 2, 10, 18, 26, \dots$, что согласуется с (6.4.45).

2. Пусть $p = N$, $q = 0$ (евклидово пространство \mathbb{R}^N). Из условий (6.4.45) следует, что майорана-вейлевские спиноры могут быть определены в \mathbb{R}^N , только если $N = 8 \pmod{8} = 8, 16, \dots$. Этот же результат получается и в случае $p = 0$, $q = N$.

^{6.14}В нашем контексте эти названия носят условный характер.

- *Задача 204.* Описать явно майорана-вейлевские спиноры в двумерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$.

6.4.3 Алгебра $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$ и спинорная группа $\text{Spin}(1, N-1)$. Спиноры в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$

В этом разделе мы отдельно рассмотрим вещественную алгебру $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$, ассоциированную с пространством Минковского $\mathbb{R}^{1,N-1}$, которое обладает псевдоевклидовой метрикой $\|\eta_{mn}\| = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$. Данный случай заслуживает отдельного обсуждения, так как имеет большое количество приложений в физике. Вначале рассмотрим случай четного числа измерений $N = 2\nu$.

Прежде всего, применяя преобразование (6.1.8), зададим образующие

$$\gamma_0 = \Gamma_1, \quad \gamma_k = i\Gamma_{k+1} \quad (k = 1, \dots, N-1), \quad (6.4.46)$$

где матрицы Γ_k подчиняются определяющим соотношениям (6.1.9) алгебры $\mathcal{C}\ell_{2\nu}$ с евклидовой метрикой, а также введем матрицу, с точностью до фактора $(-1)^\nu$ совпадающую с (6.1.86):

$$\gamma_{N+1} = (-i)^{(\nu-1)} \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{N-1} \Rightarrow \gamma_{N+1}^2 = I_{2\nu} \quad (6.4.47)$$

Матрицы (6.4.46) определяют неприводимое 2^ν -мерное представление ρ для алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{1,N-1}$, так как по построению они удовлетворяют определяющим соотношениям (см. (6.4.1))

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2\eta_{mn} I_{2\nu}, \quad \|\eta_{mn}\| = I_{1,N-1}. \quad (6.4.48)$$

Выберем конкретное представление (6.3.2) матриц Γ_k , тогда согласно (6.1.49), (6.1.53), (6.1.54) и (6.3.11) мы имеем

$$\gamma_{N+1} = (-1)^\nu \sigma_3^{\otimes \nu},$$

$$\gamma_m^* = (-1)^m \eta_{mm} \gamma_m = (-1)^m \gamma_0 \gamma_m \gamma_0, \quad \gamma_m^\top = (-1)^m \gamma_m, \quad (6.4.49)$$

$$\gamma_m^\dagger = \eta_{mm} \gamma_m = \gamma_0 \gamma_m \gamma_0, \quad (6.4.50)$$

$$-C \gamma_m C = (-1)^m \gamma_m, \quad \gamma_m^\top = -C \gamma_m C, \quad C^2 = I_{2\nu}, \quad (6.4.51)$$

где $m = 0, 1, \dots, N-1$, а матрица C была введена в (6.3.5). Второе равенство в (6.4.51) следует из первого равенства в (6.4.51) и последнего тождества в (6.4.49). В соответствии с (6.3.9), (6.3.10) матрицу C можно записать в виде

$$\begin{aligned} C &= (-i)^{k-1} \gamma_0 \gamma_2 \cdots \gamma_{N-2} \quad (\nu = 2k), \\ C &= -(i)^k \gamma_1 \gamma_3 \cdots \gamma_{N-1} \quad (\nu = 2k-1), \end{aligned} \quad (6.4.52)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

- *Задача 205.* Проверить выполнение первого и третьего соотношений в (6.4.51) для матриц (6.4.52), пользуясь только определяющими соотношениями (6.4.48).

Сравнивая соотношения (6.4.49), (6.4.50) и (6.4.51) с равенствами (6.3.14), мы получаем явные выражения для матриц \mathbf{D} , \mathbf{C} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{D} = \gamma_0, \quad \mathbf{C} = C, \quad \mathbf{B} = \gamma_0 C, \quad (6.4.53)$$

для данного специального представления ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$. Матрицы (6.4.53), как мы видели выше, играют важную роль в теории. Напомним, что матрица \mathbf{B} удовлетворяет соотношению (6.3.17), где константа ϵ не зависит от представления $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$ и в рассматриваемом случае равна

$$\epsilon = (-1)^{k+1} \quad \text{для } \nu = 2k - 1, 2k, \quad (6.4.54)$$

что следует из (6.3.8), а также из общих формул (6.3.33), доказанных в Утверждении **6.3.5** (см., кроме того, (6.3.45)). Отметим, что в обсуждаемом случае представления ρ алгебры $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$, согласно (6.3.8), а также согласно (6.3.42), мы имеем

$$\epsilon' = -\epsilon = (-1)^k \quad \text{для } \nu = 2k - 1, 2k,$$

(сравните (6.4.54) и (6.3.43)).

- *Задача 206.* Вычислить явно константы ϵ , ϵ' для неприводимых представлений $\mathcal{C}\ell_{(1,N-1)}$. Указание: воспользоваться представлением (6.4.46), соотношениями (6.3.8) и формулой (6.4.53) для матрицы \mathbf{B} . Исходя из (6.3.5) и (6.4.53), записать матрицу \mathbf{B} в явном виде:

$$\mathbf{B} = \Gamma_1 C = i \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots}_{\nu}. \quad (6.4.55)$$

Доказать, что матрицы (6.4.53) удовлетворяют тождествам (6.3.27), где $\beta_2 = -\beta_1 = 1$ и $\beta_1 \beta_2 = \epsilon \epsilon' = -1$.

Замечание 1. Напомним, что в случае N -мерного пространства Минковского (при четном N) майорановские спиноры существуют, только если $N = 2, 4 \pmod{8}$, а майорана-вейлевские спиноры существуют только в случае $N = 2 \pmod{8}$ (см. Пример **1** в конце раздела **6.4.2**).

Для пространства $\mathbb{R}^{1,N-1}$ в случае нечетного числа измерений $N = 2\nu + 1$ аналоги матриц \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} определяются в (6.3.49):

$$\gamma_k^\dagger = \mathbf{D}'^{-1} \gamma_k \mathbf{D}', \quad \gamma_k^\top = (-1)^\nu \mathbf{C}'^{-1} \gamma_k \mathbf{C}', \quad \gamma_k^* = (-1)^\nu \mathbf{B}'^{-1} \gamma_k \mathbf{B}', \quad (6.4.56)$$

где мы положили $q = 2\nu$, так как $p = 1$. В (6.4.56) матрицы γ_k ($k = 0, \dots, 2\nu - 1$) берутся в представлении (6.4.46), (6.3.2), а в качестве последней образующей мы выбираем матрицу

$$\gamma_{2\nu} = (-i)^\nu \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{2\nu-1}, \quad \gamma_{2\nu}^\dagger = -\gamma_{2\nu} = \gamma_0 \gamma_{2\nu} \gamma_0, \quad (6.4.57)$$

которая отличается от (6.4.47) нормировкой так, чтобы иметь $\gamma_{2\nu}^2 = -I_{2\nu}$. Исходя из вида (6.4.53) матриц \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} в четномерном случае $N = 2\nu$ и следуя правилам (6.3.50), в которых надо выбрать пункты 1. и 3., соответствующие четным значениям $q = 2\nu$, мы получаем явный вид матриц \mathbf{B}' , \mathbf{C}' и \mathbf{D}' в нечетномерном случае $N = 2\nu + 1$

$$\mathbf{D}' = \gamma_0, \quad \begin{cases} \mathbf{C}' = C, & \mathbf{B}' = \gamma_0 C, & \nu - \text{нечетное}, & N = 3 \pmod{4} \\ \mathbf{C}' = \gamma_{2\nu} C, & \mathbf{B}' = \gamma_{2\nu} \gamma_0 C, & \nu - \text{четное}, & N = 1 \pmod{4}, \end{cases} \quad (6.4.58)$$

где матрица $\gamma_{2\nu}$ определена в (6.4.57).

Вернемся к рассмотрению общего случая как четных, так и нечетных размерностей N . Мы не будем подробно останавливаться на рассмотрении группы $\mathbf{Spin}(1, N-1)$, поскольку она представляет собой частный случай ($p = 1$) группы $\mathbf{Spin}(p, q)$. Напомним лишь, что элементы $U \in \mathbf{Spin}(1, N-1)$ в окрестности единицы представляются в экспоненциальной форме (6.2.30):

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{mn}\Sigma_{mn}\right), \quad \Sigma_{mn} = \frac{1}{4}(\gamma_m\gamma_n - \gamma_n\gamma_m). \quad (6.4.59)$$

Здесь $\omega^{mn} = -\omega^{mn}$ – вещественные параметры, совпадающие с параметрами группы Лоренца $SO(1, N-1)$, а образующие Σ_{mn} алгебры Ли группы $\mathbf{Spin}(1, N-1)$ удовлетворяют соотношениям (6.2.28) и (6.2.29), где необходимо использовать гамма-матрицы (6.4.46), (6.4.57). Отметим также, что в силу свойств (6.4.50), (6.4.57) эрмитова сопряжения γ -матриц мы имеем

$$\Sigma_{mn}^\dagger = -\gamma_0 \Sigma_{mn} \gamma_0, \quad (6.4.60)$$

и следовательно условие псевдо-унитарности (6.3.62) для $U \in \mathbf{Spin}(1, N-1)$, которые заданы в экспоненциальном виде (6.4.59), записывается следующим образом

$$U^\dagger \gamma_0 U = U \gamma_0 U^\dagger = \gamma_0. \quad (6.4.61)$$

- **Задача 207.** Доказать, что $2^{[N/2]}$ - мерные матрицы U , удовлетворяющие (6.4.61), образуют подгруппу в некомпактной псевдо-унитарной группе $SU(s, s)$, где $s = 2^{[N/2]-1}$. Указание: воспользоваться представлением $\gamma_0 = \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes(\nu-1)}$ (см. (6.3.2) или (6.1.68)), и привести γ_0 к диагональному виду.

Так же как и в общем случае групп $SO(p, q)$ и $\mathbf{Spin}(p, q)$, группы $SO^\dagger(1, N-1)$ и $\mathbf{Spin}(1, N-1)$ локально изоморфны и группа $\mathbf{Spin}(1, N-1)$ дважды покрывает группу $SO^\dagger(1, N-1)$. Более того, группа $\mathbf{Spin}(1, N-1)$ является универсальной покрывающей группы $SO^\dagger(1, N-1)$.

Напомним, что дираковскими спинорами ψ в пространстве $\mathbb{R}^{1, N-1}$ называются вектора в пространстве неприводимого представления алгебры Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(1, N-1)}$ (см. Определение 5.4.1). Пользуясь соотношением (6.4.3) и первыми равенствами в (6.4.53) и (6.4.58), мы определим дираковское сопряжение для спиноров ψ в пространстве $\mathbb{R}^{1, N-1}$:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0, \quad (6.4.62)$$

Тогда, с учетом (6.4.61), группа $\mathbf{Spin}(1, N-1)$ действует на спиноры ψ и $\bar{\psi}$ следующим образом

$$\psi \rightarrow \psi' = U \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^{-1}, \quad (6.4.63)$$

где $U \in \mathbf{Spin}(1, N-1)$. Из общего рассмотрения, представленного в (6.4.7), следует, что величины типа $t_{k_1 \dots k_r} = \bar{\psi}(\gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_r})\psi$ при действии на спиноры преобразованиями (6.4.63) из группы $\mathbf{Spin}(1, N-1)$ меняются как тензоры ранга r .

Замечание 2. Пусть $N = 2\nu$. Для матрицы \mathbf{B} , заданной в (6.4.53), имеют место равенства

$$\mathbf{B}^\top = \epsilon \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \mathbf{B}^\dagger = I_{2\nu}. \quad (6.4.64)$$

Второе равенство эквивалентно первому с учетом (6.3.17). Докажем первое равенство. Пользуясь (6.4.49), (6.4.51) и (6.4.54), мы получаем (сравните со второй формулой в (6.3.26))

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r})^\top &= \gamma_{m_r}^\top \cdots \gamma_{m_1}^\top \mathbf{C}^\top = (-1)^r \mathbf{C}^\top \gamma_{m_r} \cdots \gamma_{m_1} = \\ &= \epsilon (-1)^{r-1} (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}} \mathbf{C} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r} = \epsilon (-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \mathbf{C} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_r}, \end{aligned} \quad (6.4.65)$$

где $m_1 < m_2 < \dots < m_r$ и мы воспользовались $\mathbf{C}^\top = \epsilon' \mathbf{C} = -\epsilon \mathbf{C}$. В частности при $r = 1$ мы имеем $(\mathbf{C} \gamma_m)^\top = \epsilon \mathbf{C} \gamma_m$, что согласно (6.4.51) переписывается в виде $(\gamma_m \mathbf{C})^\top = \epsilon \gamma_m \mathbf{C}$, откуда, с учетом определения (6.4.53) матрицы \mathbf{B} , мы получаем первое равенство из (6.4.64).

Замечание 3. При преобразовании подобия для образующих алгебры Клиффорда $\gamma_m \rightarrow T \gamma_m T^{-1}$ матрица \mathbf{B} из (6.3.14) преобразуется по правилу (6.3.20):

$$\mathbf{B} \rightarrow T \mathbf{B} (T^*)^{-1}. \quad (6.4.66)$$

Если в результате такого преобразования матрицу \mathbf{B} можно сделать единичной, то в силу третьего соотношения в (6.3.14), (6.3.72) реализуется чисто мнимое представление для γ_m , или вещественное представление для образующих $\Sigma_{mn} \in \mathfrak{spin}(1, N-1)$. Кроме того, согласно (6.4.29) при $\mathbf{B} = I$ и $\eta' = 1$, возникает вещественность майорановских спиноров $\psi^* = \mathbf{B} \psi = \psi$. В силу соотношения (6.3.17):

$$\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* = \epsilon I_{2^v} \quad (6.4.67)$$

необходимым условием того, что матрица \mathbf{B} может быть приведена к единичной, является $\epsilon = +1$, что для сигнатуры $p = 1$ и $q = (N-1)$ выполняется (см. (6.3.40)), когда $N = 2, 4 \pmod{8}$ и существуют майорановские представления. Покажем, что это условие является и достаточным. Разлагая матрицу \mathbf{B} на мнимую и действительную части: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + i \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_{1,2}$ вещественны и симметричны (см. первое соотношение в (6.4.64) при $\epsilon = +1$), из равенства (6.4.67) выводим $[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = 0$. Таким образом, $\mathbf{B}_{1,2}$ могут быть одновременно диагонализированы вещественным ортогональным преобразованием O : $\mathbf{B}_i \rightarrow O \mathbf{B}_i O^{-1}$, а поэтому может быть диагонализирована и комплексная матрица \mathbf{B} . В результате, так как \mathbf{B} — унитарна (см. второе соотношение в (6.4.64)), мы получаем $\mathbf{B} \rightarrow O \mathbf{B} O^{-1} = \text{diag}(e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}, \dots)$. Выбирая затем $T' = \text{diag}(e^{-i\beta_1/2}, e^{-i\beta_2/2}, \dots)$, мы получаем, что \mathbf{B} приводится преобразованием (6.4.66) к единичному виду с помощью матрицы $T = T' O$. Итак, мы доказали, что в случае алгебры $\mathcal{C}\ell_{(1, N-1)}$ матрица \mathbf{B} может быть выбрана единичной тогда и только тогда, когда $N = 2, 4 \pmod{8}$, при этом майорановское представление определяется простым соотношением вещественности $\psi^* = \psi$.

- *Задача 208.* Найти явный вид матрицы T , которая с помощью преобразования (6.4.66) приводит \mathbf{B} из (6.4.55) к единичной матрице в случае $N = 2, 4 \pmod{8}$. Указание: привести к единичным матрицам следующие операторы $B_1 = i \sigma_3$, $B_2 = \sigma_1$, $B_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2$, тензорное произведение которых дает матрицу \mathbf{B} из (6.4.55).

6.4.4 Тождества Фирца для многомерных спиноров

С точки зрения теории спинорных групп тождества Фирца можно рассматривать в качестве явных формул для разложений тензорного произведения неприводимых

представлений спинорных групп (разложений Клебша–Гордана). Подчеркнем, что тождества Фирца имеют важное значение для различных физических приложений. Мы выведем эти тождества здесь только для случая четномерных пространств $\mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q = 2\nu$), но в максимальной общности.

Пусть $p + q = N$ и матрицы $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{N-1}\}$ реализуют некоторое неприводимое представление для образующих алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$ с определяющими соотношениями (6.1.78). Матрица γ_{N+1} для четных $N = 2\nu$ определена в (6.1.86).

Утверждение 6.4.3 *Для следа от произведения четного числа γ -матриц имеется рекуррентная формула*

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_1 \cdots \gamma_{2k}) &= \eta_{12} \text{Tr}(\gamma_3 \cdots \gamma_{2k}) - \eta_{13} \text{Tr}(\gamma_2 \gamma_4 \cdots \gamma_{2k}) + \\ &+ \eta_{14} \text{Tr}(\gamma_2 \gamma_3 \gamma_5 \cdots \gamma_{2k}) - \cdots + \eta_{1,2k} \text{Tr}(\gamma_2 \cdots \gamma_{2k-1}), \end{aligned} \quad (6.4.68)$$

где для краткости мы обозначили индексы m_ℓ как ℓ , то есть $\eta_{m_1 m_2} \rightarrow \eta_{12}$, $\gamma_{m_3} \rightarrow \gamma_3$ и так далее. В случае $N = 2\nu$ след от произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю^{6.15}

$$\text{Tr}(\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = 0. \quad (6.4.69)$$

Доказательство. Соотношение (6.4.69) для четномерного случая доказывается следующим образом

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) &= \text{Tr}(\gamma_{N+1} \gamma_{N+1} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = \text{Tr}(\gamma_{N+1} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}} \gamma_{N+1}) = \\ &= -\text{Tr}(\gamma_{N+1} \gamma_{N+1} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = -\text{Tr}(\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = 0, \end{aligned} \quad (6.4.70)$$

где во втором равенстве мы воспользовались циклическим свойством следа, а в следующем равенстве антикоммутативностью $[\gamma_{N+1}, \gamma_m]_+ = 0$ ($\forall m = 0, \dots, N - 1$) в случае четных N .

Формула (6.4.68) доказывается с помощью тождества

$$\text{Tr}(\gamma_1 \cdots \gamma_{2k}) = \frac{1}{2} \left(\text{Tr}(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2k}) + \text{Tr}(\gamma_2 \cdots \gamma_{2k} \gamma_1) \right), \quad (6.4.71)$$

которое записано в кратких обозначениях ($\gamma_{m_\ell} \rightarrow \gamma_\ell$) и следует из циклического свойства следа. Используя определяющие соотношения для $\mathcal{C}\ell_{(p,q)}$, матрица γ_1 во втором слагаемом в правой части (6.4.71) переносится налево, то есть

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_2 \cdots \gamma_{2k-1} \gamma_{2k} \gamma_1) &= -\text{Tr}(\gamma_2 \cdots \gamma_{2k-1} \gamma_1 \gamma_{2k}) + 2\eta_{1,2k} \text{Tr}(\gamma_2 \cdots \gamma_{2k-1}) = \cdots = \\ &= -\text{Tr}(\gamma_1 \cdots \gamma_{2k}) + 2\eta_{12} \text{Tr}(\gamma_3 \cdots \gamma_{2k}) - \cdots + 2\eta_{1,2k} \text{Tr}(\gamma_2 \cdots \gamma_{2k-1}), \end{aligned}$$

после чего первое слагаемое в (6.4.71) сокращается и мы получаем (6.4.68). ■

С помощью формулы (6.4.68) легко вычисляется след от произведения любого четного числа матриц γ_m ($m = 0, 1, \dots, N - 1$). Начиная с очевидной формулы $\text{Tr}(\gamma_m \gamma_n) = 2^\nu \eta_{mn}$, мы далее получаем

$$\text{Tr}(\gamma_m \gamma_n \gamma_k \gamma_l) = 2^\nu (\eta_{mn} \eta_{kl} - \eta_{mk} \eta_{nl} + \eta_{ml} \eta_{nk}),$$

^{6.15}Для нечетномерного случая $N = 2\nu + 1$ формула (6.4.69) справедлива для любого $k < \nu$ и не выполняется для $k = \nu$, если все m_i – разные.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6) &= 2^\nu \left[\eta_{12} (\eta_{34} \eta_{56} - \eta_{35} \eta_{46} + \eta_{36} \eta_{45}) - \right. \\ &\quad \left. - \eta_{13} (\eta_{24} \eta_{56} - \eta_{25} \eta_{46} + \eta_{26} \eta_{45}) + \eta_{14} (\eta_{23} \eta_{56} - \eta_{25} \eta_{36} + \eta_{26} \eta_{35}) - \dots \right], \end{aligned}$$

где, напомним, индексы $1, 2, 3, \dots$ обозначают m_1, m_2, m_3, \dots

- *Задача 209.* Дописать оставшиеся слагаемые в последней формуле для $\text{Tr}(\gamma_1 \cdots \gamma_6)$.

Далее мы будем рассматривать *только четномерный случай* $N = 2\nu$. Напомним, что для этого случая набор из 2^N матриц (6.1.79):

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \{I, \gamma_{m_1}, \gamma_{m_1} \gamma_{m_2}, \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \gamma_{m_3}, \dots\}, \\ 0 &\leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq N - 1. \end{aligned} \quad (6.4.72)$$

(здесь мультииндекс $A = \{m_1, m_2, \dots\}$ нумерует базисные элементы $\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \cdots$) образует полную систему базисных элементов^{6.16} в линейном пространстве комплексных матриц $\text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$, которые действуют в векторном пространстве $\mathcal{F} \equiv \mathbb{C}^{2^\nu}$. Введем набор дуальных матриц $\Gamma^{\bar{A}}$ с верхним индексом

$$\begin{aligned} \Gamma^{\bar{A}} &= \{I, \gamma^{m_1}, \gamma^{m_2} \gamma^{m_1}, \gamma^{m_3} \gamma^{m_2} \gamma^{m_1}, \gamma^{m_4} \gamma^{m_3} \gamma^{m_2} \gamma^{m_1}, \dots\}, \\ 0 &\leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq N - 1, \end{aligned} \quad (6.4.73)$$

нормированный, в соответствии с Утверждением 6.4.3, таким образом, что

$$\frac{1}{2^\nu} \text{Tr}(\Gamma^{\bar{B}_k} \Gamma_{A_\ell}) = \delta_{A_\ell}^{B_k}. \quad (6.4.74)$$

Здесь $\delta_{A_k}^{B_k} = \delta_{m_1}^{n_1} \delta_{m_2}^{n_2} \cdots \delta_{m_k}^{n_k}$ для мономов одинаковой степени k :

$$\Gamma^{\bar{B}_k} = (\gamma^{n_k} \gamma^{n_{k-1}} \cdots \gamma^{n_1}), \quad \Gamma_{A_k} = (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \cdots \gamma_{m_k}) \quad (6.4.75)$$

и $\delta_{A_\ell}^{B_k} = 0$ в случае мономов разной степени $k \neq \ell$. Подчеркнем, что черта над мультииндексом $A_k = \{m_1, \dots, m_k\}$ обозначает, что индексы в \bar{A}_k упорядочены в обратном порядке $\bar{A}_k = \{m_k, \dots, m_1\}$; сравните (6.4.72) и (6.4.73). Теперь для любой матрицы $\Gamma \in \text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$ мы имеем разложение по базисным матрицам:

$$\Gamma = \sum_A C^A \Gamma_A \equiv \sum_k \sum_{A_k} C^{A_k} \Gamma_{A_k} \equiv \sum_k \sum_{m_1 < m_2 < \dots < m_k} C^{m_1 \dots m_k} \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \cdots \gamma_{m_k}, \quad (6.4.76)$$

и коэффициенты C^A в силу (6.4.74) равны

$$C^A = \frac{1}{2^\nu} \text{Tr}(\Gamma^{\bar{A}} \Gamma) \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{1}{2^\nu} \sum_A \text{Tr}(\Gamma^{\bar{A}} \Gamma) \Gamma_A.$$

Из последнего соотношения, так как матрица Γ произвольна, мы получаем условие полноты для базисных элементов Γ_A и $\Gamma^{\bar{A}}$:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa^\beta \delta_\alpha^\rho &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_\kappa{}^\rho (\Gamma_A)_\alpha{}^\beta \Leftrightarrow P_{12} = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_1 (\Gamma_A)_2 \Leftrightarrow \\ P &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A \Gamma^{\bar{A}} \otimes \Gamma_A, \end{aligned} \quad (6.4.77)$$

^{6.16}В нечетномерном случае $N = (2\nu + 1)$ полную систему базисных элементов в $\text{Mat}_{2^\nu}(\mathbb{C})$ образуют только четные (или только нечетные) степени матриц $\gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$.

(здесь $\alpha, \beta, \rho, \kappa$ – спинорные индексы). Данные соотношения следует понимать как равенства операторов, действующих в пространстве $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, P_{12} – обозначает матрицу $(P_{12})_{\kappa\alpha}^{\rho\beta} = \delta_{\kappa}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\rho}$ оператора перестановки P (см. (4.2.12)), а индексы 1, 2 – номера векторных пространств \mathcal{F} в тензорном произведении $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, в которых действуют соответствующие матрицы $(\Gamma^{\bar{A}})_1$ и $(\Gamma_A)_2$.

- **Задача 210.** Проверить нормировку в тождестве (6.4.77). Указание: положить $\rho = \alpha$, просуммировать по α и воспользоваться равенством

$$\sum_{A_k} \Gamma^{\bar{A}_k} \Gamma_{A_k} = \frac{1}{k!} (\gamma^{[\ell_k} \dots \gamma^{\ell_1]} \cdot \gamma_{[\ell_1} \dots \gamma_{\ell_k]}) = \frac{N!}{k!(N-k)!} I_{2\nu}, \quad (6.4.78)$$

где в левой части суммирование идет по всем упорядоченным наборам $A_k = (0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq N)$, а антисимметризованные комбинации $\gamma_{[\ell_1} \dots \gamma_{\ell_k]}$ определены в (6.4.11) и суммирование идет по всем ℓ_i .

Утверждение 6.4.4 В четномерном случае $N = 2\nu$ для разложений (6.4.12), (6.4.21), (6.4.22) представлений $\rho \otimes \tilde{\rho}$, $\Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm}$ и $\Delta_{\mp} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm}$ справедливы следующие явные формулы. Для $\rho \otimes \tilde{\rho}$:

$$\bar{\psi}^{\rho} \phi_{\kappa} = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{2\nu} \frac{1}{k!} (\gamma^{[m_k} \dots \gamma^{m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi} \gamma_{[m_1} \dots \gamma_{m_k]} \phi), \quad (6.4.79)$$

для $(\Delta_{\pm} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm})$,

$$\begin{aligned} \nu - \text{нечетное} : \quad & (\bar{\psi}_{\pm})^{\rho} (\phi_{\pm})_{\kappa} = \sum_{k=0}^{\frac{\nu-1}{2}} (C_{\pm}^{[m_{2k} \dots m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[m_1 \dots m_{2k}]} \phi_{\pm}), \\ \nu - \text{четное} : \quad & (\bar{\psi}_{\pm})^{\rho} (\phi_{\pm})_{\kappa} = \\ & \sum_{k=0}^{\frac{\nu}{2}-1} (C_{\pm}^{[m_{2k} \dots m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[m_1 \dots m_{2k}]} \phi_{\pm}) + (C_{\pm}^{[m_{\nu} \dots m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[m_1 \dots m_{\nu}]} \phi_{\pm}), \end{aligned} \quad (6.4.80)$$

для $(\Delta_{\mp} \otimes \tilde{\Delta}_{\pm})$,

$$\begin{aligned} \nu - \text{четное} : \quad & (\bar{\psi}_{\pm})^{\rho} (\phi_{\mp})_{\kappa} = \sum_{k=1}^{\frac{\nu}{2}} (C_{\pm}^{[m_{2k-1} \dots m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[m_1 \dots m_{2k-1}]} \phi_{\mp}), \\ \nu - \text{нечетное} : \quad & (\bar{\psi}_{\pm})^{\rho} (\phi_{\mp})_{\kappa} = \\ & \sum_{k=1}^{\frac{\nu-1}{2}} (C_{\pm}^{[m_{2k-1} \dots m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[m_1 \dots m_{2k-1}]} \phi_{\mp}) + (C_{\pm}^{[m_{\nu} \dots m_1]})_{\kappa}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm} \gamma_{[m_1 \dots m_{\nu}]} \phi_{\mp}), \end{aligned} \quad (6.4.81)$$

где $\bar{\psi}_{\pm} = \bar{\psi} P_{\pm}$, $\phi_{\pm} = P_{\pm} \phi$, проекторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \gamma_{N+1})$ были введены в (6.2.39) и

$$C_{\pm}^{[m_k \dots m_1]} \equiv \frac{1}{2^{\nu}} \left(\frac{1}{(k)!} \gamma^{[m_k \dots m_1]} \pm \frac{\alpha_{2\nu-k}}{(2\nu-k)!} \gamma_{[n_{2\nu-k} \dots n_1]} \varepsilon^{n_1 \dots n_{2\nu-k} m_1 \dots m_k} \right). \quad (6.4.82)$$

Доказательство. Свернем обе части первого тождества в (6.4.77) с дираковскими спинорами $\bar{\psi}^{\alpha}$ и ϕ_{β} в результате с учетом первого равенства в (6.4.78) получаем разложение (6.4.79). Далее мы докажем формулы (6.4.80), формулы (6.4.81) доказываются аналогично. Свернем обе части первого тождества в (6.4.77) с киральными

спинорами $\bar{\psi}_{\pm}^{\alpha}$ и $(\phi_{\pm})_{\beta}$ и воспользуемся тем, что $(\bar{\psi}_{\pm}\Gamma_{A_{2k+1}}\phi_{\pm}) = 0$. В результате с учетом первого равенства в (6.4.78) получаем

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_{\pm})^{\rho}(\phi_{\pm})_{\kappa} &= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{A_{2k}} (\Gamma^{\bar{A}_{2k}} P_{\pm})_{\kappa}{}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm}\Gamma_{A_{2k}}\phi_{\pm}) = \\ &= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{(2k)!} (\gamma^{[m_{2k}\dots m_1]} P_{\pm})_{\kappa}{}^{\rho} (\bar{\psi}_{\pm}\gamma_{[m_1\dots m_{2k}]} \phi_{\pm}), \end{aligned} \quad (6.4.83)$$

где мы использовали обозначения $\gamma_{[m_1\dots m_{2k}]} \equiv \gamma_{[m_1}\dots\gamma_{m_{2k}]}$. Согласно (6.4.15) мы имеем следующее тождество

$$(\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_k]}\phi_{\pm}) = \pm (\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_k]}\gamma_{N+1}\phi_{\pm}) = \pm \alpha_k \varepsilon_{m_1\dots m_k i_1\dots i_{N-k}} (\bar{\psi}\gamma^{i_1\dots i_{N-k}}\phi_{\pm}), \quad (6.4.84)$$

с помощью которого равенство (6.4.83) записывается в виде соотношений (6.4.80)

1.) ν – нечетное

$$(\bar{\psi}_{\pm})^{\rho}(\phi_{\pm})_{\kappa} = \sum_{k=0}^{\frac{\nu-1}{2}} (C_{\pm}^{[m_{2k}\dots m_1]})_{\kappa}{}^{\rho} (\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_{2k}]} \phi_{\pm}), \quad (6.4.85)$$

2.) ν – четное

$$(\bar{\psi}_{\pm})^{\rho}(\phi_{\pm})_{\kappa} = \sum_{k=0}^{\frac{\nu}{2}-1} (C_{\pm}^{[m_{2k}\dots m_1]})_{\kappa}{}^{\rho} (\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_{2k}]} \phi_{\pm}) + (C_{\pm}^{[m_{\nu}\dots m_1]})_{\kappa}{}^{\rho} (\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_{\nu}]} \phi_{\pm}), \quad (6.4.86)$$

и матрицы $C_{\pm}^{[m_{2k}\dots m_1]}$ определены в (6.4.82). Формула (6.4.85) согласуется с разложением, которое приведено во второй строчке (6.4.22). Отметим, что последнее слагаемое в правой части (6.4.86) с учетом (6.4.82) равно

$$C_{\pm}^{[m_{\nu}\dots m_1]} (\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_{\nu}]} \phi_{\pm}) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}}{2^{\nu}\nu!} (\gamma^{[m_1\dots m_{\nu}]} \pm \alpha_{\nu}\gamma_{[n_1\dots n_{\nu}]} \varepsilon^{n_1\dots n_{\nu} m_1\dots m_{\nu}}) (\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_{\nu}]} \phi_{\pm}),$$

и в соответствии с (6.4.20) определяет (анти)самодуальные проекции тензоров с компонентами $\bar{\psi}\gamma_{[m_1\dots m_{\nu}]} \phi_{\pm}$. Таким образом, формула (6.4.86) согласуется с формулой во второй строчке (6.4.21). \blacksquare

Тождество (6.4.77), кроме того, что из него вытекают разложения (6.4.79), (6.4.80) и (6.4.81), является основным соотношением, с помощью которого получают многочисленные специальные тождества на спиноры, называемые *тождествами Фирца*. Например, возьмем произвольный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, который всегда можно записать как сумму тензорных произведений двух мономов

$$X_{A_{\ell}}^{\bar{B}_k} (\Gamma^{\bar{A}_{\ell}} \otimes \Gamma_{B_k}) \equiv X_{A_{\ell}}^{\bar{B}_k} (\Gamma^{\bar{A}_{\ell}})_1 (\Gamma_{B_k})_2 = (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_1 (\Gamma_{B_k})_2, \quad (6.4.87)$$

где $X_{A_{\ell}}^{\bar{B}_k}$ – числовые коэффициенты, $\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \equiv X_{A_{\ell}}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}_{\ell}}$ и, как и в формуле (6.4.76), подразумевается свертка по мульти-индексам $A_k = \{m_1, \dots, m_k\}$ с $\bar{A}_k = \{\bar{m}_k, \dots, \bar{m}_1\}$, B_k с \bar{B}_k . Умножим оператор (6.4.87) справа на перестановку P_{12} . С учетом правил $O_1 P_{12} = P_{12} O_2$ и $O_2 P_{12} = P_{12} O_1$, где 1, 2 – номера пространств в $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, в которых действуют соответствующие операторы $O_{1,2}$, имеют место следующие равенства

$$(\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_1 (\Gamma_{B_k})_2 P_{12} = (\Gamma_{B_k})_2 P_{12} (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_2 = (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_1 P_{12} (\Gamma_{B_k})_1. \quad (6.4.88)$$

Подставляя в каждое из выражений, фигурирующих в (6.4.88), формулу (6.4.77) для P_{12} , мы имеем тождества

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_1 (\Gamma_{B_k})_2 P_{12} &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}})_1 (\Gamma_{B_k} \Gamma_A)_2 = \\ &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_1 (\Gamma_{B_k} \Gamma_A \tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_2 = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}} \Gamma_{B_k})_1 (\Gamma_A)_2, \end{aligned} \quad (6.4.89)$$

где последнее и предпоследнее выражения равны соответственно последнему и предпоследнему выражению в (6.4.88). В компонентной форме тождества (6.4.89) записываются в виде

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_\kappa^\beta (\Gamma_{B_k})_\alpha^\lambda &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}})_\kappa^\lambda (\Gamma_{B_k} \Gamma_A)_\alpha^\beta = \\ &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_\kappa^\lambda (\Gamma_{B_k} \Gamma_A \tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_\alpha^\beta = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}} \Gamma_{B_k})_\kappa^\lambda (\Gamma_A)_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (6.4.90)$$

Пользуясь компонентной формой записи, первое равенство получается с учетом (6.4.77) следующим образом

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_\kappa^\beta (\Gamma_{B_k})_\alpha^\lambda &= (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_\kappa^\rho (\Gamma_{B_k})_\alpha^\sigma \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\lambda = \\ &= (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k})_\kappa^\rho (\Gamma_{B_k})_\alpha^\sigma \cdot \left[\frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_\rho^\lambda (\Gamma_A)_\sigma^\beta \right] = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}})_\kappa^\lambda (\Gamma_{B_k} \Gamma_A)_\alpha^\beta. \end{aligned}$$

Сворачивая равенства (6.4.90) с компонентами $(\bar{\Psi}_1)^\kappa$, $(\Psi_2)_\beta$, $(\bar{\Psi}_3)^\alpha$ и $(\Psi_4)_\lambda$ четырех спиноров $\bar{\Psi}_1$, Ψ_2 , $\bar{\Psi}_3$ и Ψ_4 по спинорным индексам α , β , κ и λ , мы выводим тождества Фирца для спиноров в $N = (p + q)$ -мерном пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$:

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_1 \tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{B_k} \Psi_4) &= \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{B_k} \Gamma_A \Psi_2) = \\ &= \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{B_k} \Gamma_A \tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Psi_2) = \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \Gamma^{\bar{A}} \Gamma_{B_k} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_A \Psi_2), \end{aligned} \quad (6.4.91)$$

где, как и ранее, $g = 0$ для коммутирующих и $g = 1$ для антикоммутирующих спиноров. В частных случаях, подставляя в (6.4.91) выражения $\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \otimes \Gamma_{B_k} = I \otimes I$ и $\tilde{\Gamma}^{\bar{B}_k} \otimes \Gamma_{B_k} = \gamma^m \otimes \gamma_m$, мы получаем соответствующие тождества Фирца

$$(\bar{\Psi}_1 \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \Psi_4) = \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_A \Psi_2), \quad (6.4.92)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Psi_4) = \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Gamma_A \gamma^m \Psi_2). \quad (6.4.93)$$

Тождество (6.4.93) можно упростить с помощью следующего утверждения.

Утверждение 6.4.5 *Имеет место тождество*

$$\sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Gamma_{A_k} \gamma^m = (-1)^k (N - 2k) \Gamma_{A_k}, \quad (6.4.94)$$

где мономы Γ_{A_k} определены в (6.4.75).

Доказательство. Принимая во внимание, что $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq N-1$, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Gamma_{A_k} \gamma^m &= \sum_{m \notin \{m_1, \dots, m_k\}} \gamma_m (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^m + \sum_{m \in \{m_1, \dots, m_k\}} \gamma_m (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^m = \\ &= (-1)^k (N-k) \Gamma_{A_k} + \gamma_{m_1} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^{m_1} + \dots + \gamma_{m_k} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^{m_k}. \end{aligned}$$

Теперь во всех слагаемых, начиная со второго, пронесем γ^{m_r} справа налево до γ_{m_r} и затем воспользуемся тождеством $\gamma_{m_r} \gamma^{m_r} = I$ (суммирования по m_r нет). В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Gamma_{A_k} \gamma^m &= (-1)^k (N-k) \Gamma_{A_k} + (-1)^{k-1} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k} + (-1)^{k-2} \gamma_{m_2} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_3} \dots \gamma_{m_k}) + \\ &+ \dots + (-1) \gamma_{m_{k-1}} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_{k-2}} \gamma_{m_k}) + \gamma_{m_k} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_{k-1}}) = \\ &= (-1)^k (N-k) \Gamma_{A_k} + k (-1)^{k-1} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k} = (-1)^k (N-2k) \Gamma_{A_k}. \end{aligned}$$

Подставляя соотношение (6.4.94) в тождество Фирца (6.4.93), мы получаем упрощенную форму этого тождества

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Psi_4) = \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_{k=0}^N (-1)^k (N-2k) \sum_{A_k} (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{A_k} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{A_k} \Psi_2). \quad (6.4.95)$$

- **Задача 211.** Показать, что для четырехмерного случая $N=4$ тождества Фирца (6.4.92) и (6.4.95) записываются в виде

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_1 \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \Psi_4) &= \frac{(-1)^g}{4} \left((\bar{\Psi}_1 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Psi_2) + \right. \\ &+ (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Psi_2) - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_1 \gamma^{m_1 m_2} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_{m_1 m_2} \Psi_2) - \\ &\left. - (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \gamma_5 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \gamma_5 \Psi_2) + (\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_5 \Psi_2) \right), \end{aligned} \quad (6.4.96)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Psi_4) &= (-1)^g \left((\bar{\Psi}_1 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Psi_2) - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Psi_2) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \gamma_5 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \gamma_5 \Psi_2) - (\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_5 \Psi_2) \right), \end{aligned} \quad (6.4.97)$$

где $\gamma_{m_1 m_2} = \frac{1}{2} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} - \gamma_{m_2} \gamma_{m_1})$ и $\gamma_5 = (-i) \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ (см. (6.4.47) для $N=4$). Указание: Вывести и использовать равенства

$$\begin{aligned} \sum_{A_4} (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{A_4} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{A_4} \Psi_2) &= (\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_5 \Psi_2), \\ \sum_{A_3} (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{A_3} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{A_3} \Psi_2) &= -(\bar{\Psi}_1 \gamma^m \gamma_5 \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \gamma_5 \Psi_2), \\ \sum_{A_2} (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{A_2} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_{A_2} \Psi_2) &= -\frac{1}{2} (\bar{\Psi}_1 \gamma^{m_1 m_2} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_{m_1 m_2} \Psi_2), \end{aligned}$$

где, напоминаем, Γ^{A_k} и Γ_{A_k} – мономы k -ого порядка.

Дальнейшее упрощение тождеств Фирца достигается при рассмотрении различных случаев конкретных типов спиноров Ψ_K . Для определенности ниже мы ограничимся рассмотрением случая $p = 1$ ($q = N - 1 = 2\nu - 1$), имеющего физические приложения.

1. Случай киральных вейлевских спиноров. Пусть спиноры Ψ_K ($K = 1, \dots, 4$) в (6.4.92), (6.4.95) являются киральными вейлевскими, то есть определяются соотношениями (6.4.41) и (6.4.42). В этом случае, если $(1 \mp \gamma_{N+1})\Psi_K = 0$, то для сопряженного спинора $\bar{\Psi}_K$ мы имеем

$$\Psi_K^\dagger (1 \mp \gamma_{N+1}^\dagger) \mathbf{D}^{-1} = \Psi_K^\dagger \mathbf{D}^{-1} (1 \mp (-1)^q \gamma_{N+1}) = \bar{\Psi}_K (1 \pm \gamma_{N+1}) = 0,$$

и, следовательно, справедливо тождество

$$\bar{\Psi}_K \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_r} \Psi_{K'} = 0 \quad (m_i = 0, \dots, N - 1),$$

для всех четных $r = 2n$, если спиноры Ψ_K и $\Psi_{K'}$ имеют одинаковую киральность, и для всех нечетных $r = 2n + 1$, если спиноры Ψ_K и $\Psi_{K'}$ имеют разную киральность. При выполнении этих условий, учитывая $\Gamma_{A_r} = \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_r}$ и $\Gamma^{\bar{A}_r} = \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_r}$, часть слагаемых в правых частях тождеств (6.4.92), (6.4.95) будут зануляться.

- **Задача 212.** Получить из тождества (6.4.97) для $N = 4$ следующие полезные для приложений равенства

$$\begin{aligned} & (\bar{\Psi}_1 \gamma^m (1 + \gamma_5) \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m (1 + \gamma_5) \Psi_4) = \\ & = (-1)^{g+1} (\bar{\Psi}_1 \gamma^m (1 + \gamma_5) \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m (1 + \gamma_5) \Psi_2), \\ & (\bar{\Psi}_1 \gamma^m (1 + \gamma_5) \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m (1 - \gamma_5) \Psi_4) = \\ & = 2(-1)^g (\bar{\Psi}_1 (1 - \gamma_5) \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 (1 + \gamma_5) \Psi_2). \end{aligned}$$

Указание: сделать в (6.4.97) соответствующие замены спиноров $\Psi_K \rightarrow (1 \pm \gamma_5) \Psi_K$ и $\bar{\Psi}_K \rightarrow \bar{\Psi}_K (1 \pm \gamma_5)$.

2. Случай майорановских спиноров. В этом случае $N = 2, 4 \pmod{8}$ и $\epsilon = +1$. Пользуясь соотношениями (6.4.65), а также равенством (6.4.30), мы имеем

$$\begin{aligned} & \bar{\Psi}_K \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_{K'} = \zeta \Psi_K^\top C \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_{K'} = \\ & = (-1)^g \zeta \Psi_{K'}^\top (C \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r})^\top \Psi_K = (-1)^{g+\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \bar{\Psi}_{K'} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_K \end{aligned} \quad (6.4.98)$$

где ζ — некоторый фазовый множитель и $g = 0$, или $g = 1$, в зависимости от того являются ли спиноры коммутирующими или антикоммутирующими. Соотношение (6.4.98) удобно переписать в виде двух тождеств

$$\bar{\Psi}_K \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_{K'} = (-1)^g \bar{\Psi}_{K'} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_K \quad (r = 4k + 1, 4k + 2), \quad (6.4.99)$$

$$\bar{\Psi}_K \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_{K'} = (-1)^{g+1} \bar{\Psi}_{K'} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_r} \Psi_K \quad (r = 4k, 4k + 3). \quad (6.4.100)$$

Поэтому, в тождествах Фирца (6.4.92), (6.4.93) можно делать соответствующую перестановку майорановских спиноров. Кроме того, если $\Psi_K = \Psi_{K'}$, то выражения в (6.4.99) равны нулю, если $g = 1$ (спиноры антикоммутируют), выражения в (6.4.100) равны нулю, если $g = 0$ (спиноры коммутируют).

- **Задача 213.** Рассмотреть случай майорана-вейлевских спиноров (см. Замечание 1 в Разделе 6.4.3).

Глава 7

Решения некоторых задач

7.1 Задача 11 раздела 1.3.3

Доказать, что интеграл по грассмановым переменным в правой части (1.3.53) дает формулу (1.3.32).

Рассмотрим интеграл

$$\int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha} \bar{\theta}_{\beta_\ell} \dots \bar{\theta}_{\beta_1} \theta_{\alpha_1} \dots \theta_{\alpha_k}, \quad (7.1.1)$$

где $\beta_1 < \dots < \beta_\ell$ и $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$. В силу определения (1.3.54) интеграл (7.1.1) не равен нулю только, если $\ell = k$ и $\beta_i = \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Поэтому этот интеграл переписывается в виде (суммирования по индексам $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ нет и $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq d$)

$$\begin{aligned} & \delta_{\ell,k} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_k \beta_k} \int d\theta d\bar{\theta} e^{\sum_\alpha \bar{\theta}_\alpha \theta_\alpha} \bar{\theta}_{\alpha_1} \theta_{\alpha_1} \dots \bar{\theta}_{\alpha_k} \theta_{\alpha_k} = \\ & \delta_{\ell,k} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_k \beta_k} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{1}{(d-k)!} \left(\sum_\alpha \bar{\theta}_\alpha \theta_\alpha \right)^{d-k} \bar{\theta}_{\alpha_1} \theta_{\alpha_1} \dots \bar{\theta}_{\alpha_k} \theta_{\alpha_k} = \delta_{\ell,k} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_k \beta_k}. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Учитывая эту формулу, для произвольных функций (1.3.49) и (1.3.50) мы получаем

$$\int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha} \bar{\Phi}(\bar{\theta}) \Psi(\theta) = \sum_{k=0}^d \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} \phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^* \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}. \quad (7.1.3)$$

7.2 Задача 12 раздела 1.3.3

Пользуясь интегральными представлениями (1.3.57) и (1.3.55), доказать для кососимметричной $(2n \times 2n)$ матрицы A тождество: $\det(A) = (\text{Pf}(A))^2$.

Заметим, что выполняется тождество

$$\bar{\theta}_\alpha A_{\alpha\beta} \theta_\beta = \frac{1}{2} \theta_\alpha^+ A_{\alpha\beta} \theta_\beta^+ - \frac{1}{2} \theta_\alpha^- A_{\alpha\beta} \theta_\beta^-, \quad (7.2.1)$$

где

$$\theta_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\theta}_\alpha + \theta_\alpha), \quad \theta_\alpha^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\theta}_\alpha - \theta_\alpha). \quad (7.2.2)$$

При замене переменных (7.2.2) мы имеем (суммирование по α нет)

$$\bar{\theta}_\alpha \theta_\alpha = \theta_\alpha^- \theta_\alpha^+ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^+} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^-} \Rightarrow d\theta_\alpha d\bar{\theta}_\alpha = d\theta_\alpha^+ d\theta_\alpha^-,$$

где на последнем шаге мы воспользовались тем, что интегрирование по грассмановой переменной θ эквивалентно взятию производной $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Соответственно мера $d\theta d\bar{\theta}$ в интеграле (1.3.54), (1.3.55) переписывается в виде

$$d\theta_d d\bar{\theta}_d \cdots d\theta_1 d\bar{\theta}_1 = d\theta_d^+ d\theta_d^- \cdots d\theta_1^+ d\theta_1^- = (-1)^n d\theta_d^+ \cdots d\theta_1^+ d\theta_d^- \cdots d\theta_1^-, \quad (7.2.3)$$

где $d = 2n$. Подставим (7.2.1) и (7.2.3) в формулу (1.3.57) для детерминанта. В результате получаем

$$\begin{aligned} \det(A) &= \int d\theta d\bar{\theta} \exp(\bar{\theta}_\alpha A_{\alpha\beta} \theta_\beta) = \\ &= \int d\theta_d^+ \cdots d\theta_1^+ \int (-1)^n d\theta_d^- \cdots d\theta_1^- e^{\frac{1}{2}\theta_\alpha^+ A_{\alpha\beta} \theta_\beta^+ - \frac{1}{2}\theta_\alpha^- A_{\alpha\beta} \theta_\beta^-} = \\ &= \int d\theta_d^+ \cdots d\theta_1^+ e^{\frac{1}{2}\theta_\alpha^+ A_{\alpha\beta} \theta_\beta^+} \int (-1)^n d\theta_d^- \cdots d\theta_1^- e^{-\frac{1}{2}\theta_\alpha^- A_{\alpha\beta} \theta_\beta^-} = (\text{Pf}(A))^2. \end{aligned}$$

7.3 Задача 27 раздела 2.2.3

Вывести тождества (2.2.72) и (2.2.73) и получить из них формулу (2.2.71).

Мероморфную функцию $\Psi(z)$ в окрестности любой особой точки $z = a$ можно разложить в ряд Лорана $\Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$. Для каждого члена этого ряда мы имеем

$$e^{\lambda e_+} \cdot (z-a)^k = e^{\lambda e_+} (z-a)^k e^{-\lambda e_+} e^{\lambda e_+} \cdot 1 = (e^{\lambda e_+} z e^{-\lambda e_+} - a)^k e^{\lambda e_+} \cdot 1,$$

откуда сразу же следует формула (2.2.72). Напомним, что в этих формулах точка обозначает действие дифференциального оператора на функцию, то есть $\partial_z \cdot 1 = 0$, $\partial_z \cdot z^n = n z^{n-1}$, и так далее.

Для дальнейшего полезно заметить, что если \hat{O} — линейный дифференциальный оператор (например, $\hat{O} = v(z)\partial_z$), то действие оператора $e^{\hat{O}}$ на произведение функций $f(z)$ и $h(z)$ равно

$$e^{\hat{O}}(f \cdot h) = (e^{\hat{O}}f) \cdot (e^{\hat{O}}h).$$

Действительно, разлагая левую часть этой формулы по \hat{O} , имеем

$$\begin{aligned} e^{\hat{O}}(f \cdot h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{O}^n(f \cdot h) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n C_n^k (\hat{O}^k f) \cdot (\hat{O}^{n-k} h) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} (\hat{O}^k f) \cdot (\hat{O}^{n-k} h), \end{aligned}$$

что совпадает с правой частью искомой формулы после замены переменных суммирования.

Займемся теперь выводом равенства (2.2.73). Запишем дифференциальный оператор e_+ (2.2.64) следующим образом: $e_+ = -z^2 \partial_z + 2jz = z^{2j} (-z^2 \partial_z) z^{-2j}$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} e^{\lambda e_+} &= z^{2j} e^{-\lambda z^2 \partial_z} z^{-2j} \Rightarrow \\ e^{\lambda e_+} z e^{-\lambda e_+} &= z^{2j} (e^{-\lambda z^2 \partial_z} z e^{\lambda z^2 \partial_z}) z^{-2j} = g(\lambda, z), \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

где функция $g(\lambda, z)$ равна

$$g(\lambda, z) = e^{-\lambda z^2 \partial_z} z e^{\lambda z^2 \partial_z} = e^{-\lambda z^2 \partial_z} \cdot z = z - \lambda z^2 + \lambda^2 z^3 - \dots \quad (7.3.2)$$

Ряд, возникающий здесь в правой части, можно просуммировать непосредственно. Однако, для вычисления функции $g(\lambda, z)$ мы применим общую схему, которая оказывается полезной во многих других случаях и заключается в следующем. Рассмотрим оператор $e^{\lambda v(z) \partial_z}$, где $v(z)$ – некоторый полином от z . Этот оператор является элементом группы диффеоморфизмов комплексной прямой $\text{Diff}(\mathbb{C})$ и для $v(z) = -z^2$ совпадает с оператором $e^{-\lambda z^2 \partial_z}$ из (7.3.2). Поэтому для произвольной функции $\Psi(z)$ имеем:

$$\exp(\lambda v(z) \partial_z) \cdot \Psi(z) = \Psi(e^{\lambda v(z) \partial_z} z e^{-\lambda v(z) \partial_z}) e^{\lambda v(z) \partial_z} \cdot 1 = \Psi(g(\lambda, z)) \quad (7.3.3)$$

где функция $g(\lambda, z)$ определяется формулой (сравните с (7.3.2))

$$g(\lambda, z) = e^{\lambda v(z) \partial_z} z e^{-\lambda v(z) \partial_z} = e^{\lambda v(z) \partial_z} \cdot z \quad (7.3.4)$$

Из этого определения следуют уравнения, связывающие функции $v(z)$ и $g(\lambda, z)$. Действительно, дифференцируя левую и правую части (7.3.4) по λ и учитывая равенство

$$v(z) \partial_z \cdot g(\lambda, z) = e^{\lambda v(z) \partial_z} (v(z) \partial_z) \cdot z = e^{\lambda v(z) \partial_z} \cdot v(z) = v(g(\lambda, z)) \quad ,$$

мы получаем

$$\partial_\lambda g(\lambda, z) = v(z) \partial_z \cdot g(\lambda, z) = v(g(\lambda, z)) \quad , \quad g(0, z) = z \quad .$$

Отсюда следует, что связь функций $v(z)$ и $g(\lambda, z)$ дается интегральным уравнением

$$\int_z^{g(\lambda, z)} \frac{dz'}{v(z')} = \lambda \quad . \quad (7.3.5)$$

Это уравнение известно в квантовой теории поля (в теории ренормгруппы) как *уравнение Гелл-Манна–Лоу* и определяет "инвариантный заряд" $g(\lambda, z)$ через "бета-функцию" $v(z)$. Таким образом, уравнение (7.3.5) демонстрирует связь ренормгруппы и группы диффеоморфизмов $\text{Diff}(\mathbb{C})$.

Подставим $v(z) = -z^2$ в уравнение (7.3.5). В результате получаем

$$\frac{1}{g(\lambda, z)} - \frac{1}{z} = \lambda \quad \Rightarrow \quad g(\lambda, z) = \frac{z}{1 + \lambda z} \quad , \quad (7.3.6)$$

что доказывает первое соотношение в (2.2.73). Второе соотношение в (2.2.73) следует из (7.3.3) и (7.3.6):

$$e^{\lambda e^+} \cdot 1 = z^{2j} e^{-\lambda z^2 \partial_z} \cdot z^{-2j} = z^{2j} (g(\lambda, z))^{-2j} = (1 + \lambda z)^{2j} \quad .$$

Окончательно, пользуясь (2.2.72) и (2.2.73), мы получаем (2.2.71):

$$e^{a^+ e^+} \Psi(z) = \Psi(e^{a^+ e^+} z e^{-a^+ e^+}) e^{a^+ e^+} \cdot 1 = \Psi\left(\frac{z}{1 + a_+ z}\right) (1 + a_+ z)^{2j} \quad .$$

7.4 Задача 32 раздела 2.3.2

Доказать, что элементы $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)$, заданные в (2.3.50), можно записать в компактном виде (2.3.51).

Заметим, что элементы $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)$, заданные в (2.3.50), можно, согласно формуле (2.3.49) и с учетом (2.2.26), представить в виде

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^{j+m'} T_m^j(s', t') \Big|_{s=0, t=1}, \quad (7.4.1)$$

где s' и t' определены в (2.3.48). Введем однородную переменную $z = s/t$, тогда формула (7.4.1) переписывается в виде

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m)!(j+m)!(j-m)!}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{j+m'} (\alpha z - \beta^*)^{j+m} (\beta z + \alpha^*)^{j-m} \Big|_{z=0}. \quad (7.4.2)$$

Сделаем замену переменных $z \rightarrow y$:

$$y + 1 = 2\alpha(\beta z + \alpha^*) \Rightarrow y - 1 = 2\beta(\alpha z - \beta^*), \quad (7.4.3)$$

где вторая формула получается из первой с учетом $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$. Подстановка (7.4.3) в (7.4.2) дает (2.3.51).

7.5 Задача 34 раздела 2.3.3

Пользуясь формулами (2.3.58), (2.3.66), (2.3.72) и (2.3.73) доказать теорему сложения для сферических функций (2.3.77).

С помощью формул (2.3.58), (2.3.66), (2.3.72) и (2.3.73) получаем следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \sum_m Y_{-m}^{(\ell)}(-\phi_1, \theta_1) Y_m^{(\ell)}(\phi_2, \theta_2) = \\ & = \sum_m \mathcal{D}_{-m0}^{(\ell)}(-\phi_1, \theta_1, 0) \mathcal{D}_m^{(\ell)}(\phi_2, \theta_2, 0) = \sum_m \mathcal{D}_{0m}^{(\ell)}(0, \theta_1, \phi_1) \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi_2, \theta_2, 0) = \\ & = \sum_m \langle \ell, 0 | U_{\vec{e}_2}(\theta_1) \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi_1) | \ell, m \rangle \langle \ell, m | U_{\vec{e}_3}(\phi_2) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta_2) | \ell, 0 \rangle = \\ & = \langle \ell, 0 | U_{\vec{e}_2}(\theta_1) \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi_1 + \phi_2) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta_2) | \ell, 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

Любой элемент группы $SU(2)$ однозначно записывается в параметризации углов Эйлера, поэтому для элемента, среднее от которого мы получили в последней части (7.5.1), имеем следующее представление

$$U_{\vec{e}_2}(\theta_1) \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi_1 + \phi_2) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta_2) = U_{\vec{e}_3}(\alpha_{12}) \cdot U_{\vec{e}_2}(\omega_{12}) \cdot U_{\vec{e}_3}(\beta_{12}), \quad (7.5.2)$$

где, напомним, матрицы $U_{\vec{e}_2}(\theta)$ и $U_{\vec{e}_3}(\phi)$ определяются в (2.3.17), а углы ω_{12} , α_{12} и β_{12} фиксируются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\alpha_{12} + \beta_{12}}{2}} \cos \frac{\omega_{12}}{2} &= e^{i\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} - e^{-i\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2}, \\ e^{i\frac{\alpha_{12} - \beta_{12}}{2}} \sin \frac{\omega_{12}}{2} &= e^{i\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} + e^{-i\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений в частности находим

$$\cos \omega_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

Подставим тождество (7.5.2) в правую часть (7.5.1) и воспользуемся (2.3.70). В результате получаем

$$\sum_m Y_{-m}^{(\ell)}(-\phi_1, \theta_1) Y_m^{(\ell)}(\phi_2, \theta_2) = \langle \ell, 0 | U_{\vec{e}_2}(\omega_{12}) | \ell, 0 \rangle = Y_0^{(\ell)}(\omega_{12}) = P^{(\ell)}(\cos \omega_{12}),$$

что и доказывает (2.3.77).

Отметим, что тождества типа (7.5.2) играют важную роль в теории квантовых интегрируемых систем и называются уравнениями "звезда-треугольник".

7.6 Задача 35 раздела 2.3.3

Пусть элемент $U = \exp(\frac{i}{2} t^k \sigma_k) = \exp(-t^k \tau_k)$ группы $SU(2)$ близок к единичному, то есть параметры t^i – малы. Показать, что функции ϕ', θ', ψ' в уравнении (2.3.78) в первом порядке по t^i равны (2.3.80).

Дифференцируя обе части (2.3.78) по t^k ($k = 1, 2, 3$) и затем полагая $t^k = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot U(\phi, \theta, \psi) &= \partial_k \phi' \sigma_3 \cdot U(\phi, \theta, \psi) + \\ &+ \partial_k \theta' U_{\vec{e}_3}(\phi) \sigma_2 U_{\vec{e}_2}(\theta) U_{\vec{e}_3}(\psi) + \partial_k \psi' U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) \sigma_3 U_{\vec{e}_3}(\psi), \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

где $U(\phi, \theta, \psi) = U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) U_{\vec{e}_3}(\psi)$ и мы использовали обозначения

$$\partial_k \phi' = \left. \frac{\partial \phi'}{\partial t^k} \right|_{t^k=0}, \quad \partial_k \theta' = \left. \frac{\partial \theta'}{\partial t^k} \right|_{t^k=0}, \quad \partial_k \psi' = \left. \frac{\partial \psi'}{\partial t^k} \right|_{t^k=0}.$$

С помощью формул (2.3.17) легко вывести тождества

$$\begin{aligned} U_{\vec{e}_3}(\phi) \sigma_2 U_{\vec{e}_3}(-\phi) &= \cos \phi \sigma_2 + \sin \phi \sigma_1, \\ U_{\vec{e}_2}(\theta) \sigma_3 U_{\vec{e}_2}(-\theta) &= \cos \theta \sigma_3 - \sin \theta \sigma_1, \\ U_{\vec{e}_3}(\phi) \sigma_1 U_{\vec{e}_3}(-\phi) &= \cos \phi \sigma_1 - \sin \phi \sigma_2, \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

с учетом которых уравнения (7.6.1) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot U(\phi, \theta, \psi) &= \left(\partial_k \phi' \sigma_3 + \partial_k \theta' (\cos \phi \sigma_2 + \sin \phi \sigma_1) + \right. \\ &\left. + \partial_k \psi' (\cos \theta \sigma_3 - \sin \theta \cos \phi \sigma_1 + \sin \theta \sin \phi \sigma_2) \right) \cdot U(\phi, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Таким образом, умножая обе части этого равенства справа на $U(\phi, \theta, \psi)^{-1}$ и полагая $k = 1, 2, 3$, мы получаем систему уравнений, которую с учетом того, что операторы σ_i – линейно независимы, можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \phi' & \partial_1 \theta' & \partial_1 \psi' \\ \partial_2 \phi' & \partial_2 \theta' & \partial_2 \psi' \\ \partial_3 \phi' & \partial_3 \theta' & \partial_3 \psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ \sin \phi, & \cos \phi, & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi, & \sin \theta \sin \phi, & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.6.4)$$

(уравнения (7.6.3) возникают, если обе части (7.6.4) умножить справа на вектор-столбец $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$). Решение (7.6.4) представляется следующим образом

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \phi' & \partial_1 \theta' & \partial_1 \psi' \\ \partial_2 \phi' & \partial_2 \theta' & \partial_2 \psi' \\ \partial_3 \phi' & \partial_3 \theta' & \partial_3 \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \operatorname{ctg} \theta & \sin \phi & -\cos \phi / \sin \theta \\ -\sin \phi \operatorname{ctg} \theta & \cos \phi & \sin \phi / \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.6.5)$$

откуда вытекают формулы (2.3.80).

7.7 Задача 39 раздела 2.3.3

Доказать, что лапласиан (2.3.86) на сфере S^3 (на группе $SU(2)$) в параметризации углов Эйлера (2.3.23) равен стандартному лапласиану на сфере S^3 , записанному в параметризации сферических углов (2.3.13):

$$\Delta'_{SU(2)} = \frac{1}{\sin^2 \chi} \partial_\chi (\sin^2 \chi \cdot \partial_\chi) + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \cdot \partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2, \quad (7.7.1)$$

и умноженному на фактор $1/4$. То есть, мы имеем $\Delta_{SU(2)} = \Delta'_{SU(2)}/4$.

Представим любой вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ длины r в виде $\vec{x} = r\vec{x}$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – единичный вектор в \mathbb{R}^n , соответствующий точке на единичной сфере S^{n-1} . Компоненты вектора \vec{x} обычно параметризуют через гиперсферические углы (такие параметризации для произвольного числа измерений n рассматривались в первой части книги; см. раздел **I-6.2**). Имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_i &= (\hat{\partial}_i x_k) \partial_k = r \partial_i, \\ \partial_r &= (\partial_r x_i) \partial_i = x_i \partial_i \Rightarrow r \partial_r = x_i \partial_i, \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

где мы ввели краткие обозначения $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$, $\hat{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Рассмотрим стандартное дифференциальное представление для образующих алгебры $so(n)$:

$$L_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i = x_i \hat{\partial}_j - x_j \hat{\partial}_i. \quad (7.7.3)$$

Отметим, что операторы L_{ij} в (7.7.3) зависят только от переменных x_i , параметризующих точки сферы S^{n-1} (не зависят от радиальной переменной r) и определяют касательные векторные поля к единичной сфере S^{n-1} в точке $\vec{x} \in S^{n-1}$. Вычислим квадратичный оператор Казимира алгебры $so(n)$ в дифференциальном представлении (7.7.3)

$$\begin{aligned} L_{ij}^2 &= (x_i \partial_j - x_j \partial_i)^2 = 2 \left(x_i^2 \partial_j^2 + x_i \partial_i - n(x_i \partial_i) - x_i x_j \partial_j \partial_i \right) = \\ &= 2 \left(x_i^2 \partial_j^2 + (2-n)(x_i \partial_i) - (x_i \partial_i)^2 \right) = 2 \left(r^2 \partial_j^2 + (2-n)(r \partial_r) - (r \partial_r)^2 \right), \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

где мы воспользовались вторым равенством из (7.7.2). Из соотношения (7.7.4) следует формула для оператора Лапласа в пространстве \mathbb{R}^n в терминах сферических переменных r и x_i :

$$\partial_j^2 = \frac{1}{r^2} (r \partial_r)^2 + (n-2) \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{2r^2} L_{ij}^2 = \partial_r^2 + (n-1) \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{2r^2} L_{ij}^2. \quad (7.7.5)$$

Заметим, что в (7.7.5) вся зависимость от "угловых" переменных x_i содержится в операторе Казимира L_{ij}^2 , который называется оператором Лапласа^{7.1} на сфере S^{n-1} .

Для начала выведем формулу (7.7.1) для оператора Лапласа на сфере S^3 , используя параметризацию единичной сферы S^3 в терминах обычных сферических углов (2.3.13) в \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \chi, & x_1 &= \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi, & x_3 &= \sin \chi \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

Производные по углам выражаются через производные $\hat{\partial}_k = \partial/\partial x_k$ следующим образом

$$\begin{aligned} \partial_\chi &= -s_\chi \hat{\partial}_0 + c_\chi c_\vartheta \hat{\partial}_3 + c_\chi s_\vartheta c_\varphi \hat{\partial}_1 + c_\chi s_\vartheta s_\varphi \hat{\partial}_2, \\ \partial_\vartheta &= -s_\chi s_\vartheta \hat{\partial}_3 + s_\chi c_\vartheta c_\varphi \hat{\partial}_1 + s_\chi c_\vartheta s_\varphi \hat{\partial}_2, & \partial_\varphi &= -s_\chi s_\vartheta s_\varphi \hat{\partial}_1 + s_\chi s_\vartheta c_\varphi \hat{\partial}_2, \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

где как обычно мы использовали краткие обозначения $s_\vartheta := \sin \vartheta$, $c_\varphi := \cos \varphi$ и так далее. Пользуясь формулами (7.7.3), (7.7.6) и (7.7.7), мы получаем представление для образующих алгебры $so(4)$ в терминах сферических углов

$$\begin{aligned} (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1) &= \partial_\varphi, & (x_3 \partial_1 - x_1 \partial_3) &= c_\varphi \partial_\vartheta - \frac{c_\vartheta s_\varphi}{s_\vartheta} \partial_\varphi, \\ (x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3) &= s_\varphi \partial_\vartheta + \frac{c_\vartheta c_\varphi}{s_\vartheta} \partial_\varphi, & (x_0 \partial_3 - x_3 \partial_0) &= c_\vartheta \partial_\chi - \frac{c_\chi s_\vartheta}{s_\chi} \partial_\vartheta, \\ (x_0 \partial_1 - x_1 \partial_0) &= s_\vartheta c_\varphi \partial_\chi + \frac{c_\chi c_\varphi c_\vartheta}{s_\chi} \partial_\vartheta - \frac{c_\chi s_\varphi}{s_\chi s_\vartheta} \partial_\varphi, \\ (x_0 \partial_2 - x_2 \partial_0) &= s_\vartheta s_\varphi \partial_\chi + \frac{c_\chi c_\vartheta s_\varphi}{s_\chi} \partial_\vartheta + \frac{c_\chi c_\varphi}{s_\chi s_\vartheta} \partial_\varphi, \end{aligned}$$

Окончательно для оператора Лапласа на сфере S^3 имеем следующее представление в терминах сферических углов:

$$\begin{aligned} L_{ij}^2 &= \partial_\varphi^2 + \left(c_\varphi \partial_\vartheta - \frac{c_\vartheta s_\varphi}{s_\vartheta} \partial_\varphi \right)^2 + \left(s_\varphi \partial_\vartheta + \frac{c_\vartheta c_\varphi}{s_\vartheta} \partial_\varphi \right)^2 + \left(c_\vartheta \partial_\chi - \frac{c_\chi s_\vartheta}{s_\chi} \partial_\vartheta \right)^2 + \\ &+ \left(s_\vartheta c_\varphi \partial_\chi + \frac{c_\chi c_\varphi c_\vartheta}{s_\chi} \partial_\vartheta - \frac{c_\chi s_\varphi}{s_\chi s_\vartheta} \partial_\varphi \right)^2 + \left(s_\varphi s_\vartheta \partial_\chi + \frac{c_\chi c_\vartheta s_\varphi}{s_\chi} \partial_\vartheta + \frac{c_\chi c_\varphi}{s_\chi s_\vartheta} \partial_\varphi \right)^2 = \\ &= \partial_\varphi^2 + \partial_\vartheta^2 + \text{ctg} \vartheta \partial_\vartheta + \text{ctg}^2 \vartheta \partial_\varphi^2 + \partial_\chi^2 + 2 \frac{c_\chi}{s_\chi} \partial_\chi + \frac{c_\chi^2 s_\vartheta^2}{s_\chi^2} \partial_\vartheta^2 + \\ &+ \left(\frac{c_\chi c_\varphi c_\vartheta}{s_\chi} \partial_\vartheta - \frac{c_\chi s_\varphi}{s_\chi s_\vartheta} \partial_\varphi \right)^2 + \left(\frac{c_\chi c_\vartheta s_\varphi}{s_\chi} \partial_\vartheta + \frac{c_\chi c_\varphi}{s_\chi s_\vartheta} \partial_\varphi \right)^2 = \\ &= \partial_\vartheta^2 + \text{ctg} \vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{s_\vartheta^2} \partial_\varphi^2 + \partial_\chi^2 + 2 \frac{c_\chi}{s_\chi} \partial_\chi + \frac{c_\chi^2}{s_\chi^2} \partial_\vartheta^2 + \frac{c_\chi^2 c_\vartheta}{s_\chi^2 s_\vartheta} \partial_\vartheta + \frac{c_\chi^2}{s_\chi^2 s_\vartheta^2} \partial_\varphi^2, \end{aligned} \quad (7.7.8)$$

что совпадает с $\Delta'_{SU(2)}$ из (7.7.1).

Найдем теперь оператор Лапласа на сфере S^3 в параметризации углов Эйлера (2.3.23):

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\phi+\psi}{2}, & x_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\phi-\psi}{2}, \\ x_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\phi-\psi}{2}, & x_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\phi+\psi}{2}, \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

Положим $\tau = \frac{\vartheta}{2}$ и $\phi_\pm = \frac{\phi \pm \psi}{2}$. Тогда имеем

$$\partial_\tau = r \left(-s_\tau c_{\phi_+} \partial_0 + c_\tau s_{\phi_-} \partial_1 + c_\tau c_{\phi_-} \partial_2 - s_\tau s_{\phi_+} \partial_3 \right), \quad (7.7.10)$$

^{7.1} Данный оператор построен как квадратичная комбинация касательных векторов L_{ij} на сфере S^{n-1} и коммутирует со всеми этими касательными векторами.

$$\begin{aligned}\partial_{\phi_+} &= r \left(-c_\tau s_{\phi_+} \partial_0 + c_\tau c_{\phi_+} \partial_3 \right) = -x_3 \partial_0 + x_0 \partial_3, \\ \partial_{\phi_-} &= r \left(s_\tau c_{\phi_-} \partial_1 - s_\tau s_{\phi_-} \partial_2 \right) = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2.\end{aligned}\quad (7.7.11)$$

Комбинируя соотношения (7.7.10) и (7.7.11), и учитывая (7.7.9), мы находим

$$\begin{aligned}\frac{s_\tau s_{\phi_-}}{c_\tau} \partial_{\phi_+} &= s_{\phi_+} (x_0 \partial_1 - x_1 \partial_0) + c_{\phi_+} (x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1), \\ s_{\phi_-} \partial_\tau + \frac{c_\tau c_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} &= c_{\phi_+} (x_0 \partial_1 - x_1 \partial_0) - s_{\phi_+} (x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1), \\ \frac{s_\tau c_{\phi_-}}{c_\tau} \partial_{\phi_+} &= s_{\phi_+} (x_0 \partial_2 - x_2 \partial_0) + c_{\phi_+} (x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2), \\ c_{\phi_-} \partial_\tau - \frac{c_\tau s_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} &= c_{\phi_+} (x_0 \partial_2 - x_2 \partial_0) - s_{\phi_+} (x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2),\end{aligned}\quad (7.7.12)$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{s_\tau s_{\phi_-}}{c_\tau} \partial_{\phi_+} \\ s_{\phi_-} \partial_\tau + \frac{c_\tau c_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\phi_+} & s_{\phi_+} \\ -s_{\phi_+} & c_{\phi_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{13} \\ L_{01} \end{pmatrix}, \quad (7.7.13)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{s_\tau c_{\phi_-}}{c_\tau} \partial_{\phi_+} \\ c_{\phi_-} \partial_\tau - \frac{c_\tau s_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\phi_+} & s_{\phi_+} \\ -s_{\phi_+} & c_{\phi_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{23} \\ L_{02} \end{pmatrix}, \quad (7.7.14)$$

В силу того, что в правых частях уравнений (7.7.13) и (7.7.14) возникли матрицы двумерных поворотов, мы сразу можем написать

$$\begin{aligned}L_{13}^2 + L_{01}^2 &= \left(\frac{s_\tau s_{\phi_-}}{c_\tau} \right)^2 \partial_{\phi_+}^2 + \left(s_{\phi_-} \partial_\tau + \frac{c_\tau c_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right)^2 - \frac{s_\tau s_{\phi_-}}{c_\tau} \left(s_{\phi_-} \partial_\tau + \frac{c_\tau c_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right), \\ L_{23}^2 + L_{02}^2 &= \left(\frac{s_\tau c_{\phi_-}}{c_\tau} \right)^2 \partial_{\phi_+}^2 + \left(c_{\phi_-} \partial_\tau - \frac{c_\tau s_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right)^2 - \frac{s_\tau c_{\phi_-}}{c_\tau} \left(c_{\phi_-} \partial_\tau - \frac{c_\tau s_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right).\end{aligned}\quad (7.7.15)$$

Последние слагаемые в правых частях соотношений (7.7.15) возникают из-за того, что матрицы двумерных поворотов в (7.7.13) и (7.7.14) не коммутируют с компонентами двумерных векторов, включающих производные ∂_{ϕ_\pm} . Окончательно с помощью формул (7.7.11) и (7.7.15) мы получаем оператор Лапласа на S^3 в параметризации углов Эйлера:

$$\begin{aligned}L_{ij}^2 &= \partial_{\phi_+}^2 + \partial_{\phi_-}^2 + \left(\frac{s_\tau s_{\phi_-}}{c_\tau} \right)^2 (\partial_{\phi_+})^2 + \left(s_{\phi_-} \partial_\tau + \frac{c_\tau c_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{s_\tau c_{\phi_-}}{c_\tau} \right)^2 (\partial_{\phi_+})^2 + \left(c_{\phi_-} \partial_\tau - \frac{c_\tau s_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{s_\tau c_{\phi_-}}{c_\tau} \left(c_{\phi_-} \partial_\tau - \frac{c_\tau s_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right) - \frac{s_\tau s_{\phi_-}}{c_\tau} \left(s_{\phi_-} \partial_\tau + \frac{c_\tau c_{\phi_-}}{s_\tau} \partial_{\phi_-} \right) = \\ &= \frac{1}{c_\tau^2} \partial_{\phi_+}^2 + \left(1 + \frac{c_\tau^2}{s_\tau^2} \right) \partial_{\phi_-}^2 + \partial_\tau^2 + \left(\frac{c_\tau}{s_\tau} - \frac{s_\tau}{c_\tau} \right) \partial_\tau = \\ &= 4 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \cot \theta \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right) + \frac{4}{\sin^2 \theta} (\partial_\psi - 2 \cos \theta \partial_\phi) \partial_\psi = 4\Delta_{SU(2)},\end{aligned}\quad (7.7.16)$$

где в предпоследнем равенстве была сделана замена переменных

$$\phi_\pm = \frac{1}{2}(\phi \pm \psi), \quad \tau = \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\phi_\pm} = \partial_\phi \pm \partial_\psi, \quad \partial_\tau = 2\partial_\theta,$$

и оператор $\Delta_{SU(2)}$ определен в (2.3.86). Левые части (7.7.8) и (7.7.16) равны. Из сравнения правых частей (7.7.8) и (7.7.16) следует тождество $\Delta_{SU(2)} = \Delta'_{SU(2)}/4$.

7.8 Задача 60 раздела 2.5.2

Доказать, что 6- j символ (2.5.20), изображенный в виде тетраэдра на Рис. 2.6, обладает симметриями относительно специальных перестановок значений спинов j_k , соответствующих вращениям и отражениям этого тетраэдра:

1.) 6- j символ инвариантен относительно любой перестановки столбцов:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ j_4 & j_6 & j_5 \end{matrix} \right\}; \quad (7.8.1)$$

2.) 6- j символ инвариантен относительно перестановки первого и второго ряда спинов j_k в первых двух столбцах

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_6 \end{matrix} \right\}. \quad (7.8.2)$$

Доказать, что множество всех композиций преобразований (7.8.1) и (7.8.2) образует группу симметрий тетраэдра, изоморфную группе перестановок S_4 .

Симметрия 6- j символа относительно циклической перестановки столбцов

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ j_6 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ j_5 & j_6 & j_4 \end{matrix} \right\}, \quad (7.8.3)$$

следует из инвариантности диаграммы на Рис. 2.6 относительно ее поворотов в плоскости на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ вокруг вершины (j_1, j_2, j_3) . При этом инвариантная свертка 3- j символов не меняется, а спины j_k переставляются указанным в (7.8.3) способом. Изобразим диаграмму для 6- j символа, представленную на Рис. 2.6, в виде тетраэдра с вершинами (A, B, C, D) как это сделано в левой части Рис. 7.1. Тогда вращения диаграммы на Рис. 2.6 в плоскости на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, эквивалентно вращению тетраэдра в левой части Рис. 7.1 на те же углы вокруг оси, проходящей через вершину D и центр противоположной грани (A, B, C) . Далее, зеркально отразим диаграмму для 6- j символа в левой части Рис. 7.1 относительно вертикальной оси, что эквивалентно отражению соответствующего тетраэдра относительно плоскости, проходящей через ребро (B, D) и центр противоположного ребра (A, C) . В результате мы получаем инвариантную свертку 3- j символов, изображенную в виде второй диаграммы на Рис. 7.1, которая равна изначальному 6- j символу, с точностью до фазового фактора, учитывающего (см. Рис. 2.1) изменение ориентации всех вершин при отражении.

$$\begin{matrix} B \\ j_4 \quad j_3 \quad j_5 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ D \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ A \quad j_2 \quad C \\ j_6 \end{matrix} = (-1)^2 \sum_{k=1}^6 j_k \cdot \begin{matrix} B \\ j_5 \quad j_3 \quad j_4 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ D \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ C \quad j_1 \quad A \\ j_6 \end{matrix} = (-1)^{2 \sum_k j_k + 2(j_4 + j_5 + j_6)} \cdot \begin{matrix} D \\ j_5 \quad j_3 \quad j_4 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ C \quad j_1 \quad A \\ j_6 \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_6 \end{matrix} \right\}.$$

Рис. 7.1: Вывод симметрии 6- j символа, указанной в равенстве (7.8.1).

Меняя во второй диаграмме на Рис. 7.1 направления ребер, отмеченных спинами j_4 , j_5 и j_6 , на противоположные (в соответствии с правилами, указанными на Рис. 2.7) и учитывая тождество $2 \sum_k j_k + 2(j_4 + j_5 + j_6) \pmod{2} = 0 \pmod{2}$, мы получаем (в правой части Рис. 7.1) 6- j символ с переставленными столбцами, что доказывает первое равенство в (7.8.1). Второе равенство в (7.8.1) следует из первого равенства и циклической симметрии (7.8.3).

Соотношение (7.8.2) получается, если одну из сторон треугольника с вершинами (A, B, C) в первой диаграмме на Рис. 7.2, например сторону (A, C) , перекинуть через противоположную вершину B . В результате получается вторая диаграмма на Рис. 7.2. Из сравнения этих первых двух диаграмм видно, что соответствующие инвариантные свертки 3- j символов равны друг-другу. Третья диаграмма на Рис. 7.2

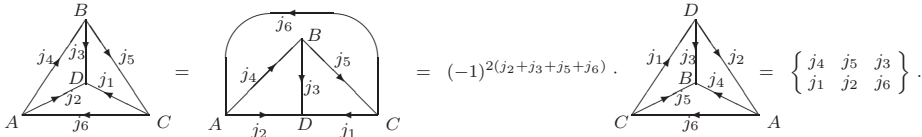


Рис. 7.2: Вывод симметрии 6- j символа, указанной в равенстве (7.8.2).

получается из второй, если в ней изменить направления ребер j_2, j_3, j_5 и j_6 . Возникающий при этом фазовый фактор оказывается равным единице в силу тождества $2(j_2 + j_3 + j_5 + j_6) \bmod(2) = 4j_1 \bmod(2) = 0 \bmod(2)$. Заметим, что тетраэдры, соответствующие первой и третьей диаграмме на Рис. 7.2, получается друг из друга поворотом на угол π вокруг оси симметрии, проходящей через середины сторон (A, C) и (B, D) . С помощью композиций преобразований тетраэдра с вершинами (A, B, C, D) , которые указаны на Рисунках 7.1 и 7.2, а также преобразований поворотов вокруг оси, проходящей через вершину D и центр противоположной грани (A, B, C) , мы можем произвольным образом переставить вершины тетраэдра (A, B, C, D) . Поэтому все эти преобразования (и соответствующие им преобразования 6- j символа (7.8.1), (7.8.2) и (7.8.3)) образуют группу симметрии тетраэдра, изоморфную S_4 .

7.9 Задача 71 раздела 2.5.4

Вывести для детерминанта $\det(I_d + w \cdot z)$ тождество (2.5.76) и получить равенство (2.5.78).

Пусть A, B, C и D — четыре $d \times d$ матрицы и матрица A — обратима. Тогда имеет место следующее тождество

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - C \cdot A^{-1} \cdot B), \tag{7.9.1}$$

которое следует из очевидного разложения для блочной $2d \times 2d$ матрицы:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d & A^{-1} \cdot B \\ 0 & D - C \cdot A^{-1} \cdot B \end{pmatrix},$$

где 0 — нулевой $d \times d$ блок. Положим $A = -I_d, B = z, C = w$ и $D = I_d$, тогда из (7.9.1) следует, что

$$\det \begin{pmatrix} -I_d & z \\ w & I_d \end{pmatrix} = \det(-I_d) \det(I_d + w \cdot z) = (-1)^d \det(I_d + w \cdot z),$$

или, переставляя столбцы в матрице в левой части этого соотношения, мы получаем тождество (2.5.76):

$$\det(I_d + w \cdot z) = \det \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} = \left[\text{Pf} \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} \right]^2. \tag{7.9.2}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $Z(z, w) = \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix}$ — четномерная и антисимметричная матрица, и поэтому (см. раздел **I-1.2.2** первой части книги) для нее определен пфаффиан (2.5.77) и применима формула $\det(Z) = [\text{Pf}(Z)]^2$. Вывод равенства (2.5.78) мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения. Это равенство получается непосредственно с помощью вычисления пфаффиана по формуле (2.5.77).

7.10 Задача 78 раздела 3.3

Доказать, что разложение простых корней $\alpha^{(i)}$ по фундаментальным весам $\lambda_{(k)}$ имеет вид

$$\alpha^{(i)} = \sum_{k=1}^r K_{ik} \lambda_{(k)}, \quad (7.10.1)$$

где

$$K_{ik} = 2(\alpha^{(i)}, \alpha^{(k)}) / (\alpha^{(k)})^2 \quad (7.10.2)$$

— элементы матрицы Картана (см. раздел **I-5.2.2** первой части книги). Доказать, что порядок группы Λ/Λ_r , где Λ — решетка весов и Λ_r — решетка корней, равен $\det \|K_{ik}\|$.

Пользуясь формулой для матрицы Картана (7.10.2) и определением фундаментальных весов (3.3.2) для любого простого корня $\alpha^{(j)}$ получаем

$$(\alpha^{(i)} - \sum_{k=1}^r K_{ik} \lambda_{(k)}, \alpha^{(j)}) = 0. \quad (7.10.3)$$

Так как простые корни $\{\alpha^{(j)}\}$ образуют полную систему векторов в r -мерном корневом пространстве \mathfrak{V}_r и метрика g_{ij} в пространстве \mathfrak{V}_r евклидова, то из (7.10.3) вытекает равенство (7.10.1). Из этого равенства в частности следует, что фундаментальные веса $\{\lambda_{(k)}\}$ также образуют полную систему векторов в r -мерном корневом пространстве \mathfrak{V}_r .

Доказательство соотношения $\text{ord}(\Lambda/\Lambda_r) = \det(K)$ будет проведено так, что оно будет справедливо для любых решеток Λ и их подрешеток Λ_r , задаваемых произвольной целочисленной матрицей $\|K_{ik}\|$ с $\det(K) > 0$. Сопоставим решеткам Λ и Λ_r группы сдвигов стандартным образом. Элементы группы Λ соответствуют сдвигам в \mathfrak{V}_r вдоль базисных векторов $\lambda_{(k)}$:

$$\lambda_{(\vec{n})} = \sum_{k=1}^r n_k \lambda_{(k)}, \quad n_k \in \mathbb{Z},$$

а элементы подгруппы $\Lambda_r \subset \Lambda$ соответствуют сдвигам вдоль векторов (7.10.1):

$$\alpha_{(\vec{m})} = \sum_{i=1}^r m_i \alpha^{(i)} = \sum_{i,k=1}^r m_i K_{ik} \lambda_{(k)}, \quad m_k \in \mathbb{Z}.$$

Далее для краткости будем говорить, что вектора $\lambda_{(\bar{n})}$ являются элементами группы Λ , а вектора $\alpha_{(\bar{m})}$ являются элементами подгруппы Λ_r . Смежный класс элемента $\lambda_{(\bar{n})} \in \Lambda$ по подгруппе Λ_r состоит из элементов

$$\lambda_{(\bar{n}')} = \lambda_{(\bar{n})} + \alpha_{(\bar{m})} = \sum_{k=1}^r n_k \lambda_{(k)} + \sum_{i,k=1}^r m_i K_{ik} \lambda_{(k)}, \quad \forall m_i \in \mathbb{Z}. \quad (7.10.4)$$

Так как фундаментальные веса образуют базис в \mathfrak{A}_r , то из (7.10.4) следует, что элементы $\lambda_{(\bar{n})}$ и $\lambda_{(\bar{n}')} \in \Lambda$ принадлежат одному смежному классу, если

$$\mathbf{n}'_k = \mathbf{n}_k + \sum_{i=1}^r m_i K_{ik}, \quad \forall m_i \in \mathbb{Z}. \quad (7.10.5)$$

Порядок группы Λ/Λ_r равен числу *различных* смежных классов (7.10.5). Запишем (7.10.5) в виде

$$\vec{e}_k \mathbf{n}'_k = \vec{e}_k \mathbf{n}_k + m_i K_{ik} \vec{e}_k, \quad (7.10.6)$$

где вектора \vec{e}_i ($i = 1, \dots, r$) – образуют базис в \mathbb{R}^r и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Рассмотрим решетку Λ' в \mathbb{R}^r , узлы которой определяются векторами $\vec{e}_k \mathbf{n}_k$, $\forall \mathbf{n}_k \in \mathbb{Z}$. Тогда узлы соответствующие векторам $\vec{e}_k \mathbf{m}_k$, $\forall \mathbf{m}_k \in \mathbb{Z}$, где

$$\vec{e}_k = \sum_{i=1}^r \vec{e}_i K_{ik}, \quad (7.10.7)$$

образуют подрешетку $\Lambda'_r \subset \Lambda'$. По построению группы Λ/Λ_r и Λ'/Λ'_r изоморфны и поэтому $\text{ord}(\Lambda/\Lambda_r) = \text{ord}(\Lambda'/\Lambda'_r)$. Рассмотрим r -мерный параллелепипед, натянутый на целочисленные вектора (7.10.7), который определяется как множество точек:

$$\vec{x} = x_k \vec{e}_k \in \mathbb{R}^r, \quad x_k \in [0, 1] \quad \forall k. \quad (7.10.8)$$

и называется *фундаментальной областью* решетки Λ'_r . Ясно, что число $\text{ord}(\Lambda'/\Lambda'_r)$ равно числу N узлов решетки Λ' , заключенных внутри r -мерного параллелепипеда (7.10.8). В число N также входит узел начала координат, а также часть узлов, если они попадают на грани параллелепипеда (7.10.8). Например, узел $\vec{e}_k \mathbf{n}_k \in \Lambda'$, который попадает на какую-то грань параллелепипеда, должен иметь хотя бы одну из координат, скажем x_i (см. определение (7.10.8)), равную 0. При этом, если узел $\vec{e}_k \mathbf{n}_k \in \Lambda'$ попадает на грань с $x_i = 0$, то имеется узел $\vec{e}_k \mathbf{n}_k + \vec{e}_i \in \Lambda'$, который также попадет на грань фундаментальной области с $x_i = 1$. Узел $\vec{e}_k \mathbf{n}_k + \vec{e}_i \in \Lambda'$ не должен учитываться в N , так как он принадлежит одному смежному классу с элементом $\vec{e}_k \mathbf{n}_k \in \Lambda'$; см. Рис.7.3.

Выберем базис \vec{e}_k и его нормировку так, чтобы объем параллелепипеда, натянутого на эти базисные вектора (объем фундаментальной области решетки Λ') равнялся единице. Покажем, что в этом случае число узлов N совпадает с объемом параллелепипеда (7.10.8), который как известно равен модулю детерминанта матрицы, столбцы которой определяются координатами векторов \vec{e}_k из (7.10.7); см. Рис.7.3. Таким образом, мы получим $\text{ord}(\Lambda/\Lambda_r) = N = \left| \det \|K_{ik}\| \right|$.

В начале рассмотрим случай в котором целочисленная матрица $\|K_{ik}\|$ диагональна $K_{ik} = n_i \delta_{ij}$, где $n_i \in \mathbb{Z}$. Тогда понятно, что $\Lambda'/\Lambda'_r = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_r}$ и соответственно мы имеем

$$\text{ord}(\Lambda'/\Lambda'_r) = N = \left| n_1 \cdots n_r \right| = \left| \det \|K_{ik}\| \right|. \quad (7.10.9)$$

$$\|K_{ij}\| = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

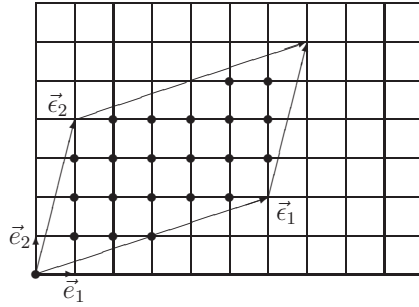


Рис. 7.3: Фундаментальный параллелограмм решетки Λ_r , который определяется векторами \vec{e}_k из (7.10.7). Число N выделенных вершин решетки Λ' с базисом \vec{e}_k , лежащих в параллелограмме и определяющих смежные классы Λ'/Λ_r , равно площади $\det(K) = 22$ фундаментальной области.

Пусть теперь целочисленная невырожденная матрица $\|K_{ik}\|$ – произвольна. Заметим, что при преобразовании базиса решетки Λ' :

$$\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}'_i = \vec{e}_k C_{ki} \Rightarrow \vec{e}_i = \vec{e}'_k C_{ki}^{-1}, \quad (7.10.10)$$

с помощью целочисленной матрицы C такой, что $\det(C) = \pm 1$ (при этом матрица C^{-1} также целочисленная), решетка Λ' переходит сама в себя. Действительно, узлы решетки, порожденные базисом \vec{e}'_i и базисом \vec{e}_i , совпадают, так как базисы выражаются друг через друга с помощью целочисленных матриц. Аналогично, преобразование базиса решетки Λ'_r :

$$\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}'_i = \vec{e}_k C'_{ki} \Rightarrow \vec{e}_i = \vec{e}'_k C'_{ki}{}^{-1}, \quad (7.10.11)$$

с помощью целочисленной матрицы C' такой, что $\det(C') = \pm 1$ также переводит решетку Λ'_r саму в себя. При преобразованиях (7.10.10) и (7.10.11) связь базисных векторов \vec{e}'_i и \vec{e}_i решеток Λ' и Λ'_r записывается как $\vec{e}'_k = \vec{e}'_i K'_{ik}$, где

$$K'_{ik} = C_{il}^{-1} K_{lm} C'_{mk} \quad (7.10.12)$$

и на целочисленные матрицы C и C' наложены единственные условия $\det(C) = \pm 1$ и $\det(C') = \pm 1$. Можно показать, что существуют матрицы C и C' такие, что с помощью преобразования (7.10.12) матрица K сводится к диагональному виду $K'_{ij} = n_i \delta_{ij}$. Поясним это утверждение более подробно (см. также [28], Глава 9, §1). Действие (7.10.12) справа целочисленной матрицы C' с детерминантом $\det(C') = \pm 1$ на матрицу K сводится к трем элементарным преобразованиям:

- 1.) прибавление к одному столбцу матрицы K другого столбца, умноженного на целое число;
- 2.) перестановка любых двух столбцов матрицы K ;
- 3.) умножение любого столбца матрицы K на (-1) .

Аналогично, действие (7.10.12) матрицы C^{-1} , с детерминантом $\det(C^{-1}) = \pm 1$ слева на матрицу K сводится к тем же трем элементарным преобразованиям, но для строк. Рассмотрим теперь первую строку в матрице K и пусть в этой строке K_{1j} – максимальный по модулю элемент. Если в этой строке имеется элемент K_{1k} такой,

что $K_{1j} = q \cdot K_{1k}$, где $q \in \mathbb{Z}$, то вычитая из j -ого столбца k -ый столбец, умноженный на q , мы получаем $K'_{1j} = 0$. Если же элемент K_{1k} делит K_{1j} с остатком, то есть $K_{1j} = q \cdot K_{1k} + r$, то вычитая из j -ого столбца k -ый столбец, умноженный на q , мы получаем $K'_{1j} = r < |K_{1k}|$, и тем самым уменьшаем элемент K_{1j} по модулю. Производя эту процедуру уменьшения с помощью трех элементарных операций для строк и столбцов несколько раз, мы в конце-концов добьемся того, что все элементы первой строки кроме одного элемента (иначе матрица K была бы вырожденной) будут равны нулю. Этот ненулевой элемент, переставляя столбцы, поместим на первое место K'_{11} . Применяя аналогичную процедуру для первого столбца матрицы K , мы занулим все (кроме одного) элементы первого столбца и в результате $r \times r$ матрица K примет вид

$$\left(\begin{array}{c|ccc} K'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & ||K'_{ab}|| & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

где $||K'_{ab}|| - (r-1) \times (r-1)$ невырожденная целочисленная матрица. Далее, учитывая, что 1×1 матрица диагональна, мы, применяя индукцию, получаем, что с помощью преобразований (7.10.12) матрица K сводится к диагональному виду $K'_{ij} = n_i \delta_{ij}$. Для диагональной матрицы K_{ij} мы имеем формулу (7.10.9) и так как при преобразованиях (7.10.12) мы имеем $\det(K) = \pm \det(K')$, то формула (7.10.9) выполняется и для недиагональных матриц K_{ij} . Если K - матрица Картана, то $\det(K) > 0$ и из формулы (7.10.9) следует искомое утверждение $\text{ord}(\Lambda/\Lambda_r) = \det(K)$.

7.11 Задача 84 раздела 3.4.2

Доказать, что вектор (3.4.33) удовлетворяют условиям (3.4.34):

$$T_{(1)}^{\otimes f}(E_{\alpha^{(i)}}) |\lambda_{(f)}\rangle = 0, \tag{7.11.1}$$

для всех простых корней $\alpha^{(i)}$ алгебры $\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$.

С помощью антисимметризатора (3.4.28) вектор (3.4.33) можно представить следующим образом

$$|\lambda_{(f)}\rangle = \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in S_f} (-1)^{p(\sigma)} \epsilon_{(\sigma_1)} \otimes \epsilon_{(\sigma_2)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(\sigma_f)} = A \cdot (\epsilon_{(1)} \otimes \epsilon_{(2)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(f)}). \tag{7.11.2}$$

Заметим, что если среди векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_f \in \mathcal{V}_{r+1}$ имеется хотя бы одна пара совпадающих векторов $\vec{v}_k = \vec{v}_j$ для $k \neq j$, то из определения (3.4.28) антисимметризатора A следует равенство

$$A \cdot (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes \dots \otimes \vec{v}_f) |_{\vec{v}_k = \vec{v}_j} = 0. \tag{7.11.3}$$

Пользуясь формулой (3.4.24) для оператора $T_{(1)}^{\otimes f}(E_{\alpha^{(i)}})$, формулой (3.1.7) для определяющего представления образующей $E_{\alpha^{(i)}}$, а также равенствами (3.4.29) и (7.11.2), перепишем левую часть (7.11.1) следующим образом

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{\otimes f}(E_{\alpha^{(i)}}) |\lambda_{(f)}\rangle &= T_{(1)}^{\otimes f}(E_{\alpha^{(i)}}) \cdot A (\epsilon_{(1)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(f)}) = \\ &= A \cdot \left(\sum_{k=1}^f (I_{r+1})^{\otimes(k-1)} \otimes e_{i,i+1} \otimes (I_{r+1})^{\otimes(f-k)} \right) \cdot (\epsilon_{(1)} \otimes \dots \otimes \epsilon_{(f)}). \end{aligned} \tag{7.11.4}$$

Действие матричной единицы e_{ik} на базисный вектор $\epsilon_{(m)} \in \mathcal{V}_{r+1}$ дается формулой

$$e_{ik} \cdot \epsilon_{(m)} = \delta_{km} \epsilon_{(i)}. \quad (7.11.5)$$

Тогда, если $i + 1 > f$, то правая часть (7.11.4) равна нулю и мы получаем искомое равенство (7.11.1). Если же $i < f$, то, применяя (7.11.5), для правой части (7.11.4) имеем

$$\begin{aligned} A \cdot \left(\sum_{k=1}^f I_{r+1}^{\otimes(k-1)} \otimes e_{i,i+1} \otimes I_{r+1}^{\otimes(f-k)} \right) \cdot (\epsilon_{(1)} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{(i)} \otimes \epsilon_{(i+1)} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{(f)}) = \\ = A \cdot (\epsilon_{(1)} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{(i)} \otimes \epsilon_{(i)} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{(f)}) = 0, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались условием (7.11.3).

7.12 Задачи 97, 98 раздела 4.3.1

Доказать тождество для полного симметризатора

$$\begin{aligned} E_{P[r]} = \frac{1}{r!} (1 + \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \sigma_{r-3}\sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \cdots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-1}) \cdot \\ \cdot (1 + \sigma_{r-2} + \sigma_{r-3}\sigma_{r-2} + \cdots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-2}) \cdots (1 + \sigma_1) = \frac{1}{r!} Y(\mathbb{T}_{[r]}). \end{aligned} \quad (7.12.1)$$

Доказать, что полный антисимметризатор $E_{Q[r]}$ получается из полного симметризатора $E_{P[r]}$ заменой $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$. Проверить, что $Y(\mathbb{T}_{[r]})$ в (7.12.1) это сумма всех $r!$ элементов из группы перестановок S_r .

Для доказательства того, что элемент $E_{P[r]}$, заданный в (7.12.1), равен полному симметризатору в $\mathbb{C}[S_r]$, необходимо убедиться в справедливости соотношений

$$\sigma_k \cdot E_{P[r]} = E_{P[r]} \cdot \sigma_k = E_{P[r]}, \quad \forall k = 1, \dots, r-1. \quad (7.12.2)$$

Нормировочный фактор $1/r!$ выбран в (7.12.1) для того, чтобы при выполнении (7.12.2) мы имели $E_{P[r]}^2 = E_{P[r]}$. Заметим, что первое равенство в (7.12.1) переписывается в виде рекуррентного соотношения

$$E_{P[r]} = \frac{1}{r} (1 + \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \sigma_{r-3}\sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \cdots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-1}) \cdot E_{P[r-1]}. \quad (7.12.3)$$

Здесь и далее вместо единицы e мы пишем 1. Рассмотрим теперь элементы

$$\begin{aligned} J_{m \rightarrow r} = \sigma_m \cdots \sigma_{r-2} \cdot \sigma_{r-1} \cdot \sigma_{r-2} \cdots \sigma_m = \sigma_m \cdot J_{m+1 \rightarrow r} \cdot \sigma_m \quad (m = 1, \dots, r-2), \\ J_{r-1 \rightarrow r} = \sigma_{r-1}, \quad J_{r \rightarrow r} = 1. \end{aligned}$$

Сумма $Z_r = \sum_{m=1}^r J_{m \rightarrow r}$ принадлежит центру подалгебры $\mathbb{C}[S_{r-1}] \subset \mathbb{C}[S_r]$, то есть $[Z_r, \sigma_k] = 0$ ($\forall k = 1, \dots, r-2$). Действительно, этот факт следует из равенств

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot J_{m \rightarrow r} = J_{m \rightarrow r} \cdot \sigma_k, \quad \forall k \neq m, m-1, r-1, \\ (J_{k \rightarrow r} + J_{k+1 \rightarrow r}) \cdot \sigma_k = \sigma_k \cdot (J_{k \rightarrow r} + J_{k+1 \rightarrow r}), \end{aligned} \quad (7.12.4)$$

которые вытекают из определяющих соотношений (4.3.13). В качестве примера продемонстрируем справедливость первого равенства в (7.12.4) для $k = m + 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1} \cdot J_{m \rightarrow r} = \sigma_{m+1} \cdot (\sigma_m \cdot \sigma_{m+1} \cdot \sigma_{m+2} \cdots \sigma_{r-1} \cdots \sigma_m) = \\ = \sigma_m \cdot \sigma_{m+1} \cdot \sigma_m \cdot \sigma_{m+2} \cdots \sigma_{r-1} \cdots \sigma_m = \sigma_m \cdots \sigma_{r-1} \cdots \sigma_m \cdot \sigma_{m+1} \cdot \sigma_m = J_{m \rightarrow r} \cdot \sigma_{m+1}, \end{aligned}$$

где подчеркнуты комбинации, к которым применяются соотношения кос (см. (4.3.13)):

$$\sigma_{m+1} \cdot \sigma_m \cdot \sigma_{m+1} = \sigma_m \cdot \sigma_{m+1} \cdot \sigma_m . \quad (7.12.5)$$

Докажем теперь равенства (7.12.2) по индукции. Пусть эти равенства выполняются для $E_{P[r-1]}$:

$$\sigma_k \cdot E_{P[r-1]} = E_{P[r-1]} \cdot \sigma_k = E_{P[r-1]} , \quad \forall k = 1, \dots, r-2 . \quad (7.12.6)$$

Например, для $r = 3$ мы имеем

$$E_{P[2]} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1) \Rightarrow \sigma_1 \cdot E_{P[2]} = E_{P[2]} \cdot \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_1^2) = E_{P[2]} .$$

Покажем, что равенства (7.12.2) выполняются для $E_{P[r]}$, если выполняются равенства (7.12.6) для $E_{P[r-1]}$. Формулу (7.12.3), пользуясь определением элемента Z_r и предположением индукции (7.12.6), можно записать в виде

$$E_{P[r]} = \frac{1}{r} Z_r \cdot E_{P[r-1]} = \frac{1}{r} E_{P[r-1]} \cdot Z_r , \quad (7.12.7)$$

где второе равенство вытекает из того, что Z_r — центральный элемент в $\mathbb{C}[S_{r-1}]$ и $E_{P[r-1]} \in \mathbb{C}[S_{r-1}]$. Заметим, что второе равенство в (7.12.7) записывается в виде, аналогичном (7.12.3):

$$E_{P[r]} = \frac{1}{r} E_{P[r-1]} \cdot (1 + \sigma_{r-1} + \sigma_{r-1}\sigma_{r-2} + \sigma_{r-1}\sigma_{r-2}\sigma_{r-3} + \dots + \sigma_{r-1} \dots \sigma_1) . \quad (7.12.8)$$

Так как для $E_{P[r-1]}$ выполняются соотношения (7.12.6), то согласно (7.12.7) мы получаем (7.12.2) для $k = 1, \dots, r-2$:

$$\sigma_k \cdot E_{P[r]} = \frac{1}{r} \sigma_k \cdot E_{P[r-1]} \cdot Z_r = E_{P[r]} , \quad E_{P[r]} \cdot \sigma_k = \frac{1}{r} Z_r \cdot E_{P[r-1]} \cdot \sigma_k = E_{P[r]} .$$

Наконец, для $k = (r-1)$, пользуясь представлением (7.12.3), соотношениями кос (7.12.5) и равенством $\sigma_{r-2} \cdot E_{P[r-1]} = E_{P[r-1]}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{r-1} \cdot E_{P[r]} &= \frac{1}{r} \sigma_{r-1} \cdot (1 + \sigma_{r-1} + (1 + \sigma_{r-3} + \sigma_{r-4}\sigma_{r-3} + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-3})\sigma_{r-2}\sigma_{r-1}) \cdot \\ &\cdot E_{P[r-1]} = \frac{1}{r} (\sigma_{r-1} + 1 + (1 + \sigma_{r-3} + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-3})\sigma_{r-2}\sigma_{r-1}\sigma_{r-2}) \cdot E_{P[r-1]} = E_{P[r]} . \end{aligned}$$

Аналогично проверяется соотношение $E_{P[r]} \cdot \sigma_{r-1} = E_{P[r]}$; при этом необходимо использовать представление (7.12.8).

Сделаем замену $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ в тождестве (7.12.2). Так как эта замена является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}(S_r)$, заданной соотношениями (4.3.13), то тождество (7.12.2) перейдет снова в тождество, но следующего вида

$$\sigma_k \cdot E_{Q[r]} = E_{Q[r]} \cdot \sigma_k = -E_{Q[r]} , \quad \forall k = 1, \dots, r-1 , \quad (7.12.9)$$

где элемент $E_{Q[r]}$ получается из элемента $E_{P[r]}$ заменой $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$. В силу (7.12.9) элемент $E_{Q[r]}$ переводит любую соседнюю транспозицию σ_k в минус единицу и следовательно переводит любую нечетную перестановку в (-1) , а четную перестановку в $(+1)$. Поэтому элемент $E_{Q[r]}$ является полным антисимметризатором.

Наконец, покажем, что $Y(\Gamma_{[r]})$ в (7.12.1) — это сумма всех $r!$ элементов из группы S_r (сумма всех перестановок r чисел $(1, 2, \dots, r)$). Для этого перепишем (7.12.3) в виде

$$Y(\Gamma_{[r]}) = (1 + \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \sigma_{r-3}\sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-1}) \cdot Y(\Gamma_{[r-1]}) . \quad (7.12.10)$$

и снова применим индукцию. Пусть элемент $Y(\Gamma_{[r-1]})$ — сумма всех $(r-1)!$ перестановок $(r-1)$ -ого числа $(1, 2, 3, \dots, r-1)$. Далее используем то, что все элементы в факторе $(1 + \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}\sigma_{r-1} + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{r-1})$ в произведении (7.12.10), за исключением единицы 1, переставляют поочередно последний номер r с одним из первых $(r-1)$ номеров $(1, 2, \dots, r-1)$. Завершение этого доказательства мы оставляем читателю.

7.13 Задача 105 раздела 4.3.2

Доказать тождество (4.3.62):

$$F(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m F(h_1, \dots, h_i - 1, \dots, h_m) , \quad (7.13.1)$$

для функций (4.3.57):

$$F(h_1, \dots, h_m) = \frac{r!}{(h_1! \dots h_m!)} \prod_{i < j} (h_i - h_j) . \quad (7.13.2)$$

Подставим в (7.13.1) явный вид (7.13.2) функции $F(h_1, \dots, h_m)$. В результате получаем, что нам необходимо доказать соотношение

$$r \Delta(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m h_i \Delta(h_1, \dots, h_i - 1, \dots, h_m) , \quad (7.13.3)$$

где полное число клеток r выражается через длины крюков h_i (для клеток из первого столбца λ) с помощью формулы $r = \sum_i h_i - \frac{m(m-1)}{2}$ и мы ввели обозначение $\Delta(h_1, \dots, h_m) = \prod_{i < j} (h_i - h_j)$ для определителя Вандермонда (3.5.37). Соотношение (7.13.3) выполняется тождественно, так как оно является частным случаем равенства

$$\left(\sum_{i=1}^m h_i + t C_m^2 \right) \Delta(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m h_i \Delta(h_1, \dots, h_i + t, \dots, h_m) , \quad (7.13.4)$$

где t — параметр и $C_m^2 \equiv \frac{m(m-1)}{2}$. Для доказательства равенства (7.13.4), заметим, что слева в (7.13.4) стоит полином первой степени по t и его коэффициенты при степенях t совпадают с соответствующими коэффициентами в правой части (7.13.4), для которых имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h_i \Delta(h_1, \dots, h_i + t, \dots, h_m) \Big|_{t=0} &= \left(\sum_{i=1}^m h_i \right) \Delta(h_1, \dots, h_m) , \\ \partial_t \sum_{i=1}^m h_i \Delta(h_1, \dots, h_i + t, \dots, h_m) \Big|_{t=0} &= \\ &= \left(\sum_{i=1}^m h_i \partial_i \right) \Delta(h_1, \dots, h_m) = \frac{(m-1)m}{2} \Delta(h_1, \dots, h_m) . \end{aligned}$$

Здесь в третьей строке мы учли то, что $\Delta(h_1, \dots, h_m)$ – однородный полином по h_i степени $\frac{(m-1)m}{2} \equiv C_m^2$ и действие оператора $\sum_i h_i \partial_i$ на полином $\Delta(h_1, \dots, h_m)$ эквивалентно умножению $\Delta(h_1, \dots, h_m)$ на эту степень. Таким образом, для доказательства (7.13.4) остается проверить, что в разложении правой части (7.13.4) по t все коэффициенты при t^n , где $n = 2, 3, \dots$, равны нулю. Мы покажем это воспользовавшись представлением правой части (7.13.4) в виде контурного интеграла

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h_i \Delta(h_1, \dots, h_i + t, \dots, h_m) &= \left(\sum_{i=1}^m \prod_{m \neq i} \frac{h_i (h_i + t - h_m)}{(h_i - h_m)} \right) \Delta(h_1, \dots, h_m) = \\ &= \left(\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z}{t} \prod_{k=1}^m \frac{z + t - h_k}{z - h_k} \right) \Delta(h_1, \dots, h_m), \end{aligned} \quad (7.13.5)$$

где контур \mathcal{C} окружает все точки $z = h_k$ ($k = 1, \dots, m$). Далее, разложим по t произведение, которое возникло под интегралом в правой части (7.13.5):

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m \frac{z+t-h_k}{z-h_k} &= 1 + t \sum_{k=1}^m \frac{1}{z-h_k} + \frac{t^2}{2} \sum_{k \neq j} \frac{1}{(z-h_k)(z-h_j)} + \\ &+ \frac{t^3}{3!} \sum_{k \neq j \neq \ell} \frac{1}{(z-h_k)(z-h_j)(z-h_\ell)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{1}{(z-h_{k_1})(z-h_{k_2}) \dots (z-h_{k_n})}. \end{aligned} \quad (7.13.6)$$

Здесь в правой части сумма идет по всем k_1, \dots, k_n таким, что $k_i \neq k_j$ для $i \neq j$. Подставим разложение (7.13.6) в (7.13.5). В результате получаем

$$\sum_{i=1}^m h_i \Delta(\dots, h_i + t, \dots) = \left(a_{-1} \frac{1}{t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \right) \Delta(h_1, \dots, h_m), \quad (7.13.7)$$

где для коэффициентов a_i мы имеем

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \oint_{\mathcal{C}} z \frac{dz}{2\pi i} = 0, \quad a_0 = \oint_{\mathcal{C}} \left(\sum_{k=1}^m \frac{z}{z-h_k} \right) \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{k=1}^m h_k, \\ a_1 &= \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left(\sum_{k \neq j} \frac{z}{(z-h_k)(z-h_j)} \right) \frac{dz}{2\pi i} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} 1 = \frac{(m-1)m}{2}, \\ a_2 &= \frac{1}{3!} \oint_{\mathcal{C}} \left(\sum_{k \neq j \neq \ell} \frac{z}{(z-h_k)(z-h_j)(z-h_\ell)} \right) \frac{dz}{2\pi i} = 0, \quad a_n = 0 \quad \forall n > 2. \end{aligned} \quad (7.13.8)$$

Коэффициент a_2 , как и все остальные коэффициенты $a_n = 0, \forall n > 2$, равен нулю, так как в этих случаях контур интегрирования можно стянуть к бесконечной точке $z = \infty$, в окрестности которой подинтегральное выражение убывает как $1/z^n$. Подстановка (7.13.8) в (7.13.7) дает (7.13.4).

7.14 Задача 106 раздела 4.3.2

Пусть $p(r)$ – число разных диаграмм Юнга $\lambda \vdash r$. Доказать, что производящая функция для чисел $p(r)$ дается формулой Эйлера (см. например [40])

$$\sum_{r=0}^{\infty} p(r) x^r = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}. \quad (7.14.1)$$

Разлагая каждый множитель $\frac{1}{1-x^k} = (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} \dots)$, перепишем правую часть (7.14.1) в виде произведения

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)(1 + x^2 + x^{2^2} + \dots)(1 + x^3 + x^{2^3} + \dots)(1 + x^4 + \dots) \dots \quad (7.14.2)$$

Для начала, в качестве примера, покажем, что коэффициент при x^4 в разложении произведения (7.14.2) равен $p(4) = 5$, то есть равен числу всех диаграмм Юнга с четырьмя клетками: $[4]$, $[3, 1]$, $[2^2]$, $[2, 1^2]$, $[1^4]$. Действительно, моном x^4 набирается только из первых четырех факторов $\frac{1}{(1-x^k)}$ при $k = 1, 2, 3, 4$, произведение которых выписано в (7.14.2); последующие факторы $\frac{1}{(1-x^k)}$ при $k > 4$ вклада в x^4 не дают. Диаграмма $[4]$, состоящая из одной строки, соответствует выбору слагаемого x^4 в четвертом факторе в (7.14.2) после чего в первых трех факторах необходимо выбирать тривиальные слагаемые, равные 1; диаграмма $[3, 1]$ соответствует выбору в третьем факторе в (7.14.2) слагаемого x^3 и слагаемого x^1 в первом факторе; диаграмма $[2^2]$ соответствует выбору во втором факторе в (7.14.2) слагаемого x^{2^2} ; и так далее.

Из рассмотрения данного простого примера следует, что каждой диаграмме Юнга $\lambda = [\lambda_1^{n_1}, \lambda_2^{n_2}, \dots, \lambda_m^{n_m}] \vdash r$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m > 0$, мы можем сопоставить в разложении правой части (7.14.1) моном x^r , который набирается как произведение слагаемого $x^{n_1 \cdot \lambda_1}$ из разложения фактора $\frac{1}{(1-x^{\lambda_1})}$, слагаемого $x^{n_2 \cdot \lambda_2}$ из разложения фактора $\frac{1}{(1-x^{\lambda_2})}$ и так далее до слагаемого $x^{n_m \cdot \lambda_m}$ из разложения фактора $\frac{1}{(1-x^{\lambda_m})}$. В разложении остальных факторов $\frac{1}{(1-x^k)}$ при $k < \lambda_m$ и $k > \lambda_1$ необходимо выбрать тривиальные слагаемые, равные 1, то есть эти факторы можно положить равными единице.

С другой стороны любой моном x^r , возникающий при разложении по x произведения в правой части (7.14.1), набирается как произведение слагаемых $x^{n_k k}$, которые получаются при разложении факторов $\frac{1}{1-x^k}$ ($k = 1, \dots, r$), и при этом мы имеем

$$r = n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + \dots + n_r \cdot r, \quad (7.14.3)$$

где $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Заметим, что в правой части (7.14.3) отличен от нуля только некоторый ограниченный набор кратностей $n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots, n_{\lambda_m}$, где мы упорядочили ненулевые кратности по их номерам $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ и $m \leq r$. Но тогда, этот моном x^r соответствует диаграмме Юнга $\lambda = [\lambda_1^{n_{\lambda_1}}, \lambda_2^{n_{\lambda_2}}, \dots, \lambda_m^{n_{\lambda_m}}] \vdash r$, где номера λ_k — длины строк диаграммы Юнга λ . Таким образом, любой моном x^r , возникающий в разложении правой части (7.14.1) по x , сопоставляется указанным выше способом единственной диаграмме Юнга $\lambda \vdash r$, то есть имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством мономов x^r (с фиксированным r), возникающих в разложении правой части (7.14.1), и множеством \mathcal{M} диаграмм Юнга $\lambda \vdash r$. Другими словами коэффициент при x^r в разложении по x правой части (7.14.1) равен числу элементов в множестве \mathcal{M} , что и доказывает формулу Эйлера (7.14.1).

7.15 Задача 130 раздела 4.5.1

Доказать, что левый идеал $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$ двумерен и в нем (в случае $\varepsilon = 0$) можно выбрать базисные элементы (4.5.45):

$$\epsilon_3 = \frac{1}{3}(1 - \sigma_1)(1 + \sigma_2), \quad \epsilon_4 = \frac{1}{3}(1 - \sigma_2)\sigma_1(1 + \sigma_2).$$

Доказать, что эти элементы удовлетворяют соотношениям (4.5.46), (4.5.47) и (4.5.48):

$$\sigma_1 \cdot \epsilon_3 = -\epsilon_3, \quad \sigma_1 \cdot \epsilon_4 = \epsilon_3 + \epsilon_4, \quad \sigma_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3 + \epsilon_4, \quad \sigma_2 \cdot \epsilon_4 = -\epsilon_4, \quad (7.15.1)$$

$$\epsilon_3 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3, \quad \epsilon_4 \cdot \epsilon_4 = 0, \quad \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = 0, \quad \epsilon_4 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_4, \quad (7.15.2)$$

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3 \cdot \epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_4 \cdot \epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_3 \cdot \epsilon_2 = 3\epsilon_2, \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 = 3\epsilon_4. \quad (7.15.3)$$

Установить эквивалентность представлений, реализованных на соответствующих левых идеалах $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ и $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$.

В алгебре $\mathbb{C}[S_3]$ имеется автоморфизм

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = S \cdot \sigma_1 \cdot S^{-1}, \quad \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 = S \cdot \sigma_2 \cdot S^{-1}, \quad S \equiv \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1, \quad (7.15.4)$$

при котором

$$\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_3 = (1 - \sigma_1)(1 + \sigma_2), \quad \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_4 = (1 - \sigma_2)\sigma_1(1 + \sigma_2), \quad (7.15.5)$$

а (4.5.42) и (4.5.43) переходят в соотношения (7.15.1) и (7.15.2). Пользуясь соотношениями (4.5.42) и (7.15.1) мы находим, что левый идеал $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$, который порождается идемпотентом (см. (4.5.37))

$$e_{[2,1]_2} = \frac{1}{3}(\epsilon_3 - \varepsilon\epsilon_2), \quad (7.15.6)$$

также двумерен; базис в $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$ состоит из двух элементов $(\epsilon_3 - \varepsilon\epsilon_2)$ и $(\epsilon_4 - \varepsilon\epsilon_1)$. Положим для простоты $\varepsilon = 0$. Тогда любой элемент $x' \in \mathcal{L}_{[2,1]_2}$ в соответствии с (7.15.1) представляется в виде

$$x' = x_3 \epsilon_3 + x_4 \epsilon_4, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}.$$

Аutomорфизм (7.15.4), (7.15.5) переводит (для случая $\varepsilon = 0$) идемпотенты $e_{[2,1]_1}$ и $e_{[2,1]_2}$ друг в друга и устанавливает эквивалентность представлений, реализованных на соответствующих левых идеалах $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ и $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$.

7.16 Задача 142 раздела 4.6.5

Убедиться в справедливости соотношений (4.6.93), (4.6.94), (4.6.95) и (4.6.96).

Первое равенство в соотношении (4.6.94) следует из определения (4.6.90). Убедимся в справедливости второго равенства в (4.6.94). Справедливость остальных равенств в (4.6.93), (4.6.94), (4.6.95) и (4.6.96) либо проверяется аналогичным образом,

либо следует из определения (4.6.90). Воспользуемся циклическим свойством следа (4.6.86) и соотношениями

$$P_k g_1 g_2 \cdots g_n = g_1 g_2 \cdots g_n P_k \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad \text{Tr}_{(k)} P_k = \text{Tr}_{(k+1)} P_k = I^{\otimes(n-1)},$$

$$P_k g_k = g_{k+1} P_k, \quad P_k g_{k+1} = g_k P_k, \quad P_k^2 = I^{\otimes n}.$$

где след $\text{Tr}_{(m)}$ в пространстве \mathcal{V} , которое располагается на m -ом месте в произведении $\mathcal{V}^{\otimes n}$, был определен в (4.6.85). В частности, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}(g_1 \cdots g_n P_k P_{k+1}) &= (\text{Tr}(g))^n \cdot \text{Tr}_{k, k+1, k+2}(g_k g_{k+1} g_{k+2} P_{k+1} P_k) = \\ &= (\text{Tr}(g))^n \cdot \text{Tr}_{k, k+1}(g_k g_{k+1} \text{Tr}_{(k+2)}(P_{k+1}) g_{k+1} P_k) = (\text{Tr}(g))^n \text{Tr}(g^3). \end{aligned}$$

Здесь $\text{Tr}_{k_1, k_2, \dots, k_r} = \text{Tr}_{(k_1)} \text{Tr}_{(k_2)} \cdots \text{Tr}_{(k_r)}$ — неполный след, действующий в подпространстве $\mathcal{V}_{k_1, k_2, \dots, k_r} \subset \mathcal{V}^{\otimes n}$, состоящем из тензорного произведения пространств \mathcal{V} с номерами $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$. Мы также пользуемся соглашением, что при вычислении части следов в полном следе \mathbf{Tr} в оставшихся неполных следах $\text{Tr}_{k_1, k_2, \dots, k_r}$ действие операторов перестановок P_{k_ℓ} ограничено на подпространство $\mathcal{V}_{k_1, k_2, \dots, k_r}$. Пользуясь всеми этими правилами, для цепочки равенств в (4.6.94) мы получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3 (1 + P_2 + P_1 P_2)(1 + P_1)) = \\ &= \mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3 (1 + P_2)(1 + P_1)) + \mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3 P_2 (1 + P_1) P_1) = \\ &= \mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3 (1 + 2 P_2)(1 + P_1)) = \mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3 (1 + 2 P_2 + P_1 + 2 P_2 P_1)) = \\ &= \mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3) + 2 \mathbf{Tr}(g_1 g_2 P_2 g_2) + \mathbf{Tr}(g_1 P_1 g_1 g_3) + 2 \mathbf{Tr}(g_1 g_2 g_3 P_2 P_1) = \\ &= (\text{Tr}(g))^3 + 3 \text{Tr}(g) \text{Tr}(g^2) + 2 \text{Tr}(g^3), \end{aligned}$$

что после умножения на фактор $1/6$ дает правую часть в цепочке соотношений в (4.6.94).

7.17 Задача 145 раздела 4.6.5

Не пользуясь диагонализуемостью матрицы g , доказать, что производящая функция $E(z)$ для характеров $\chi_{[1^k]}(g)$:

$$E(z) \equiv \sum_{k=0}^N \chi_{[1^k]}(g) z^k = \det(I_N + z g). \quad (7.17.1)$$

дается характеристическим полиномом, вытекающим из разложения по z детерминанта (7.17.1). В случае диагонализуемой $(N \times N)$ матрицы g доказать характеристическое тождество (**Теорема Гамильтона-Кэли**):

$$\sum_{r=0}^N (-g)^r \chi_{[1^{(N-r)}]}(g) = 0. \quad (7.17.2)$$

Для различных обобщений полезно доказать тождество (7.17.1), не используя при этом свойство диагонализуемости матрицы g . Пусть \mathbf{s} — представление $\mathbb{C}[S_N] \rightarrow \mathcal{V}^{\otimes N}$, заданное в (4.2.6). Рассмотрим антисимметризаторы $e([1^k]) \in \mathbb{C}[S_N]$ (при $k \leq N$), определение которых дано в (4.6.84), и соответствующие проекторы $P_{[1^k]} = \mathbf{s}(e([1^k]))$, действующие в $\mathcal{V}^{\otimes N}$. Прежде всего отметим, что ранг проектора $P_{[1^N]} = \mathbf{s}(e([1^N]))$, действующего в пространстве $\mathcal{V}^{\otimes N}$ и являющегося образом антисимметризатора $e([1^k])$ при наибольшем возможном значении $k = N$, равен единице. Поэтому справедливо представление

$$(P_{[1^N]})_{k_1 \dots k_N}^{i_1 \dots i_N} = \frac{1}{N!} \varepsilon^{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{k_1 \dots k_N}, \quad (7.17.3)$$

где $\varepsilon_{k_1 \dots k_N}$ — компоненты полностью антисимметричного тензора ранга N . Вычислим последовательно след по пространствам с номерами $N, N-1, \dots, r+1$ от проектора (7.17.3). При таком вычислении следов, согласно определению (4.6.84) антисимметризаторов $e([1^k])$, на каждом шаге мы будем получать снова проекторы $P_{[1^k]}$ и в результате придем к формуле:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{N, N-1, \dots, r+1}(P_{[1^N]}) &= \frac{(N-r)!}{N!} P_{[1^r]} \Rightarrow \\ (P_{[1^r]})_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{1}{(N-r)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_{r+1} \dots j_N} \varepsilon_{k_1 \dots k_r j_{r+1} \dots j_N}. \end{aligned} \quad (7.17.4)$$

Пользуясь представлением (7.17.3), определением детерминанта

$$\det(A) = \frac{1}{N!} \varepsilon_{k_1 \dots k_N} A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_N}^{k_N} \varepsilon^{i_1 \dots i_N},$$

и формулой (7.17.4), правую часть (7.17.1) запишем следующим образом

$$\begin{aligned} \det(I_N + z g) &= \mathbf{Tr}(P_{[1^N]}(I_N + z g)^{\otimes N}) = \\ &= \sum_{r=0}^N C_N^r z^r \mathbf{Tr}(P_{[1^N]} g^{\otimes r} \otimes I_N^{\otimes(N-r)}) = \sum_{r=0}^N z^r \text{Tr}_{1, \dots, r}(P_{[1^r]} g^{\otimes r}) = \sum_{r=0}^N z^r \chi_{[1^r]}(g). \end{aligned} \quad (7.17.5)$$

Это и есть равенство (7.17.1). Отметим, что в правой части (7.17.5) коэффициенты в разложении по z при старшей степени z^N и при z соответственно равны $\chi_{[1^N]}(g) = \det(g)$ и $\chi_{[1]}(g) = \text{Tr}(g)$.

Теперь мы докажем тождество (7.17.2) в упрощенном случае диагонализуемой матрицы g . Запишем тождество

$$\prod_{i=1}^N (z + x_i) = \sum_{r=0}^N z^{N-r} \chi_{[1^r]}(g), \quad (7.17.6)$$

где, как и раньше,

$$\chi_{[1^r]}(g) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r},$$

и x_i — собственные значения матрицы g . Тождество (7.17.6) может быть получено разложением левой части по z . Оно справедливо для любого параметра z , в том числе матричного. Положим $z = -g$ в тождестве (7.17.6) и воспользуемся тождеством $\prod_{i=1}^N (g - x_i) = 0$. Меняя индекс суммирования в правой части (7.17.6), $r \rightarrow (N-r)$, получаем тождество Гамильтона–Кэли (7.17.2).

7.18 Задача 149 раздела 4.6.5

Построить базис Гельфанда–Цетлина в пространствах $\mathcal{V}^{(3)}$ и $\mathcal{V}^{(2,1)}$ представлений алгебры $u(3)$, соответствующих диаграммам Юнга [3] и [2, 1]. Сопоставить схемам Гельфанда–Цетлина (базисным векторам пространств $\mathcal{V}^{(3)}$ и $\mathcal{V}^{(2,1)}$) дуплет и октет барионов (см. формулы (4.4.81) – (4.4.84) и (4.4.86) в подразделе “Барионы” Раздела 4.4.4).

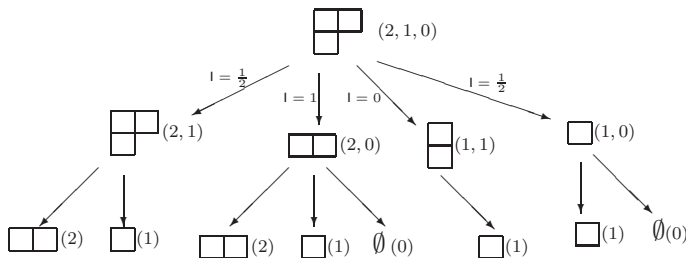
Элементами пространств $\mathcal{V}^{(2,1)}$ и $\mathcal{V}^{(3)}$ неприводимых представлений алгебры $u(3)$ являются тензоры с компонентами $B^{i_1 i_2 i_3}$ и $D^{i_1 i_2 i_3}$, которым как обычно мы сопоставляем таблицы Юнга

$$B^{i_1 i_2 i_3} = \begin{array}{|c|c|} \hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 & \\ \hline \end{array}, \quad D^{i_1 i_2 i_3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline \end{array}. \quad (7.18.1)$$

При вложении (4.7.3) подалгебры $u(2)$ в $u(3)$, действие подалгебры $u(2)$ на тензоры (7.18.1) не будет затрагивать те индексы компонент $\psi^{i_1 i_2 i_3}$, которые принимают значения 3. Соответственно при вложении подалгебры $u(1)$ в $u(2) \subset u(3)$ действие подалгебры $u(1)$ на тензоры (7.18.1) не будет затрагивать тензорные индексы, которые принимают значения 2 и 3. Пользуясь этим способом вложения представлений (см. Раздел 4.4.2), а также правилами построения схем Гельфанда–Цетлина, которые были изложены в Разделе 4.7, мы получаем сопоставление схем Гельфанда–Цетлина и компонент тензоров, симметризованных согласно (7.18.1). Напомним, что неприводимые представления подалгебры $u(2) \subset u(3)$ (подалгебры $su(2)$) характеризуются изоспином l и будут соответствовать диаграмме Юнга из второй строчки схемы Гельфанда–Цетлина.

Октет барионов (4.4.86) соответствующий первому тензору в (7.18.1).

В данном случае мы имеем следующее ветвление представлений при вложении $u(1) \subset u(2) \subset u(3)$:



(здесь в скобках рядом с диаграммами явно указаны соответствующие разбиения, которые входят в качестве строк в схемы Гельфанда–Цетлина). Согласно этому ветвлению мы устанавливаем соответствие схем Гельфанда–Цетлина и компонент $B^{i_1 i_2 i_3}$ (для упрощения формул будем опускать у компонент $B_{\alpha\beta\gamma}^{i_1 i_2 i_3}$ спиновые индексы α, β, γ).

1.) Представление с нулевой странностью $s = 0$ (без s -кварка) и изоспином $l = 1/2$, когда все индексы i_1, i_2, i_3 у $B^{i_1 i_2 i_3}$ принимают только два значения 1, 2:

$$l = \frac{1}{2}: \quad p = B^{112} = \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}, \quad n = B^{122} = \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}.$$

2.) Представления со странностью $s = -1$ (с одним s -кварком, когда только один из

индексов i_1, i_2, i_3 у $B^{i_1 i_2 i_3}$ принимает значение 3) и изоспинами $l = 1$ и $l = 0$:

$$l = 1: \quad \Sigma^+ = B^{113} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \Sigma^- = B^{223} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \Sigma^0 = 2 \cdot B^{(12)3} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$l = 0: \quad \Lambda^0 = B^{132} = 2 \cdot B^{[12]3} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{matrix},$$

3.) Представление со странностью $s = -2$ (два s -кварка, когда два индекса из i_1, i_2, i_3 у $B^{i_1 i_2 i_3}$ принимают значения 3) и изоспином $l = 1/2$:

$$l = \frac{1}{2}: \quad \Xi^0 = B^{133} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}, \quad \Xi^- = B^{233} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}.$$

Декуплет барионов (4.4.81) — (4.4.84), соответствующий второму тензору в (7.18.1). Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно в данном случае нарисовать граф ветвления представлений при вложении $u(1) \subset u(2) \subset u(3)$. В результате возникает следующее соответствие схем Гельфанда–Цетлина и компонент $D^{i_1 i_2 i_3}$ (как и в предыдущем случае мы опускаем спиновые индексы α, β, γ).

1) Представление с нулевой странностью $s = 0$ (без s -кварка) и изоспином $l = 3/2$, когда все индексы i_1, i_2, i_3 у $D^{i_1 i_2 i_3}$ принимают только два значения 1, 2

$$\Delta^{++} = D^{(111)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \Delta^- = D^{(222)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$\Delta^+ = D^{(112)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \Delta^0 = D^{(122)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}.$$

2) Представление со странностью $s = -1$ (с одним s -кварком), и изоспином $l = 1$. Это соответствует случаю, когда один из индексов i_1, i_2, i_3 у $D^{i_1 i_2 i_3}$ равен 3, а остальные принимают только два значения 1, 2:

$$\Sigma^{*+} = D^{(113)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \Sigma^{*-} = D^{(223)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \Sigma^{*0} = D^{(123)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}.$$

3) Представление со странностью $s = -2$ (двумя s -кварками) и изоспином $l = 1/2$, то есть два индекса из i_1, i_2, i_3 равны 3:

$$\Xi^{*0} = D^{(133)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}, \quad \Xi^{*-} = D^{(233)} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}.$$

4) Представление со странностью $s = -3$ (три s -кварками) и изоспином $l = 0$:

$$\Omega^- = D^{333} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{matrix}.$$

7.19 Задача 152 раздела 5.1.3

Доказать, что неприводимые конечномерные представления групп $O(N, \mathbb{C})$ (и их подгрупп вещественных матриц $O(p, q)$, где $p + q = N$) характеризуются диаграммами Юнга, у которых сумма клеток в первых двух столбцах не превышает N . Указание: получить формулу для размерности

$$\dim(T^{(\lambda')}) = \frac{(a-b+1)N!(N+2)!(N-a-b+1)}{(a+1)!b!(N-a+1)!(N-b+2)!}, \quad (7.19.1)$$

представления $T^{(\lambda)}$ группы $O(N, \mathbb{C})$, соответствующего диаграмме λ , состоящей из двух столбцов высотой a и b ($a \geq b$).

Для представления, действующего в пространстве антисимметричных тензоров и характеризуемого диаграммой Юнга $[1^k]$, которая состоит только из одного столбца, утверждение из условия задачи следует из равенства нулю любого антисимметричного тензора ранга k , большего N . Перейдем к случаю представлений, характеризуемых диаграммами Юнга с двумя и более столбцами. Для начала изучим случай диаграммы Юнга $\lambda' = [2^b, 1^{a-b}]$, состоящей из двух столбцов высотой a и b ($a \geq b$). Рассмотрим пространство $\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}$ всех тензоров, симметризованных с помощью проектора Юнга $s(Y(T_{\lambda'}))$ (случай симметризации тензоров с помощью системы проекторов $P(T_{\lambda'})$ рассматривается аналогично). Конкретный выбор таблицы $T_{\lambda'}$, имеющей форму λ' , нам не важен. В соответствии с правилами, изложенными в разделе 4.4.1, представим компоненты тензора $\mathbf{t} \in \bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}$ графически в виде таблицы, имеющей форму диаграммы Юнга λ' (см. (4.4.10)):

$$\mathbf{t}^{[k_1, \dots, k_a][i_1, \dots, i_b]} = \begin{array}{|c|c|} \hline k_1 & i_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline k_b & i_b \\ \hline \vdots & \\ \hline k_a & \\ \hline \end{array}, \quad (7.19.2)$$

где в клетках диаграммы Юнга помещены индексы тензора \mathbf{t} , симметризованные в соответствии с некоторой таблицей $T_{\lambda'}$. В левой части (7.19.2) мы явно указали, что компоненты тензора \mathbf{t} антисимметризованы по индексам (k_1, \dots, k_a) и (i_1, \dots, i_b) , то есть антисимметризованы по столбцам диаграммы $\lambda' = [2^b, 1^{a-b}]$. Вычислим число независимых тензоров, симметризованных с помощью проектора Юнга $s(Y(T_{\lambda'}))$. Другими словами, вычислим размерность пространства $\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}$ представления группы $SL(N, \mathbb{C})$. Пользуясь формулой крюков (4.4.21), получаем

$$\dim(\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}) = \frac{(a-b+1)}{(a+1)!b!} \frac{N!(N+1)!}{(N-a)!(N-b+1)!}. \quad (7.19.3)$$

Найдем размерность подпространства $\mathcal{V}^{(\lambda')} \subset \bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}$ бесследовых тензоров, симметризованных в соответствии с таблицей (7.19.2). Для этого, необходимо из размерности (7.19.3) вычесть число условий "бесследовости" (5.1.32), которые налагаются на тензоры $\mathbf{t} \in \bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}$. Свертка тензора \mathbf{t} по двум индексам, которые находятся в одном столбце диаграммы (7.19.2), в силу антисимметричности по индексам в столбцах, тождественно равна нулю и не дает каких-либо условий на тензоры \mathbf{t} . Если сворачивать два индекса у компонент тензора \mathbf{t} так, что эти индексы берутся из разных столбцов диаграммы (7.19.2), то все возникающие условия "бесследовости" будут (независимо от того, какие индексы в наборах (k_1, \dots, k_a) и (i_1, \dots, i_b) выбираются) эквивалентны друг другу опять же в силу антисимметризации индексов в столбцах таблицы (7.19.2). Таким образом, все независимые условия "бесследовости", которые необходимо наложить на тензоры $\mathbf{t} \in \bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}$, можно записать следующим образом

$$\eta_{k_1 i_1} \mathbf{t}^{[k_1, \dots, k_a][i_1, \dots, i_b]} = 0. \quad (7.19.4)$$

Множество тензоров \mathbf{t}' ранга $r = a + b - 2$ с компонентами $\mathbf{t}'^{[k_2, \dots, k_a][i_2, \dots, i_b]}$, которые возникли в левой части этого соотношения, соответствуют таблице (7.19.2), в которой

надо убрать первую строку с индексами k_1 и i_1 . Таким образом, множество тензоров \mathbf{t}' образует пространство $\mathcal{V}^{(\lambda'')}$ тензоров, симметризованных по таблице, имеющей форму диаграммы Юнга $\lambda'' = [2^{b-1}, 1^{a-b}]$. Число независимых соотношений (7.19.4) равно размерности пространства $\mathcal{V}^{(\lambda'')}$ и вычисляется по формуле (7.19.3), в которой надо сделать замену $a \rightarrow (a - 1)$ и $b \rightarrow (b - 1)$:

$$\dim(\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda'')}) = \frac{(a - b + 1)}{a!(b - 1)!} \frac{N!(N + 1)!}{(N - a + 1)!(N - b + 2)!}. \tag{7.19.5}$$

Для размерности представления $T^{(\lambda')}$ группы $O(p, q)$ в пространстве $\mathcal{V}^{(\lambda')}$ справедливо равенство $\dim(T^{(\lambda')}) \equiv \dim(\mathcal{V}^{(\lambda')}) = \dim(\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda')}) - \dim(\bar{\mathcal{V}}^{(\lambda'')})$, подставляя в которое (7.19.3) и (7.19.5), мы получаем формулу (7.19.1). Из этой формулы следует, что при $(a + b) > N$ мы имеем $\dim(T^{(\lambda')}) \leq 0$, то есть в этом случае представление $T^{(\lambda')}$ не существует и мы приходим к справедливости сделанного выше утверждения для представлений, характеризуемых диаграммами Юнга с двумя столбцами. Наконец, рассмотрим представления с диаграммами $\lambda \vdash r$, имеющими три и более столбца. Пусть первые два столбца диаграммы λ образуют диаграмму Юнга $\lambda' = [2^b, 1^{a-b}]$, изображенную в (7.19.2). Рассмотрим стандартную таблицу Юнга T_λ , числа в которой упорядочены по столбцам (см. обсуждение после Определения 4.5.2), и которая содержит в себе стандартную таблицу $T_{\lambda'}$ с двумя столбцами, имеющую форму (7.19.2). Из тождества (4.5.64) следует соотношение для симметризаторов Юнга

$$\mathbf{s}(Y(T_\lambda)) = (\alpha_{\lambda'})^{-1} \mathbf{s}(Y(T_{\lambda'})) \cdot \mathbf{s}(Y(T_\lambda)), \tag{7.19.6}$$

из которого в свою очередь следует, что компоненты тензора \mathbf{t} ранга r , симметризованного с помощью оператора $\mathbf{s}(Y(T_\lambda))$, можно представить в виде

$$\mathbf{t}^{[k_1, \dots, k_a] [i_1, \dots, i_b] j_1, \dots, j_{r-a-b}}, \tag{7.19.7}$$

где первые $(a + b)$ индексов $(k_1, \dots, k_a, i_1, \dots, i_b)$ симметризованы с помощью оператора $\mathbf{s}(Y(T_{\lambda'}))$ в соответствии с таблицей (7.19.2). Для каждого фиксированного набора индексов (j_1, \dots, j_{r-a-b}) в (7.19.7), мы имеем тензоры типа (7.19.2), для числа независимых компонент которых справедлива та же формула (7.19.1). Учитывая эквивалентность представлений, построенных с помощью симметризаторов $\mathbf{s}(Y(T_\lambda))$ для разных таблиц Юнга T_λ , имеющих одну и ту же форму λ , мы приходим к справедливости Утверждения и в общем случае, когда число столбцов диаграммы λ больше двух.

7.20 Задача 154 раздела 5.1.3

Пусть компоненты $\mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r}$ бесследового тензора ранга $2r$: $\mathbf{t} \in \mathcal{V}^{\otimes 2r}$, где \mathcal{V} — пространство определяющего представления группы $SO(2r, \mathbb{C})$ (группы $SO(2r - q, q)$),

симметризованы в соответствии с таблицей

k_1	ℓ_1
\vdots	\vdots
k_r	ℓ_r

. Доказать тождество

$$(P_+)^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_r} (P_-)^{j_1 \dots j_r}_{\ell_1 \dots \ell_r} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = 0, \tag{7.20.1}$$

где (анти)самодуальные проекторы P_\pm определены в (5.1.40), (5.1.41).

Представим компоненты тензора $\mathbf{t} \in \mathcal{V}^{\otimes 2r}$, симметризованного в соответствии с диаграммой Юнга $[2^r]$, следующим образом

$$\mathbf{t}^{1,3,\dots,2r-1;2,4,\dots,2r} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \dots & 2r \\ \hline \end{array} = A_{1,3,\dots,2r-1} \cdot A_{2,4,\dots,2r} \cdot P_1^{(+)} P_3^{(+)} \dots P_{2r-1}^{(+)} \psi^{1,2,\dots,2r}, \quad (7.20.2)$$

где ψ — произвольный тензор в $\mathcal{V}^{\otimes 2r}$, вместо тензорных индексов k_1, ℓ_1, \dots мы написали номера соответствующих пространств \mathcal{V} в произведении $\mathcal{V}^{\otimes 2r}$, A_{a_1,\dots,a_r} — антисимметризаторы ранга r , действующие в пространствах \mathcal{V} с номерами a_1, \dots, a_r и операторы $P_k^{(+)} = \frac{1}{2}(I + P_k)$ симметризуют пространства \mathcal{V} с номерами k и $(k + 1)$ в $\mathcal{V}^{\otimes 2r}$ (перестановка P_k определена в (4.6.92)). Условия бесследовости для тензоров (7.20.2) сводятся к соотношениям

$$\eta_{k_i \ell_j} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{k_1 \ell_1} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = \mathbf{t}_{\ell_1}^{k_2 \dots k_r; \ell_1, \ell_2 \dots \ell_r} = 0. \quad (7.20.3)$$

Тензоры (7.20.2) обладают симметрией по отношению к одновременной перестановке всех индексов, находящихся в столбцах таблицы Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline k_1 & \ell_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline k_r & \ell_r \\ \hline \end{array} = \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = \mathbf{t}^{\ell_1 \dots \ell_r; k_1 \dots k_r} = \begin{array}{|c|c|} \hline \ell_1 & k_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \ell_r & k_r \\ \hline \end{array}. \quad (7.20.4)$$

Действительно, проекторы $P_k^{(+)}$ удовлетворяют соотношениям $P_k^{(+)} = P_k P_k^{(+)}$, поэтому для тензора (7.20.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{1,\dots,2r-1;2,\dots,2r} &= A_{1,\dots,2r-1} \cdot A_{2,\dots,2r} \cdot (P_1 \dots P_{2r-1}) \cdot P_1^{(+)} \dots P_{2r-1}^{(+)} \psi^{1,2,\dots,2r} = \\ &= (P_1 \dots P_{2r-1}) \cdot A_{2,\dots,2r} \cdot A_{1,\dots,2r-1} \cdot P_1^{(+)} \dots P_{2r-1}^{(+)} \psi^{1,2,\dots,2r} = \mathbf{t}^{2,\dots,2r;1,\dots,2r-1}. \end{aligned} \quad (7.20.5)$$

Пользуясь симметрией (7.20.4), равенство (7.20.1) переписывается в виде

$$(P_-)^{i_1 \dots i_r}{}_{k_1 \dots k_r} (P_+)^{j_1 \dots j_r}{}_{\ell_1 \dots \ell_r} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = 0. \quad (7.20.6)$$

Равенства (7.20.1) и (7.20.6) с учетом явного вида (5.1.41) (анти)самодуальных проекторов P_{\pm} эквивалентны соотношениям

$$\mathbf{t}^{i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r} = \frac{(-1)^{r+q}}{(r!)^2} \varepsilon^{i_1 \dots i_r}{}_{k_1 \dots k_r} \varepsilon^{j_1 \dots j_r}{}_{\ell_1 \dots \ell_r} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r}, \quad (7.20.7)$$

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_r}{}_{k_1 \dots k_r} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; j_1 \dots j_r} = \varepsilon^{j_1 \dots j_r}{}_{\ell_1 \dots \ell_r} \mathbf{t}^{i_1 \dots i_r; \ell_1 \dots \ell_r}, \quad (7.20.8)$$

причем соотношения (7.20.7) и (7.20.8), как легко проверить, следуют друг из друга. Таким образом, для того, чтобы установить справедливость (7.20.1) нам достаточно доказать одно из равенств (7.20.7) или (7.20.8), например (7.20.7).

Докажем равенство (7.20.7) для случая группы $SO(2r)$, когда $q = 0$ и метрику можно выбрать евклидовой $\eta_{ik} = \delta_{ik}$ (общий случай группы $SO(2r - q, q)$ для $q \neq 0$ рассматривается аналогично). Воспользуемся тождеством (см. Раздел I-1.2.2 в первой части книги)

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_{2r}} \cdot \varepsilon_{k_1 \dots k_{2r}} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 k_1} & \delta_{i_1 k_2} & \dots & \delta_{i_1 k_{2r}} \\ \delta_{i_2 k_1} & \delta_{i_2 k_2} & \dots & \delta_{i_2 k_{2r}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{i_{2r} k_1} & \delta_{i_{2r} k_2} & \dots & \delta_{i_{2r} k_{2r}} \end{pmatrix}.$$

и перепишем правую часть (7.20.7) в виде

$$\frac{(-1)^r}{(r!)^2} \det \begin{pmatrix} B_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} & B_{\ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_r} \\ B_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r}, \quad (7.20.9)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевая $r \times r$ матрица, возникшая в результате учета условий бесследовости (7.20.3) тензора \mathbf{t} , и

$$B_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \equiv \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_r}^{i_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_r} & \dots & \delta_{j_r}^{i_r} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что детерминант в (7.20.9) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} B_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} & B_{\ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_r} \\ B_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} & \mathbf{0} \end{pmatrix} &= (-1)^r \det \begin{pmatrix} B_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} & \mathbf{0} \\ B_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} & B_{\ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_r} \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^r \det (B_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r}) \cdot \det (B_{\ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_r}) = (-1)^r (r!)^2 A_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} A_{\ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_r}, \end{aligned} \quad (7.20.10)$$

где $A_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} \equiv \frac{1}{r!} \det (B_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r})$ — антисимметризатор ранга r (см. формулу (3.4.28)). Подставим (7.20.10) в (7.20.9), тогда для правой части равенства (7.20.7) получаем

$$A_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} A_{\ell_1 \dots \ell_r}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{t}^{k_1 \dots k_r; \ell_1 \dots \ell_r} = \mathbf{t}^{j_1 \dots j_r; i_1 \dots i_r},$$

что в силу симметрии (7.20.4) совпадает с левой частью (7.20.7). Таким образом, тождество (7.20.7) доказано. Из тождества (7.20.7) следует тождество (7.20.8), после чего, комбинируя эти тождества, мы выводим (7.20.1).

7.21 Задача 178 раздела 6.2.1

Доказать, что для нечетного случая $(p + q) = 2\nu + 1$ любой элемент $U \in CL(p, q)$ представим в виде $U = z \cdot a$, где z — элемент центра алгебры $\mathcal{C}l_{(p,q)}$ и $a \in CL^{(0)}(p, q)$.

Пусть $U = a + b \in CL(p, q)$, где a и b соответственно четный и нечетный элементы алгебры $\mathcal{C}l_{(p,q)}$. Если $a = 0$ или $b = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0 \neq b$, тогда преобразования (6.2.8), как и в случае $p + q = 2\nu$, разбиваются на две части (см. (6.2.15))

$$a \cdot \gamma_m = \gamma_k \Lambda_m^k \cdot a, \quad b \cdot \gamma_m = \gamma_k \Lambda_m^k \cdot b. \quad (7.21.1)$$

Нечетный элемент b представим в виде $b = \gamma_{1 \dots N} \cdot a'$, где a' — четный элемент и $a' \cdot \gamma_m = \gamma_k \Lambda_m^k \cdot a'$, причем если $a' = c \cdot a$ (константа $c \neq 0$), то $U = (1 + c \cdot \gamma_{1 \dots N})a$, и так как элемент U — обратим, то элемент a также обратим и следовательно $a \in CL^{(0)}(p, q)$. Пусть $a' \neq \alpha \cdot a$, тогда элемент a в (7.21.1) определен неоднозначно и его всегда можно сделать обратимым, сдвигая следующим образом: $a \rightarrow a + \alpha a' \equiv \tilde{a}$, где α — некоторый параметр^{7.2}. В этом случае $\tilde{a} \in CL^{(0)}(p, q)$. Теперь, из формул (7.21.1) следует, что элемент $\tilde{a}^{-1} \cdot b$ принадлежит центру, а так как элемент $\tilde{a}^{-1} \cdot b$ — нечетный, то $b = \beta \gamma_{1 \dots N} \cdot \tilde{a}$, где в силу обратимости U мы имеем $\beta^2 \neq (-1)^{\nu+q}$. Таким образом, мы получаем $U = (1 + \beta \gamma_{1 \dots N}) \cdot \tilde{a}$, где $\tilde{a} \in CL^{(0)}(p, q)$, что и требовалось доказать.

^{7.2}В любом представлении (в котором U — обратим) операторы a и a' не могут иметь совпадающие нулевые моды (собственные вектора с нулевыми собственными значениями), иначе оператор $U = (a + \gamma_{1 \dots N} \cdot a')$ не был бы обратимым. Поэтому, даже в случае необратимости операторов a и a' , всегда можно подобрать линейную комбинацию $(a + \alpha a')$ такую, что она не будет иметь нулевых мод и будет обратима.

7.22 Задача 180 раздела 6.3.1

Доказать, что если $U \in \text{Spin}(p, q)$, то матрица $(-U)$ также принадлежит группе $\text{Spin}(p, q)$.

Необходимо показать, что оператор $(-I)$ принадлежит группе $\text{Spin}(p, q)$, то есть существует гладкая кривая в $\text{Spin}(p, q)$, соединяющая его с единичным оператором $I \in \text{Spin}(p, q)$. Специальный случай $p = 1$ и $q = 1$ мы оставляем читателю для самостоятельного рассмотрения. Пусть $p > 1$ (случай $q > 1$ рассматривается аналогично). Тогда в представлении (6.1.77)

$$\gamma_1 = \Gamma_1, \dots, \gamma_p = \Gamma_p, \quad \gamma_{p+1} = i\Gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q} = i\Gamma_{p+q}, \quad (7.22.1)$$

где матрицы Γ_m определены в (6.1.50), (6.1.51), мы имеем

$$\Sigma_{1,2} = \frac{1}{4}(\Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_2\Gamma_1) = \frac{i}{2}(\sigma_3 \otimes I^{\otimes(\nu-1)}).$$

Очевидно, что непрерывная кривая

$$g(t) = \exp\left(t\Sigma_{1,2}\right) = \exp\left(\frac{i}{2}t\sigma_3 \otimes I^{\otimes(\nu-1)}\right),$$

лежащая в группе $\text{Spin}(p, q)$, соединяет элементы $g(0) = I$ и $g(2\pi) = -I$, то есть $-I \in \text{Spin}(p, q)$. Отсюда следует, что элемент $-U = g(2\pi) \cdot U$ связан непрерывной кривой в группе $\text{Spin}(p, q)$ с элементом U , то есть $-U \in \text{Spin}(p, q)$.

7.23 Задача 190 раздела 6.3.1

Пусть матрицы Γ'_k ($k = 1, \dots, 2\nu - 2$) в (6.3.70) взяты в представлении (6.3.2) (с заменой $\nu \rightarrow \nu - 1$). Доказать, что в этом случае для матриц \mathbf{d} , \mathbf{g} , \mathbf{c} и \mathbf{h} мы имеем представления (6.3.80) и (6.3.81).

Подставляя гамма-матрицы (6.3.69), а также матрицы \mathbf{D} (6.3.74) и \mathbf{C} (6.3.75) в (6.3.72) и (6.3.73), а также учитывая свойства (6.3.3) для эрмитовых матриц Γ'_k в представлении (6.3.2), мы получаем условия

$$\begin{aligned} 1.) \quad q - \text{четное } (p = 2\beta) &\Rightarrow \mathbf{d} \cdot \Gamma'_k = \zeta(k)\Gamma'_k \cdot \mathbf{d}, \\ 2.) \quad q - \text{нечетное } (p = 2\beta + 1) &\Rightarrow \mathbf{g} \cdot \Gamma'_k = -\zeta(k)\Gamma'_k \cdot \mathbf{g}, \\ \text{где } \zeta(k) = +1 \quad (k = 1, \dots, p-1), \quad \zeta(k) = -1 \quad (k = p, \dots, 2\nu-1); & \quad (7.23.1) \\ 3.) \quad \nu - \text{четное} &\Rightarrow \mathbf{c} \cdot \Gamma'_k = (-1)^k \Gamma'_k \cdot \mathbf{c} \quad (k = 1, \dots, 2\nu-1), \\ 4.) \quad \nu - \text{нечетное} &\Rightarrow \mathbf{h} \cdot \Gamma'_k = (-1)^{k+1} \Gamma'_k \cdot \mathbf{h} \quad (k = 1, \dots, 2\nu-1), \end{aligned}$$

которые определяют матрицы \mathbf{d} , \mathbf{g} , \mathbf{c} и \mathbf{h} . Принимая во внимание явный вид матриц Γ'_k ($k = 1, \dots, 2\nu - 2$), которые заданы в (6.3.2) (при $\nu \rightarrow \nu - 1$), и матрицы $\Gamma'_{2\nu-1}$ из (6.1.69), легко проверить, что блоки \mathbf{d} и \mathbf{g} , предъявленные в (6.3.80), удовлетворяют соотношениям 1.) и 2.) из (7.23.1). Наконец, явный вид (6.3.81) для матриц \mathbf{c} и \mathbf{h} вытекает из сравнения соотношений 3.) и 4.) (7.23.1) с соотношениями (6.3.11) и диктуется видом матриц C, C' , которые были определены в (6.3.5), (6.3.6).

7.24 Задача 194 раздела 6.3.2

Доказать изоморфизм $\mathbf{Spin}(2, 4) = SU(2, 2)$. Указание: воспользоваться вейлевским представлением для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(2,4)}$, которое получается из (6.1.70), найти в этом представлении матрицы \mathbf{d} , \mathbf{h} и \mathbf{f} , и рассмотреть условия (6.3.82) – (6.3.84) для блоков A, \bar{A} .

Пользуясь представлением (6.1.70), строим вейлевское представление для алгебры $\mathcal{C}\ell_{(2,4)}$:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_1 \otimes I_2^{\otimes 2}, & \gamma_1 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes I_2, & \gamma_2 &= i\sigma_2^{\otimes 2} \otimes \sigma_1, \\ \gamma_3 &= i\sigma_2^{\otimes 3}, & \gamma_4 &= i\sigma_2^{\otimes 2} \otimes \sigma_3, & \gamma_5 &= i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes I_2, \end{aligned} \quad (7.24.1)$$

для которого мы имеем $\gamma_m^\dagger = \gamma_m$ ($m = 0, 1$), $\gamma_m^\dagger = -\gamma_m$ ($m = 2, \dots, 5$), $\gamma_m^\top = (-1)^m \gamma_m$ и $\gamma_m^* = \gamma_m$ ($m = 0, 3, 5$), $\gamma_m^* = -\gamma_m$ ($m = 1, 2, 4$). Поэтому, согласно (6.3.72) и (6.3.74)–(6.3.76), полагая $p = 2, q = 4, \nu = 3$, мы получаем $\mathbf{D} \sim \gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$, $\mathbf{C} \sim \gamma_1\gamma_3\gamma_5$, $\mathbf{B} \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_4$ и, выбирая нормировку, приходим к следующим представлениям

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= I_2 \otimes \mathbf{d} = I_2 \otimes \sigma_1 \otimes I_2, & \mathbf{C} &= i\sigma_2 \otimes \mathbf{h} = i\sigma_2 \otimes I_2 \otimes \sigma_2, \\ \mathbf{B} &= i\sigma_2 \otimes \mathbf{f} = i\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (7.24.2)$$

Подставим матрицы \mathbf{d}, \mathbf{h} и \mathbf{f} из (7.24.2) в (6.3.82) – (6.3.84). В результате для диагональных блоков $A, \bar{A} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$ элемента $U \in \mathbf{Spin}(2, 4)$ мы получаем условия:

$$A^\dagger (\sigma_1 \otimes I_2) A = I_2^{\otimes 2} = \bar{A}^\dagger (\sigma_1 \otimes I_2) \bar{A}, \quad (7.24.3)$$

$$\bar{A} = (I_2 \otimes \sigma_2) (A^\top)^{-1} (I_2 \otimes \sigma_2), \quad A^* = (\sigma_1 \otimes \sigma_2) \bar{A} (\sigma_1 \otimes \sigma_2). \quad (7.24.4)$$

Из условий (7.24.3) следует, что $A, \bar{A} \in U(2, 2)$, а условия (7.24.4) однозначно связывают матрицы A и \bar{A} , то есть элемент $U \in \mathbf{Spin}(2, 4)$ определяется только одной из этих матриц, например, матрицей $A \in U(2, 2)$. Отметим, что, если матрицы A рассматривать как элементы группы $U(2, 2)$ в определяющем представлении, то согласно (7.24.4) матрицы \bar{A} реализуют представление, эквивалентное представлению, контраградиентному к определяющему. Налагая условие нормировки $\det(A) = 1$, а также учитывая то, что размерности групп $SU(2, 2)$ и $\mathbf{Spin}(2, 4)$ совпадают и многообразии группы $SU(2, 2)$ связно, мы получаем $\mathbf{Spin}(2, 4) = SU(2, 2)$.

7.25 Задача 198 раздела 6.4.1

Доказать тождество для образующих $\gamma_k \in \mathcal{C}\ell_{(p,q)}$:

$$\gamma_{[k_1 \cdots k_m]} \cdot \gamma_{N+1} = \alpha_m \varepsilon_{k_1 \dots k_m k_{m+1} \dots k_N} \gamma^{k_{m+1} \cdots k_N}, \quad (7.25.1)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{(N-m)!} (-i)^\nu i^q (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \quad (7.25.2)$$

где $N = (p+q)$, антисимметризованное произведение $\gamma_{[k_1 \cdots k_m]}$ определено в (6.4.11), $\varepsilon_{01 \dots N-1} = 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ – целая часть $\frac{m}{2}$ и $\gamma_{N+1} = (-i)^{\nu+q} \gamma_0 \cdots \gamma_{N-1}$.

Так как γ_{N+1} строится как произведение всех образующих γ_k , то в силу определяющих соотношений (6.4.1) левая часть (7.25.1) пропорциональна произведению образующих γ_k с индексами k , не входящими в набор $(k_1 \cdots k_m)$, то есть пропорциональна правой части (7.25.1). Остается найти коэффициент (7.25.2). Этот коэффициент можно вычислить, умножив обе части (7.25.1) слева на $\gamma^{[k_m \cdots k_1]}$ и просуммировав по индексам (k_1, \dots, k_m) . В результате для правой части (7.25.1) выводим

$$\begin{aligned} & \alpha_m \gamma^{[k_m \cdots k_1]} \varepsilon_{k_1 \dots k_m k_{m+1} \dots k_N} \gamma^{k_{m+1} \cdots k_N} = \\ & = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \alpha_m \varepsilon_{k_1 \dots k_N} \gamma^{k_1 \cdots k_N} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} i^\nu (-i)^q N! \alpha_m \gamma_{N+1}, \end{aligned} \quad (7.25.3)$$

где мы воспользовались равенством (6.1.86). В свою очередь для левой части (7.25.1) получаем

$$\gamma^{[k_m \cdots k_1]} \gamma_{[k_1 \cdots k_m]} \cdot \gamma_{N+1} = \frac{N!}{(N-m)!} \gamma_{N+1}. \quad (7.25.4)$$

Здесь мы воспользовались тождеством (ср. с (6.4.78))

$$\sum_{k_1, \dots, k_m} \gamma^{[k_m \cdots k_1]} \cdot \gamma_{[k_1 \cdots k_m]} = \frac{N!}{(N-m)!} I_{2^\nu}, \quad (7.25.5)$$

которое легко доказывается, если заметить, что сумма в левой части содержит ровно $\frac{N!}{(N-m)!}$ слагаемых, каждое из которых равно I_{2^ν} . Сравнивая правые части (7.25.3) и (7.25.4), мы получаем (7.25.2).

Монографии и обзоры общего характера

- П.И.Голод, А.У.Климук, *Математические основы теории симметрии*, Издательство Регулярная и хаотическая динамика, (2001).
- М.М.Постников, *Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии, семестр V.*, Москва, Наука (1982).
- I.L. Buchbinder and S.M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity, Or a walk Through Superspace*, IOP, Bristol and Philadelphia, (1995) pp. 656.
- Ж.П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, Мир, Москва, 1970.
- М.А.Наймарк, *Унитарные представления некомпактных групп*, в книге "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", Издательство: Наукова думка, Киев (1967).
- И.Р. Шафаревич, *Основные понятия алгебры*, "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск (1999).
- Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко . *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979).
- С.П. Новиков, И.Т. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, Издательство МЦНМО, Москва (2005).
- F. Gürsey, *Introduction to Theory of Groups*, in "Relativity, Groups and Topology", eds. C. De Witt, B. De Witt, New York - London, 1964; (имеется русский перевод, Ф. Гюрши, *Введение в теорию групп*, в сборнике статей "Теория групп и элементарные частицы", под. ред. Д.Иваненко, Мир, Москва (1967)).
- Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике*, т. 1,2, Москва, Мир (1984).
- Дж.Эллиот, П.Добер. *Симметрия в физике*, Т.1,Т.2 Москва, Мир (1983).
- Л.Б. Окунь, *Физика элементарных частиц*, Наука, Москва (1988).
- Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, Москва (1987).
- Ю.Б.Румер, А.И.Фет, *Теория групп и квантованные поля*, Наука, Москва (1977).
- Ю.В. Новожилов, *Введение в теорию элементарных частиц*, Наука, Москва (1972).
- Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, 4-е издание (1984).
- С. Швебер, *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*, Изд. иностранной лит., Москва (1963).

- М.А.Наймарк, *Теория представлений групп*. Москва, Наука (1973).
- Е. Вигнер, *Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров*, Издательство - ИО НФМИ (2000) (Серия - Шедевры мировой физико - математической литературы).
- Р.Пенроуз, В.Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Том 1: Два-спинорное исчисление и релятивистские поля*. Москва, Мир (1987) 527 стр.; *Спиноры и пространство-время. Том 2: Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*. Москва, Мир (1988) 573 стр.

Литература

- [1] А.П.Исаев, В.А.Рубаков, *Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли*. Москва, URSS "КРАСАНД" (2017).
- [2] Л.С.Понтрягин, *Непрерывные группы*. Москва, Наука (1973).
- [3] J.E.Hamphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics **9**. Springer-Verlag (1994) (Дж.Хамфрис, Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, 2003).
- [4] Н.Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса; группы, порожденные отражениями; системы корней*. Главы IV, V, VI. Москва, Мир (1972).
- [5] G.Racah, *Group Theory and Spectroscopy*. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1951. Preprint CERN 61-8 (1961).
- [6] Г.Вейль, *Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований*. В книге "Избранные труды. Математика, теоретическая физика стр.100-197; Москва, Наука (1984).
- [7] Н. Georgi, *Lie algebras in particle physics*, Westview press, Advanced Book Program, 1999.
- [8] D. Olive, *Gauge Theories and Lie Algebras with some Applications to Spontaneous Symmetry Breaking and Integrable Dynamical Systems*. Lectures given at the University of Virginia, 1982. Preprint (1983).
- [9] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*. Москва, Мир (1969).
- [10] М.Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Издательство: Editorial URSS, 2002.
- [11] Н.Н. Боголюбов, *Теория симметрии элементарных частиц*, в книге "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", Издательство: Наукова думка, Киев (1967); Н.Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов в двенадцати томах*, том XII, Москва, Наука (2009) стр. 11-140.
- [12] С.Огава, С.Савада, М.Накагава, *Составные модели элементарных частиц*, Москва, Мир (1983).
- [13] А.Барут, Р.Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, (Том 1,2), Москва, Мир (1980).

- [14] А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва (1988).
- [15] Ф.А.Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва (1986).
- [16] Л.А.Тахтаджян, *Квантовая механика для математиков*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск (2011).
- [17] R.Brauer and H.Weyl, *Amer. Journ. Math.*, **57** (1935) 425; (имеется русский перевод в книге П.Дирак *Спиноры в гильбертовом пространстве*, Мир, Москва (1978)).
- [18] Б.Л. Ван дер Варден, *Метод теории групп в квантовой механике*, Библиотека "Физика. Математические методы", Том V, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский Университет" (1999).
- [19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Теоретическая физика, т. III, Наука, Москва (1989).
- [20] С.Вайнберг, *Квантовая теория поля. Том 1. Общая теория*, Физматлит, Москва (2003).
- [21] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля. Том 2. Современные приложения*, Физматлит, Москва (2003).
- [22] В.А. Рубаков, *Классические калибровочные поля*. Москва, издательство: Editorial URSS (1999).
- [23] А.П. Юцис, И.Б.Левинсон, В.В. Ванагас, *Математический аппарат теории момента количества движения*. Академия наук Литовской ССР, Институт физики и математики, Публикация No.3, Вильнюс (1960).
- [24] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, *Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links* In: Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), pages 285-339. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.
- [25] Г.Вейль, *Классические группы. Их инварианты и представления*, Москва, УРСС (2010).
- [26] Г.Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Москва, Наука (1986).
- [27] W.Fulton, J.Harris, *Representation theory. A first course*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1991); имеется перевод: У.Фултон, Дж.Харрис, *Теория представлений. Начальный курс*, Москва, издательство МЦНМО, 2017.
- [28] Э.Б.Винберг, *Курс алгебры*, Москва, издательство МЦНМО, 2011.
- [29] П.А.М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Москва, Издательство Наука, 1979.
- [30] Д.П.Желобенко, *Лекции по теории групп Ли*, Дубна, Издательский отд. ОИЯИ (1965).

- [31] Д.П.Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Москва, МЦНМО (2007).
- [32] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Москва, Мир (1987) 352 с.
- [33] Н. Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der Linearen Atomkette*, Zeitschr. fur Physik, **71**, 3-4 (1931) 205-206.
- [34] G. Ponzano and T. Regge, *Semi-classical limit of Racah coefficients*, in Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics, edited by F. Block, a.o. (North Holland, Amsterdam, 1968);
T. Regge and R.M. Williams, *Discrete structures in gravity*, Journal of Mathematical Physics **41**, 6 (2000) 3964-3984.
- [35] V.G. Turaev and O.Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31** 4 (1992) 865-902.
- [36] J.Schwinger, *On Angular Momentum*, U.S. Atomic Energy Commission, NYO-3071 (1952); перепечатано в книге "Quantum Theory of Angular Momentum", ed. L.C.Biedenharn and H.Van Dam (Academic Press, 1969).
- [37] V.Bargmann, *On the Representations of the Rotation Group*, Rev. Mod. Phys., vol. 34, No. 4 (1962) 829 – 845.
- [38] Я.А. Смородинский, Л.А.Шелепин, *Коэффициенты Клебша–Гордана с разных сторон*, Успехи физических наук, том 106, вып. 1 (1972) 3 – 45.
- [39] T.Regge, *Symmetry properties of Clebsch-Gordon's coefficients*, Nuovo Cimento 10 (1958) 544; *Symmetry properties of Racah's coefficients*, Nuovo Cimento 11 (1959) 116.
- [40] В.Е.Sagan, *The Symmetric Group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Wadsworth & Brooks/Cole math. series, (1991).
- [41] J.S. Frame, G. de B. Robinson and R.M. Thrall, *The hook graphs of the symmetric group*, Canad. J. Math. 6 (1954) 316-325.
- [42] О.В. Огиевский и Р.Н. Рухов, *Lecture on Hecke algebras*, в трудах Международной школы "Симметрии и интегрируемые системы", Дубна (8-11 июня, 1999), ОИЯИ, Д2, 5-2000-218; preprint MPIM (Bonn), MPI 2001-40, (<http://www.mpim-bonn.mpg.de/>).
- [43] А.Р.Исаев и О.В.Огиевский, *Representations of A-type Hecke algebras*, Proceedings of International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries"(Dubna, July 27-31, 2005) 2006, pp. 132-141; [arXiv:0912.3701\[math.QA\]](https://arxiv.org/abs/0912.3701).
- [44] У.Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, Москва, Изд. МЦНМО, (2006).
- [45] А. Okounkov and A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*, Selecta Mathematica, New Ser. Vol. 2, No. 4 (1996) 581-605; имеется русский перевод в приложении к книге У.Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, Москва, Изд. МЦНМО, 2006.

- [46] M. Nazarov, *Young's orthogonal form for Brauer's Centralizer Algebra*, Journ. of Algebra **182** (1996) 664–693.
- [47] A.P. Isaev and O.V. Ogievetsky, *Jucys-Murphy elements for Birman-Murakami-Wenzl algebras*. Physics of Particles and Nuclei Letters 8.3 (2011) 234.
- [48] A.P. Isaev and A.I. Molev, *Fusion procedure for the Brauer algebra*, St. Petersburg Math. J., 22 (2011), 437–446.
- [49] A.P. Isaev, A.I. Molev and O.V. Ogievetsky, *A new fusion procedure for the Brauer algebra and evaluation homomorphisms*, Int. Math. Res. Not. (2012), 2571–2606.
- [50] Д. С. Широков, *Лекции по алгебрам Клиффорда и спинорам*, Лекц. курсы НОЦ, 19, МИАН, М., 2012, 3–179
- [51] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press (1997, 2001).
- [52] V.S. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*, AMS (2004).
- [53] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Москва, Наука, 1988.
- [54] Э.Картан, *Теория спиноров*, Москва, ИЛ (1947).
- [55] Р.Пенроуз, В.Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Том 2: Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*. Москва, Мир (1988) 573 стр.
- [56] T. Kugo, P. Townsend, *Supersymmetry and the division algebras*, Nucl. Phys. B221 (1983) 357 - 380.
- [57] А.С. Шварц, *Квантовая теория поля и топология*, URSS, Москва, 2017.

Предметный указатель

Алгебра

- Брауэра $Br_n(\omega)$, 339–347, 358
- Гейзенберга, 12
- градуированная, 27
- Грассмана, 27
- групповая, 204
- Каца-Муди, 183
- квантового осциллятора, 14
- Клиффорда
 - вещественная $Cl_{(p,q)}$, 20, 368–372
 - комплексная Cl_N , 20–26, 360, 368–372
 - представления, 372–386, 400–411
- матричная, 260
- полупростая, 258
- простая, 223, 258
- свободных фермионов, 23, 360, 373
- фермионных осцилляторов, 23

Алгебра Ли

- $sl(N, \mathbb{C})$, 19, 122, 196–197
- $so(N, \mathbb{C})$, 19, 123, 322, 361
- $so(p, q)$, 322
- $sp(2r, \mathbb{C})$, 19, 126, 355
- $su(2)$, 36
- $usp(2r)$, 356
- $\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$, 400
- $\text{spin}(p, q)$, 395
- дуальная, 136
- ранг, 122
- размерность
 - E_6 , 130
 - E_7 , 131
 - E_8 , 131
 - F_4 , 129
 - G_2 , 128

Антисимметризатор

- вертикальный, 208
- полный, 210, 305, 455

Березина интеграл, 30

Бернсайда

- тождество, 223

Бете формула, 85

Биденхарна – Эллиотта

- тождество, 111–112

Браттели диаграмма, 295

Веддербёрна

- теорема, 261

Вейля

- группа, 132–135, 145–146, 180, 181
- знаменатель, 181–184
- камера, 132
 - положительная, 156, 158
- отражение, 132, 140
- представление
 - алгебры $Cl_{(p,q)}$, 384–386
 - алгебры $\text{spin}(p, q)$, 398–399, 421–423
- формула, 183
 - для знаменателя, 181
 - размерности представления, 187

Вес представления, 138–143

- доминантный, 155–157

- кратность, 140

- простой, 140

- старший, 152–158

фундаментальный, 147

- алгебр G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 , 175

- алгебры $sl(r + 1, \mathbb{C})$, 160

- алгебры $so(2r + 1, \mathbb{C})$, 171

- алгебры $so(2r, \mathbb{C})$, 169

- алгебры $sp(2r, \mathbb{C})$, 173

- упорядочение, 155

- эквивалентный, 143, 156

Вигнера

- 3-j символ, 90, 91, 97–102

- 3n-j символы, 101

- 6-j символ, 99, 102–112, 119, 449–450

- 9-j символ, 103, 109

Виковский символ оператора, 18

- Гелл-Манна–Нишиджимы
формула, 241
- Гельфанда–Цетлина
базис, 315–317, 463
подалгебра, 280
схема, 317, 463
- Гиперзаряд, 240–241
- Градуировка, 27
- Группа
 $CL(p, q)$, 389–392
 $\text{Diff}(\mathbb{C})$, 443
 $O(N, \mathbb{C})$, $SO(N, \mathbb{C})$, 322
 $O(p, q)$, 320
 $SL(N, \mathbb{C})$, 195
 $SO(p, q)$, 322
 $SO^\uparrow(p, q)$, 320
 $SU(2)$, 53
 $SU(N)$, 195
 $Sp(2r, \mathbb{R})$, $Sp(2r, \mathbb{C})$, 355
 $Sp(p, q)$, 355
 $USp(2r) = Sp(r)$, 355
 $\text{Pin}(p, q)$, 392
 $\text{Spin}(1, N - 1)$, 431
 $\text{Spin}(p, q)$, 393–396, 411–418
перестановок S_r , 195, 199–201, 206–214
симметрическая, *см.* Группа перестановок S_r
спинорная, *см.* Группа $\text{Spin}(p, q)$
- Декуплет, 249
- Дынкина диаграмма
 A_r, B_r, C_r, D_r , 127
 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 , 127
весовая, 165
- Идеал, 215
двухсторонний, 258
простой, 255
- Идемпотент, 205, 215, 254–259
взаимная ортогональность, 205
полная система, 205, 254
примитивный, 205, 254
алгебры $\mathbb{C}[S_r]$, 302–305
алгебры B_{r_n} , 351–353
центральный, 258
- Индекс
Дынкина, 159
представления, 177
- Изоспин, 240
- Йордана–Швингера
представление, 20
- Казимира оператор, 176
квадратичный, 36, 68, 78, 175–177, 446
- Картана
матрица, 127, 451
подалгебра, 121
- Картана–Ботта периодичность, 370
- Картана–Вейля базис, 121
 $sl(3, \mathbb{C})$, 149
 $sl(N, \mathbb{C})$, 122
 $so(2r + 1, \mathbb{C})$, 124
 $so(2r, \mathbb{C})$, 124, 361
 $sp(2r, \mathbb{C})$, 126
- Кватернион, 53
- Киллинга метрика, 121, 175
- Клебша–Гордана
коэффициенты, 71, 82, 85–93, 97
разложение, 91, 95, 423, 433
ряд, 71, 81
- Когерентные состояния, 15, 29, 117
алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, 49
- Кокстера
образующие, 209, 210
презентация, 279
- Корневая образующая, 121
- Корни, 121
отрицательные, 122
положительные, 122
простые, 122
- Коэффициенты
Рака, 99
треугольные, 99, 116
- Крюк, 221
длина, 221, 231
- Кварк, 239
- Лапласа оператор, 69, 446–448
- Лапласиан, *см.* Лапласа оператор
- Лейбница правило, 28
- Массовая формула, 245, 247, 252
Гелл-Манна – Окубо, 252
- Матрицы
Дирака, 368
Гелл-Манна, 240
Паули, 35, 54
- Мера
инвариантная, 55

- Хаара, 70
- Минковского пространство, *см.* Пространство Минковского
- Ньютона
степенные суммы, 312
формулы, 312
- Октет, 250
- Пирса разложение
двустороннее, 256
левое, 256
правое, 256
- Полином
Лежандра, 66, 70
симметрический, 312
полный, 311
элементарный, 311
Чебышева второго рода, 74
Шура, 189, 190, 309, 313, 314
Эрмита, 15
- Полуспинор, *см.* Спинор вейлевский
- Представление
антиголоморфное, 17, 29
антисамодуальное, 332–334, 420
Вейля, *см.* Вейля представление
голоморфное, 17, 29, 117
ко-определяющее, 41, 150, 159, 237
контраградиентное к определяющему,
см. ко-определяющее
майорановское, 425, 432
определяющее, 40, 198, 236
полуспинорное, *см.* Вейля представление алгебры $\text{spin}(p, q)$
присоединенное, 238
размерность
 $SL(N, \mathbb{C})$, 231–236
 $SO(2r)$, 194
 $SO(2r + 1)$, 193
 $SU(3)$, 232
 $SU(r + 1)$, 191, 231
 S_r , 220–222
 $Usp(2r)$, 192
регулярное, 43, 197, 215, 255
самодуальное, 332–334, 420
со старшим весом, 33, 44, 77, 152–158
спинорное, 170, 171, 173, 360–366
тензорное, 58
циклическое, 140
- Проектор
взаимная ортогональность, 300
полная система, 204, 300
примитивный, 203
- Пространство
Минковского, 320, 427–429
гильбертово, 11
корневое, 121
Фока, 14–16, 24–26, 373
- Пфафффиан, 31, 118
- Разбиение, *см.* Юнга диаграмма
- Решетка корней, 148, 451
- Решетка весов, 148–151, 451
 $sl(2, \mathbb{C})$, 149
 $sl(3, \mathbb{C})$, 151
- Симметризатор
горизонтальный, 208
полный, 209, 305, 455
- Система
весов, 143
 A_r , 144
 B_r, C_r, D_r , 145
корней
 A_r, B_r, C_r, D_r , 123–126
 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 , 128–131
дуальная, 136
- Спинор
вейлевский, 174, 364, 421, 428, 439
дираковский, 364, 418, 428
киральность, 428
майорана-вейлевский, 428–430
майорановский, 425–427, 432, 439
псевдо-майорановский, 426, 428
сопряжение
зарядовое, 424–425
по Дираку, 418, 431
- Странность, 241
- Сферические гармоники, 65, 69, 95
- Тензор, 324–325
антисамодуальный, 332–334, 422, 436, 467
самодуальный, 332–334, 422, 436, 467
- Теорема
Вигнера–Эккарта, 97
Гамильтона–Кэли, 311, 461
Паули, 374
сложения, 66, 96, 444

- Фирца тождества, 436–439
- Фока пространство, *см.* Пространство Фока
- Формула
 крюков, 221, 231
 Фрейденделя для кратностей, 185
 Фробениуса, 221–223
 Якоби-Труди, 190, 310, 313
- Функции
 Вигнера, 64, 65, 70
 Грина, 92
 зональные сферические, 66
 присоединенные Лежандра, 66, 70
 присоединенные сферические, 65, 69
 сферические, 65
 Шура, *см.* Полином Шура
- Характер представления, 178, 179
 $SO(2r)$, 194
 $SO(2r + 1)$, 193
 $SU(2)$, 72, 188
 $SU(r + 1)$, 189
 $U(N)$, 190, 308–311
 $Usp(2r)$, 192
 формула Вейля, *см.* Вейля формула
- Шелепина R -символ, 116
- Шура-Вейля
 дуальность, 195, 277
- Эйлера
 углы, 56, 63, 64, 66, 70, 446
 формула
 для числа разбиений, 223, 458
 операторная, 54
- Юнга
 диаграмма, 165–167, 169, 172, 173, 206, 316
 граф, 295, 336
 осциллирующий, 349–351
 раскрашенный, 296–299
 симметризатор, 209–219, 225–229, 267–276
 таблица, 206–214, 227–229
 дуальная, 207
 осциллирующая, 338, 347
 полустандартная, 314
 содержание клетки, 284, 347
 стандартная, 219–220, 269
- Юциса-Мёрфи элементы
 алгебра $\mathbb{C}[S_r]$, 279–284
 алгебра $\mathcal{B}r_n$, 342–347
 Якоби-Труди формула, *см.* Формула Якоби-Труди
 Янга-Бакстера уравнение, 105

ИСАЕВ Алексей Петрович
РУБАКОВ Валерий Анатольевич

ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ
Представления групп Ли и алгебр Ли. Приложения

2019-38

Отпечатано с файлов, предоставленных авторами.

Подписано в печать 20.06.2019. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 39,33. Уч.-изд. л. 40,03. Тираж 100 экз. Заказ 59716.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/