

НЕЛИНЕЙНЫЕ СПИНОРНЫЕ ПОЛЯ
В АНИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ,
ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ:
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Б. Саха, В. Рихвицкий*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1173
УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И ИХ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ	1178
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ	1184
Система с вязкой жидкостью.	1184
Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью.	1189
Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью.	1194
КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ	1197
Система с вязкой жидкостью.	1199
Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью.	1203
Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью.	1205
Качественный анализ полной системы.	1223
ЭВОЛЮЦИЯ С ОБОСТРЕНИЕМ	1228
Обострение.	1229
Бесконечность.	1229
ВЫВОДЫ	1231
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1232

*E-mail: bijan@jinr.ru; URL: <http://www.jinr.ru/~bijan/>

НЕЛИНЕЙНЫЕ СПИНОРНЫЕ ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

*Б. Саха**, *В. Рихвицкий*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается самосогласованная система нелинейного спинорного поля и гравитационного поля типа Бианки-I (BI) в присутствии вязкой жидкости и космологической постоянной. Нелинейный член в лагранжиане спинорного поля возникает либо за счет самодействия, либо в результате взаимодействия со скалярным полем. Он задается в виде степенной функции инвариантов I и J , сконструированных из билинейных спинорных форм S и P . Что касается вязкости, то она зависит степенным образом от плотности энергии ε . Получены самосогласованные решения уравнения спинорного, скалярного и гравитационного полей. Эти решения выражены посредством функции $\tau(t)$, где τ является масштабной единицей объема во вселенной типа BI. Выведена система уравнений для τ , H и ε , где H является константой Хаббла, ε — энергия вязкого потока. Найдены точные решения при некоторых специальных выборах нелинейности и вязкости. Выполнен полный качественный анализ эволюции на границах, и получены численные решения для некоторых особо интересных случаев. В частности, показано, что система допускает решения типа Большой разрыв (big rip), что характерно для системы с фантомной материей.

A self-consistent system of nonlinear spinor and Bianchi type-I (BI) gravitational field in presence of a viscous fluid and cosmological constant has been considered. The nonlinear term in the spinor field Lagrangian appears either due to self-action or as a result of interaction with scalar field. It is given as a power law function of invariants I and J , constructed from the bilinear spinor forms S and P . As far as viscosity is concerned, it is given as a power law function of energy density ε . Self-consistent solutions to the spinor, scalar and gravitational fields are obtained and expressed in terms of τ , where τ is the volume scale of BI metric. The system of equation for τ , generalized Hubble parameter H and energy density of viscous fluid ε has been deduced. Exact solutions to this system have been obtained for some special choices of spinor field nonlinearity and viscosity. Comprehensive qualitative analysis of evolution on the boundaries has been performed and numerical solutions for some especially interesting cases have been obtained. In particular, it has been shown that the system allows Big Rip type solution which is distinctive for phantom matters.

PACS: 03.65.Pm; 04.20.Na

ВВЕДЕНИЕ

Еще в древности люди, наблюдая ночное небо, пытались понять природу Вселенной, моделировать ее эволюцию. Даже несколько столетий назад люди считали, что Земля плоская. Аристотель полагал, что Земля неподвижна,

*E-mail: bijan@jinr.ru; URL: <http://www.jinr.ru/~bijan/>

а Солнце, Луна, планеты и звезды вращаются вокруг нее по круговой орбите. В модели Птолемея Земля являлась центром Вселенной. Только в 1514 г. Коперник предложил иную модель, поместив в центр мира Солнце. Но прошло почти столетие, пока Галилей и Кеплер не поддержали эту модель, опираясь на наблюдательные данные. А объяснение того, почему планеты обращаются вокруг Солнца, появилось только в 1687 г. в «Математических началах натуральной философии» Исаака Ньютона. Модель Ньютона была еще далека от совершенства — пространство и время были вроде арены, где разыгрывается спектакль с участием Земли, Солнца и других небесных тел. Время и пространство в модели Ньютона были абсолютными — хотя понятие абсолютного пространства не согласовывалось с его теорией. После появления теории электромагнетизма Максвелла, в которой электромагнитные волны распространяются со скоростью света, была сделана попытка принять гипотезу эфира, чтобы согласовать теорию Максвелла с законами Ньютона. Попытки спасти теорию эфира не увенчались успехом. Только в 1905 г., когда Эйнштейн предложил свою специальную теорию относительности, всякая надобность в эфире отпала благодаря отказу от абсолютного времени. Фундаментальный постулат Эйнштейна, называемый принципом относительности, гласит, что все законы физики должны быть одинаковыми для всех свободно движущихся наблюдателей независимо от их скоростей. И это было верно как для законов движения Ньютона, так и для теории Максвелла. Специальная теория хорошо объясняла постоянства скоростей света для всех наблюдателей и описывала явления при движении со скоростями, близкими к скорости света, но все же оказалась несовместима с теорией тяготения Ньютона. Это вынудило Эйнштейна в 1917 г. предложить еще одну доктрину, которая называется общей теорией относительности. Но даже в это время вера в статическую Вселенную была очень сильна и Эйнштейн был настолько уверен в этом, что ввел в общую теорию относительности так называемую космологическую постоянную. Современная картина Вселенной начала проясняться только в 1924 г., после того как Эдвин Хаббл доказал существование многочисленных галактик вне пределов Млечного Пути. Самое же главное произошло немного позже, когда в 1929 г. Хаббл экспериментально показал, что Вселенная расширяется и навсегда похоронил идею статичности Вселенной. Долгое время оставалось незамеченным, что первое предсказание о расширяющейся Вселенной было сделано Фридманом в 1922 г. [34]. Большую известность эта модель получила только после появления работы Робертсона (Robertson) [59–61] и Уокера (Walker) [88] и стала известной как модель Фридмана–Робертсона–Уокера (Friedmann–Robertson–Walker (FRW) model). С более подробной историей развития космологии можно ознакомиться в знаменитых книгах Хокинга [38, 39].

До последнего времени космология оставалась преимущественно гипотетической по сравнению с такими физическими дисциплинами, как квантовая механика и квантовая теория поля, в основном из-за недостаточно достовер-

ной базы данных. Начиная с 1998 г. ситуация в корне изменилась. Суперсовременные телескопы позволили получить количественно и качественно новые данные о Вселенной на больших расстояниях. В результате появился небывалый интерес к космологии и все больше ученых стали так и иначе изучать эволюцию Вселенной с разных точек зрения. Обзор становления и современного состояния космологии дан в работах дубненских физиков-теоретиков [4, 55].

При исследовании характера космологических решений в релятивистской теории тяготения тензор энергии-импульса материи обычно берется в форме, соответствующей идеальной жидкости. В этом случае, как было показано в работах [5, 22], вблизи неизбежной космологической особенности влияние материи пренебрежимо мало, а поведение гравитационного поля определяется уравнениями Эйнштейна в пустом пространстве и описывается сложным, возможно, осциллирующим решением. При этом характер особой точки формально не зависит от того, рассматриваем ли мы ее как особенность в будущем или как особенность в прошлом.

Представляет интерес исследование степени универсальности этих заключений по отношению к обобщениям формы тензора энергии-импульса, учитывающим более реалистичное описание поведения материи. Одно из таких обобщений связано с учетом диссипативных процессов, идущих за счет вязкости. Мизнер (Misner) [51, 52] предположил, что сильная диссипативность из-за нейтронной вязкости может существенно уменьшать анизотропию излучения черного тела.

Из общих соображений ясно, что вязкость противодействует космологическому коллапсу и конечный результат заранее неочевиден. Однородная и изотропная космологическая модель Вселенной, заполненной жидкостью с давлением и второй вязкостью, была развита Мэрфи (Murphy) [53]. Полученные им решения обнаруживают одно очень интересное явление, которое заключается в том, что особенности типа Большого взрыва возникают в бесконечно удаленном прошлом, т. е. в определенном смысле действие вязкости устраняет особенность. Точные решения изотропной и однородной космологии для открытой, закрытой и плоской Вселенной были получены Сантос (Santos) с соавторами [85], где рассматриваемая вторая вязкость задавалась как степенная функция от плотности энергии.

Природа космологических решений для однородной модели типа Бианки-I (BI) была исследована в работе [6] с учетом диссипативных процессов, идущих за счет вязкости. В этой работе показано, что эффект, полученный Мэрфи, неустойчив и исчезает при переходе к более общим, а именно анизотропным моделям. Авторами [6] было показано, что действие вязкости не способно ликвидировать космологическую сингулярность, но вблизи нее приводит к качественно новому поведению решений. При наличии диссипации энергии процесс космологической эволюции становится необратимым во времени, что приводит к существенно различным картинам сжатия и расшире-

ния Вселенной. Вблизи начальной космологической особенности плотность энергии материи обращается в нуль, возрастая затем в процессе расширения. Таким образом, модель, предложенная Белинским и Халатниковым [6], обладает интересным свойством: в момент большого взрыва гравитационное поле рождает материю. Показано также, что действие вязкости может приводить к достаточному накоплению энтропии, что, возможно, имеет отношение к аномально высокой энтропии на одну частицу в современной Вселенной. Подобный вывод также был сделан в работах [89–91]. Вязкость первого рода, связанная с фазовым переходом в великой единой теории [50], может приводить к инфляционному сценарию [37, 54, 87]. Решения VI в случае жесткой материи с вязкостью первого рода были получены в работе [23], где в качестве вязкости была выбрана степенная функция от плотности энергии. Аналогичные модели, но с вязкостью второго рода были изучены в [42]. Влияние вязкости первого рода с зависящим от времени коэффициентом на эволюцию FRW-модели было исследовано в контексте открытой термодинамической системы в работе [29]. Это исследование было далее развито в работе [49] для анизотропных моделей Бианки. Космологические решения с нелинейной вязкостью первого рода получены в [25]. Модели с вязкостью первого и второго рода рассмотрены в [32, 35].

Хотя Мэрфи [53] и претендовал на то, что введение вязкости второго рода поможет избежать начальной сингулярности в конечно-удаленном прошлом, результаты, полученные в работе [21], показывают, что в общем это не так, так как только в некоторых случаях сингулярность может возникать в конечном прошлом. Используя теорию необратимой термодинамики Израэля–Стюарта (Israel–Stewart) [43–45], Колей (Coley) и др. [26–28] описали давление вязкой жидкости второго рода и анизотропное напряжение в рамках одного класса пространственно-однородных космологических моделей с вязкой жидкостью. В частности, для случая моделей VI они показали, что анизотропное напряжение приводит к моделям, нарушающим слабые энергетические условия, и в некоторых случаях к возникновению периодических орбит. Инфляционные космологические модели VI с вязкой жидкостью первого и второго рода, а также с нелинейной вязкостью были исследованы Гроном (Grøn) [36]. Мы также хотим упомянуть работы Прадхана (Pradhan) и др. [56, 57], где авторы рассматривали космологические модели VI с вязкой жидкостью и переменным Λ -членом и, соответственно, поведение магнитного поля в космологии VI с распределением вязкости второго рода.

Вселенная типа Бианки-I, будучи непосредственным обобщением плоской вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW), является одной из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно-плоскую Вселенную. В отличие от вселенной FRW, у которой масштабные факторы во всех трех направлениях одинаковы, у VI все эти факторы разные, тем самым она вводит анизотропию в систему. Более того, вблизи сингулярности она ведет себя похоже на вселенную Казнера,

даже в присутствии материи, и тем самым попадает в рамки общего анализа сингулярностей, проведенного Белинским и соавторами. Еще во Вселенной, заполненной жидкостью, удовлетворяющей уравнению состояния $p = \zeta \varepsilon$, $\zeta < 1$, было показано, что изначальная анизотропия в VI-вселенной быстро исчезает и она превращается в FRW-вселенную [46]. Поскольку современная Вселенная удивительно изотропна, это свойство делает VI-вселенную самым подходящим кандидатом для изучения возможных эффектов начальной анизотропии в сегодняшних наблюдениях. В свете вышесказанного разные авторы изучали VI-вселенную с разных точек зрения.

В наших работах мы изучали самосогласованную систему нелинейных спинорных и/или скалярных и космологических (типа VI) гравитационных полей, чтобы выяснить, является ли присутствие сингулярности внутренне присущим свойством релятивистских космологических моделей или это следствие тех предположений, которые сделаны для упрощения [1, 2, 14–16, 20, 62]. Эти работы были далее обобщены в цикле [63–65]. Как оказалось, хотя введение нелинейных спинорных полей в систему порождает регулярные решения, регулярность получается за счет нарушения условия энергодоминантности в теореме Хоукинга–Пенроуза. В следующем цикле работ мы ввели в систему космологическую постоянную, которая, как оказалось, в зависимости от своего знака способна порождать осциллирующий режим расширения Вселенной [66–70]. Нами была рассмотрена также космологическая модель BVI [69, 71]. В связи с тем, что в последние годы широко обсуждаются модели с ускоренным расширением, мы рассмотрели модели VI с темной энергией [72–74]. В работах [75–77] мы показали, что спинорное поле может быть принято как один из источников, порождающих ускоренное расширение Вселенной. Подобное мнение также было высказано в работе [58].

В работе [78] нами была рассмотрена модель VI с вязкой жидкостью в присутствии космологической постоянной, получены точные решения в некоторых специальных случаях. Эта работа далее подробно изучена качественными методами в [79]. Модели со спинорным и/или скалярным полем в присутствии вязкой жидкости были рассмотрены в работах [80, 81, 83]. Цель этих работ — подробно проанализировать самосогласованную систему нелинейных спинорных и/или скалярных полей в пространстве типа Бианки-I, заполненном вязкой жидкостью, с учетом космологической постоянной и проанализировать ее качественными методами.

В связи с тем, что вязкая жидкость играет важную роль в эволюции Вселенной на разных ее этапах, в настоящем обзоре поэтапно изучается ее влияние как отдельно, так и вместе с другими полями. Поскольку в последние годы широко обсуждается проблема ускоренного расширения, нами включено в рассмотрение влияние Λ -члена.

Помимо этого также учтено присутствие спинорного и/или скалярного полей, которое обогащает систему как физически, так и математически. При этом полученные уравнения решены точно в некоторых конкретных случаях,

а ввиду сложности получения такого решения в общем случае предпринят качественный анализ. Такой подход дает возможность построить классификацию всех возможных решений в зависимости от заданных значений параметров. Это, с одной стороны, позволяет получить ответ на вопрос, какие значения параметров приводят к решению, соответствующему сегодняшнему состоянию Вселенной, с другой стороны, дает представление, как она изменилась бы при других значениях параметров.

1. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И ИХ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Поскольку общий вид, равно как и общее решение, уравнения Эйнштейна не терпят качественного изменения вне зависимости от того, задает ли правая часть только вязкую жидкость или еще и спинорное поле (в том смысле, что общее решение формально имеет один и тот же вид, хотя при детальном анализе они, как правило, совершенно разные), мы начнем именно с уравнения гравитационного поля.

Действие системы нелинейных спинорного, скалярного и типа Бианки-I гравитационного полей выберем в виде

$$S(g; \psi, \bar{\psi}, \varphi) = \int L \sqrt{-g} d\Omega, \quad (1.1)$$

где

$$L = L_g + L_f. \quad (1.2)$$

Здесь L_f описывает спинорное поле с самодействием или с индуцированной нелинейностью. Подробно про них речь пойдет в последующих разделах. L_g — гравитационное поле.

Рассматривается случай, когда спинорное и скалярное поля, так же как и метрические функции, зависят только от времени. В этом предположении пространственные компоненты тензора энергии-импульса равны между собой, т. е. $T_{f1}^1 = T_{f2}^2 = T_{f3}^3$.

В нашем случае гравитационное поле задается метрикой типа Бианки-I [10]

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2. \quad (1.3)$$

Метрические функции a , b и c зависят только от времени t . Неравенство $a \neq b \neq c$ представляет анизотропию пространства-времени, тогда как их независимость от пространственных координат делает пространство-время однородным. При $a = b = c$ метрика BI превращается в однородную и изотропную вселенную Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW).

Начнем с уравнения Эйнштейна. Для метрики (1.3) имеем

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = \kappa T_1^1 + \Lambda, \quad (1.4a)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = \kappa T_2^2 + \Lambda, \quad (1.4б)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \kappa T_3^3 + \Lambda, \quad (1.4в)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = \kappa T_0^0 + \Lambda. \quad (1.4г)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , а T_ν^μ — тензор энергии-импульса материальных полей. Заметим, что $T_\mu^\nu = T_{\mu'}^{\nu'} + T_{\mu(m)}^\nu$, где $T_{\mu'}^{\nu'}$ и $T_{\mu(m)}^\nu$ — это тензоры энергии-импульса спинорного и (или) скалярного поля и вязкой жидкости соответственно. В (1.4) Λ суть космологическая постоянная, которая впервые была введена Эйнштейном, чтобы обеспечить устойчивое космологическое решение уравнений гравитационного поля [30, 31]. В последние годы модели Вселенной с космологической постоянной широко встречаются в литературе в связи с ускоренным расширением.

Для начала мы напишем тензор энергии-импульса вязкой жидкости.

Влияние вязкой жидкости в эволюции Вселенной осуществляется посредством тензора энергии-импульса. Тензор энергии-импульса вязкой жидкости имеет вид [78]

$$T_{\mu(m)}^\nu = (\varepsilon + p')u_\mu u^\nu - p'\delta_\mu^\nu + \eta g^{\nu\beta}[u_{\mu;\beta} + u_{\beta;\mu} - u_\mu u^\alpha u_{\beta;\alpha} - u_\beta u^\alpha u_{\mu;\alpha}], \quad (1.5)$$

где

$$p' = p - \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right)u_{;\mu}^\mu. \quad (1.6)$$

Здесь ε — плотность энергии; p — давление; η и ξ — коэффициенты первой и второй вязкости соответственно. Заметим, что вязкость первого (объемная вязкость — bulk) и второго (сдвиговая вязкость — shear) рода, η и ξ соответственно, положительно определены, т. е.

$$\eta > 0, \quad \xi > 0. \quad (1.7)$$

В однородных моделях все эти величины зависят только от времени, поэтому можно считать их функциями только от плотности энергии:

$$\eta = |A|\varepsilon^\alpha, \quad \xi = |B|\varepsilon^\beta. \quad (1.8)$$

Давление p связано с плотностью энергии посредством уравнения состояния. Мы рассматриваем случай

$$p = \zeta\varepsilon, \quad \zeta \in (0, 1]. \quad (1.9)$$

Заметим, что $\zeta \neq 0$, так как для пыли давление, а следовательно, и температура имеют нулевое значение, что приводит к исчезновению вязкости.

В сопутствующей системе координат, т. е. такой, что $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, в пространстве с заданной метрикой типа VI (1.3) имеются следующие нетривиальные компоненты тензора энергии-импульса вязкой жидкости:

$$T_{0(m)}^0 = \varepsilon, \quad (1.10a)$$

$$T_{1(m)}^1 = -p' + 2\eta \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.10б)$$

$$T_{2(m)}^2 = -p' + 2\eta \frac{\dot{b}}{b}, \quad (1.10в)$$

$$T_{3(m)}^3 = -p' + 2\eta \frac{\dot{c}}{c}. \quad (1.10г)$$

Введем динамические скаляры для расширения (expansion) и сдвига (shear scalar):

$$\theta = u^\mu_{;\mu}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (u_{\mu;\alpha} P_\nu^\alpha + u_{\nu;\alpha} P_\mu^\alpha) - \frac{1}{3} \theta P_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Здесь P — оператор проекции, удовлетворяющий

$$P^2 = P. \quad (1.13)$$

Для пространства-времени с сигнатурой $(+, -, -, -)$ оператор проекции записывается в виде

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu, \quad P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu. \quad (1.14)$$

В случае метрики VI динамические скаляры имеют форму

$$\theta = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\tau}}{\tau} \quad (1.15)$$

и

$$2\sigma^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2} - \frac{1}{3} \theta^2. \quad (1.16)$$

Вернемся теперь к уравнениям Эйнштейна. С учетом (1.10) получим следующие выражения для компонентов энергии-импульса полной системы:

$$T_0^0 = T_0^{0'} + \varepsilon, \quad (1.17a)$$

$$T_1^1 = T_1^{1'} - p' + 2\eta \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.17б)$$

$$T_2^2 = T_2^{2'} - p' + 2\eta \frac{\dot{b}}{b}, \quad (1.17\text{в})$$

$$T_3^3 = T_3^{3'} - p' + 2\eta \frac{\dot{c}}{c}, \quad (1.17\text{г})$$

где $T_0^{0'}$, $T_1^{1'}$, $T_2^{2'}$, $T_3^{3'}$ — компоненты тензора энергии-импульса спинорного и/или скалярного полей, причем

$$T_1^{1'} = T_2^{2'} = T_3^{3'}.$$

Как видно, при введении вязкой жидкости компоненты давления в разных направлениях становятся различными. Именно это обстоятельство приводит к существенному изменению метрических функций.

Приступим теперь к решению системы уравнений (1.4). Решим ее методом, предложенным Б. Сахой в кандидатской диссертации [18] и развитым им же в последующих работах (например, [67, 70]). Метод этот заключается в том, что ввиду симметрии уравнений (1.4а), (1.4б) и (1.4в) выражения метрических функций a , b , c находятся через новую функцию

$$\tau = abc, \quad (1.18)$$

которая не что иное как масштаб объема пространства-времени. Далее, используя все четыре уравнения системы (1.4), а именно сложив (1.4а), (1.4б) и (1.4в) с (1.4г), умноженным на 3, находим уравнение для определения τ . Заметим, что компоненты тензора энергии-импульса, связанные со спинорным и скалярным полями, также являются функциями от τ , которые выводятся из уравнений спинорного и скалярного полей.

При наличии жидкости или темной энергии из тождества Бианки выводится уравнение для плотности энергии. Далее, принимая во внимание уравнения состояния, эти два уравнения решаем совместно.

Итак, вначале из уравнения Эйнштейна находим выражения для метрических функций. С учетом (1.17) из разности уравнений (1.4а) и (1.4б) находим соотношение между a и b

$$\frac{a}{b} = D_1 \exp\left(X_1 \int \frac{e^{-2\kappa} \int \eta dt}{\tau} dt\right). \quad (1.19)$$

Аналогично получим

$$\frac{b}{c} = D_2 \exp\left(X_2 \int \frac{e^{-2\kappa} \int \eta dt}{\tau} dt\right), \quad \frac{c}{a} = D_3 \exp\left(X_3 \int \frac{e^{-2\kappa} \int \eta dt}{\tau} dt\right). \quad (1.20)$$

Здесь D_1 , D_2 , D_3 , X_1 , X_2 , X_3 — постоянные интегрирования, удовлетворяющие

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0. \quad (1.21)$$

Ввиду (1.21) из (1.19) и (1.20) выведем выражения для метрических функций в явном виде [67]

$$a(t) = (D_1/D_3)^{1/3} \tau^{1/3} \exp \left[\frac{X_1 - X_3}{3} \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right], \quad (1.22a)$$

$$b(t) = (D_1^2 D_3)^{-1/3} \tau^{1/3} \exp \left[-\frac{2X_1 + X_3}{3} \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right], \quad (1.22б)$$

$$c(t) = (D_1 D_3^2)^{1/3} \tau^{1/3} \exp \left[\frac{X_1 + 2X_3}{3} \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right]. \quad (1.22в)$$

Как видно из (1.22a), (1.22б) и (1.22в), для $\tau = t^n$ при $n > 1$ экспонента стремится к единице при больших t , а следовательно, происходит процесс изотропизации изначально анизотропной модели.

Для того чтобы исследовать сингулярность пространства-времени, перепишем метрические функции и их производные в терминах τ . Из (1.22) находим

$$a_i = A_i \tau^{1/3} \exp \left(\left(\frac{Y_i}{3} \right) \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right), \quad (1.23a)$$

$$\frac{\dot{a}_i}{a_i} = \frac{Y_i + 1}{3} \frac{1}{\tau} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.23б)$$

$$\frac{\ddot{a}_i}{a_i} = \frac{(Y_i + 1)(Y_i - 2)}{9} \frac{1}{\tau^2}, \quad (1.23в)$$

т. е. метрические функции a, b, c и их производные находятся в функциональной зависимости от τ . Ввиду (1.23) легко можно показать, что

$$I_1 \propto \frac{1}{\tau^2}, \quad I_2 \propto \frac{1}{\tau^4}, \quad I_3 \propto \frac{1}{\tau^4}.$$

Таким образом, мы видим, что в любой точке пространства-времени, где $\tau = 0$, инварианты I_1, I_2, I_3 , а также спинорное и скалярное поля становятся бесконечными, т. е. в данной точке пространство-время становится сингулярным.

Далее мы напомним уравнение для τ и подробно изучим его.

Итак, сумма уравнений Эйнштейна (1.4a), (1.4б), (1.4в) и трижды (1.4г) дает

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2} \kappa (T_0^{0'} + T_1^{1'} + \varepsilon - p') \tau + 3\kappa \eta \dot{\tau} + 3\Lambda \tau, \quad (1.24)$$

которое может быть переписано в виде

$$\ddot{\tau} - \frac{3}{2} \kappa \xi \dot{\tau} = \frac{3}{2} \kappa (T_0^{0'} + T_1^{1'} + \varepsilon - p) \tau + 3\Lambda \tau. \quad (1.25)$$

Заметим, что если правая часть уравнения (1.25) зависит только от τ , то оно имеет решение [48].

С другой стороны, из тождества Бианки

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = T_{\mu,\nu}^{\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^{\nu} T_{\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} T_{\rho}^{\nu} = 0, \quad (1.26)$$

которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{\tau}(\tau T_0^0)' - \frac{\dot{a}}{a} T_1^1 - \frac{\dot{b}}{b} T_2^2 - \frac{\dot{c}}{c} T_3^3 = 0, \quad (1.27)$$

имеем

$$\dot{T}_0^0 = \frac{\dot{\tau}}{\tau} (T_1^{1'} - T_0^{0'} - \varepsilon - p') + 2\eta \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{c}^2}{c^2} \right). \quad (1.28)$$

С учетом уравнения спинорного поля

$$(m - D)\dot{S}_0 - G\dot{P}_0 = 0$$

из (1.27) находим

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \omega - \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\dot{\tau}^2}{\tau^2} + 4\eta (\kappa T_0^0 + \Lambda) = 0, \quad (1.29)$$

где

$$\omega = \varepsilon + p. \quad (1.30)$$

Как нетрудно убедиться, при $\eta = 0$ из (1.24) и (1.28) получим

$$\kappa T_0^0 = 3H^2 - \Lambda, \quad (1.31)$$

где H — обобщенная постоянная Хаббла,

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 3H. \quad (1.32)$$

Наконец, уравнения (1.25) и (1.29) с учетом (1.17) можно переписать в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (1.33a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) + \frac{\kappa}{2}(T_0^{0'} + T_1^{1'}), \quad (1.33б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) - 4\eta\kappa T_0^{0'}. \quad (1.33в)$$

Как было упомянуто, мы будем рассматривать F как функции от I , J или $I \pm J$.

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы подробно изучим систему (1.33) при различных условиях. Для начала мы рассмотрим систему без спинорного и скалярного полей, затем — систему с нелинейным спинорным полем и с взаимодействующими спинорным и скалярным полями.

2.1. Система с вязкой жидкостью. В этом случае ввиду $T_0^{0'} = 0$ и $T_1^{1'} = 0$ система (1.33) имеет вид [78]

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.1a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda), \quad (2.1б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda). \quad (2.1в)$$

С учетом (1.30), (1.8) и (1.9) система уравнений (2.1) может быть записана в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.2a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda), \quad (2.2б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda). \quad (2.2в)$$

Система (2.1) широко изучалась в литературе как в частном [23, 42, 53], так и в общем [6] случае. Впоследствии мы рассмотрим систему (2.1) при некоторых специально выбранных параметрах.

2.1.1. Система с вязкой жидкостью первого рода. Рассмотрим систему, когда реальная жидкость имеет вязкость первого рода. Соответствующую систему можно получить, полагая $\eta = 0$ в (2.1) или $A = 0$ в (2.2). В этом случае уравнения (2.1a) и (2.1б) остаются неизменными, тогда как уравнение (2.1в) имеет вид

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega). \quad (2.3)$$

Ввиду (2.3) система (2.1) допускает следующий первый интеграл:

$$\tau^2(\kappa\varepsilon - 3H^2 + \Lambda) = C_1, \quad C_1 = \text{const}. \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.4) мы можем заключить следующее. В начальной стадии эволюции Вселенной τ и ее плотность энергии ε считаются близкими к нулю и бесконечности соответственно. В этом смысле (2.4) не противоречит реальной картине. Было бы интересно посмотреть, как соотношение (2.4) повлияет на дальнейшую эволюцию Вселенной. Известно также, что с расширением Вселенной, т. е. с ростом τ , плотность энергии ε уменьшается. Допустим, что на некоторых стадиях расширения величина τ становится настолько большой, что $\tau^{-2} \rightarrow 0$ и ε становится пренебрежимо малой. Тогда из (2.4) следует, что

$$3H^2 - \Lambda \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

В случае $\Lambda = 0$ получим $H = 0$, т.е. в отсутствие Λ -члена, как только $\tau \rightarrow \infty$, процесс расширения останавливается, величина τ уже не зависит от времени t . Как видно из (2.5), для того чтобы H имела смысл, Λ должен быть положительным. В присутствии положительного Λ -члена процесс эволюции (расширения) никогда не останавливается. Таким образом мы видим, что Вселенная может быть бесконечно большой только тогда, когда $\Lambda \geq 0$. Более того, при $\Lambda > 0$ имеется вечно расширяющаяся Вселенная. Заметим, что в нашем случае положительная Λ соответствует универсальной силе отталкивания, что в настоящее время рассматривается как темная энергия. В этом отношении (2.4) находится в хорошем согласии с моделями ускоренного расширения. Надо заметить, что отношение (2.4) налагает некоторое ограничение на τ и на ε в случае отрицательного Λ , соответствующего дополнительной гравитационной силе. Выражение (2.5) вместе с (2.4) показывает, что в случае $\Lambda > 0$ размер Вселенной τ не может быть бесконечно большим (или ε не может быть пренебрежимо мала), т.е. τ также ограничена сверху. Это соответствует осциллирующей эволюции Вселенной [67, 69].

Рассмотрим случай, когда вязкость первого рода обратно пропорциональна расширению, т.е.

$$\xi\theta = C_2, \quad C_2 = \text{const.} \quad (2.6)$$

Учитывая, что $\theta = \dot{\tau}/\tau = 3H$, а также соотношения (2.1a), (1.30) и (1.9), уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{C_2 - (1 + \zeta)\varepsilon} = \frac{\dot{\tau}}{\tau}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) находим

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \zeta} [C_2 + C_3\tau^{-(1+\zeta)}], \quad (2.8)$$

где C_3 — некоторая произвольная постоянная. Далее, подставляя ε из (2.8) в (1.25), находим явное выражение для τ .

С учетом уравнения состояния (1.9) и ввиду (2.6) и (2.8) уравнения (1.25) допускают следующее решение в квадратурах:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{C_2^2 + C_0^0\tau^2 + C_1^1\tau^{1-\zeta}}} = t + t_0, \quad (2.9)$$

где C_2^2 и t_0 — некоторые постоянные. Далее будем полагать, что $t_0 = 0$. Здесь $C_0^0 = 3\kappa C_2/(1 + \zeta) - 3\Lambda$ и $C_1^1 = 3\kappa C_3/(1 + \zeta)$. Как видно, C_0^0 отрицательно при

$$\Lambda > \kappa C_2/(1 + \zeta). \quad (2.10)$$

Это значит, что для положительного Λ удовлетворяющая (2.10) (предположим, что C_2 положительна) величина τ должна быть ограничена сверху. Перепишем уравнение (2.9) в форме

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[E - U(\tau)]}, \quad (2.11)$$

где $E = C_2^2/2$ может быть рассмотрена как энергия и $U(\tau) = -0,5(C_0^0\tau^2 + C_1^1\tau^{1-\zeta})$ — как потенциал (рис. 1), соответствующий уравнению (1.25). В зависимости от значения E существуют два типа решений: при $E > 0$ имеются неперiodические решения, т. е. после достижения некоторого максимального значения (например τ_{\max}) Вселенная начинает сжиматься и в конце концов превращается в точку, таким образом порождая пространственно-временную сингулярность; при $E < 0$ модель VI допускает осциллирующие решения без сингулярностей (рис. 2). Подробное описание потенциала можно найти в [69]. Таким образом, в случае вязкости первого рода положительный член Λ описывает модель, ограниченную сверху.

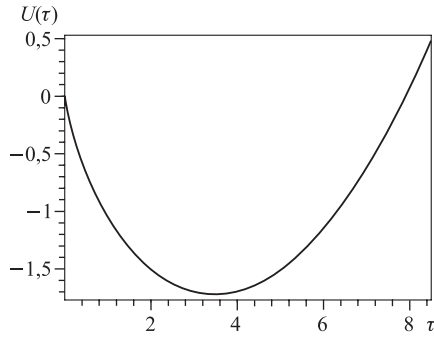


Рис. 1. Вид потенциала $U(\tau)$. Здесь $\kappa = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $\zeta = 0,33$ и $\Lambda = 0,8$

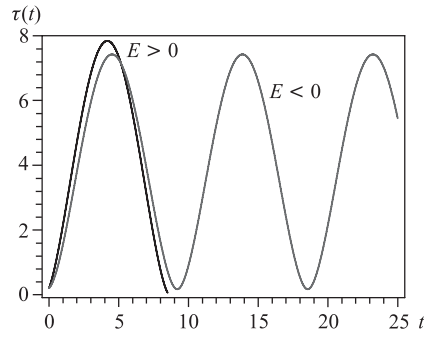


Рис. 2. Эволюция вселенной VI, соответствующей потенциалу рис. 1. В качестве начального значения выбрано $\tau_0 = 0,2$

В качестве второго примера рассмотрим случай с $\zeta = 1$. Из (2.9) находим

$$\tau(t) = \left(\exp\left(\sqrt{C_0^0} t\right) - C_2^2 \exp\left(-\sqrt{C_0^0} t\right) \right) / \left(2\sqrt{C_0^0} \right), \quad C_0^0 > 0, \quad (2.12a)$$

$$\tau(t) = \left(C_2^2 / \sqrt{|C_0^0|} \right) \sin\left(\sqrt{|C_0^0|} t\right), \quad C_0^0 < 0. \quad (2.12b)$$

С учетом того, что $C_0^0 > 0$ для любой неположительной Λ , из (2.12a) следует, что в случае $\Lambda \leq 0$ Вселенная может быть бесконечно большой (не существует ограничения сверху), что совпадает с нашим прежним рассуждением.

С другой стороны, C_0^0 может быть отрицательно только при некоторых положительных значениях Λ . В работах [67, 69] было показано, что в случае идеальной жидкости положительный Λ -член всегда порождает осцилляции, тогда как в присутствии вязкой жидкости это случается только когда Λ удовлетворяет (2.10). В отличие от случая с излучением, когда VI допускает два типа решения, в случае жесткой материи имеется решение только одного вида, а именно неперриодическое, что соответствует $E > 0$ в случае с излучением, так как в этом случае потенциал $U(\tau) = -0,5C_0^0\tau^2$ имеет максимум при $\tau = 0$.

2.1.2. Система с вязкой жидкостью первого и второго рода. Рассмотрим общий случай с вязкостью второго рода η , пропорциональной расширению, т. е.

$$\eta \propto \theta = 3H. \tag{2.13}$$

Пусть

$$\eta = -\frac{3}{2\kappa}H. \tag{2.14}$$

В этом случае из (2.16) и (2.1в) находим

$$3H^2 = \kappa\varepsilon + C_4, \quad C_4 = \text{const}. \tag{2.15}$$

Из (2.15) следует, что в начальной стадии расширения, когда ε большая, постоянная Хаббла тоже большая и с расширением Вселенной H уменьшается, как и ε . Поскольку H^2 и ε обе неотрицательны, мы заключаем, что постоянная C_4 тоже неотрицательна. Подставляя (2.15) в (2.16), находим

$$\int \frac{dH}{AH^2 + BH + C} = t, \tag{2.16}$$

где $A = -1,5(1+\zeta)$, $B = 1,5\kappa\xi$ и $C = 0,5C_4(\zeta-1) - \Lambda$. Если вязкость второго рода постоянна, т. е. $\xi = \text{const}$, то в зависимости от значения дискриминанта $B^2 - 4AC$ существуют три типа решения, а именно [13]:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \left| \frac{2AH + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2AH + B - \sqrt{B^2 - 4AC}} \right|, & B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \text{arctg} \frac{2AH + B}{\sqrt{4AC - B^2}}, & B^2 < 4AC, \\ -\frac{2}{2AH + B}, & B^2 = 4AC. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ввиду того, что $A < 0$ и $C_4(\zeta - 1) \leq 0$, знак C зависит от знака и значения Λ . В этом случае система допускает неперриодическое или экспоненциальное расширение τ как для положительной, так и для отрицательной Λ . Как видно на рис.3, вне зависимости от знака Λ модель допускает

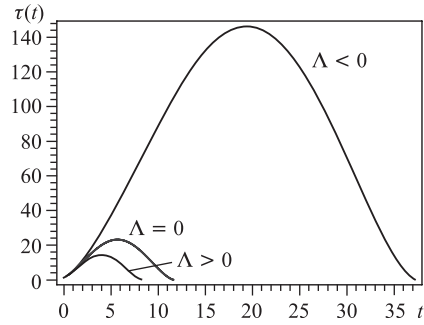


Рис. 3. Вид $\tau(t)$ при $C_4 = 0,1$, $\zeta = 0,33$, $\kappa = 0,1$ и $\xi = 0,1$ с $\Lambda = -0,03$, $\Lambda = 0$ и $\Lambda = 0,03$ соответственно

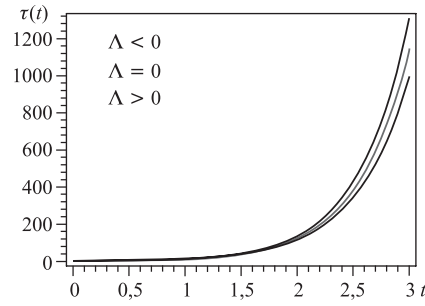


Рис. 4. Эволюция вселенной ВІ с параметрами $C_4 = 0,1$, $\zeta = 0,33$, $\kappa = 1$ и $\xi = 1$ с $\Lambda = -0,03$, $\Lambda = 0$ и $\Lambda = 0,03$

решения, которые сначала расширяются, достигают максимума и после этого начинают сжиматься, порождая пространственно-временную сингулярность. С другой стороны, с теми же Λ , но с другими κ и ξ расширение вселенной ВІ принимает экспоненциальный вид (рис. 4).

Заметим, что случай идеальной жидкости с положительной Λ допускает либо осциллирующие, либо неперiodические решения, тогда как при отрицательной Λ расширение всегда экспоненциальное. Введение вязкости порождает и неперiodическое, и экспоненциальное решение независимо от знака Λ -члена. В самом деле, значения κ и ξ играют решающую роль в формировании того или иного типа решения.

Проиллюстрируем фазовыми диаграммами соответствующие решения, ограниченные сверху (рис. 5 и 6). Надо заметить, что в зависимости от параметров решения могут быть также и синусоидальными. Слегка деформированная форма фазовых диаграмм показывает несинусоидальный характер решений при данном наборе параметров.

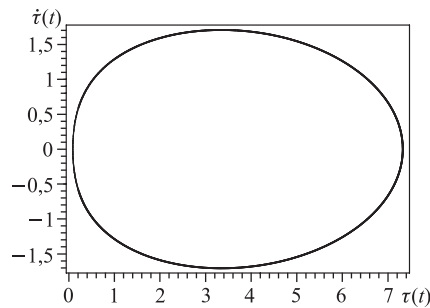


Рис. 5. Фазовая диаграмма решения, иллюстрированного рис. 2

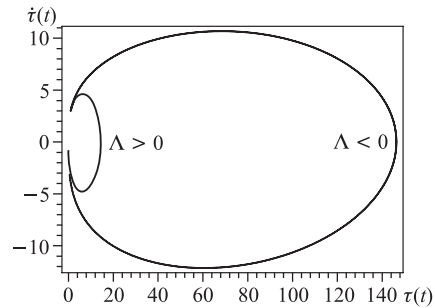


Рис. 6. Фазовая диаграмма решения, представленного на рис. 3

2.2. Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью. В этом случае лагранжиан нелинейного спинорного поля задается в виде [80,81]

$$L_f = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + F, \quad (2.18)$$

где F — некоторая произвольная функция от инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм. Всего имеется пять таких инвариантов. Используя тождество Фирца (Fierz) [7, 33, 47, 86], можно показать, что из пяти инвариантов только I и J являются независимыми, поскольку все остальные могут быть выражены через них: $I_\nu = -I_A = I + J$ и $I_T = I - J$. В свете вышеупомянутой теоремы мы выберем нелинейный член F в виде функции от I и J , т. е. $F = F(I, J)$. Мы считаем, что этот выбор описывает нелинейность спинорного поля в самом общем виде.

Из (2.18) находим уравнения спинорного поля

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi + D\psi + Gi\gamma^5\psi = 0, \quad (2.19a)$$

$$i\nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} - D\bar{\psi} - Gi\bar{\psi} \gamma^5 = 0, \quad (2.19б)$$

где

$$D = 2\lambda S \frac{\partial F}{\partial I}, \quad G = 2\lambda P \frac{\partial F}{\partial J}.$$

В уравнениях (2.19) ∇_μ — это ковариантная производная, действующая на спинорное поле следующим образом [9, 24]:

$$\nabla_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu \psi, \quad \nabla_\mu \bar{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} + \bar{\psi} \Gamma_\mu, \quad (2.20)$$

где Γ_μ — так называемый коэффициент спинорной связности Фока–Иваненко

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^\sigma (\Gamma_{\mu\sigma}^\nu \gamma_\nu - \partial_\mu \gamma_\sigma). \quad (2.21)$$

Для метрики VI имеются следующие нетривиальные компоненты:

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{2} \dot{a}(t) \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \dot{b}(t) \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \dot{c}(t) \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (2.22)$$

Предполагая, что спинорное поле зависит только от t , уравнения для его компонентов можно записать в виде

$$\dot{V}_1 + i(m - D)V_1 - GV_3 = 0, \quad (2.23a)$$

$$\dot{V}_2 + i(m - D)V_2 - GV_4 = 0, \quad (2.23б)$$

$$\dot{V}_3 - i(m - D)V_3 + GV_1 = 0, \quad (2.23в)$$

$$\dot{V}_4 - i(m - D)V_4 + GV_2 = 0, \quad (2.23г)$$

где $V_j(t) = \sqrt{\tau} \psi_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Далее мы напишем решения уравнения (2.23) через τ для следующих выборов нелинейности.

Случай $F = F(I)$. Рассмотрим случай, когда нелинейность спинорного поля выбирается как $F = F(I)$. В этом случае находим

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad C_0 = \text{const.} \quad (2.24)$$

Компоненты спинорного поля выглядят как [67]

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{C_1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, & \psi_2(t) &= \frac{C_2}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, \\ \psi_3(t) &= \frac{C_3}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, & \psi_4(t) &= \frac{C_4}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где C_i — постоянные интегрирования, связанные с C_0 соотношением $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. Здесь $\beta = \int (m - D) dt$.

Компоненты спинорного тока имеют вид

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{1}{\tau} [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2], & j^1 &= \frac{2}{a\tau} [C_1 C_4 + C_2 C_3] \cos(2\beta), \\ j^2 &= \frac{2}{b\tau} [C_1 C_4 - C_2 C_3] \sin(2\beta), & j^3 &= \frac{2}{c\tau} [C_1 C_3 - C_2 C_4] \cos(2\beta), \end{aligned}$$

а проекции вектора спина вдоль X , Y и Z выглядят как

$$S^{23,0} = \frac{C_1 C_2 + C_3 C_4}{bc\tau}, \quad S^{31,0} = 0, \quad S^{12,0} = \frac{C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 - C_4^2}{2ab\tau}.$$

Полный заряд системы, заключенный в объеме V ,

$$Q = [C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2]V. \quad (2.26)$$

Таким образом, для $\tau \neq 0$ компоненты спинорного тока и проекции вектора спина не имеют сингулярностей, а полный заряд системы в ограниченном объеме всегда ограничен. Заметим, что в предыдущем выражении, подставляя $\lambda = 0$, т. е. $\beta = mt$, получим результат для линейного спинорного поля.

Случай $F = F(J)$. Рассмотрим случай с $F = F(J)$. Заметим, что в единой нелинейной спинорной теории Гейзенберга член с массой отсутствует, поскольку, согласно Гейзенбергу, массы частиц должны получаться в результате квантования праматерии [11, 12, 40, 41]. При нелинейных обобщениях уравнений классической теории поля массовый член не имеет того смысла, который он имеет в линейных полевых уравнениях, поскольку никак не определяет полную энергию (или массу) нелинейной полевой системы. Так, без

потери общности мы можем рассматривать безмассовое спинорное поле, полагая $m = 0$.

Для инварианта P находим

$$P = D_0/\tau, \quad D_0 = \text{const.} \quad (2.27)$$

Компоненты спинорного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), & \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), & \psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования D_i связаны с D_0 соотношением $D_0 = 2(D_1^2 + D_2^2 - D_3^2 - D_4^2)$. Здесь $\sigma = \int G dt$.

Компоненты спинорного тока выглядят как

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{2}{\tau}[D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2], & j^1 &= \frac{4}{a\tau}[D_2 D_3 + D_1 D_4] \cos(2\sigma), \\ j^2 &= \frac{4}{b\tau}[D_2 D_3 - D_1 D_4] \sin(2\sigma), & j^3 &= \frac{4}{c\tau}[D_1 D_3 - D_2 D_4] \cos(2\sigma), \end{aligned}$$

а проекции вектора спина вдоль осей X , Y и Z имеют вид

$$S^{23,0} = \frac{2(D_1 D_2 + D_3 D_4)}{bc\tau}, \quad S^{31,0} = 0, \quad S^{12,0} = \frac{D_1^2 - D_2^2 + D_3^2 - D_4^2}{2ab\tau}.$$

Как видно, при нетривиальной τ компоненты спинорного тока и проекции вектора спина не имеют сингулярностей.

Вернемся к системе уравнений для τ , H и ε . Для этого нам нужно будет записать $T_0^{0'}$ и $T_1^{1'}$ в явном виде. Для простоты мы рассмотрим случай, когда $F = \lambda S^n$. Имеем

$$T_0^{0'} = mS - \lambda S^n, \quad T_1^{1'} = \lambda(n-1)S^n.$$

С учетом того, что $S = C_0/\tau$, перепишем систему (1.33) в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.28a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \varepsilon - \Lambda) + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\tau} + \frac{\lambda(n-2)}{\tau^{n-1}}\right), \quad (2.28б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \varepsilon - \Lambda) - 4\eta\left[\frac{m}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau^n}\right], \quad (2.28в)$$

где для простоты предполагалось, что $C_0 = 1$. Данная система в общем случае точно не решается. Мы рассмотрим некоторые специальные случаи, допускающие точные решения.

2.2.1. *Случай с вязкой жидкостью второго рода.* Сначала изучим случай, когда отсутствует вязкость первого рода, полагая $\eta = 0$. Потребуем, чтобы вязкость второго рода была обратно пропорциональна расширению, т. е.

$$\xi\theta = 3\xi H = C_2, \quad C_2 = \text{const.} \quad (2.29)$$

Подставляя $\eta = 0$, (2.29) и (1.9) в (2.1в), находим

$$\varepsilon = \frac{1}{1+\zeta} \left[C_2 + \frac{C_3}{\tau^{1+\zeta}} \right]. \quad (2.30)$$

Тогда из (1.25) получим следующее уравнение для τ :

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa m + 3 \left[\frac{C_2}{2}\kappa + \Lambda \right] \tau + \frac{(1-\zeta^2)\tau^{2+\zeta}}{C_3 + C_2\tau^{1+\zeta}} + \frac{\lambda(n-2)}{\tau^{n-1}} \equiv F(q, \tau), \quad (2.31)$$

где q — множество параметров. Как видно, правая часть уравнения (2.31) является функцией от τ , а следовательно, уравнение может быть решено в квадратурах [48]. Решим уравнение (2.31) численно. Заметим, что уравнение (2.31) может быть рассмотрено как уравнение движения одной частицы. Иногда удобно и полезно показать потенциал соответствующего уравнения, которым в нашем случае является

$$U(q, \tau) = -2 \int F(q, \tau) d\tau. \quad (2.32)$$

Параметры мы выберем в виде: $\kappa = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0,5$, $\zeta = 1/3$, $n = 4$, $C_2 = 2$ и $C_3 = 1$. Мы рассмотрим случаи с различными Λ , а именно $\Lambda = -2, 0, 1$. Начальное значение τ берется достаточно малым, первая производная от него, т. е. $\dot{\tau}$, в точке пространства-времени вычисляется из (1.31). На рис. 7 показан

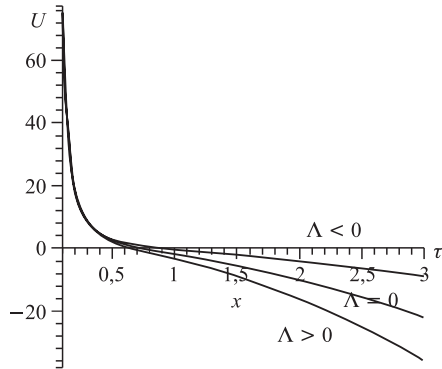


Рис. 7. Виды потенциала, соответствующие разным знакам Λ -члена

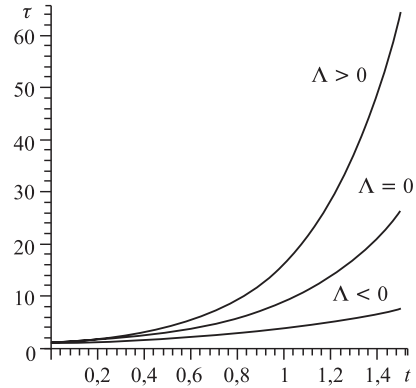


Рис. 8. Эволюция τ в зависимости от знаков Λ -члена

потенциал, соответствующий уравнению (2.31). Сразу видно, что отрицательная Λ порождает Вселенную, ограниченную сверху, т. е. в зависимости от параметров решения могут быть или неперiodическими, или осциллирующими. А в случае неотрицательной Λ имеет место вечно расширяющаяся Вселенная. Ввод положительной Λ , что на самом деле является темной энергией, приводит к ускоренному расширению Вселенной. Соответствующие решения даны на рис. 8.

2.2.2. *Случай с вязкостью первого и второго рода.* Рассмотрим более общий случай. Следуя [78], выберем вязкость первого рода пропорциональной расширению, а именно

$$\eta = -\frac{3}{2\kappa}H = -\frac{1}{2\kappa}\theta. \tag{2.33}$$

В отсутствие спинорного поля это предположение приводит к соотношению

$$3H^2 = \kappa\varepsilon + C_4, \quad C_4 = \text{const}. \tag{2.34}$$

Можно показать, что соотношение (2.34) в нашем случае может быть достигнуто при безмассовом спинорном поле с нелинейностью

$$F = F_0 S^{2(\kappa-1)/\kappa}.$$

Уравнение для τ в этом случае имеет вид

$$\tau\ddot{\tau} - 0,5(1+\zeta)\dot{\tau}^2 - 1,5\kappa\xi\tau\dot{\tau} - 3[\Lambda - 0,5(1+\zeta)C_4 - \lambda F_0\tau^{2(1-\kappa)/\kappa}]\tau^2 = 0. \tag{2.35}$$

При $\xi = \text{const}$ и $\lambda = 0$ существуют различные специальные решения, которые можно найти в справочниках. Но для нетривиальной λ уравнение можно

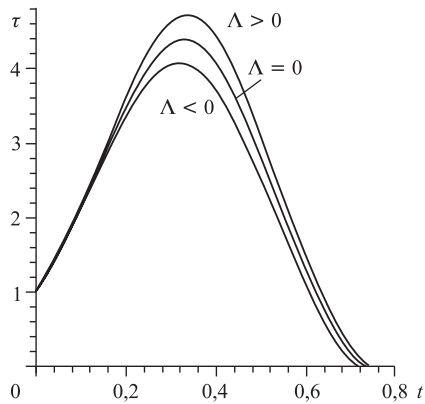


Рис. 9. Эволюция Вселенной с нетривиальной Λ при $\kappa < 1$

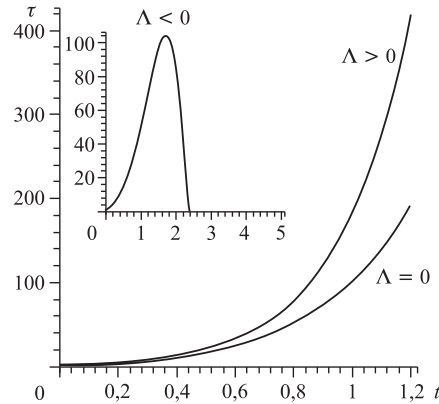


Рис. 10. Эволюция Вселенной при различных значениях Λ с $\kappa > 1$

решать только численно. Рассмотрим случай, когда вязкость второго рода является постоянной. С учетом этого выберем параметры $\zeta = 1/3$, $\xi = 1$, $F_0 = 1$, $\lambda = 0,5$ и $C_4 = 1$. Рассмотрим случаи с различными Λ и κ . На рис. 9 и 10 иллюстрируется эволюция τ при $\kappa < 1$ и $\kappa > 1$ соответственно. В случае $\kappa < 1$ имеем непериодическую эволюцию при всех Λ , тогда как при $\kappa > 1$ только отрицательная Λ порождает такое решение. Неотрицательная Λ в этом случае дает вечно расширяющуюся картину эволюции.

2.3. Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью. Рассмотрим систему с взаимодействующими спинорным и скалярным полями в модели Бианки-I, заполненной вязкой жидкостью. В этом случае имеем [83]

$$L_f = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} (1 + \lambda F), \quad (2.36)$$

где, как и раньше, $F = F(I, J)$.

Уравнение спинорного поля имеет вид (2.19) с

$$D = \frac{\lambda}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} \frac{\partial F}{\partial S}, \quad G = \frac{\lambda}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} \frac{\partial F}{\partial P}.$$

А для скалярного поля получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{-g} g^{\nu\mu} (1 + \lambda F) \varphi_{,\mu} \right) = 0. \quad (2.37)$$

Решения уравнений спинорного поля по форме полностью совпадают с решениями предыдущего пункта. Поэтому мы сразу начнем исследовать систему уравнений для τ , H и ε . Рассмотрим случай, когда $F = S^n$. Компоненты тензора энергии-импульса в этом случае имеют вид

$$T_0^{0'} = mS + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 (\lambda S^n + 1), \quad T_1^{1'} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 (\lambda S^n - 1),$$

где, как следует из уравнения скалярного поля,

$$\dot{\varphi} = \frac{C_{sc}}{\tau(1 + \lambda F)}.$$

В дальнейшем для удобства мы предположим, что $C_{sc} = 1$.

Тогда с учетом того, что $S = C_0/\tau$ (здесь для удобства мы полагаем $C_0 = 1$), перепишем систему уравнений в виде

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \quad (2.38a)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2} (3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{m}{\tau} + \frac{n\tau^{n-2}}{2(\lambda + \tau^n)^2} \right), \quad (2.38б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon - \Lambda) - 4\eta \left[\kappa \left(\frac{m}{\tau} + \frac{\tau^{n-2}}{2(\lambda + \tau^n)^2} \right) \right]. \quad (2.38в)$$

Далее мы исследуем систему (2.38). Как и раньше, рассмотрим два случая, допускающие точные решения.

2.3.1. *Случай с вязкой жидкостью второго рода.* Как и в предыдущем пункте, рассмотрим случай при $\eta = 0$. При этом получим аналогичные соотношения, связывающие ε , H и τ . Для определения τ в этом случае имеем

$$\ddot{\tau} = \frac{3}{2}\kappa m + 3 \left[\frac{C_2}{2}\kappa + \Lambda \right] \tau + \frac{3\kappa(1-\zeta)}{2(1+\zeta)} \frac{C_2\tau^{1+\zeta} - C_3}{\tau^\zeta} + \frac{3\kappa\lambda n}{4} \frac{\tau^{n-1}}{(\lambda + \tau^n)^2} \equiv F(q, \tau), \quad (2.39)$$

где q — параметры. Как и раньше, в этом случае также можно найти выражение для потенциала. Для численного решения мы выберем $\kappa = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0,5$, $\zeta = 1/3$, $n = 4$, $C_2 = 2$ и $C_3 = 1$. Рассмотрим случай с различными значениями Λ , а именно $\Lambda = -2, 0, 1$. Начальное значение τ задается достаточно маленьким, а первая его производная, т.е. $\dot{\tau}$, в заданной точке пространства-времени вычисляется из соотношения (1.31). На рис. 11 показан вид потенциала, соответствующего уравнению (2.39). Сразу видно, что независимо от знака Λ всегда имеется расширяющаяся Вселенная. Но, как видно на рис. 12, положительная Λ приводит к ускоренному расширению, тогда как отрицательная к замедлению.

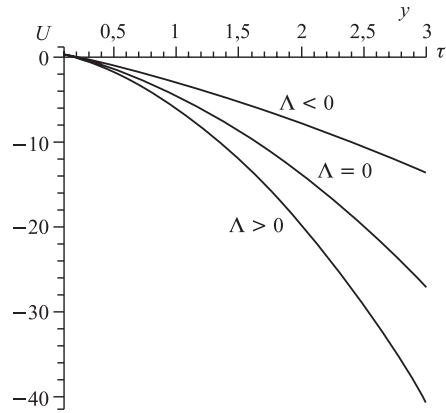


Рис. 11. Вид потенциала при различных значениях Λ -члена

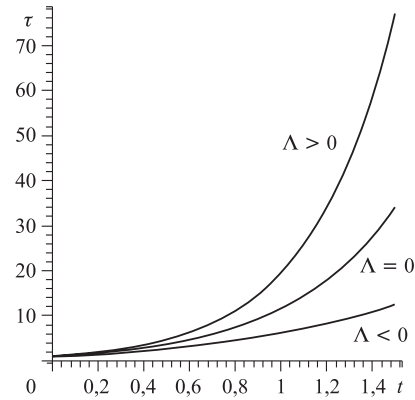


Рис. 12. Эволюция τ в зависимости от знака Λ

2.3.2. *Случай с вязкостью первого и второго рода.* Рассмотрим более общий случай, выбирая вязкость первого рода в виде (2.33). Можно показать, что в этом случае также возникают соотношения типа (2.34), но только при

нулевой массе спинора с нелинейностью

$$F = \frac{F_0 S^2 - 1}{\lambda}.$$

Уравнение для τ теперь примет вид

$$\tau \ddot{\tau} - 0,5(1 - \zeta)\dot{\tau}^2 - 1,5\kappa\xi\tau\dot{\tau} - 3 \left[\Lambda - 0,5(1 - \zeta)C_4 + \frac{\kappa}{2F_0} \right] \tau^2 = 0. \quad (2.40)$$

При $\xi = \text{const}$ существуют различные специальные решения. Мы перепишем это уравнение в терминах H :

$$\dot{H} = -1,5(1 + \zeta)H^2 + 1,5\kappa\xi H + \left[\Lambda - 0,5(1 - \zeta)C_4 + \frac{\kappa}{2F_0} \right]. \quad (2.41)$$

Решения его можно записать в квадратурах:

$$\int \frac{dH}{AH^2 + BH + C} = t, \quad (2.42)$$

где $A = -1,5(1 + \zeta)$, $B = 1,5\kappa\xi$ и $C = \Lambda - 0,5(1 - \zeta)C_4 + \kappa/2F_0$. Если вязкость второго рода выбрать постоянной, т. е. если $\xi = \text{const}$, то в зависимости от знака дискриминанта $B^2 - 4AC$ существуют три типа решения, а именно [13]:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \left| \frac{2AH + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2AH + B - \sqrt{B^2 - 4AC}} \right|, & B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{2AH + B}{\sqrt{4AC - B^2}}, & B^2 < 4AC, \\ -\frac{2}{2AH + B}, & B^2 = 4AC. \end{cases} \quad (2.43)$$

Для численного решения мы выберем параметры следующим образом: $C_4 = 9$, $\zeta = 1/3$ и $\kappa = 2$. В этом случае имеем $\delta = B^2 - 4AC = 9\xi^2 + 8(\Lambda - 2)$. После этого выберем для Λ положительное, тривиальное или отрицательное значения (в частности, мы выберем $\Lambda = (7/8, 0, -5/2)$). Значения ξ выбираются таким образом, чтобы мы имели $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ при всех выбранных значениях Λ , с $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$ и $\delta_3 < 0$. На рис. 13, 14 и 15 приведены картины эволюции τ , соответствующие тривиальному, положительному и отрицательному значениям δ соответственно. Как видно, поведение τ зависит от δ и не зависит от знака Λ . Отрицательная δ порождает непериодическую эволюцию Вселенной, на рис. 16 представлена соответствующая фазовая диаграмма.

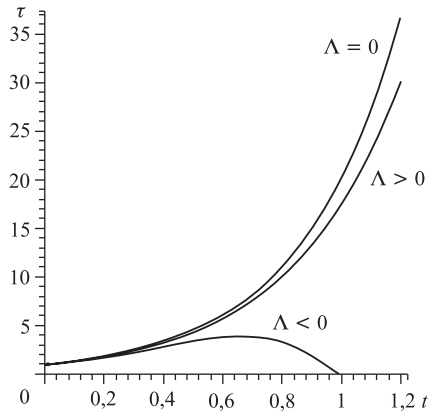


Рис. 13. Эволюция Вселенной при $\delta = 0$ для разных Λ

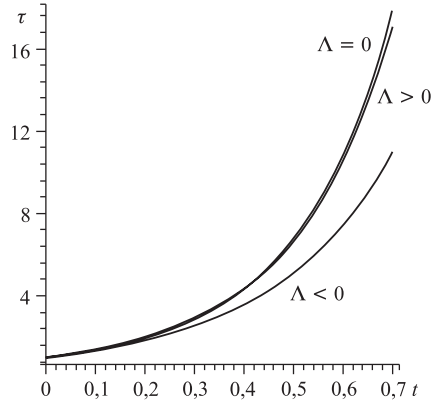


Рис. 14. Эволюция Вселенной при $\delta > 0$ для разных Λ

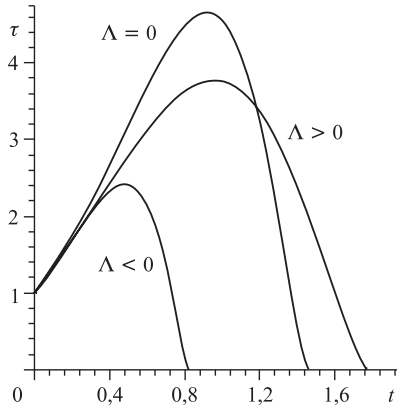


Рис. 15. Эволюция Вселенной при $\delta < 0$ для разных Λ

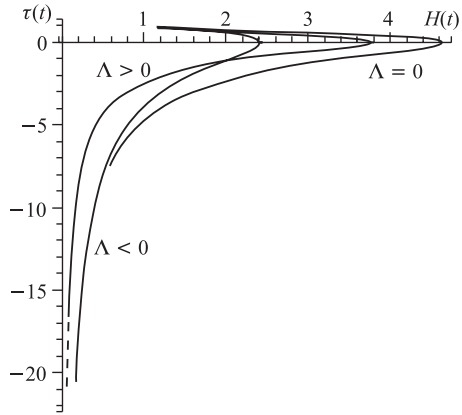


Рис. 16. Фазовая диаграмма, соответствующая случаю с $\delta < 0$ при различных Λ

3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Целью предлагаемого подхода является систематический и, по возможности, всеохватывающий разбор вариантов поведения рассмотренной динамической системы в зависимости от значений параметров. Понятно, что следует отделить существенное, качественное наличие характерных эффектов от несущественных, количественных различий. Здесь речь пойдет о сценариях эволюции. Обычно нужно понять хотя бы, чем заканчивается (или никогда не заканчивается) эволюция при временах, возможно, бесконечно больших,

если начальные условия таковы, как заданы. При этом начальные условия могут быть заданы где угодно.

Под конкретным поведением будем понимать семейство интегральных кривых, покрывающее все фазовое пространство, т. е. фазовый портрет.

Изменение начальных условий, приводящее всего лишь к непрерывному переходу между интегральными кривыми, будем полагать первым количественным отличием, поскольку речь идет о семействе в целом. Такие интегральные кривые будут топологически эквивалентными [3]. Фазовое пространство разбивается на области — классы эквивалентности — внутри класса они «ведут себя одинаково». Кривые внутри класса будут гомотопны друг другу (*Д. Б. Фукс и др.* Гомотопическая топология. 1969) с гомотопией, не выводящей за пределы класса.

Непрерывное изменение параметров также будем считать несущественным и будем говорить, что одно семейство интегральных кривых (покрывающее все пространство) эквивалентно другому, если оно порождает семейство диффеоморфизмов, непрерывно переводящее первое семейство во второе. Это отношение разбивает на классы эквивалентности пространство параметров.

При некоторых, критических, соотношениях параметров наступает существенное изменение, перестройка. Это пограничное соотношение параметров разбивает, как правило, пространство параметров на области, внутри которых система обладает сходным, качественно одинаковым поведением. Таким образом, здесь завершается качественная классификация режимов эволюции динамической системы. Теперь, задавая конкретными параметрами, мы можем определить, к какой области параметров они относятся и тем самым определить тип поведения. А задавшись еще и конкретными начальными условиями, сможем ответить на вопрос, в какую область фазового пространства приведет эволюция системы со временем.

В нашей космологической модели числовые параметры A , α , B , β появились, поскольку мы приняли, что коэффициенты вязкости первого и второго рода, присутствующие в ней, имеют вид $\eta = Ae^\alpha$ и $\xi = Be^\beta$. Коэффициенты λ и τ связаны с введением спинорного и скалярного полей. И, наконец, в уравнения Эйнштейна входит известная космологическая константа Λ .

Исходные уравнения Эйнштейна вместе с гидродинамическими уравнениями, включающими вязкости, спинорное и векторное поля, нами сведены к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно плотности энергии ϵ , «постоянной» Хаббла (в действительности переменной) H и масштабного параметра τ ($\tau = abc$, где a , b , c — компоненты метрического тензора). Удобно оказалось заменить переменную τ на переменную ν по формуле $\nu = 1/\tau$.

То, что система имеет размерность более двух, сильно усложняет качественный анализ. Напомним, что известная система Лоренца трех обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями не выше второй степени обладает в некоторой области параметров хаоти-

ческим поведением, странным аттрактором, и, соответственно, в ней отсутствуют первые интегралы (т. е. глобально определенные инварианты), хотя множество особенностей устроено просто — имеется всего три особых (неподвижных) точки — два фокуса и седло. Наличие такого примера не позволяет делать оптимистические заключения на основании простоты устройства нашей системы (только полиномы в правых частях и отсутствие особых точек в интересующей нас области пространства, даже и динамически замкнутой).

Тем не менее на границах пространства как при $\epsilon = 0$, так и при $\nu = 0$ ($\tau = +\infty$), которые сами динамически замкнуты, полная классификация проведена. Динамическая замкнутость этих плоскостей служит одновременно препятствием для проникновения из интересующего нас положительного октанта $\epsilon > 0 \wedge \nu > 0$ в область с отрицательными значениями. Но, хотя в положительном октанте нет особенностей, неподвижных точек (они есть на границах), доказать простоту поведения, наличие первых интегралов, например, так и не удалось, как и их отсутствие.

Как уже было сказано, уравнения (1.25) и (1.29) вызывают большой интерес, в этом разделе мы подробно качественно проанализируем эту систему.

3.1. Система с вязкой жидкостью. Вслед за Белинским и Халатниковым [6] изучим характеры решений динамической системы (2.1) или (2.2). Для этого перепишем систему (2.1) в матричной форме [79]:

$$\begin{pmatrix} \dot{H} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa/2 & -1 \\ 3H & 4\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\xi H - \omega \\ 3H^2 - \kappa\epsilon - \Lambda \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Заметим, что в отличие от системы, изучаемой Белинским и Халатниковым, рассматриваемая система содержит космологическую постоянную Λ .

Общие свойства системы. Легко заметить, что решение не может пересекать ось $\epsilon = 0$, так как $\dot{\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0$, так же как и параболу

$$3H^2 - \kappa\epsilon - \Lambda = 0, \quad (3.2)$$

так как (3.2) сама является интегральной кривой. Таким образом, начиная с точки $(H, \epsilon) = (+\infty, 0)$, решения не могут входить в «запрещенную зону» внутри параболы (3.2). Могут ли они достигать $H < 0$, зависит от значения Λ . Еще раз напомним, что в отличие от системы, рассмотренной в [6], эта система содержит ненулевой Λ -член.

Критические точки динамической системы. а) В силу линейной независимости столбцов матрицы в уравнении (3.1) критические точки являются решениями уравнений

$$3\xi H - \omega = 0, \quad (3.3a)$$

$$3H^2 - \kappa\epsilon - \Lambda = 0, \quad (3.3b)$$

т. е. они с необходимостью лежат на параболе (3.2). Решениями системы (3.3) будут корни уравнений

$$3\kappa B^2 \varepsilon^{1+2\beta} - (1 + \zeta)^2 \varepsilon^2 + 3\Lambda B^2 \varepsilon^{2\beta} = 0, \quad (3.4a)$$

$$H = \frac{1 + \zeta}{3B} \varepsilon^{1-\beta}. \quad (3.4b)$$

Количество положительных корней уравнения (3.4) по признаку Декарта равно числу изменения знаков коэффициентов уравнений или меньше этого на четное число. Так,

$$\begin{aligned} &\text{при } \Lambda > 0 \text{ и } 1/2 < \beta < 1 \quad (\text{рис. 18, 19}) \\ &\text{или } \Lambda < 0 \text{ и } \beta < 1/2 \quad (\text{рис. 21, 22}) \end{aligned}$$

число корней либо 2, либо нуль. В остальных случаях

$$\begin{aligned} &\Lambda > 0 \text{ и } \beta > 1 \quad (\text{рис. 17}), \\ &\Lambda > 0 \text{ и } \beta < 1/2 \quad (\text{рис. 20}), \\ &\Lambda < 0 \text{ и } \beta > 1/2 \quad (\text{рис. 23}) \end{aligned}$$

существует только один корень. Соответствующие картины фазовых кривых проиллюстрированы на вышеупомянутых рисунках. Критические точки обозначены светлыми кружками. Здесь мы рассмотрели случай с $\eta = 0$, т. е. $A = 0$. В случае $\eta \neq 0$ с ростом A сепаратриса седла наклоняется слева. Общая картина при $A \neq 0$ остается качественно неизменной, что демонстрируют соответствующие фазовые портреты в двух случаях, а именно рис. 17 переходит в рис. 24, а рис. 20 соответствует рис. 25. Для численного расчета мы полагаем $\kappa = 1$, $\zeta = 0,333$ (если не сказано иное). На рис. 17–23 коэффициент $\eta = 0$. Заметим, что на рисунках E и T отвечают за ε и τ соответственно.

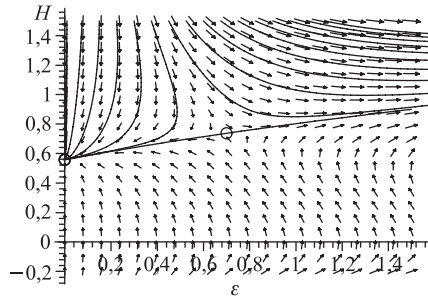


Рис. 17. Фазовая диаграмма на H - ε -плоскости при $\beta = 1,5$, $\Lambda = 0,933$, $B = 0,720$

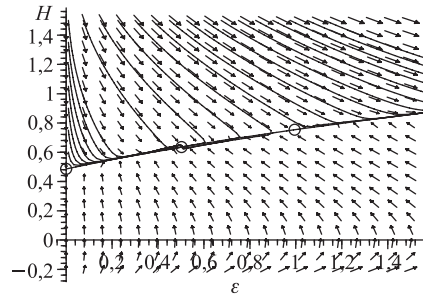


Рис. 18. Фазовая диаграмма на H - ε -плоскости при $\beta = 0,75$, $\Lambda = 0,707$, $B = 0,589$

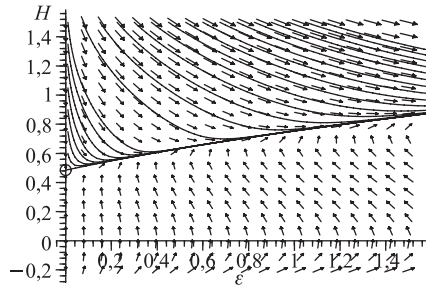


Рис. 19. Фазовая диаграмма на H - ϵ -плоскости при $\beta = 0,75$, $\Lambda = 0,707$, $B = 0,667$

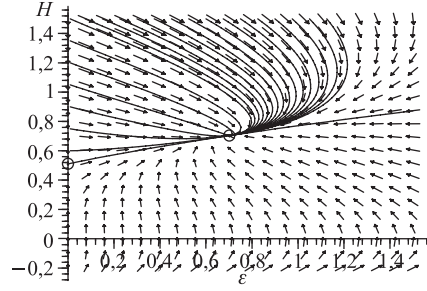


Рис. 20. Фазовая диаграмма на H - ϵ -плоскости при $\beta = 0,05$, $\Lambda = 0,785$, $B = 0,451$

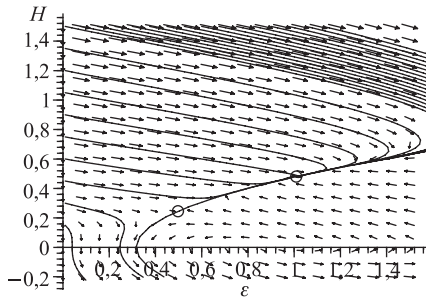


Рис. 21. Фазовая диаграмма на H - ϵ -плоскости при $\beta = 0,05$, $\Lambda = -0,317$, $B = 0,933$

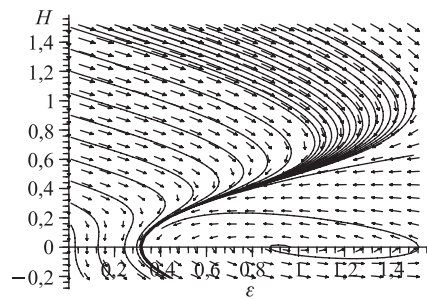


Рис. 22. Фазовая диаграмма на H - ϵ -плоскости при $\beta = 0,05$, $\Lambda = -0,317$, $B = 0,667$

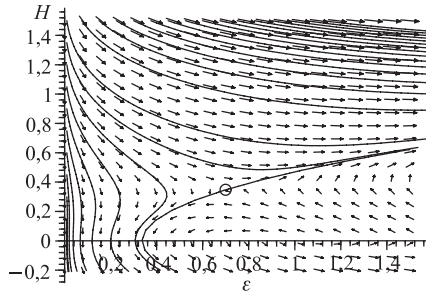


Рис. 23. Фазовая диаграмма на H - ϵ -плоскости при $\beta = 0,75$, $\Lambda = -0,337$, $B = 1,169$

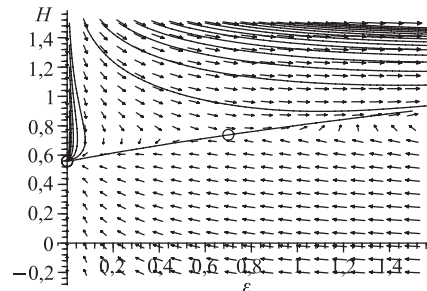


Рис. 24. Фазовая диаграмма на H - ϵ -плоскости при $\beta = 1,5$, $\Lambda = 0,933$, $B = 0,720$, $A = 1$, $\alpha = 1$

Поскольку уравнение для ϵ содержит только η , плотность энергии при нетривиальном η существенно меняется, тогда как H и τ остаются фактически неизменными.

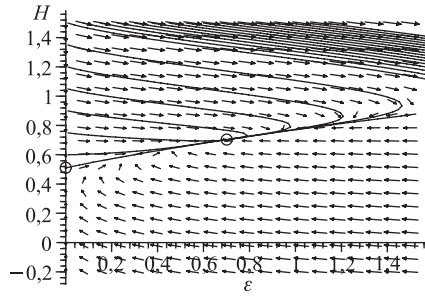


Рис. 25. Фазовая диаграмма на H - ε -плоскости при $\beta = 0,05$, $\Lambda = 0,785$, $B = 0,451$, $A = 1$, $\alpha = 1$, $\kappa = 1$

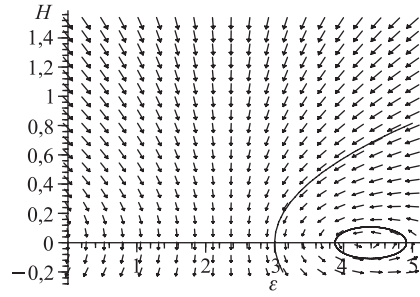


Рис. 26. Фазовая диаграмма на H - ε -плоскости при $\Lambda = -3$, $\zeta = 0,333$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$

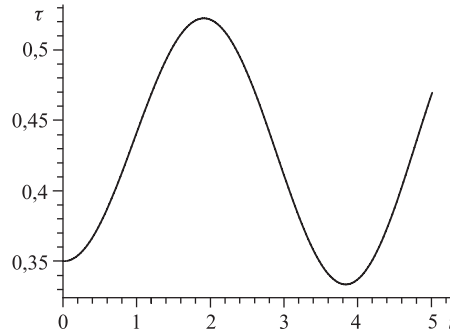


Рис. 27. Эволюция вселенной VI, соответствующей фазовой диаграмме, представленной на рис. 26. Как видно, вселенная VI в этом случае испытывает осцилляцию

Типы критических точек, лежащих на интегральной кривой (параболе), поочередно меняются: ... седло, притягивающий узел, седло ... Поэтому для определения типа особой точки достаточно рассмотреть случай с максимальным числом корней. Принимая во внимание уравнения (2.1в) и (3.2), вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varepsilon}}{3H\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}B\varepsilon^\beta \sqrt{\kappa\varepsilon + \Lambda} - \varepsilon(1 + \zeta)}{\varepsilon} = \\ &= \sqrt{3}B\sqrt{\kappa\varepsilon^{(2\beta-1)} + \Lambda\varepsilon^{-2}} - (1 + \zeta) = \begin{cases} -(1 + \zeta) < 0, & \beta < 1/2, \\ +\infty > 0, & \beta > 1/2. \end{cases} \quad (3.5) \end{aligned}$$

Таким образом, последняя критическая точка при $\beta < 1/2$ является притягивающим узлом и при $\beta > 1/2$ — седлом.

б) Очевидно, что если $\Lambda \geq 0$, то точки пересечения границ являются критическими точками

$$H = \pm \sqrt{\Lambda/3}, \quad (3.6a)$$

$$\varepsilon = 0. \quad (3.6b)$$

в) При $H < 0$ могут существовать критические точки только в том случае, когда столбцы матрицы (3.1) линейно зависимы. В этом случае критические точки есть корни уравнения

$$3\kappa(\zeta - 1)\varepsilon + 6\kappa^2 AB\varepsilon^{\alpha+\beta} + 8\kappa^2 A^2\varepsilon^{2\alpha} - 6\Lambda = 0 \quad (3.7)$$

и

$$H = -\frac{2}{3}\kappa A\varepsilon^\alpha. \quad (3.8)$$

В случае $\eta = 0$ корни характеристического уравнения

$$\left| \frac{D(\dot{H}, \dot{\varepsilon})}{D(H, \varepsilon)} - \mu \right| = 0 \quad (3.9)$$

есть

$$\mu_{1,2} = \frac{3\kappa\xi \pm \sqrt{9\kappa^2\xi^2 + 48\Lambda(1+\zeta)}}{4}. \quad (3.10)$$

Критические точки $(H, \varepsilon) = (0, -2\Lambda/[\kappa(1-\zeta)])$ есть расходящийся фокус, если $\Lambda < -\frac{9\kappa^2\xi^2}{48(1+\zeta)}$, или расходящийся узел, если $\Lambda > -\frac{9\kappa^2\xi^2}{48(1+\zeta)}$.

В случаях, проиллюстрированных рис. 21 и 23, $H \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В случае, представленном на рис. 22, наблюдается растущая осцилляция, ограниченная притягивающей параболой (3.2).

Интегральные кривые. При $\Lambda \geq 0$ решения, начинающиеся в верхней полуплоскости $H > 0$, не могут перейти на нижнюю. При $\Lambda < 0$ некоторые из решений могут перейти на нижнюю полуплоскость через сегмент $H = 0$ и $0 \leq \varepsilon \leq -\Lambda$ и больше не возвращаются, так как на этом сегменте $\dot{H}|_{H=0} < 0$.

3.2. Система с нелинейным спинорным полем и вязкой жидкостью. Вернемся к системе уравнений для τ , H и ε . Для удобства вводим новую функцию $\nu = 1/\tau$. Исходная система уравнений тогда переписывается в виде [19, 82]

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (3.11a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1+\zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \varepsilon - \Lambda) + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n-2)\nu^{n-1}), \quad (3.11б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1+\zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \varepsilon - \Lambda) - 4A\varepsilon^\alpha[m\nu - \lambda\nu^n]. \quad (3.11в)$$

Заметим, что во всех системах плоскости $\nu = 0$ и $\varepsilon = 0$ являются динамически инвариантными подмножествами, которые делят пространство на четыре несообщающиеся части, поскольку

$$\dot{\nu}|_{\nu=0} = 0, \quad \dot{\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.12)$$

Заметим также, что $\nu < 0$ бессмысленно, если α и/или β не являются целыми.

Плоскость $\varepsilon = 0$ является притягивающим множеством для $H > 0$ и отталкивающим для $H < 0$, поскольку

$$\left. \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -3H(1 + \zeta). \quad (3.13)$$

Когда $H > 0$, плоскость $\varepsilon = 0$ оказывается притягивающей. Представляет интерес выяснить характер движения на самой плоскости, хотя бы это и не было физически значимо. В этом случае, т. е. при $\varepsilon = 0$, система, включающая спинорное поле (2.2), принимает вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (3.14a)$$

$$\dot{H} = -3H^2 + \Lambda + \frac{1}{2} \left(m\nu + \lambda(n-2)\nu^{n-1} \right). \quad (3.14b)$$

Решениями системы (3.14) являются кривые

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \frac{\lambda(n-2)\nu^{n-1}}{n-3}, \quad n > 3, \quad (3.15a)$$

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \nu^2 \ln(\nu), \quad n = 3, \quad (3.15b)$$

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda, \quad n = 2, \quad (3.15b)$$

где C — некоторая произвольная константа.

Характеристическое уравнение нетривиальных особых точек на плоскости $\varepsilon = 0$ для системы (3.14) принимает вид

$$\lambda(n-2)\nu^{n-1} + m\nu + 2\Lambda = 0. \quad (3.16)$$

Оно имеет одно, два или ни одного решения в зависимости от перемен знаков в последовательности λ , m , Λ .

Трехмерная система (2.2) со спинорным полем в отсутствие обеих вязкостей, т. е. при $A = 0$ и $B = 0$, имеет первые интегралы

$$F_1 = \frac{\varepsilon}{\nu^{1+\zeta}}, \quad (3.17a)$$

$$F_2 = \frac{(3H^2 - \varepsilon - \Lambda - m\nu)}{\nu^2} + \lambda \frac{n-2}{n-3} \nu^{n-3}. \quad (3.17b)$$

Первый из них (3.17а) остается первым интегралом и при введении вязкости второго рода ($B > 0$). Второй первый интеграл (3.17б) при $B > 0$ перестает быть инвариантом движения, однако «включение» объемной вязкости создает с течением времени знакоопределенное смещение поверхности, описываемой формулой (3.17б), что позволяет на качественном уровне, т. е. опираясь только на непрерывность, составить представление о возможных путях эволюции.

На плоскости $\nu = 0$ система (3.11) полностью совпадает с системой (2.2). Классификация вариантов поведения системы (3.11) на плоскости $\nu = 0$ представлена в табл. 1.

3.3. Система с взаимодействующими спинорным и скалярным полями и вязкой жидкостью. Рассмотрим систему с взаимодействующими спинорным и скалярным полями в модели Бианки-I, заполненной вязкой жидкостью. Как и раньше, вводим $\nu = 1/\tau$. Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (3.18а)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}(3\xi H - \omega) - (3H^2 - \kappa\varepsilon + \Lambda) + \frac{\kappa}{2} \left(m\nu + \frac{n\nu^{n+2}}{2(1 + \lambda\nu^n)^2} \right), \quad (3.18б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - \omega) + 4\eta(3H^2 - \kappa\varepsilon + \Lambda) - 4\eta \left[\kappa \left(m\nu + \frac{\nu^2}{2(1 + \lambda\nu^n)} \right) \right]. \quad (3.18в)$$

В присутствии скалярного поля система (3.18) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (3.19а)$$

$$\dot{H} = -3H^2 - \Lambda + \frac{1}{2} \left(m\nu + \frac{\lambda n \nu^{2-n}}{2(\lambda + \nu^{-n})^2} \right). \quad (3.19б)$$

Решениями системы (3.19) являются кривые

$$H^2 = \frac{(6C\lambda - 1)\nu^{n+2} + 2\lambda m\nu^{n+1} + 2\lambda\Lambda\nu^n + 6C\nu^2 + 2m\nu + 2\Lambda}{6(\lambda\nu^n + 1)}, \quad (3.20а)$$

где C — некоторая произвольная константа.

Характеристическое уравнение нетривиальных особых точек на плоскости $\varepsilon = 0$ для системы (3.18) принимает вид

$$2m\lambda^2\nu^{2n+1} + 4\lambda\lambda^2\nu^{2n} + \lambda n\nu^{n+2} + 4m\lambda\nu^{n+1} + 8\lambda\lambda\nu^n + 4\Lambda = 0. \quad (3.21)$$

Оно имеет одно, два или ни одного решения в зависимости от переменных знаков в последовательности. Классификация вариантов поведения системы (3.18) представлена в табл. 4 и 5.

Система (3.18) в отсутствие вязкости, т. е. при $\eta = 0$ и $\xi = 0$, имеет следующие интегралы:

$$F_1 = \frac{\varepsilon}{\nu^{1+\zeta}}, \quad (3.22a)$$

$$F_2 = \frac{(6H^2 - 2\varepsilon - 2\Lambda - 2m\nu)}{\nu^2} - \frac{1}{\lambda(\lambda\nu^n + 1)}. \quad (3.22б)$$

Второй из них (3.22б) остается первым интегралом и после введения объемной вязкости ξ . Первый же из них, т. е. (3.22а), при $\xi \neq 0$ перестает быть интегралом движения. Тем не менее введение объемной вязкости создает знакоопределенное смещение поверхности, заданной формулой (3.22а), что позволяет качественно, т. е. основываясь только на непрерывности, составить представление о возможных путях эволюции.

На плоскости $\nu = 0$ система (3.18) полностью совпадает с системой (2.2). Классификация вариантов поведения системы (3.11) на плоскости $\nu = 0$ представлена в табл. 1.

В табл. 1 приведена классификация поведения системы на границе $\nu = 0$, которая является также асимптотикой ряда режимов. В случаях *a–г* изменение параметров H и ε всегда ограничено, в случае *e* они неограниченно возрастают. В случаях *a, б, г, д, ж, з, и* имеются конечные предельные точки, к которым эволюция притягивается при подходящем выборе начальных значений. При $\Lambda > 0$ в случаях *г* и *з* эволюция может безвозвратно уйти в область $H < 0$, в то время как в других случаях эта область недоступна.

В табл. 2–13 показаны фазовые портреты поведения системы со спиновым полем на плоскости $\varepsilon = 0$. Вблизи этой плоскости система ведет себя сходным образом, что позволяет восстановить ее поведение во всем пространстве переменных состояния τ, H, ε .

Поведение существенно зависит от показателя нелинейности n и знака параметра нелинейности λ . При $n = 1$, $\lambda < 0$ в табл. 2 показаны два типа поведения: *a, б, г*, когда к пределу $\nu = 0$ система не стремится, и остальные с противоположным поведением. При этом, в отличие от остальных, в случае *в* гиперболическая точка разбивает плоскость на четыре области. При $\lambda > 0$, табл. 3, видно, что последней особенности нет.

При $n = 2$ табл. 4 и 5 показывают сходство с 3, но 4, *д* и 5, *д*, и 5, *e* разбиваются на две области.

Случаи $n = 3$ и $n = 4$ сходны между собой. При $\lambda < 0$ в табл. 6 и 8 система к $\nu = 0$ не стремится, варианты 6, *и* и 8, *и* содержат гиперболическую точку, разбивающую плоскость на четыре части. При $\lambda > 0$ в табл. 7 и 9 демонстрируется обратно-возвратное поведение. Наличие дополнительных особых точек не изменяет ситуации.

Табл. 10–13 демонстрируют пограничный случай $\lambda = 0$.

При включенном скалярном поле в табл. 14–25 можно увидеть более сложные особенности поведения. При $\lambda < 0$ возникает характерная пры-

мая интегральная линия, в действительности соответствующая точке разрыва производной по времени от τ . Слева от нее в табл. 14, 16, 18, 20, т. е. при $\Lambda < 0$, наблюдается циклическое поведение, справа — нециклическое. При $\Lambda > 0$ следует вспомнить о наличии двух особых точек на границе $\nu = 0$, нарушающих ожидаемую цикличность.

Таблица 1. Классификация качественно различных типов эволюции (фазовых портретов) в зависимости от параметров β , Λ и $(1 + \zeta)/B$ в плоскости $\nu = 0$

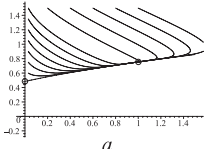
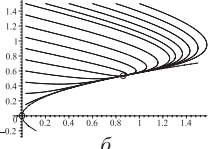
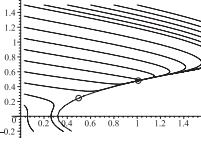
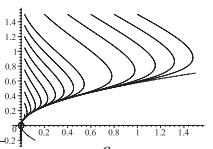
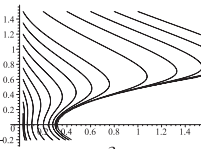
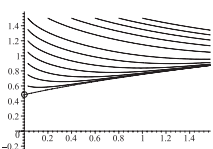
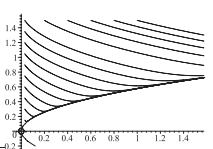
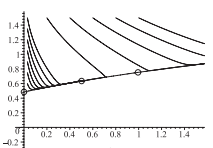
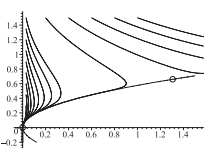
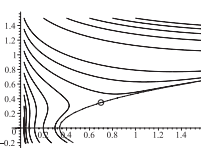
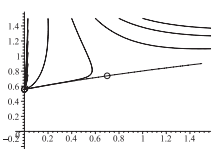
		$\Lambda > 0$	$\Lambda = 0$	$\Lambda < 0$
$\beta < 1/2$		 <i>a</i>	 <i>б</i>	 <i>в</i>
$\beta = 1/2$	$\frac{1 + \zeta}{B} > \sqrt{3\kappa}$		 <i>г</i>	 <i>з</i>
	$\frac{1 + \zeta}{B} < \sqrt{3\kappa}$	 <i>д</i>	 <i>е</i>	
$1/2 < \beta < 1$		 <i>ж</i>	 <i>зс</i>	 <i>з</i>
	$\beta = 1$			
$\beta = 1$	$\frac{1 + \zeta}{B} > 3\Lambda$			
	$\frac{1 + \zeta}{B} < 3\Lambda$	 <i>и</i>		
$\beta > 1$				

Таблица 2. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda < 0$

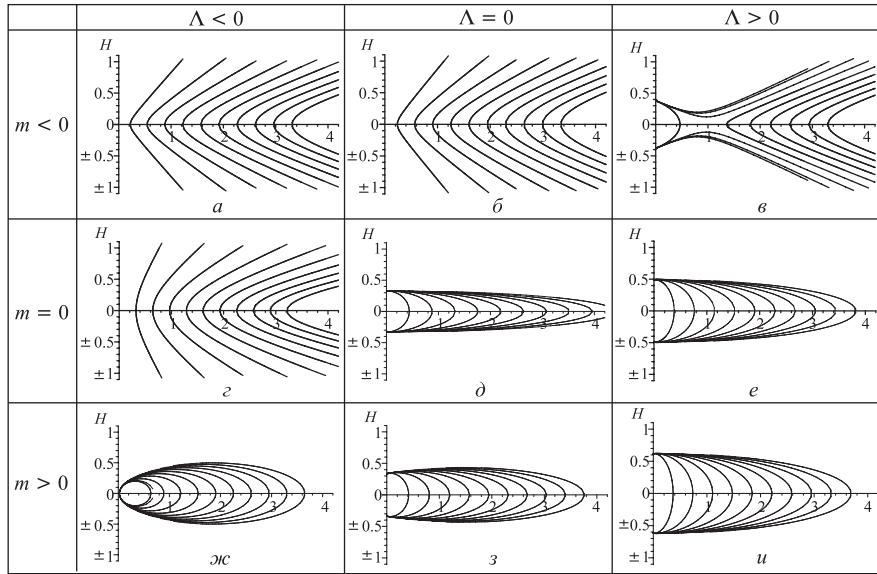


Таблица 3. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda > 0$

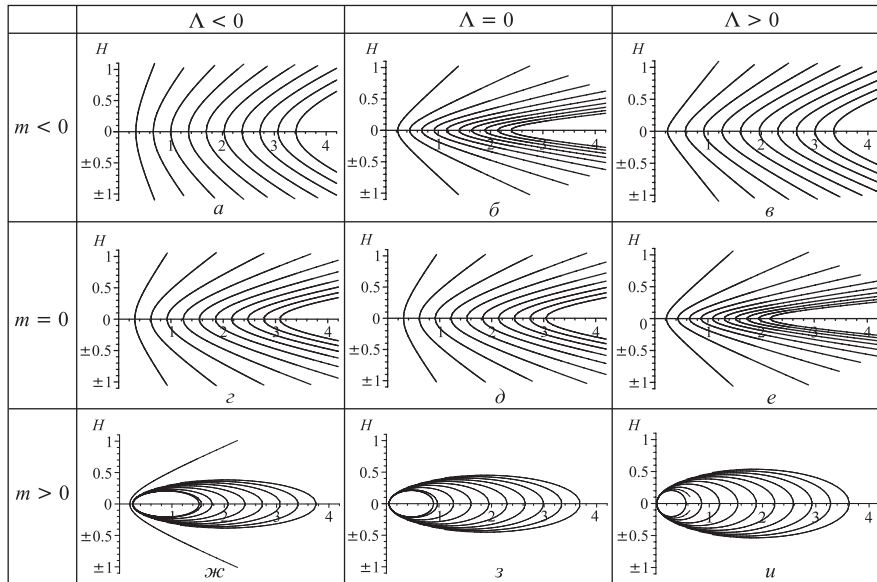


Таблица 4. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda < 0$

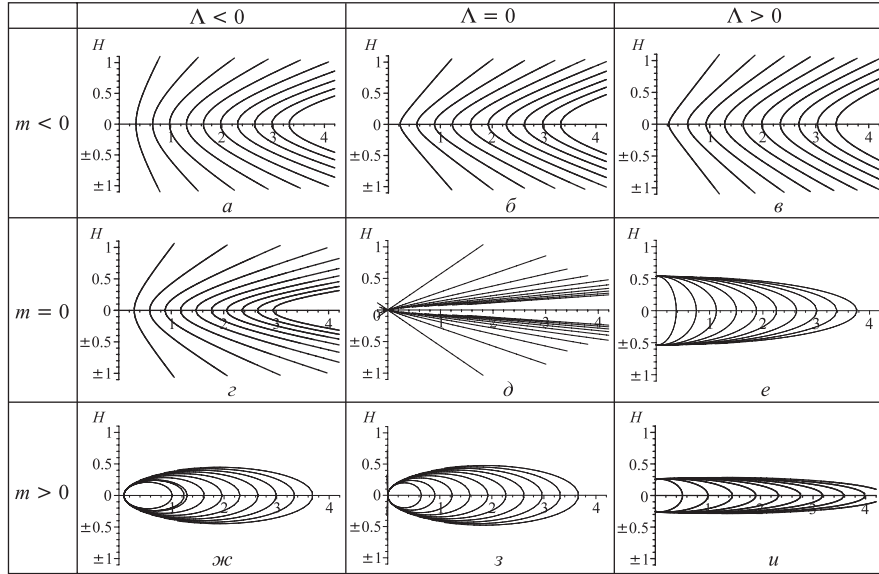


Таблица 5. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda > 0$

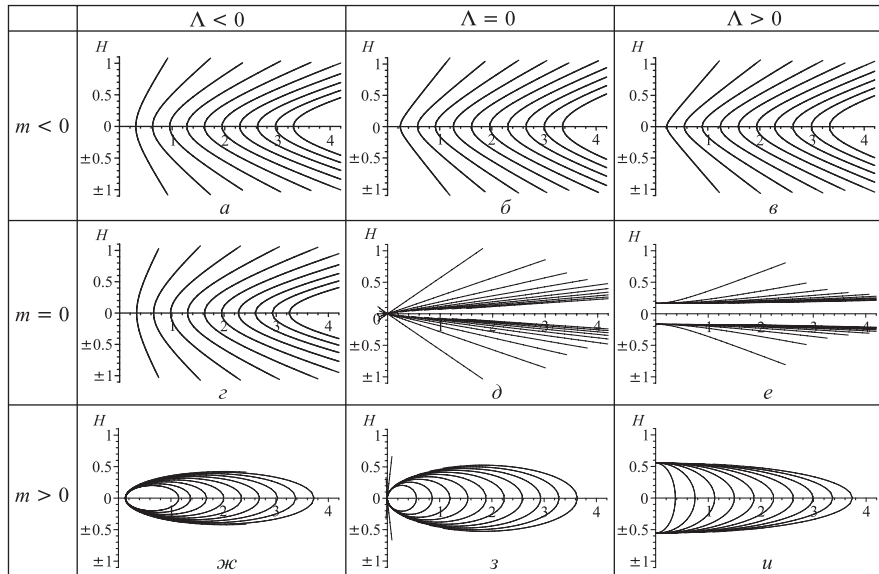


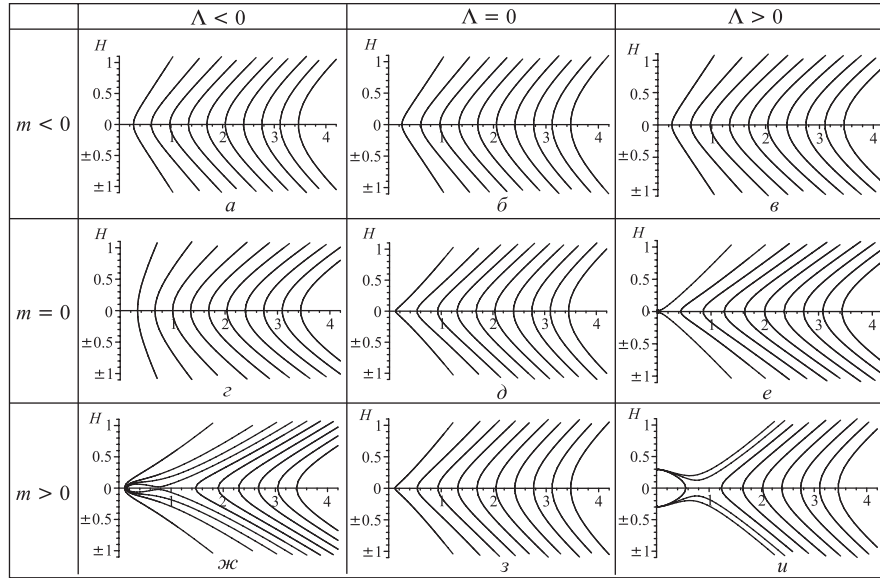
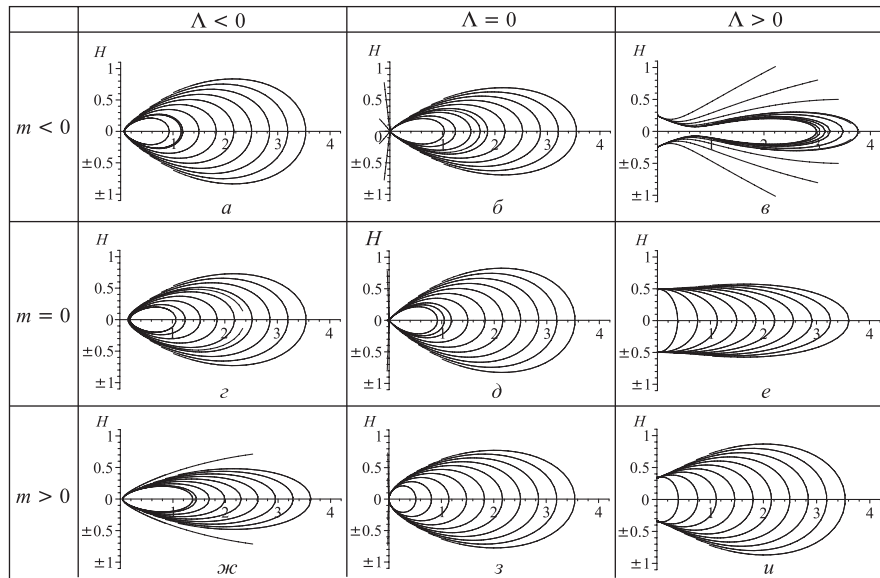
Таблица 6. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda < 0$ Таблица 7. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda > 0$ 

Таблица 8. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda < 0$

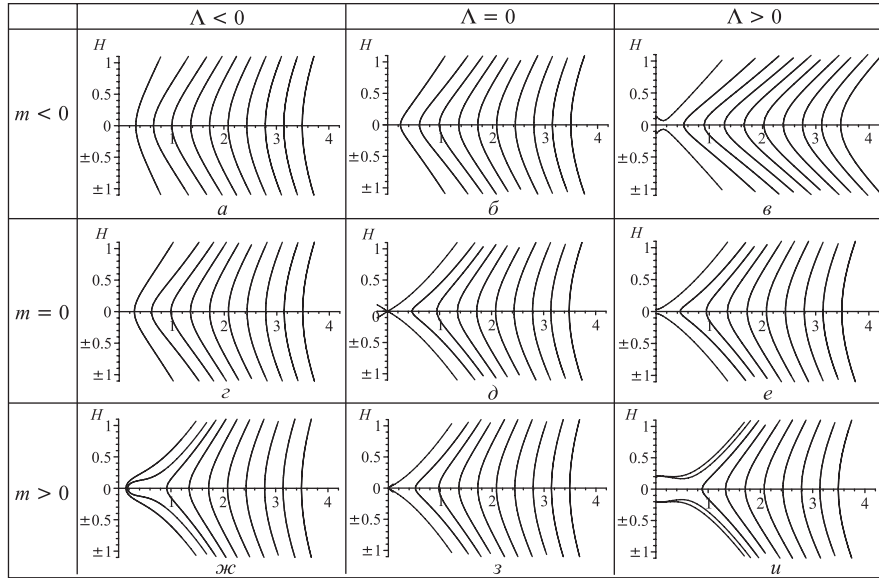


Таблица 9. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda > 0$

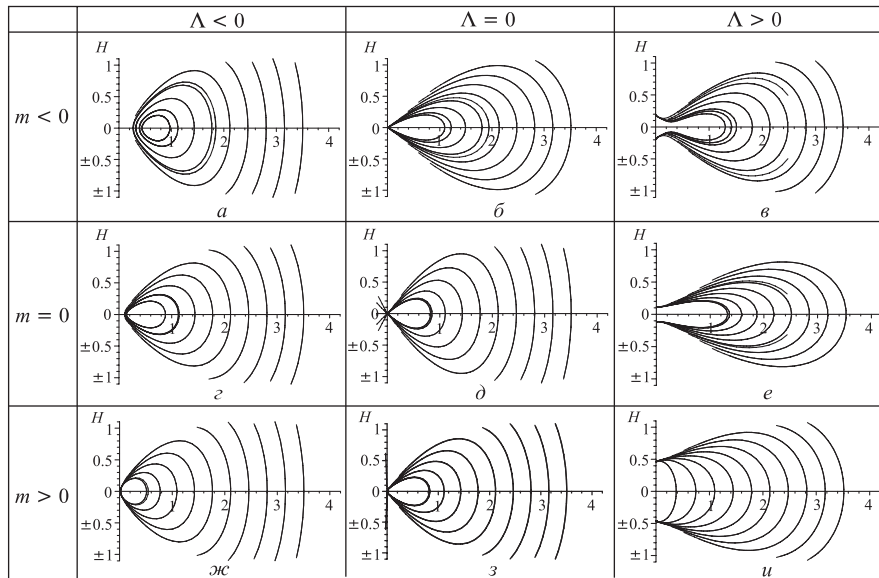


Таблица 10. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda = 0$

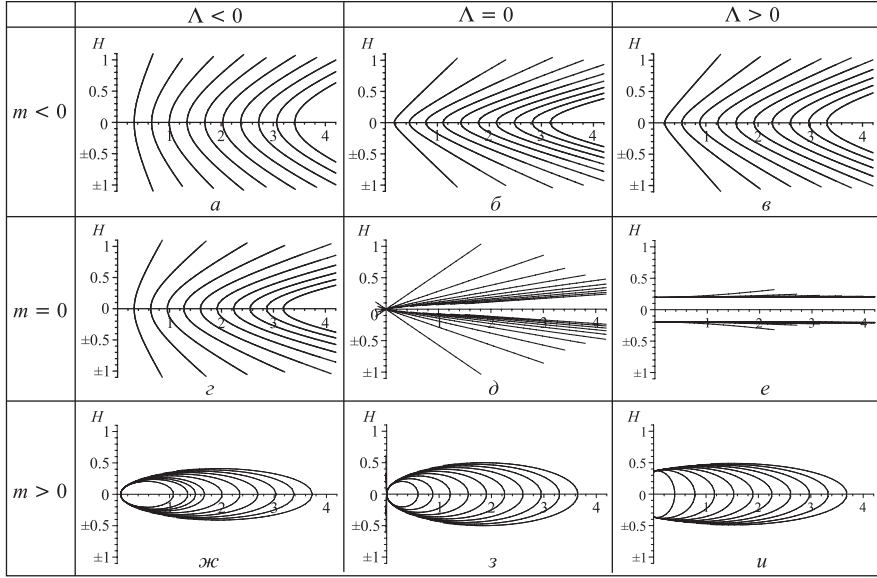


Таблица 11. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda = 0$

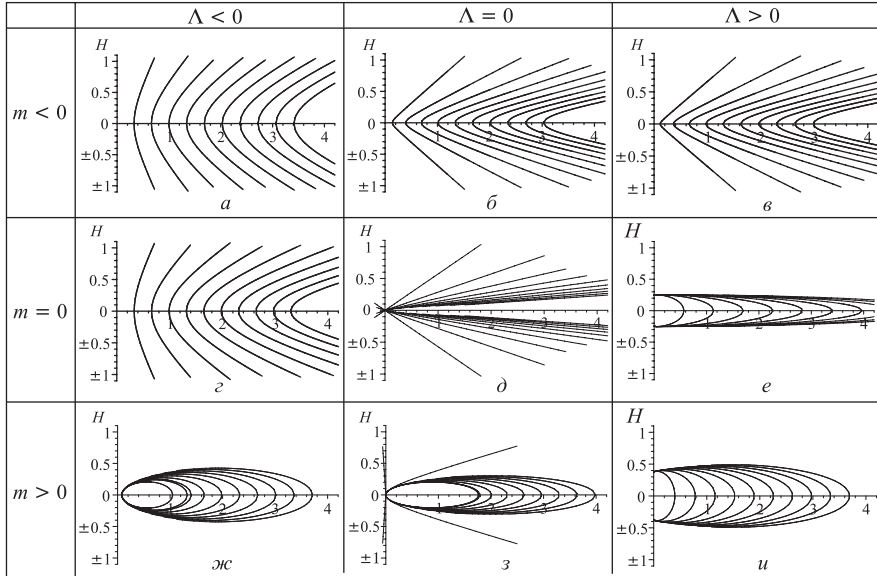


Таблица 12. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda = 0$

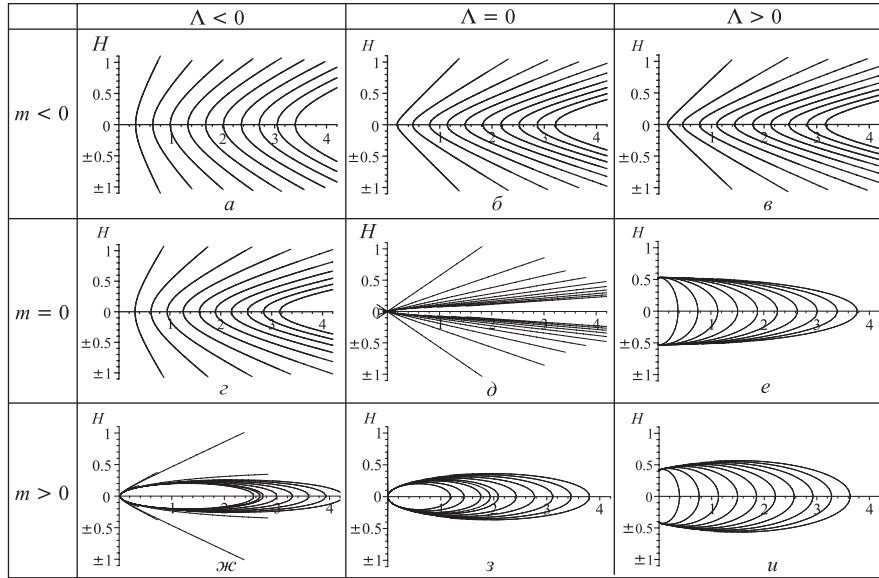


Таблица 13. Спинорное поле. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda = 0$

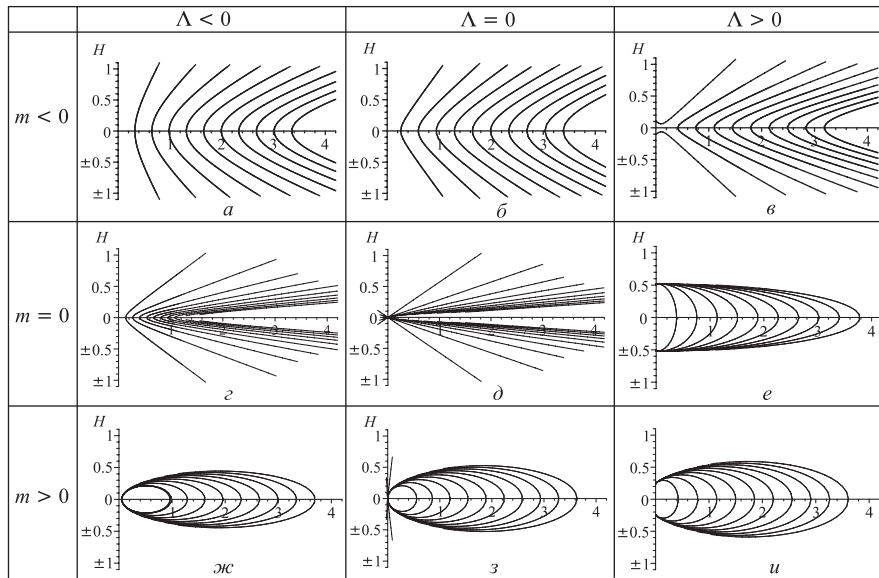


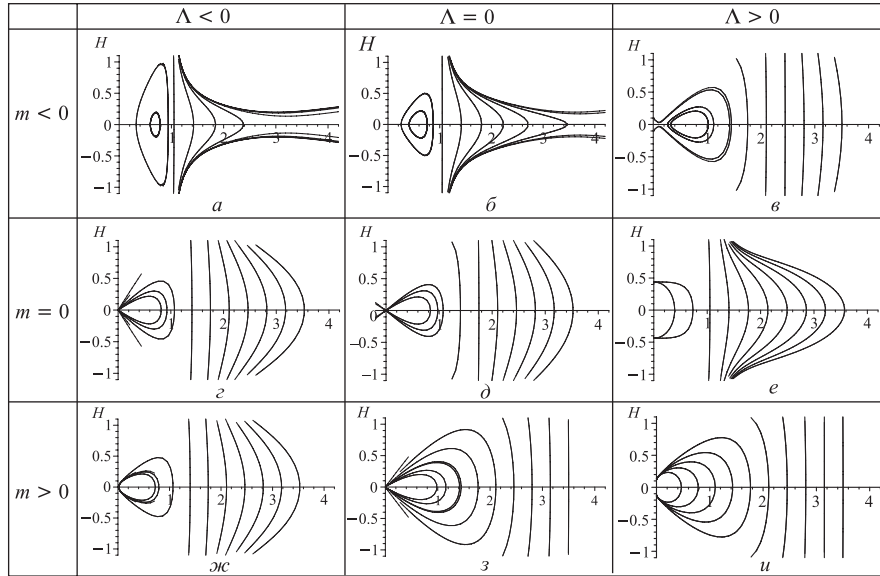
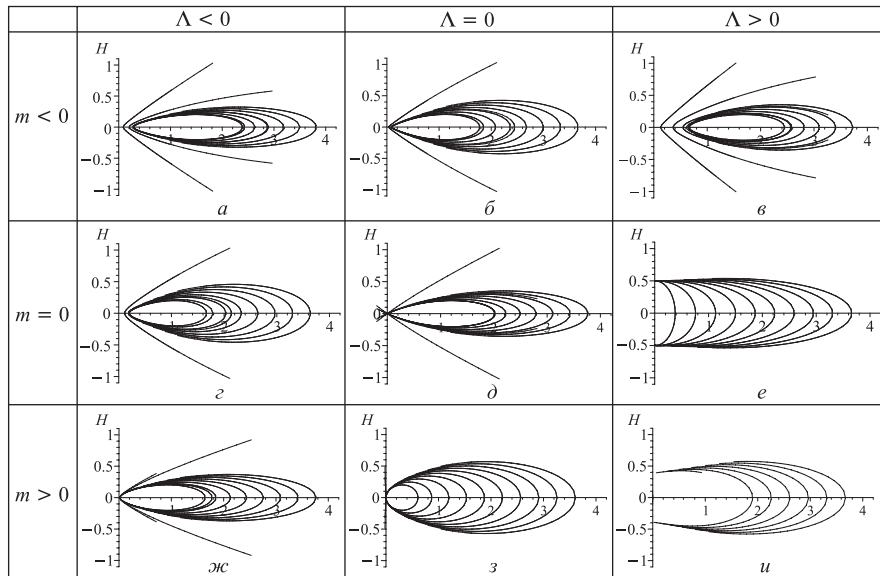
Таблица 14. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda < 0$ Таблица 15. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda > 0$ 

Таблица 16. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda < 0$

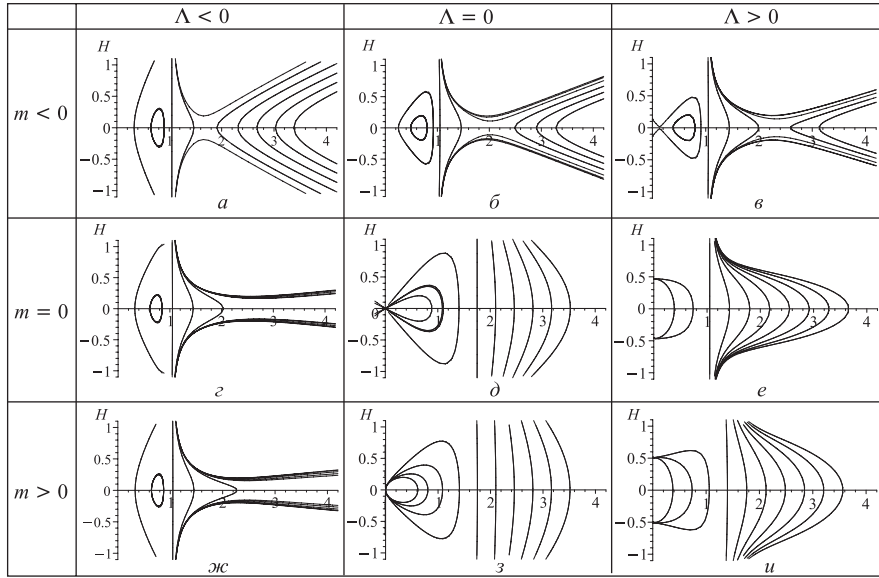


Таблица 17. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda > 0$

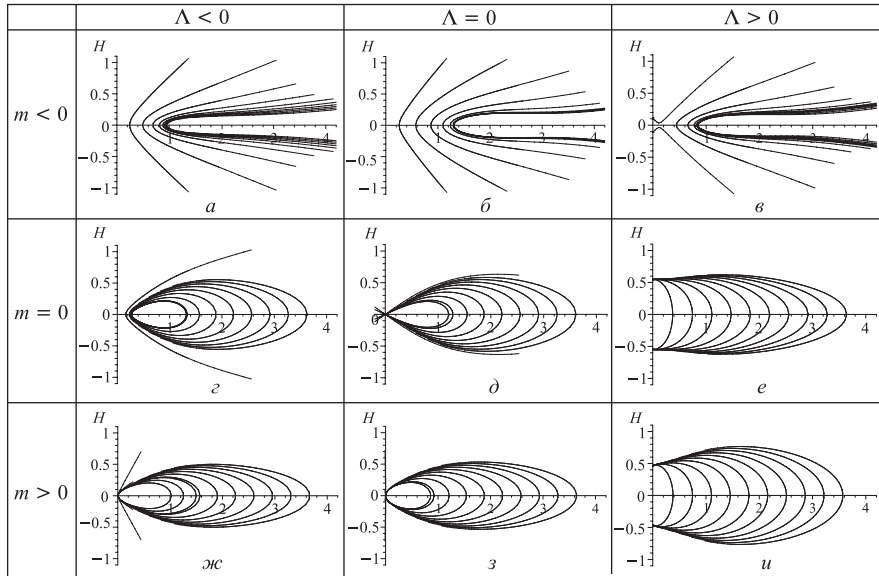


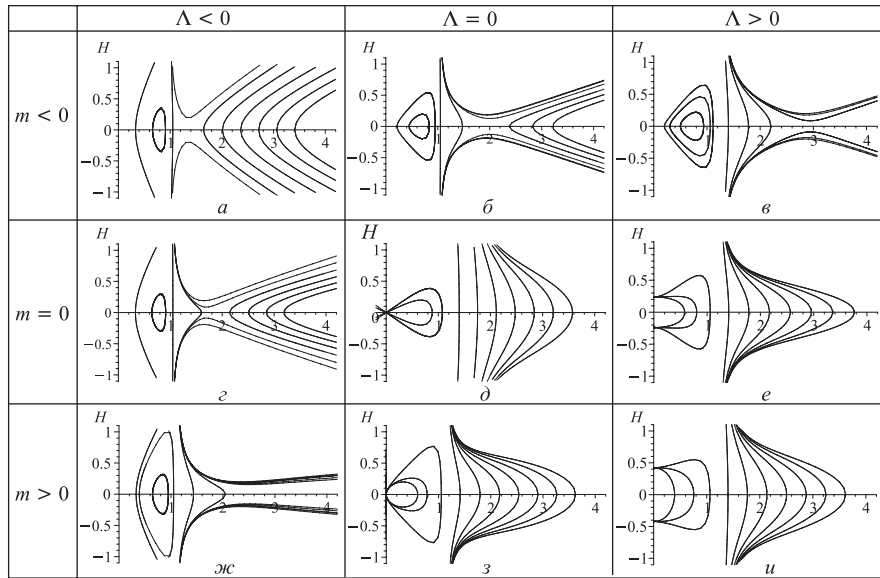
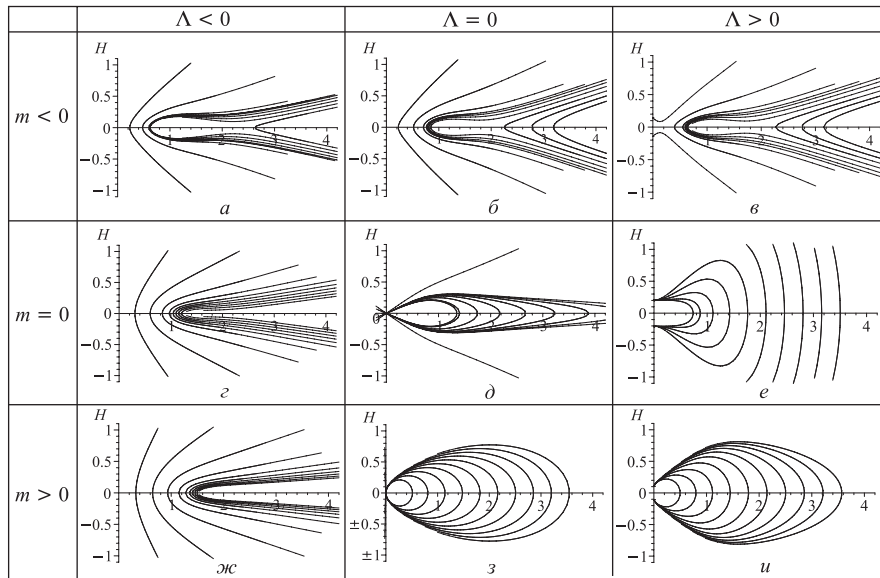
Таблица 18. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda < 0$ Таблица 19. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda > 0$ 

Таблица 20. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda < 0$

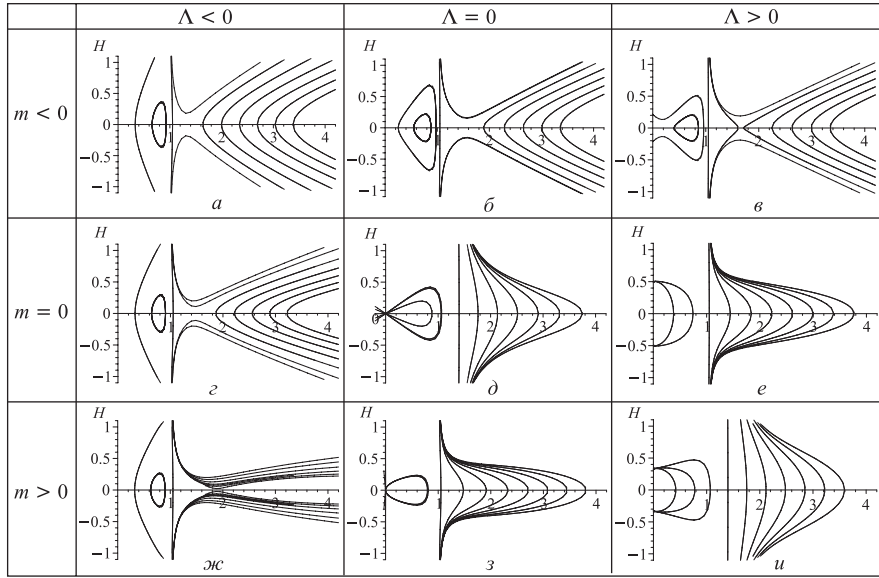


Таблица 21. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda > 0$

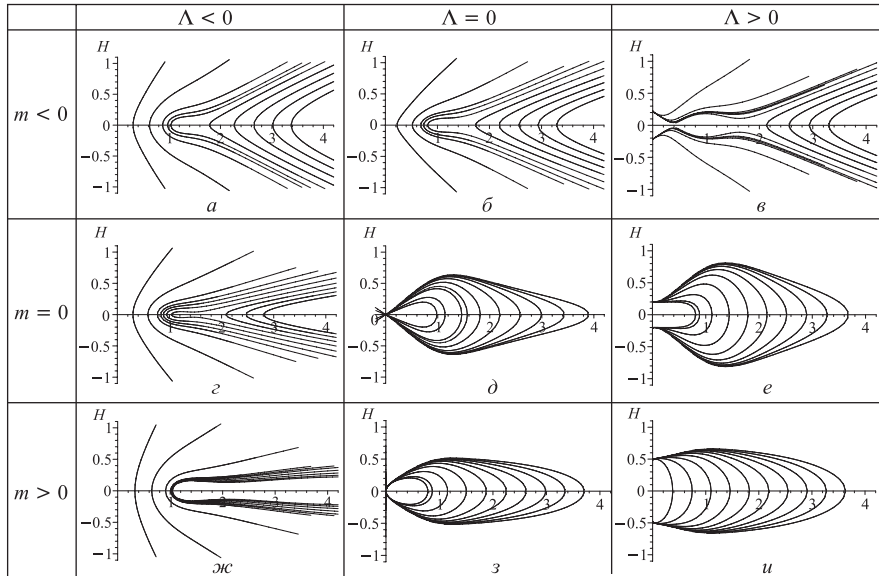


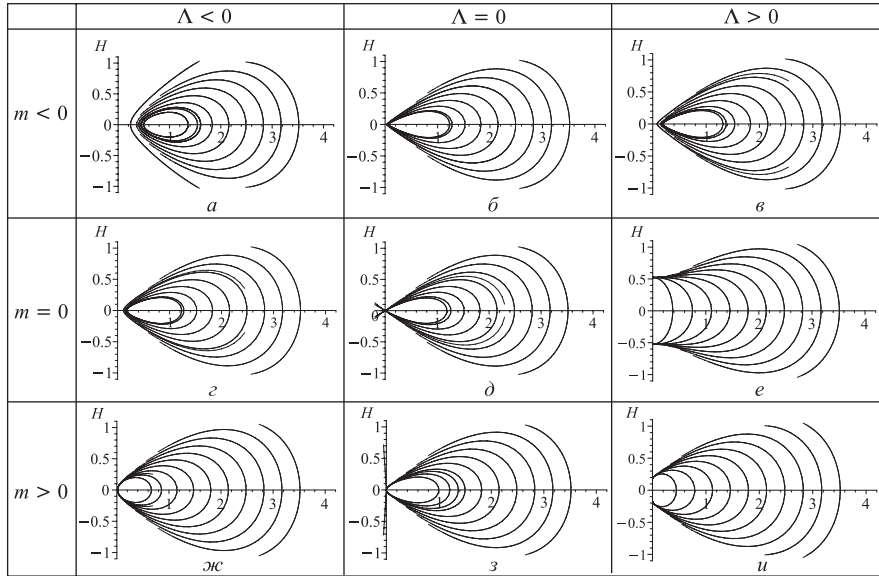
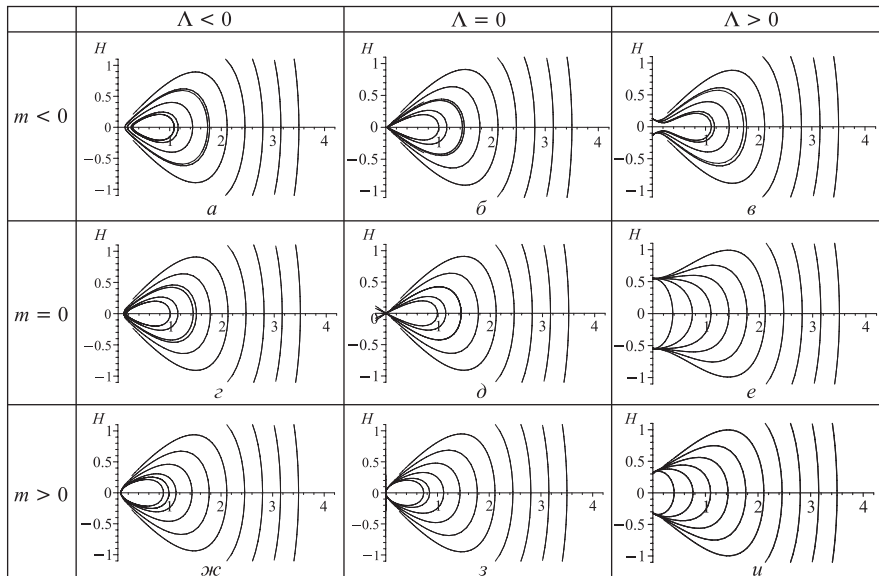
Таблица 22. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 1$ и $\lambda = 0$ Таблица 23. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 2$ и $\lambda = 0$ 

Таблица 24. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 3$ и $\lambda = 0$

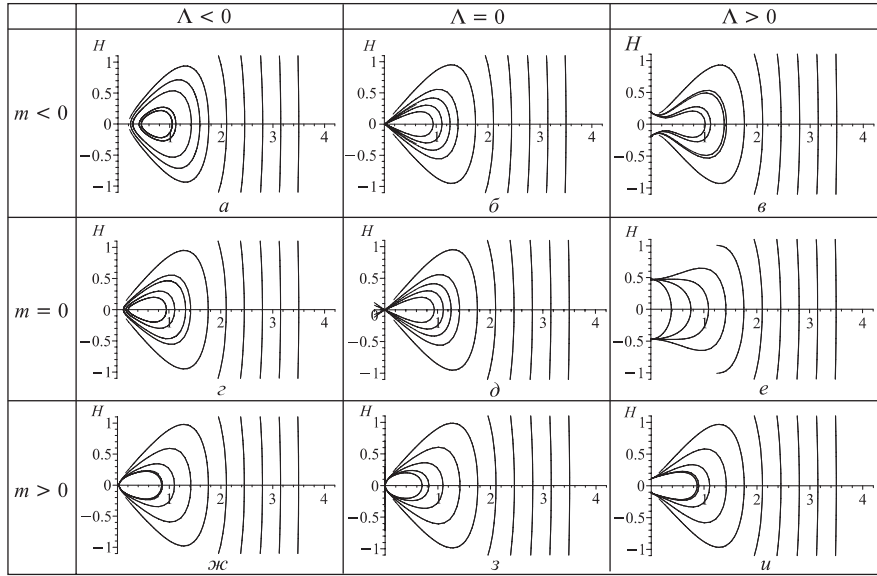


Таблица 25. Спинорное и скалярное поля. Плоскость $\varepsilon = 0$. Случай $n = 4$ и $\lambda = 0$

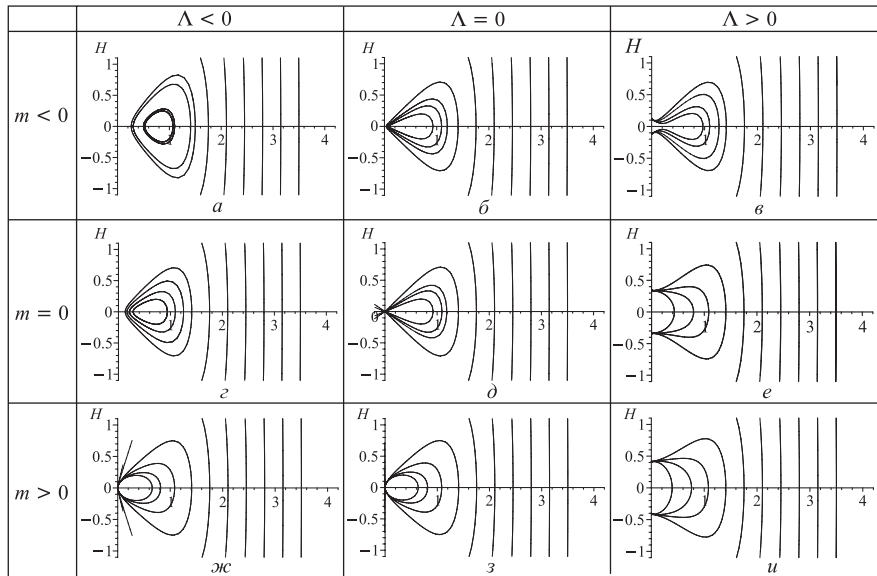


Табл. 15, 17, 19 и 21 показывают сходство поведения со скалярным и спинорным полем с поведением только со спинорным полем при $\lambda > 0$.

Табл. 22–25 демонстрируют пограничный случай $\lambda = 0$ с включенными спинорным и скалярным полями [84].

На рис. 28–45 мы иллюстрируем масштабный объем $\tau(t)$ (рис. 28, 31, 34, 37, 40 и 43), плотность энергии $\varepsilon(t)$ (рис. 29, 32, 35, 38, 41 и 44) и фазовый портрет в пространстве ν, H, ε (рис. 30, 33, 36, 39, 42 и 45). Рис. 28–39 соответствуют позициям *в*, *ж*, *з* и *и* в табл. 3. При этом мы использовали следующие значения параметров: $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\zeta = 0,5$, $A = 1$, $B = 1$ и $n = 4$. Позиции *з* и *и* соответствуют геометрически циклическому режиму, но позиция *з* имеет фиксированную точку на циклической интегральной кривой, следовательно, соответствует промежуточному случаю между периодической и непериодической эволюцией. Позиции *в* и *ж* соответствуют непериодической эволюции.

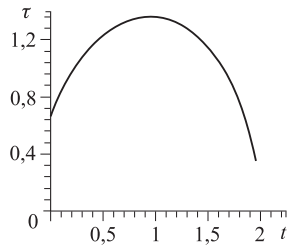


Рис. 28. Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$ ($m < 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$)

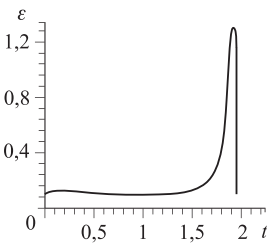


Рис. 29. Эволюция плотности энергии ($m < 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$)

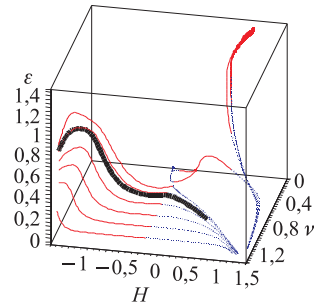


Рис. 30. 3D-вид в пространстве ν, H, ε ($m < 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$)

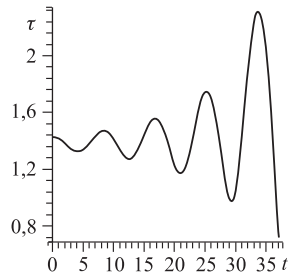


Рис. 31. Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$ ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

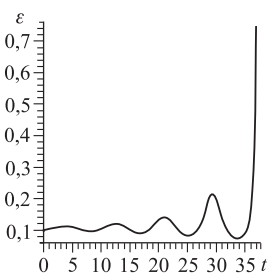


Рис. 32. Эволюция плотности энергии ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

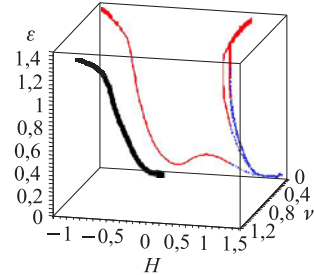


Рис. 33. 3D-вид в пространстве ν, H, ε ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

Жирная черная линия на 3D-рисунке (рис. 30, 33, 36, 39, 42 и 45) соответствует функциям $\tau(t)$ и $\varepsilon(t)$, представленным на предыдущих рисунках (рис. 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 40, 41, 43, 44). Рис. 28–30 и 37–39 соот-

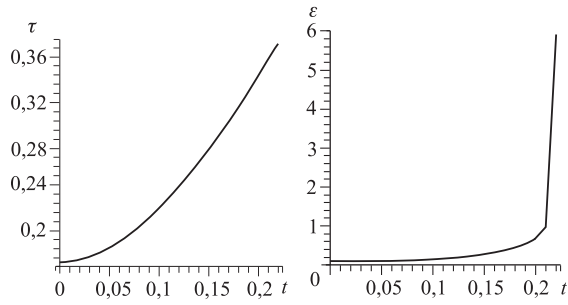


Рис. 34. Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$ ($m > 0, \Lambda = 0, \lambda > 0$)

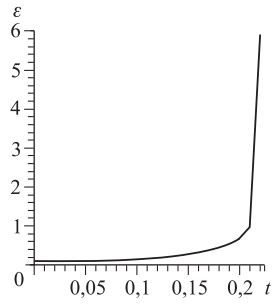


Рис. 35. Эволюция плотности энергии ($m > 0, \Lambda = 0, \lambda > 0$)

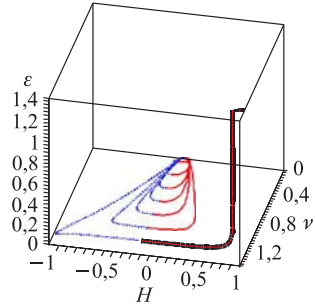


Рис. 36. 3D-вид в пространстве ν, H, ϵ ($m > 0, \Lambda = 0, \lambda > 0$)

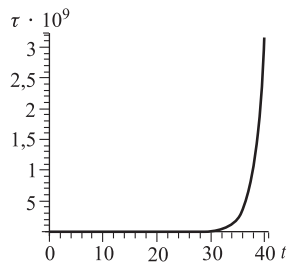


Рис. 37. Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$ ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

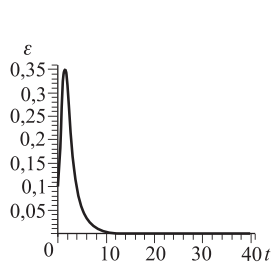


Рис. 38. Эволюция плотности энергии ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

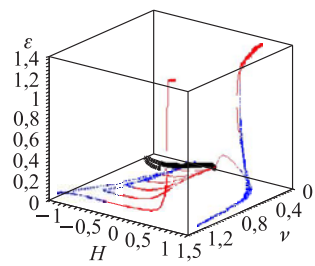


Рис. 39. 3D-вид в пространстве ν, H, ϵ ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

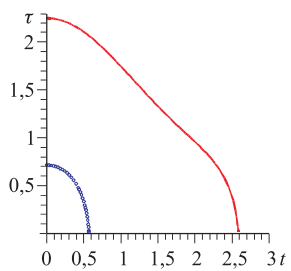


Рис. 40. Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$ ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

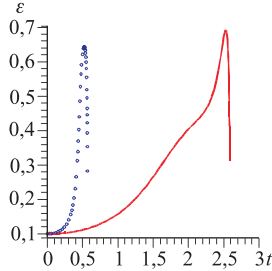


Рис. 41. Эволюция плотности энергии ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

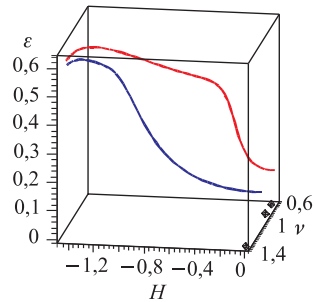


Рис. 42. 3D-вид в пространстве ν, H, ϵ ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

ветствуют случаю u табл. 1, рис. 31–33 — случаю z и рис. 34–36 — случаю e соответственно.

На рис. 28, 29 и 30 показаны τ, ϵ и фазовый портрет в ϵ, H, ν -пространстве для отрицательной m ($m = -0,1$), положительной Λ ($\Lambda = 0,1$)

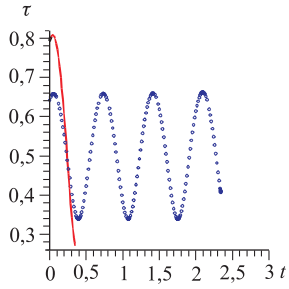


Рис. 43. Эволюция масштабного объема $\tau = 1/\nu$ ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

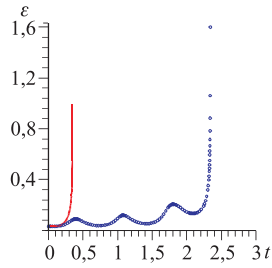


Рис. 44. Эволюция плотности энергии ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

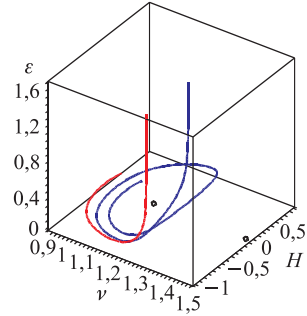


Рис. 45. 3D-вид в пространстве ν , H , ε ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

и отрицательной константы связи λ ($\lambda = -1$). И τ , и ε изначально растут и после достижения некоторого максимума начинают уменьшаться и в конце концов останавливаются при некоторых конечных значениях так, что H стремится к $-\infty$.

Здесь мы использовали отрицательное значение для массы спинорного поля. На самом деле это отнюдь не означает, что спинорное поле имеет отрицательную массу. Вводя отрицательную массу, мы просто поставили отрицательный знак перед массовым членом в уравнениях (2.18) и (2.36). Напомним, что в отличие от лагранжиана скалярного поля, где знак перед массовым членом имеет критическое значение, в случае спинорного поля все это выглядит совершенно по-иному. Чтобы вывести уравнение Дирака, мы потребуем, чтобы волновая функция ψ подчинялась уравнению Клейна–Гордона

$$(\square - m^2)\psi = 0. \quad (3.23)$$

Все это нужно для того, чтобы эта функция описывала свободную частицу массой m , поскольку это уравнение требует удовлетворительного отношения между энергией и импульсом свободной частицы $p^2 = m^2 c^2$. Для того чтобы функция ψ подчинялась уравнению (3.23), мы также можем потребовать, чтобы она удовлетворяла одному из следующих уравнений [8]:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \quad \text{или} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.24)$$

Оба они могут быть получены из лагранжиана

$$L = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] \pm m \bar{\psi} \psi. \quad (3.25)$$

Таким образом мы видим, что знак перед массовым членом в лагранжиане (3.25) дает только другой набор уравнений Дирака, в частности, уравнения для ψ и $\bar{\psi}$ поменяются местами.

Рис. 31, 32 и 33 соответствуют случаю с $m = 0,1$, $\Lambda = -0,1$ и $\lambda = 0,1$. В этом случае в начальной стадии имеется осциллирующий режим расширения (как это можно было ожидать при отрицательной Λ), но в конечном счете все кончается Большим хрустом (big crunch).

Рис. 34, 35 и 36 соответствуют параметрам $m = 0,1$, $\Lambda = 0$ и $\lambda = 0,1$, т. е. случаю без космологической постоянной. Как видно, в этом случае и τ , и ε растут со временем. H в данном случае положительная, быстро растет в начальной стадии, но через некоторое время стремится к некоторому конечному значению. В этом случае имеется сингулярность, в будущем похожая на Большой разрыв (big rip). Отметим, что в случае идеальной жидкости Большой разрыв возникает при наличии фантомной темной энергии (phantom dark energy), тогда как здесь это происходит благодаря вязкой жидкости и спинорному полю.

На рис. 37, 38 и 39 показаны соответствующие функции и их фазовый портрет при $m = 0,1$, $\Lambda = 0,1$ и $\lambda = 0,1$. Как можно было ожидать, положительная Λ приводит к расширенному режиму эволюции, при котором плотность энергии стремится к нулю.

При $m = 4$, $\Lambda = -1$ и $\lambda = -1$ имеем неперIODический режим эволюции (см. рис. 40). Но в отличие от Большого хруста, когда в точке пространственно-временной сингулярности ($\tau = 0$) плотность энергии стремится к ∞ , в рассматриваемом случае имеем максимальное, но конечное значение для ε (см. рис. 41). Соответствующий фазовый портрет иллюстрирован рис. 42. Как видно, независимо от начальных условий в ходе эволюции Вселенная сжимается в точку ($\tau \rightarrow 0$).

Наконец, на рис. 43, 44 и 45 даны τ , ε и фазовый портрет в ε -, H -, ν -пространстве при $m = 1$, $\Lambda = -10$ и $\lambda = 1$. В зависимости от начальных условий в этом случае имеем или неперIODический, или осциллирующий режим эволюции. Случай неперIODической эволюции, как и ожидалось, заканчивается большим хрустом. В случае осциллирующего режима эволюции с конечным и нетривиальным τ и конечным H ε стремится к бесконечности в конечном интервале времени.

3.4. Качественный анализ полной системы. Теперь с помощью табл. 1, 2 и 3 и основываясь на непрерывной зависимости полей скоростей от координат ν, H, ε фазового пространства, будем восстанавливать качественное представление о пространственном фазовом портрете.

Для того чтобы полностью охватить бесконечное пространство, отобразим его в параллелепипед, применив арктангенс к каждой координате. В последующем на рисунках нижняя горизонтальная плоскость будет изображать поверхность $\varepsilon = 0$.

Следует заметить, что введение спинорного поля заметно усложняет эволюцию системы. В противоположность случаю без спинорного поля начальные условия с $H < 0$ уже не препятствуют во многих случаях проникновению в полупространство $H > 0$ благодаря изменению масштабного параметра, и

только после этого со стороны больших значений H и при приближении к плоскости $\nu = 0$ вновь приходим к сценариям, классифицированным в табл. 1. Около границ $\varepsilon = 0$ и $\nu = 0$ интегральные кривые близки к интегральным кривым на границах. Вследствие непрерывности полей скоростей это всегда верно на некоторых конечных отрезках времени, в нашем случае это верно даже и для промежутков времени, стремящихся к бесконечным, если только при этом сохраняется близость к границе (предельные точки, например).

Общим свойством всех случаев является то, что в полупространстве $H > 0$ векторы скоростей направлены к плоскости $\varepsilon = 0$, в то время как в другой половине — от нее. В конечном счете, интегральные кривые стремятся к $\varepsilon = 0$, хотя не обязательно достигают ее.

На рис. 48–55 мы показали плотность энергии $\varepsilon(t)$ (рис. 46, 49, 52, 55), масштабный параметр $\tau(t)$ (рис. 47, 50, 53, 56) и фазовый портрет в пространстве ν, H, ε (рис. 48, 51, 54, 57) для $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, n = 4, m = 4$.

Непрерывная и пунктирная линии на рис. 46–57 соответствуют различным начальным условиям. При $\Lambda < 0$ в зависимости от знака λ существуют следующие варианты: (i) при $\lambda < 0$ имеется разделяющая плоскость, которая не позволяет решениям, имеющим начальные условия в одной части пространства, попасть в другую (см. рис. 46–48, что соответствует табл. 8, ж). (ii) При $\lambda > 0$ нет разделяющей плоскости (см. рис. 49–51, что соответствует табл. 9, ж). Как видно из примеров, отрицательное значение Λ , которое на самом деле является дополнительным гравитационным полем, создает осциллирующий режим эволюции.

В случае $\Lambda > 0$ существует только экспоненциальный режим эволюции. При $\lambda < 0$ имеется разделяющая плоскость (см. рис. 52–54, что соответствует табл. 8, и), в то время как при $\lambda > 0$ разделяющей плоскости нет (см. рис. 55–57, что соответствует табл. 9, и).

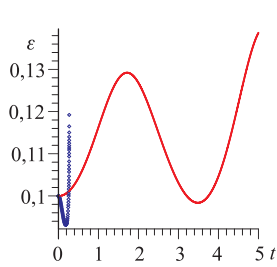


Рис. 46. Изменение плотности энергии ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

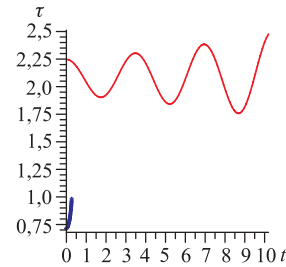


Рис. 47. Изменение объемного масштаба ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

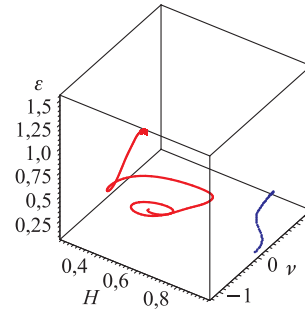


Рис. 48. 3D-вид в пространстве ν, H, ε ($m > 0, \Lambda < 0, \lambda < 0$)

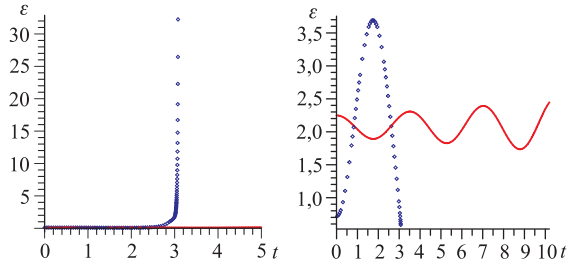


Рис. 49. Изменение плотности энергии ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

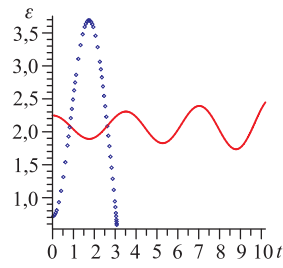


Рис. 50. Изменение объемного масштаба ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

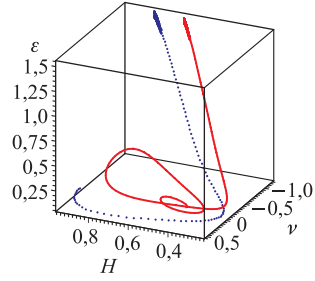


Рис. 51. 3D-вид в пространстве ν, H, ε ($m > 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$)

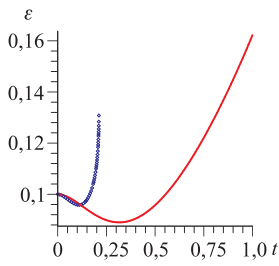


Рис. 52. Изменение плотности энергии ($m > 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$)

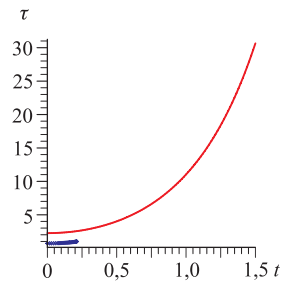


Рис. 53. Изменение объемного масштаба ($m > 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$)

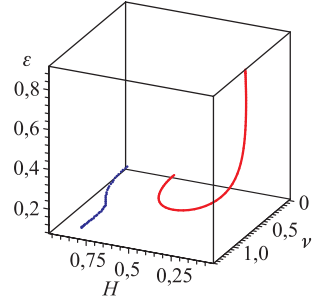


Рис. 54. 3D-вид в пространстве ν, H, ε ($m > 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$)

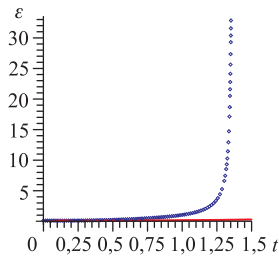


Рис. 55. Изменение плотности энергии ($m > 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$)

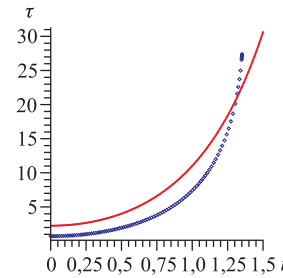


Рис. 56. Изменение объемного масштаба ($m > 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$)

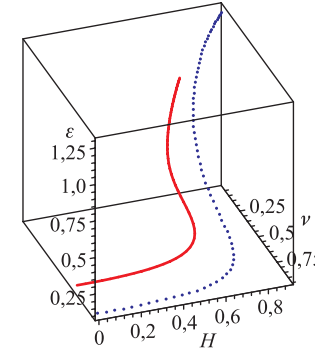


Рис. 57. 3D-вид в пространстве ν, H, ε ($m > 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$)

Если правая часть (3.15) имеет два положительных корня, между которыми она (H) положительная, то в плоскости $\varepsilon = 0$ имеется замкнутый цикл.

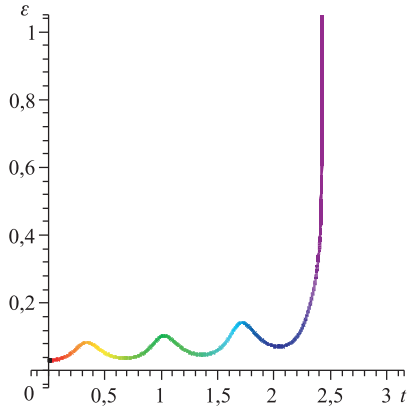


Рис. 58. Эволюция плотности энергии

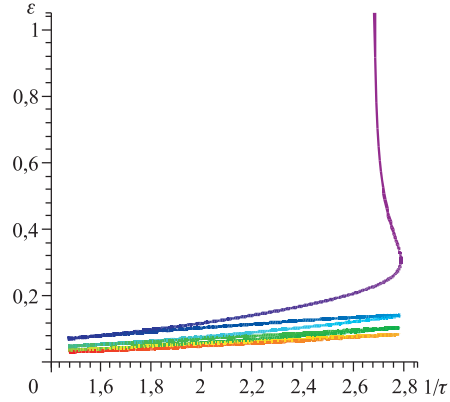


Рис. 59. Фазовая диаграмма ε и $\nu = 1/\tau$

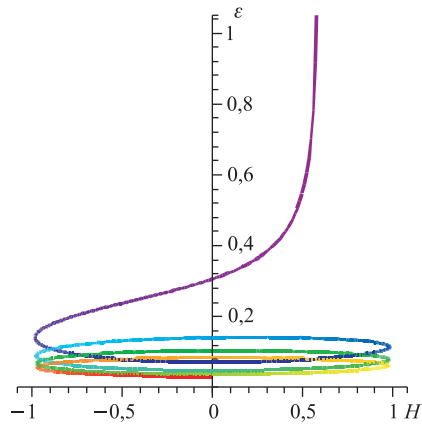


Рис. 60. Эволюция постоянной Хаббла

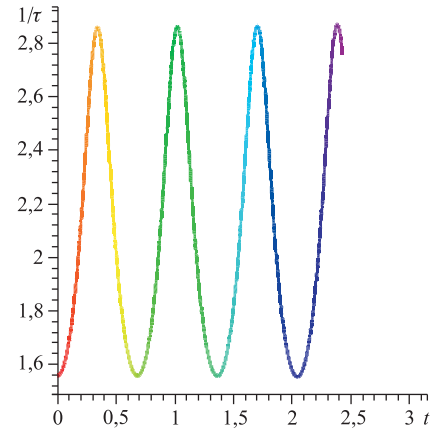


Рис. 61. Эволюция Вселенной около плоскости $\varepsilon \rightarrow 0$

Очевидно, что корней не может быть более трех, поэтому неконцентрических циклов не может быть. В пространстве около плоскости $\varepsilon = 0$, поэтому могут наблюдаться циклические колебания.

Особая точка, вокруг которой происходят колебания, имеет по необходимости $H = 0$ (так как $\varepsilon = 0$ и $\dot{\varepsilon} = 0$, нетривиальный цикл должен содержать особые точки, где $\dot{\tau} = 0$ и $\dot{H} = 0$). Заметим, что $\dot{\tau} = 0$ может быть достигнуто либо при $H = 0$, либо при $\tau = 0$. Так как $\tau = 0$ порождает пространственно-временную сингулярность, то мы рассмотрим случай с $H = 0$), и, следовательно, траектория колебания будет частично проходить

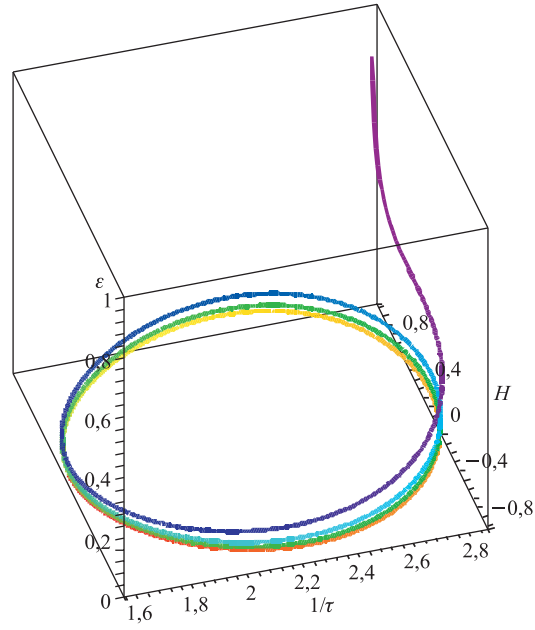


Рис. 62. Трехмерная диаграмма, показывающая колебательный режим расширения вблизи плоскости $\varepsilon \rightarrow 0$

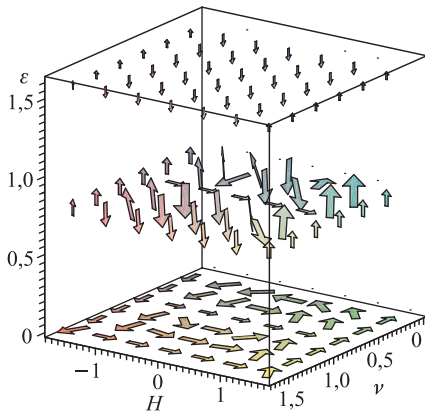


Рис. 63. Векторное поле, $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$

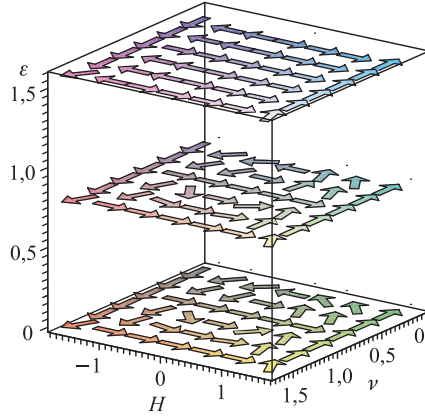


Рис. 64. Горизонтальная проекция векторного поля

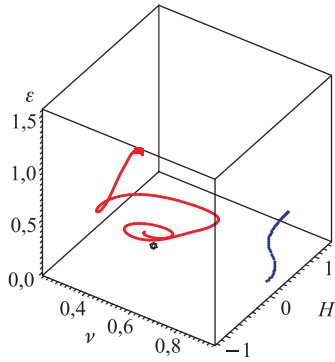


Рис. 65. Траектории эволюции, $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$

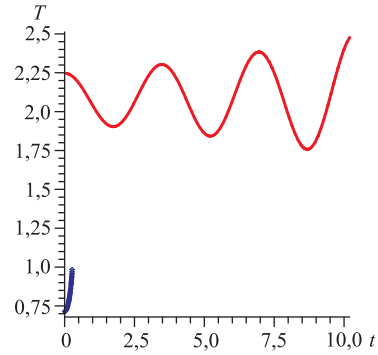


Рис. 66. Изменение объемного параметра

в области притяжения к плоскости $\varepsilon = 0$, частично в области отталкивания. Математическое моделирование показывает, что траектория колебания начинает раскручиваться и наступает момент, когда в области отталкивания рост ε становится доминирующим, т.е. становится таким большим, что кривая не успевает вернуться в область притяжения. Это приводит к тому, что ε становится бесконечной за конечный интервал времени. На рис. 58 показано поведение плотности энергии. Как видно, плотность энергии в конечном счете стремится к бесконечности. На рис. 59 видно, что когда $\varepsilon \rightarrow 0$, соответствующая вселенная VI является осциллирующей, но как только ε возрастает, τ стремится к некоторому маленькому, но постоянному значению, т.е. благодаря большой плотности энергии возникает сильное гравитационное поле, которое не позволяет вселенной VI расширяться до некоторого критического значения. Аналогичная картина, но по отношению к H , представлена на рис. 60. А трехмерная версия всего вышесказанного дана на рис. 62. На рис. 61 представлена эволюция Вселенной около плоскости $\varepsilon \rightarrow 0$, что показывает осциллирующий характер ее поведения. На рис. 63, 64 изображено векторное поле, на рис. 65, 66 — траектории эволюции.

4. ЭВОЛЮЦИЯ С ОБОСТРЕНИЕМ

Изучая решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), попытаемся представить себе интегральные кривые в пространстве. Очень важно знать поле направлений, заданное этой системой — более важно, чем ее векторное поле. Во-первых, интегральные кривые, по определению, касательны к векторному полю и, следовательно, к полю направлений; в тех же точках (особых), в которых векторное поле обнуляется, направление соответственно неопределено. Во-вторых, поле направлений так же непрерывно,

как и векторное поле (за исключением особых точек), но оно может быть непрерывно продолжено на границы, где векторное поле, возможно, становится бесконечным.

Нас будут интересовать два вопроса: насколько быстро решение может приближаться к бесконечно удаленной границе (попросту бесконечности) и как оно ведет себя на самой бесконечности. Постановка вопроса становится осмысленной, когда пространство замыкается путем пополнения бесконечно удаленными точками в какой-либо интерпретации.

Будем следовать принципу непрерывности Понселе — свойства системы при непрерывном изменении от одного общего положения до другого при сохранении общности не изменяются. Нас интересуют качественные свойства решений системы ОДУ. Непрерывно деформируя векторное поле, но не трогая особых точек, мы не меняем качественно поведения интегральных кривых — с точностью до топологической эквивалентности. Так, мы можем упростить анализ, заменяя исходную систему более простой, сконструированной из удобных элементов.

4.1. Обострение. История изучения режимов с обострением связывается с именем С. П. Курдюмова [17]. Изучение процессов распространения тепла в активной и нелинейной среде приводило к весьма своеобразным результатам: волнам и локализации. Математические модели демографии обнаруживают критические моменты: решение ОДУ (зависящее от времени) может достигать своего предельного значения за конечное время. Вспышечный (эруптивный) характер имеют процессы в хромосфере Солнца, при этом механизм переноса энергии не обнаруживает наличие предопределенного масштаба времени.

Для иллюстрации обнаружения характерного времени в системе, не содержащей явной зависимости от времени, рассмотрим пример

$$\dot{x} = -x^\alpha, \quad x \in R^+. \quad (4.1)$$

Он имеет два решения: а) $x(t) = 0$ и б) $x(t) = [x(0)^{1-\alpha} - t(1-\alpha)]^{1/(1-\alpha)}$.

В случае б) предельное значение $x(t_*) = 0$ достигается за конечное время $t_* = \frac{x(0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, если $\alpha < 1$. Затем оба решения сливаются. В момент t_* нарушается условие единственности (именно, условие Липшица).

Степенные зависимости характерны для самых различных катастроф: от землетрясений и наводнений до биржевых крахов и аварий в атомной энергетике.

4.2. Бесконечность. Присоединение бесконечно удаленной точки к пространству ОДУ

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^+ \quad (4.2)$$

выполним следующим образом: сделаем замену переменной $x = s/c$, $s^2 + c^2 = 1$. Бесконечно удаленной точкой назовем $\pm\infty = 1/0$.

Получим систему уравнений

$$\dot{s}c - \dot{c}s = c^2 F\left(\frac{s}{c}\right), \quad \dot{s}s + \dot{c}c = 0, \quad (4.3)$$

откуда с учетом $s^2 + c^2 = 1$ следует

$$\dot{s} = c^3 F\left(\frac{s}{c}\right), \quad \dot{c} = -sc^2 F\left(\frac{s}{c}\right). \quad (4.4)$$

Приведа в окрестности точки $s = 1, c = 0$ (но не в ней самой!) правые части системы к общему знаменателю и устранив его, мы не изменим поле направлений. Сохраняя именно этот смысл, определим направление в самой точке.

Вернемся теперь к системе уравнений и перепишем ее в виде

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (4.5a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3\xi H - (\varepsilon + p)) - (3H^2 - \varepsilon - \Lambda) + \frac{1}{2}\phi_1(\nu), \quad (4.5б)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3\xi H - (\varepsilon + p)) + 4\eta(3H^2 - \varepsilon - \Lambda) - 4\eta\phi_2(\nu), \quad (4.5в)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 есть функции от τ .

В случае только спинорного поля $\phi_1(\nu) = m\nu + \lambda(n - 2), \phi_2(\nu) = m\nu - \lambda\nu^n$.

Включение скалярного поля дает $\phi_1(\nu) = m\nu + \frac{n\nu^{n+2}}{2(1 + \lambda\nu^n)^2}, \phi_2(\nu) = m\nu + \frac{\nu^2}{2(1 + \lambda\nu^n)}$.

Вблизи точки $\varepsilon = \infty$ сделаем замену $\varepsilon = 1/\mu$. Система примет вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (4.6a)$$

$$\dot{H} = \frac{3}{2}BH\mu^{-\beta} + \frac{1}{2}(1 - \zeta)\mu^{-1} - 3H^2 + \Lambda + \frac{1}{2}\phi_1(\nu), \quad (4.6б)$$

$$\dot{\mu} = 4A(-3H^2 + \Lambda + \phi_2(\nu))\mu^{2-\alpha} - 9BH^2\mu^{2-\beta} + 4A\mu^{1-\alpha} + 3H(1 + \zeta)\mu. \quad (4.6в)$$

Как видно из (4.6в), в отсутствие вязкости обоих родов ($A = 0, B = 0$) обострение по плотности энергии невозможно.

Будет ли обострение в будущем или в прошлом, зависит от знака коэффициента при степени μ с наименьшим показателем.

Пусть $A = 0$. Для того чтобы обострение появилось при конечном значении H , необходимо, чтобы было $\beta > 1$. В этом случае особенность будет в будущем (big rip).

Пусть теперь $B = 0$. В этом случае обострение наступит в обратном времени (в прошлом — big bang), если $\alpha > 1$.

В приведенном далее случае имеются траектории, на которых бесконечная плотность энергии ε достигается за конечное время. Пунктирные линии обозначают прошлое, сплошные — будущее.

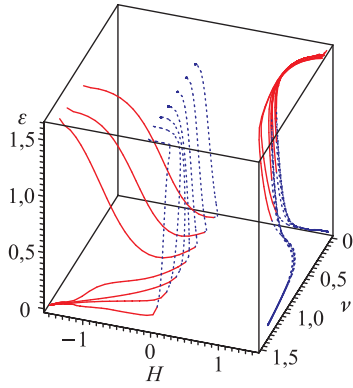


Рис. 67. Траектория эволюции в случае спинорного поля с самодействием

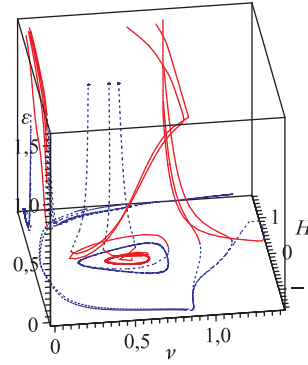


Рис. 68. Траектория эволюции в случае взаимодействующих спинорного и скалярного полей

На рис. 67, 68 показано, как меняются объем, параметр Хаббла или плотность энергии. И в обоих случаях существует место для бесконечного роста плотности энергии при бесконечном объеме — т. е. возникает так называемый Большой разрыв. При численном моделировании использовались следующие значения для параметров: $\alpha = 4, \beta = 1, \zeta = 1/2, A = 1, B = 1, m = 4, \Lambda = -1, \lambda = -1$.

5. ВЫВОДЫ

В рамках космологической модели типа Бианки-I рассмотрена самосогласованная система нелинейного спинорного, скалярного и гравитационного полей в присутствии вязкой жидкости и космологической постоянной. Нелинейный член в лагранжиане спинорного поля возникает либо за счет самодействия, либо в результате взаимодействия со скалярным полем.

Выведена система уравнений для масштаба объема τ , постоянной Хаббла H и плотности энергии ε . Полученные решения выражены посредством функции $\tau(t)$, где τ является масштабной единицей объема вселенной типа VI. Найдены точные решения при некоторых специальных выборах нелинейности и вязкости.

Поскольку эта система сама по себе является очень интересной, был проведен детальный качественный анализ и выяснены роли различных параметров, входящих в систему. Выполнен полный качественный анализ эволюции

на границах и получены численные решения для некоторых особо интересных случаев. Показано, что при некоторых специальных значениях параметров система даже при отсутствии космологической постоянной допускает решения типа Большого разрыва (big rip), что характерно для системы с фантомной материей. В отличие от системы с идеальной жидкостью, где знак Λ -члена определяет, будет ли эволюция с ускоренным расширением или колебательной, в случае вязкой жидкости он уже не играет такой роли. В зависимости от параметров эволюция может быть расширяющейся или осциллирующей при любом знаке Λ .

Эта система также была изучена с точки зрения обострения. Показано, что обострение возможно только при наличии вязкости. Следует отметить, что подобные явления наблюдаются и в других областях физики и представляют большой интерес с точки зрения теории катастроф, демографии и т. д.

В связи с тем, что в последние годы в литературе появляется большое число работ, где помимо данных наблюдений также принимается во внимание влияние вязкости в эволюции Вселенной, мы можем ожидать, что всестороннее исследование системы, которое сделано в нашей работе, в конечном счете поможет нам понять Вселенную как она есть.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альварадо Р. и др. Взаимодействующие спинорное и скалярное поля: точные самосогласованные решения в пространстве типа Бианки-I // Изв. вузов. Физика. 1995. Т. 38, № 7. С. 53–58.
2. Альварадо Р., Саха Б., Шикин Г. Н. О взаимодействии спинорного и скалярного полей во внешнем космологическом гравитационном поле типа Бианки-I // Вест. РУДН. Физика. 1996. Т. 4, № 1. С. 38–51.
3. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1999.
4. Барбашов Б. М., Первушин В. Н., Проскурин Д. В. Экскурс в современную космологию // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34, вып. 7. С. 137–189.
5. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии // УФН. 1970. Т. 102. С. 463–500.
6. Белинский В. А., Халатников И. М. О влиянии вязкости на характер космологической эволюции // ЖЭТФ. 1975. Т. 69, № 2(8). С. 401–413.
7. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 723 с.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973. 416 с.
9. Желнорович В. А. Теория спиноров и ее применение в физике и механике. М.: Наука, 1982. 270 с.

10. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Стрoение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975. 735 с.
11. *Иваненко Д. Д.* Введение в теорию элементарных частиц // УФН. 1947. Т. 32, № 2. С. 149–184.
12. *Иваненко Д. Д.* Введение в теорию элементарных частиц // Там же. С. 261–315.
13. *Прудриков А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. М., 1981. С. 798.
14. *Рыбаков Ю. П., Саха Б., Шикин Г. Н.* Точные самосогласованные решения нелинейных уравнений спинорного поля в пространстве Бианки-I // Неевклидовы пространства и новые проблемы физики: Сб. ст., посвященный 200-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского. М., 1993. С. 30–34.
15. *Рыбаков Ю. П., Саха Б., Шикин Г. Н.* Нелинейные спинорные поля в пространстве типа Бианки-I: Точные самосогласованные решения // Изв. вузов. Физика. 1994. Т. 37, № 7. С. 40–45.
16. *Рыбаков Ю. П., Саха Б., Шикин Г. Н.* Нелинейное спинорное поле во внешнем гравитационном поле типа Бианки-I и проблема устранения начальной сингулярности // Вестн. РУДН. Физика. 1994. Т. 2, № 2. С. 61–78.
17. *Самарский А. А. и др.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений. Препринт ИПМ. 1979. № 161; Режимы с обострением: эволюция идеи: Сб. / Сост. В. С. Курдюмов; Под ред. Г. Г. Малинецкого. М., 2006.
18. *Саха Б.* Многомерные солитоны в нелинейных моделях с гравитацией. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1993.
19. *Саха Б., Рухвицкий В. С.* Бианки типа-I космологическая модель с вязкой жидкостью и спинорным полем: качественный анализ // Вестн. РУДН. Математика, информатика и физика. 2007. № 3–4. С. 130–134.
20. *Alvarado R. et al.* Exact Self-Consistent Solutions to the Interacting Spinor and Scalar Field Equations in Bianchi Type-I Space-Time // Commun. Theor. Phys. 1995. V. 4, No. 2. P. 247–262.
21. *Barrow J. D.* String-Driven Inflationary and Deflationary Cosmological Models // Nucl. Phys. B. 1988. V. 310. P. 743–763.
22. *Belinskii V. A., Khalatnikov I. M., Lifshitz E. M.* Oscillatory Approach to a Singular Point in the Relativistic Cosmology // Adv. Phys. 1970. V. 19. P. 525–573.
23. *Banerjee A., Duttachoudhury S. B., Sanyal A. K.* Bianchi Type-I Cosmological Model with a Viscous Fluid // J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 3010–3015.
24. *Brill D., Wheeler J.* Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 465–479.
25. *Chimento L. P. et al.* Cosmological Solutions with Nonlinear Bulk Viscosity // Class. Quant. Gravity. 1997. V. 14. P. 3363–3375.
26. *Coley A. A., van den Hoogen R. J., Maartens R.* Qualitative Viscous Cosmology // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 1393–1397.

27. *Coley A. A., van den Hoogen R. J.* Qualitative Analysis of Causal Anisotropic Viscous-Fluid Cosmological Models // *Class. Quant. Gravity*. 1995. V. 12. P. 2335–2354.
28. *Coley A. A., van den Hoogen R. J.* Qualitative Analysis of Viscous Fluid Cosmological Models Satisfying the Israel–Stewart Theory of Irreversible Thermodynamics // *Ibid.* P. 1977–1994.
29. *Desikan K.* Cosmological Models with Bulk Viscosity in the Presence of Particle Creation // *Gen. Relativity and Gravitation*. 1997. V. 29. P. 435–443.
30. *Einstein A.* Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* 1917. Bd. 1. S. 142–152.
31. *Einstein A.* Spielen die Gravitationsfelder im Aufbau der Materiellen Elementarteilchen Eine Wesentliche Rolle? // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* 1919. Bd. 1. S. 349–356.
32. *van Elst H., Dunsby P., Tavakol R.* Constraints on Inflationary Solutions in the Presence of Shear and Bulk Viscosity // *Gen. Relativity and Gravitation*. 1995. V. 27. P. 171–191.
33. *Fierz M.* Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls // *Z. Phys. A: Hadrons and Nuclei*. 1937. V. 104. P. 553–565.
34. *Friedmann A. A.* Über die Krümmung des Raumes // *Z. Phys.* 1922. V. 10. P. 377–386.
35. *Gavrilov V. R., Melnikov V. N., Triay R.* Exact Solutions in Multi-Dimensional Cosmology with Shear and Bulk Viscosity // *Class. Quant. Gravity*. 1997. V. 14. P. 2203–2218.
36. *Grøn Ø.* Viscous Inflationary Universe Models // *Astrophys. and Space Sci.* 1990. V. 173. P. 191–225.
37. *Guth A.* Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D*. 1981. V. 23, No. 2. P. 347–356.
38. *Hawking S.* A Brief History of Time. From the Big Bang to Black Holes. Toronto: Bantam Books, 1988. 198 p.
39. *Hawking S., Mlodinow L.* A Briefer History of Time. Random House, 2005. 176 p.
40. *Heisenberg W.* Doubts and Hopes in Quantum-Electrodynamics // *Physica*. 1953. V. 19. P. 897–908.
41. *Heisenberg W.* Quantum Theory of Fields and Elementary Particles // *Rev. Mod. Phys.* 1957. V. 29, No. 3. P. 269–278.
42. *Huang W.* Anisotropic Cosmological Models with Energy Density Dependent Bulk Viscosity // *J. Math. Phys.* 1990. V. 31, No. 6. P. 1456–1462.
43. *Israel W.* Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory // *Ann. Phys.* 1976. V. 100. P. 310–331.
44. *Israel W., Stewart J. M.* On Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory // *Proc. Roy. Soc. of London. A*. 1979. V. 365. P. 43–52.
45. *Israel W., Stewart J. M.* Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory. II // *Ann. Phys.* 1979. V. 118. P. 341–372.

46. *Jacobs K. C.* Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear // *Astrophys. J.* 1968. V. 153, No. 2. P. 661–678.
47. *Kaempffer F. A.* Spinor Electrodynamics as a Dynamics of Currents // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 918–921.
48. *Kamke E.* *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1957. 576 p.
49. *Krori K. D., Mukherjee A.* Bianchi Cosmologies with Particle Creation and Bulk Viscosity // *Gen. Relativity and Gravitation.* 2000. V. 32. P. 1429–1438.
50. *Langacker P.* Grand Unified Theories and Proton Decay // *Phys. Rep.* 1981. V. 72, No. 4. P. 185–385.
51. *Misner W.* Transport Process in the Primordial Fireball // *Nature.* 1967. V. 214. P. 40–41.
52. *Misner W.* The Isotropy of the Universe // *Astrophys. J.* 1968. V. 151. P. 431–457.
53. *Murphy G. L.* Big-Bang Model without Singularities // *Phys. Rev. D.* 1973. V. 8. P. 4231–4233.
54. *Pacher T., Stein-Schabas J. A., Turner M. S.* Can Bulk Viscosity Drive Inflation? // *Phys. Rev. D.* 1987. V. 36. P. 1603–1606.
55. *Pervushin V. N.* Relativistic Universe Scenario. gr-qc/0804.4821v1. 13 p.
56. *Pradhan A., Pandey P.* Some Bianchi Type-I Viscous Fluid Cosmological Models with a Variable Cosmological Constant. gr-qc/0407112. 2004.
57. *Pradhan A., Singh S. K.* Bianchi Type-I Magnetofluid Cosmological Models with Variable Cosmological Constant Revisited // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2004. V. 13. P. 503.
58. *Ribas M. O., Devecchi F. P., Kremer G. M.* Fermions as Sources of Accelerated Regimes in Cosmology // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 123502.
59. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure // *Astrophys. J.* 1935. V. 82. P. 284.
60. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure II // *Astrophys. J.* 1936. V. 83. P. 187.
61. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure III // *Ibid.* P. 257.
62. *Rybakov Yu. P., Saha B., Shikin G. N.* Exact Self-Consistent Solutions to Nonlinear Spinor Field Equations in Bianchi Type-I Space-Time // *Commun. Theor. Phys.* 1994. V. 3, No. 2. P. 199–210.
63. *Saha B., Shikin G. N.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions // *J. Math. Phys.* 1997. V. 38, No. 10. P. 5305–5318; gr-qc/9609055.
64. *Saha B., Shikin G. N.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type-I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions // *Gen. Relativity and Gravitation.* 1997. V. 29, No. 9. P. 1099–1112; gr-qc/9609056.
65. *Saha B.* Interacting Scalar and Spinor Fields in Bianchi Type-I Universe Filled with Magneto-Fluid // *J. Astrophys. Space Sci.* 2005. V. 299, No. 1. P. 149–158; gr-qc/0309062.

66. *Saha B., Shikin G. N.* On the Role of Λ -Term in the Evolution of Bianchi-I Cosmological Model with Nonlinear Spinor Field // *PFU Reports: Phys.* 2000. V. 8, issue 1. P. 17–20; gr-qc/0102059.
67. *Saha B.* Spinor Field in Bianchi Type-I Universe: Regular Solutions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 123501; gr-qc/0107013.
68. *Saha B.* Dirac Spinor in Bianchi-I Universe with Time Dependent Gravitational and Cosmological Constants // *Mod. Phys. Lett. A.* 2001. V. 16, No. 20. P. 1287–1296; gr-qc/0009002.
69. *Saha B., Boyadjiev T.* Bianchi Type-I Cosmology with Scalar and Spinor Fields // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 124010; gr-qc/0311045.
70. *Saha B.* Spinor Fields in Bianchi Type-I Universe // *Part. Nucl.* 2006. V. 37, Suppl. 1. P. S13–S44.
71. *Saha B.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Cosmology. gr-qc/0701059. 2007.
72. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy // *Chin. J. Phys.* 2005. V. 43, No. 6. P. 1035–1043; gr-qc/0412078.
73. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with a Perfect Fluid and a Λ -Term // *Astrophys. and Space Sci.* 2006. V. 302. P. 83–91; gr-qc/0411080.
74. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy Re-examined // *Intern. J. Theor. Phys.* 2006. V. 45, No. 5. P. 983–995; gr-qc/0501067.
75. *Saha B.* Spinor Field and Accelerated Regimes in Cosmology // *Gravitation & Cosmology.* 2006. V. 12, No. 2–3 (46–47). P. 215–218; gr-qc/0512050.
76. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Cosmology: Inflation, Isotropization, and Late Time Acceleration // *Phys. Rev. D.* V. 74. P. 124030.
77. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Cosmology: Accelerated Regimes // *Rom. Rep. Phys.* 2007. V. 59, No. 2. P. 649–660.
78. *Saha B.* Bianchi Type Universe with Viscous Fluid // *Mod. Phys. Lett. A.* 2005. V. 20, No. 28. P. 2127–2143; gr-qc/0409104.
79. *Saha B., Rikhvitsky V.* Bianchi Type-I Universe with Viscous Fluid and a Λ -Term: A Qualitative Analysis // *Physica D.* 2006. V. 219. P. 168–176; gr-qc/0410056.
80. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Viscous Fluid: Some Special Solutions // *Rom. Rep. Phys.* 2005. V. 57, No. 1. P. 7–24.
81. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Viscous Fluid: Numerical Solutions // *Astrophys. and Space Sci.* 2007. V. 312. P. 3–11; gr-qc/0703085.
82. *Saha B., Rikhvitsky V.* Anisotropic Cosmological Models with Spinor Field and Viscous Fluid in Presence of a Λ -Term: Qualitative Solutions // *J. Phys. A: Math. and Theor.* 2007. V. 40. P. 14011–14027; gr-qc/0705.3128v1.
83. *Saha B.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type-I Universe Filled with Viscous Fluid: Exact and Numerical Solutions. gr-qc/0703124. 2007.

84. *Saha B., Rikhvitsky V.* Anisotropic Cosmological Models with Spinor and Scalar Fields and Viscous Fluid in Presence of a Λ -Term: Qualitative Solutions. gr-qc/0803.3544v1.
85. *Santos N. O., Dias R. S., Banerjee A.* Isotropic Homogeneous Universe with Viscous Fluid // *J. Math. Phys.* 1985. V. 26, No. 4. P. 878–881.
86. *Takahashi Y.* Reconstruction of a Spinor via Fierz Identities // *Phys. Rev. D.* 1982. V. 26. P. 2169–2171.
87. *Waga L., Falcan R. C., Chanda R.* Bulk-Viscosity-Driven Inflationary Model // *Phys. Rev. D.* 1986. V. 33. P. 1839–1841.
88. *Walker A. G.* On Milne's Theory of World-Structure // *Proc. of the London Math. Soc.* 1937. V. 42(2). P. 90–127.
89. *Weinberg S.* Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe // *Astrophys. J.* 1972. V. 168, No. 2. P. 175–194.
90. *Weinberg S.* *Gravitation and Cosmology.* N. Y.: Wiley, 1972. 657 p.
91. *Weinberg S.* The Cosmological Constant Problem // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61. P. 1–23.