ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2009. Т. 40. ВЫП. 1

ВНЕШНЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕСТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

А. А. Логунов[1,*], *М. А. Мествиришвили*[2]

[1] Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия
[2] Институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Показано, что в полевой теории гравитации внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного источника, описываемого диагональным метрическим тензором, может быть только статическим.

It is shown that in the field theory of gravitation the external gravitational field of a nonstatic spherically symmetric source described by a diagonal metric tensor should be static only.

PACS: 04.20.Cv

Ранее в работе [1] мы уже рассматривали данный вопрос, однако полученный там вывод о статичности внешнего решения для нестатического сферически-симметричного тела, описываемого диагональной метрикой риманова пространства, основывался на использовании условия причинности. В настоящей работе, точно следуя статье [1], мы установим этот вывод без условия причинности.

В общей теории относительности (ОТО), которая связывает гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, доказана в классе допустимых функций теорема Биркгофа, согласно которой внешнее поле нестатического сферически-симметричного тела может быть только статическим. В релятивистской теории гравитации (РТГ) [2, 3] гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ является физическим полем, развивающимся в пространстве Минковского, а его источник — сохраняющийся в пространстве Минковского тензор энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле.

Такой подход приводит к эффективной метрике риманова пространства и к другой системе уравнений, которая отличается от системы уравнений ОТО,

*E-mail: Anatoly.Logunov@ihep.ru

а поэтому при изучении данного вопроса необходимо специальное рассмотрение. Полная система уравнений РТГ имеет вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\Big[g^{\mu\nu} + \Big(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Big)\gamma_{\alpha\beta}\Big] = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} + \gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\tilde{g}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2)$$

где тензор энергии-импульса вещества согласно Гильберту определен равенством

$$\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}},$$

m — масса гравитона; L_M — плотность лагранжиана вещества. Эффективная метрика риманова пространства определена следующим образом:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\phi^{\mu\nu}.$$

Система уравнений (1), (2) общековариантна относительно произвольных преобразований координат и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. Это означает, что *принцип относительности имеет всеобщее значение*. В РТГ, в противоположность ОТО, он точно выполняется для всех физических явлений, в том числе и гравитационных. Именно поэтому в теории имеют место фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения системы. Система координат в уравнениях (1), (2) задается метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Мы выбрали систему единиц, в которой $\hbar = c = G = 1$.

Для того чтобы времениподобные и изотропные интервалы в эффективном римановом пространстве не выходили за конус причинности пространства Минковского, должны выполняться условия

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \leqslant 0, \quad \gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0. \quad (3)$$

Эффективное риманово пространство в теории имеет простую топологию. В ОТО в общем случае топология не простая. Именно поэтому полевые представления о гравитации в принципе не могут привести к уравнениям ОТО.

Ниже мы установим, что внешнее гравитационное поле вида

$$ds^2 = U(t,r)dt^2 - V(t,r)dr^2 - W^2(t,r)[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2], \quad (4)$$

создаваемое *нестатическим* сферически-симметричным источником в инерциальной системе координат, может быть только *статическим*, т. е. метрические коэффициенты U, V, W не зависят от времени t.

Инерциальная система координат в пространстве Минковского задается интервалом
$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2]. \tag{5}$$

На основании уравнений (1) для задачи, определяемой (4) и (5), находим уравнения для функций U, V и W:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{W^2} - \frac{1}{2V}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{W^2}\frac{\partial W^2}{\partial r}\Big) - \frac{3}{4VW^4}\Big(\frac{\partial W^2}{\partial r}\Big)^2 - \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{2VW^2}\frac{\partial W^2}{\partial r}\Big) + \\
+ \frac{1}{2UW^2}\frac{\partial W^2}{\partial t}\frac{\partial \ln(VW)}{\partial t} + \frac{m^2}{2}\Big[1 - \frac{r^2}{W^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\Big)\Big] = 0, \\
\frac{1}{W^2} + \frac{1}{2U}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{W^2}\frac{\partial W^2}{\partial t}\Big) + \frac{3}{4UW^4}\Big(\frac{\partial W^2}{\partial t}\Big)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2UW^2}\frac{\partial W^2}{\partial t}\Big) - \\
- \frac{1}{2VW^2}\frac{\partial W^2}{\partial r}\frac{\partial \ln(UW)}{\partial r} + \frac{m^2}{2}\Big[1 - \frac{r^2}{W^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\Big)\Big] = 0, \\
\frac{1}{W^2}\frac{\partial^2 W^2}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2W^4}\frac{\partial W^2}{\partial r}\frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{2VW^2}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial W^2}{\partial r} - \frac{1}{2UW^2}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial W^2}{\partial t} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения (2) для выражений (4) и (5) принимают вид

$$W^2 = \sqrt{\frac{U}{V}}\, q\,(r), \quad \frac{\partial}{\partial r}\Bigg(W^2\sqrt{\frac{U}{V}}\Bigg) = 2r\sqrt{UV}, \tag{7}$$

где $q\,(r)$ — произвольная функция.

Для дальнейшего удобно пользоваться представлением

$$U(t,r) = \mathrm{e}^{\mu(t,r)},\ V(t,r) = \mathrm{e}^{\nu(t,r)},\ W^2(t,r) = \mathrm{e}^{\lambda(t,r)},\ \ q\,(r) = \mathrm{e}^{\sigma(r)}.$$

В переменных $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ уравнения (6) имеют вид

$$\begin{gathered}
\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\nu}\Big(\lambda'' + \frac{3}{4}(\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu'\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu}\dot\lambda\Big(\dot\nu + \frac{1}{2}\dot\lambda\Big) + \\
+ \frac{m^2}{2}\Big[1 - r^2\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mu} - \mathrm{e}^{-\nu})\Big] = 0,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{-\mu}\Big(\ddot\lambda + \frac{3}{4}(\dot\lambda)^2 - \frac{1}{2}\dot\lambda\dot\mu\Big) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\lambda'\Big(\mu' + \frac{1}{2}\lambda'\Big) + \\
+ \frac{m^2}{2}\Big[1 - r^2\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mu} - \mathrm{e}^{-\nu})\Big] = 0,
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\dot\lambda' + \frac{1}{2}\dot\lambda\lambda' - \frac{1}{2}\dot\nu\lambda' - \frac{1}{2}\dot\lambda\mu' = 0, \tag{10}$$

где, например, $\dot\lambda = \partial\lambda/\partial t$, $\lambda' = \partial\lambda/\partial r$.

Уравнения (7) принимают вид

$$\lambda - (1/2)(\mu - \nu) = \sigma(r), \tag{11}$$

$$\mu' - \nu' + \sigma' = 2r\,\mathrm{e}^{\nu-\lambda}. \tag{12}$$

Введем обозначения

$$2\omega = \mu + \nu, \tag{13}$$

$$f = \lambda - \sigma\,(r). \tag{14}$$

Согласно (11) имеем

$$\mu - \nu = 2f. \tag{15}$$

Из (13) и (15) находим

$$\mu = \omega + f, \quad \nu = \omega - f. \tag{16}$$

Уравнения (12) выразим через функции ω, f и σ:

$$2f' + \sigma' = 2r\,\mathrm{e}^{\omega-2f-\sigma}. \tag{17}$$

Дифференцируя (17) по t, находим

$$2\dot{f}' = (2f' + \sigma')(\dot{\omega} - 2\dot{f}).$$

Подставляя это выражение в уравнение (10) и учитывая (14), (16), получим неоднородное линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} f' - \frac{\partial \omega}{\partial r} \dot{f} = 3\dot{f} f'. \tag{18}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (18), имеет вид

$$\frac{dt}{f'} = \frac{dr}{-\dot{f}} = \frac{d\omega}{3\dot{f}f'}.$$

Отсюда находим

$$d\omega = 3\dot{f}dt, \quad d\omega = -3f'dr.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$d\omega = \frac{3}{2}\frac{\partial f}{\partial t}dt - \frac{3}{2}\frac{\partial f}{\partial r}dr.$$

Из условия полного дифференциала находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = 0,$$

но последнее означает, что функция f представима в форме

$$f(t,r) = \psi(t) + \varphi(r). \tag{19}$$

Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$\omega(t,r) = \frac{3}{2}\Big(\psi(t) - \varphi(r)\Big) + F(f), \tag{20}$$

где F — произвольная функция.

С учетом выражений (19) и (20) уравнение (17) принимает форму

$$2\varphi' + \sigma' = 2r\exp\Big[-\frac{1}{2}\psi(t) - \frac{7}{2}\varphi(r) + F(f)\Big]. \tag{21}$$

Левая часть этого уравнения не зависит от t, а поэтому правая часть также должна не зависеть от t. Это возможно, если $\psi(t)$ постоянна, но отсюда следует, что функции μ, ν, λ не зависят от времени. *В этом случае гравитационное поле вида* (4) *статическое*. Но возможен и второй случай, когда $F = f/2$. Тогда

$$\omega(t,r) = 2\psi(t) - \varphi(r),$$

а функции μ, ν, λ согласно (16) и (14) будут равны

$$\mu = 3\psi(t), \tag{22}$$

$$\nu(t,r) = \psi(t) - 2\varphi(r), \tag{23}$$

$$\lambda(t,r) = \psi(t) + \varphi(r) + \sigma(r) = f + \sigma. \tag{24}$$

Очевидно, в этом случае (21) принимает вид

$$2\varphi' + \sigma' = 2r\,\mathrm{e}^{-3\varphi(r)}.$$

Согласно (12), с учетом (19), (22) и (23), получаем

$$2\varphi' + \sigma' = 2r\,\mathrm{e}^{-3\varphi(r)-\sigma(r)}.$$

Сравнивая это уравнение с предыдущим, находим

$$\sigma(r) \equiv 0.$$

Для анализа данного случая нам необходимо обратиться к уравнениям (8) и (9). Разность этих уравнений равна

$$\mathrm{e}^{-\nu}\Big[-\lambda'' - \frac{1}{2}(\lambda')^2 + \frac{1}{2}\lambda'(\mu' + \nu')\Big] + \\ + \mathrm{e}^{-\mu}\Big[-\ddot{\lambda} - \frac{1}{2}(\dot{\lambda})^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} + \dot{\nu})\Big] + \frac{m^2}{2}\Big(\mathrm{e}^{-\mu} - \mathrm{e}^{-\nu}\Big) = 0, \tag{25}$$

а их сумма

$$2\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\nu}\Big[+\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\mu' - \nu')\Big] + \\ + \mathrm{e}^{-\mu}\Big[+\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} - \dot{\nu})\Big] + m^2(1 - r^2\,\mathrm{e}^{-\lambda}) = 0. \quad (26)$$

Согласно (11) имеем

$$(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) = 0,$$

поэтому уравнение (26) несколько упрощается:

$$2\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\nu}\Big[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\mu' - \nu')\Big] + \mathrm{e}^{-\mu}\ddot{\lambda} + m^2(1 - r^2\,\mathrm{e}^{-\lambda}) = 0. \quad (27)$$

Выразим уравнения (25) и (27) через функции ω, f:

$$-f'' - \frac{1}{2}(f')^2 + f'\omega' - \frac{m^2}{2} + \mathrm{e}^{-2f}\Big(-\ddot{f} - \frac{1}{2}(\dot{f})^2 + \dot{f}\dot{\omega} + \frac{m^2}{2}\Big) = 0, \quad (28)$$

$$2\Big(1 - \frac{m^2 r^2}{2}\Big)\mathrm{e}^{-(\lambda-\nu)} - f'' + \mathrm{e}^{-2f}(\ddot{f} + m^2\,\mathrm{e}^{\mu}) = 0. \quad (29)$$

Согласно (12) и (15) с учетом $\sigma(r) \equiv 0$ имеем

$$2r\,\mathrm{e}^{\nu-\lambda} = 2f', \quad (30)$$

поэтому после замены экспоненциального множителя уравнение (29) принимает вид

$$\frac{1}{r}\Big(1 - \frac{m^2 r^2}{2}\Big)2f' - f'' + \mathrm{e}^{-2f}(\ddot{f} + m^2\,\mathrm{e}^{\mu}) = 0. \quad (31)$$

Так как μ зависит только от t, а $f = \psi(t) + \varphi(r)$, то в уравнениях (28) и (31) переменные t и r разделяются:

$$-f'' - \frac{1}{2}(f')^2 + f'\omega' - \frac{m^2}{2} = k\,\mathrm{e}^{-2\varphi(r)}, \quad (32)$$

$$\ddot{f} + \frac{1}{2}(\dot{f})^2 - \dot{f}\dot{\omega} - \frac{m^2}{2} = k\,\mathrm{e}^{2\psi(t)}, \quad (33)$$

$$f'' - \frac{1}{r}\Big(1 - \frac{m^2 r^2}{2}\Big)2f' = p\,\mathrm{e}^{-2\varphi(r)}, \quad (34)$$

$$\ddot{f} + m^2\,\mathrm{e}^{\mu} = p\,\mathrm{e}^{2\psi(t)}, \quad (35)$$

здесь k и p — постоянные разделения.

Обратимся к уравнениям (33) и (35). Введем новую переменную

$$\psi(t) = \ln a^2(t). \quad (36)$$

Уравнения (33) и (35) принимают вид

$$2a\ddot{a} - 8\dot{a}^2 - \frac{m^2}{2}a^2 = ka^6, \tag{37}$$

$$2a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 + m^2a^8 = pa^6. \tag{38}$$

Отсюда находим

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}\big[m^2a^2 + 2m^2a^8 + 2(k-p)a^6\big]. \tag{39}$$

Дифференцируя, получаем

$$\ddot{a} = -\frac{1}{24}\big[2m^2a + 16m^2a^7 + 12(k-p)a^5\big]. \tag{40}$$

Подставляя (39) и (40) в уравнение (37), находим соотношение между постоянными разделения $p = -2k$. При этом равенстве имеем

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}(m^2a^2 + 2m^2a^8 + 6ka^6). \tag{41}$$

Перейдем теперь к анализу уравнений (32) и (34). С учетом (23) и (24) уравнение (30) принимает вид

$$\varphi' = r\,\mathrm{e}^{-3\,\varphi}. \tag{42}$$

Дифференцируя это выражение, находим

$$\varphi'' = \mathrm{e}^{-3\,\varphi} - 3r^2\,\mathrm{e}^{-6\,\varphi}. \tag{43}$$

Подставляя (42) и (43) в уравнения (32) и (34), получаем

$$\begin{aligned} -3r^2x^2 + 2kx^{2/3} &= -2x - m^2, \\ -3r^2x^2 + 2kx^{2/3} &= x\Big[2\Big(1 - \frac{m^2r^2}{2}\Big) - 1\Big]. \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь мы ввели обозначение $x = \mathrm{e}^{-3\varphi}$.

Из уравнений (44) находим

$$\mathrm{e}^{-3\varphi(r)} = \frac{m^2}{m^2r^2 - 3}, \tag{45}$$

но это решение противоречит уравнению (42). Отсюда следует, что исходная система уравнений (6), (7) не может иметь решение в виде (22)–(24).

Таким образом, мы приходим к общему выводу: для *нестатического* сферически-симметричного источника в инерциальной системе координат метрические коэффициенты интервала внешнего *гравитационного поля вида* (4) могут быть только *статическими*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ. 2005. Т. 145, № 3. С. 425–432.
2. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
3. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006.