

РАННЯЯ ИНФЛЯЦИЯ, ИЗОТРОПИЗАЦИЯ
И ПОЗДНЕЕ УСКОРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ
ТИПА БИАНКИ-I

*Б. Саха**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1238
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ	1246
АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ	1250
Модель с космологической постоянной.	1250
Модель с квинтэссенцией.	1256
Случай с газом Чаплыгина.	1258
Случай с модифицированной квинтэссенцией.	1259
СПИНОРНОЕ ПОЛЕ КАК АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ИСТОЧНИК УСКОРЕННОГО РАСШИРЕНИЯ	1261
ВЫВОДЫ	1266
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1267

*E-mail: bijan@jinr.ru; URL: <http://www.jinr.ru/~bijan>

РАННЯЯ ИНФЛЯЦИЯ, ИЗОТРОПИЗАЦИЯ И ПОЗДНЕЕ УСКОРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ ТИПА БИАНКИ-I

*Б. Саха**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Решается система уравнений Эйнштейна для метрики типа Бианки-I, которая описывает однородную и изотропную Вселенную. Данные дифференциальные уравнения являются нелинейными уравнениями второго порядка и зависят только от времени. Дан метод решения, и найдены формулы общего решения. Формулы вычислены для некоторых частных случаев аналитически. В случаях общего положения возможные типы решения проиллюстрированы численным интегрированием. При этом эволюция Вселенной исследовалась при наличии различного рода источника, а именно идеальной жидкости, жидкости Ван-дер-Ваальса, космологической постоянной, квинтэссенции, газа Чаплыгина, модифицированной квинтэссенции, а также нелинейного спинорного поля. Показано, что жидкость Ван-дер-Ваальса приводит к инфляции в начальной стадии эволюции, а модифицированная квинтэссенция порождает циклическую или осциллирующую Вселенную. Установлено, что при некоторых специальных выборах параметров позднее ускорение может быть объяснено с помощью нелинейного спинорного поля.

We solve the Einstein equations for Bianchi type-I metric describing a homogeneous and anisotropic Universe. The differential equations in question are nonlinear second-order equations and depend on time only. The method of solution is given and formulas for general solutions are obtained. The formulas are calculated analytically for some partial cases. In general case, possible types of solutions are illustrated by means of numerical integration. The evolution of the Universe was investigated for different types of source fields, namely, perfect fluid, Van der Waals fluid, cosmological constant, quintessence, Chaplygin gas, modified quintessence, and nonlinear spinor field. It is shown that the Van der Waals fluid leads to the early inflation, while modified quintessence generates cyclic or oscillatory Universe. It is established that for some special choice of parameters the late time acceleration can be explained with a nonlinear spinor field.

PACS: 04.20.Na; 03.65.Pm; 04.20.Jb; 98.80.Cq

1. ВВЕДЕНИЕ

Доисторическая астрономия, начиная с «Системы мира» Птолемея (140 г. до н. э.) и включая труд Коперника «Об обращениях небесных сфер» (1543 г.), имела дело лишь с Солнечной системой, а видимые невооруженным глазом

*E-mail: bijan@jinr.ru; URL: <http://www.jinr.ru/~bijan>

звезды помещались на воображаемую неподвижную небесную сферу. Телескопическая астрономия, начало которой положил Галилей в 1608 г., не противоречила бесконечности Вселенной. Построение огромных телескопов и работы Хаббла положили начало современной астрономии, а общая теория относительности Эйнштейна указала путь, по которому должна идти современная космология. С подробной историей развития космологии можно познакомиться в обзоре [1].

Экспериментальные исследования изотропии космического микроволнового фонового излучения и размышления о количестве гелия, сформированного в начальной стадии эволюции Вселенной, стимулировали теоретическое изучение анизотропных космологических моделей. В настоящей стадии эволюции Вселенная сферически-симметрична и распределение материи на ней в общем изотропно и однородно. Но в начальной стадии эволюции картина не могла бы быть такой гладкой, так как вблизи сингулярности Большого взрыва (big bang) предположение о сферической симметрии, равно как и об изотропии, не могло быть строго допустимым. Анизотропия космического расширения, которая, как предполагается, исчезает со временем, является очень важной величиной. Последние экспериментальные данные, а также теоретические аргументы поддерживают существование анизотропной фазы расширения, которая ведет к изотропной фазе. Как раз это обстоятельство и диктует изучение модели Вселенной с анизотропным фоном.

Самые простые модели расширяющейся Вселенной — это те, которые пространственно-однородны и изотропны. Такие модели впервые были изучены А. А. Фридманом [37, 38], Робертсоном (Robertson) [74–76] и Уокером (Walker) [103]. Хотя пространственно-однородные и изотропные модели Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW) широко используются как хорошие аппроксимации настоящей и начальной стадии Вселенной, крупномасштабное распределение материи в наблюдаемой Вселенной, в основном представленной в форме дискретной структуры, не показывает однородность в высших порядках. Напротив, реликтовое излучение, что существенно в микроволновой области, чрезвычайно однородно. Однако последние космические исследования зафиксировали анизотропию в космическом микроволновом фоне. Наблюдения дифференциального радиометра космической фоновой аппаратуры (Cosmic Background Explorer) зафиксировали анизотропии в разных угловых шкалах. Предполагается, что эти анизотропии скрывают в своих недрах всю историю космической эволюции вплоть до рекомбинации и рассматриваются как показатель (indicative) геометрии и составляющей материи Вселенной. Еще больше об анизотропии космического микроволнового фона, как ожидается, будет известно после исследования пробы микроволновой анизотропии. Существует широкое согласие среди космологов, что у анизотропии космического микроволнового фона в малой угловой шкале имеется ключ к формированию дискретной структуры. Теоретические аргументы [63] и со-

временные экспериментальные данные поддерживают существование анизотропной фазы, которая переходит в изотропную. Именно это обстоятельство приводит к рассмотрению модели с анизотропной историей.

Первые анизотропные космологические модели для изучения реальных космологических проблем были использованы Лемитром (Lemaitre) [60]. Целью его работы было выяснить, является ли сингулярность Большого взрыва, которая возникает в модели Фридмана–Робертсона–Уокера, просто следствием предполагаемой симметрии. В конце 60-х годов прошлого века три различные парадигмы астрофизического исследования определяли интерес к однородным, но анизотропным космологическим моделям [101]: дискутируя о возможности исконного (primordial) магнитного поля, Зельдович [2] и Торн (Thorne) [102] рассматривали анизотропные космологические модели; изучая факторы, которые могут повлиять на количество первичного гелия в космологии Большого взрыва, Хоукинг (Hawking) и Тейлор (Tayler) [49] рассматривали анизотропные модели; Кристиан (Kristian) и Сач (Sachs) [59], так же как Кантовский (Kantowski) и Сач [56], изучая степень того, насколько наша Вселенная является на самом деле изотропной, рассматривали анизотропные космологические модели. Зельдович впервые предложил, что ранняя изотропизация процесса космологического расширения может возникать вследствие квантового эффекта рождения частиц вблизи сингулярности [3]. Это предположение далее подтверждалось разными авторами [4, 51, 62]. Интерес к изучению уравнений Клейна–Гордона и Дирака в анизотропных моделях вырос после того как Ху (Hu) и Паркер (Parker) [51] доказали, что рождение скалярных частиц в анизотропном фоне может рассеять анизотропию с расширением Вселенной. Исследования, похожие на сделанные Лемитром, были проведены в 1960-х гг. Их цель — объяснить избыток гелия с помощью анизотропной космологии. Это может случиться, поскольку анизотропия ускоряет эволюцию на протяжении первичного формирования дейтерия (deuterium) и нейтроны и фотоны уже больше не находят друг друга для соединения. Пионерская работа в этой области была сделана в [49].

Вселенная типа Бианки-I (BI), будучи непосредственным обобщением плоской вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW), является одной из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно-плоскую Вселенную. В отличие от вселенной FRW, у которой масштабные факторы во всех трех направлениях одинаковы, у BI все эти факторы разные, тем самым она вводит анизотропию в систему. Более того, вблизи сингулярности она ведет себя похоже на вселенную Казнера даже в присутствии материи и поэтому попадает в рамки общего анализа сингулярностей, проведенного Белинским с соавторами [9]. Далее, во Вселенной, заполненной жидкостью, удовлетворяющей уравнению состояния $p = \zeta \varepsilon$, $\zeta < 1$, было показано, что изначальная анизотропия во вселенной BI быстро исчезает и она превращается во вселенную FRW [53]. Поскольку современная

Вселенная удивительно изотропна, это свойство делает вселенную VI самым подходящим кандидатом для изучения возможных эффектов начальной анизотропии для сегодняшнего наблюдения. В свете важности вышесказанного разные авторы изучали вселенную VI с разных точек зрения.

Наблюдение далеких сверхновых и флуктуаций реликтового излучения с помощью наземных и высотных экспериментов, а именно, последние данные эксперимента WAMP, показали, что наша Вселенная пространственно-плоская и в данный момент расширяется с ускорением. Этот факт можно согласовать с теорией, если предположить, что Вселенная в основном заполнена так называемой темной энергией. Измерения фотометрических расстояний до сверхновых звезд на космологических расстояниях, подкрепленные многочисленными независимыми аргументами, в том числе недавними данными наблюдений за угловыми флуктуациями температуры реликтового электромагнитного излучения во Вселенной, показывают, что основная доля плотности энергии материи в современной Вселенной принадлежит именно этому виду небарионной материи. Эта форма материи (энергии) не наблюдается в лабораторных экспериментах, не взаимодействует с электромагнитным излучением. Это обстоятельство и сыграло решающую роль в ее названии. Это свойство также отличает ее от нерелятивистского небарионного холодного темного вещества, ранее известного из астрономических и космологических наблюдений. Более того, в отличие от темной материи темная энергия распределена однородно по пространству и не скручивается под действием гравитации во всех масштабах и имеет сильно отрицательное давление порядка плотности энергии. В связи с этим формально темную энергию можно описать как вещество с отрицательным давлением. В настоящее время в литературе встречается множество источников, которые так или иначе могли бы объяснить ускоренную фазу расширения сегодняшней Вселенной. Ниже мы перечислим основные тенденции.

- **Λ -член.** Чтобы обеспечить устойчивое космологическое решение уравнений гравитационного поля, Эйнштейн [30, 31] ввел одну фундаментальную постоянную, известную как космологическая постоянная или Λ -член, в систему. После того как Хабл (Hubble) экспериментально подтвердил, что Вселенная расширяется, Эйнштейн вернулся к оригинальной форме уравнения, сказав при этом, что временная модификация, которую он сделал, была самой большой ошибкой его жизни. Во второй половине 60-х годов прошлого века Λ -член снова проявил себя на короткое время. Наконец, после изыскательской работы Гутха (Guth) [45] по инфляционной космологии исследователи начали рассматривать модели с Λ -членом с растущим интересом (превосходный обзор по космологической постоянной можно найти в [69]). В 1998 г. две группы [71, 73] независимо показали, что наша Вселенная расширяется с ускорением, подтверждающим существование темной энергии. Самая простая форма темной энергии — это положительная космологическая по-

стоянная. Введение положительного Λ -члена, соответствующего универсальной отталкивающей силе, приводит к современному ускоренному режиму и сопровождается такими теоретическими проблемами, как тонкая настройка (fine-tuning) и проблема соответствия (coincidence problem) [104], которая выражается в следующем: почему плотность темной энергии (dark energy density) и плотность пыли (dust matter density) в настоящее время сравнимы или почему Вселенная начала ускоренно расширяться только сейчас. Другая проблема, которая связана с ускоренным расширением — это проблема вечного ускорения. Введение отрицательного Λ -члена, соответствующего дополнительной гравитационной силе, может решить эту проблему [20]. Модели с Λ -членами разного знака были рассмотрены в работах [78–80].

• **Квинтэссенция.** Это наиболее часто встречаемый вид темной энергии [24, 81, 91, 106] с уравнением состояния

$$w = \frac{p_q}{\varepsilon_q}, \quad (1.1)$$

причем это отношение считается постоянным. Подобное уравнение состояния хорошо известно, а именно при $w \in [0, 1]$ оно описывает идеальную жидкость. Одним из специфических ее членов является космологическая постоянная (Λ -член) при $w = -1$ [69, 80, 90]. Заметим, что для того чтобы расширение Вселенной, заполненной преимущественно подобным веществом, происходило в ускоренном темпе, должно выполняться условие $w < -1/3$. Обычно значение постоянной w варьируется между -1 и $-1/3$, т. е. $w \in [-1, -1/3]$. Это ограничение связывают с тем, что из строгого определения w (как для равновесного состояния, так и для малых возмущений) формально вытекает, что скорость распространения малых возмущений (например, звука) в квинтэссенции при $w < -1$ превышает скорость света, следовательно, нарушает принцип причинности.

• **Газ Чаплыгина.** Для того чтобы объединить такие две разные физические концепции, как темная материя и темная энергия, и тем самым свести два физических параметра в один, было предложено довольно экзотическое уравнение состояния [55]. В этой работе авторы описали переход Вселенной, заполненной пылью, в ускоренно расширяющуюся Вселенную. Модель, предложенная в [55], была обобщена в работах [11, 16]. Обобщенная модель газа Чаплыгина задается уравнением состояния

$$p_{\text{ch}} = -\frac{A}{\varepsilon_{\text{ch}}^\alpha}, \quad (1.2)$$

где A — некоторая положительная постоянная и $0 < \alpha \leq 1$. Стандартная модель, предложенная в [55], соответствует значению $\alpha = 1$. Заметим, что газ Чаплыгина оригинально был введен в аэродинамике. Имеется довольно

большое количество работ, посвященных этой модели [5, 7, 8, 10, 12–15, 17, 25, 28, 32, 33, 41, 43, 44, 46, 47, 52, 57, 65, 67, 82, 93, 100].

• **Темная энергия типа фантом (phantom).** До недавнего времени считалось, что стандартный космологический источник темной энергии должен иметь незначительное по величине отрицательное давление, такое, что $-\varepsilon < p < 0$, и ни в коем случае оно не должно превышать загадочный барьер $p = -\varepsilon = -\Lambda$, что соответствует космологической постоянной. В этом случае, возможно, нарушалось только сильное энергетическое условие (strong energy condition) Хоукинга и Пенроуза:

$$\varepsilon + 3p > 0, \quad \varepsilon + p > 0, \quad (1.3)$$

и дальнейшая эволюция могла иметь два сценария: Асимптотическая пустота или Большой хруст (big crunch). Однако глубокий анализ данных, полученных из сверхновых, реликтового излучения и крупномасштабной структуры, показывает, что темной энергией может также быть материя, чье давление меньше, чем плотность энергии с отрицательным знаком, и поэтому нарушается слабое и, следовательно, все энергетические условия. Эта материя была названа фантомом (phantom), и она приводит к качественно новому типу эволюции. Фантом — это темная энергия с сильным отрицательным давлением, и она может быть имитирована скалярным полем ϕ с отрицательной кинетической энергией с лагранжианом

$$L = \frac{l}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (1.4)$$

где $l = -1$ описывает фантом, а $l = 1$ — стандартное скалярное поле. Здесь $v(\phi)$ — потенциал. Самый поразительный результат, который приписывается фантому, это то, что плотность энергии растет пропорционально фактору масштаба (scale factor). Таким образом, в отличие от стандартных источников, когда рост плотности энергии соответствует уменьшению масштабного фактора, в данном случае рост плотности энергии сопровождается расширением Вселенной. Это приводит к появлению в будущем сингулярностей, что в силу особых свойств называется Большим разрывом (big rip). В этом случае за конечное время размер Вселенной обращается в бесконечность [27, 29]. Заметим, что при $w < -1$ уравнение состояния (1.1) также дает фантом.

• **Колебательная темная энергия.** После обнаружения положительного ускорения Вселенной возникло множество проблем. Одна из самых озадачивающих из них — это проблема вечного ускорения [77]. Положительный космологический член [80], так же как и большинство моделей, предложенных в литературе, приводит к вечно ускоренному режиму. Существует много различных подходов для их устранения. В работе [99] предлагается космологическая модель циклической Вселенной, которая проходит периодическое

расширение и сжатие. Каждый цикл начинается Большим взрывом и заканчивается Большим хрустом, чтобы снова возникнуть при большем взрыве. Фаза расширения каждого цикла содержит эру излучения, материи и квинтэссенции, последняя из которых соответствует современному ускоренному расширению. В работе [35] исследуются космологические модели, где эффективный потенциал $V(\phi)$ может быть отрицательным при некоторых значениях ϕ . В этом случае получается циклическая модель Вселенной. Один из самых простых способов получения циклических моделей реализуется введением отрицательного Λ -члена вместе с некоторым потенциалом [20, 78, 79]. Заметим, что модели, рассматриваемые в [78, 79], дают как циклические (названы автором как неперiodические решения, так как в силу того, что величина масштабного объема (volume scale) строго неотрицательна и при нулевом ее значении возникает сингулярность; хотя математически эти решения можно продолжать и снова выйти на новый цикл, мы этого не делали), так и осциллирующие (всюду положительные) решения. Автором была также предложена модель с модифицированной квинтэссенцией, что позволяет получить циклические или осциллирующие космологические решения [81]. Осциллирующая темная энергия с периодическим уравнением состояния в двух эквивалентных формулировках была рассмотрена в [66]. Было показано, что такая модель темной энергии предполагает естественное объединение начальной инфляции с современным ускоряющимся режимом расширения. Модель с осциллирующей темной энергией также была рассмотрена в [61].

- **Модели с взаимодействием между темной энергией и темной материей.** Хотя экспериментальные проверки в Солнечной системе налагают строгие ограничения на возможность неминимального взаимодействия между темной энергией и обычной (фоновой) материей [105], благодаря неизвестной природе темной материи как основной части этого фона появляется возможность дополнительного (не гравитационного) взаимодействия между темной энергией и темной материей без противоречия с экспериментальными данными. Более того, в работах [68, 70] было показано, что модели с взаимодействующей темной энергией находятся в хорошем соответствии с современными данными наблюдений. В связи с этим появилось множество работ, предлагающих модели с взаимодействующими темной энергией и темной материей [23, 42].

- **Скалярно-тензорные (scalar-tensor) модели темной энергии.** Скалярно-тензорная теория гравитации — это альтернативная или обобщенная теория гравитации Эйнштейна, где помимо тензорного присутствует и скалярное поле. Она была предложена почти полвека назад в ряде работ [18, 36, 54] и актуальна на сегодняшний день для объяснения ускоренного режима расширения, особенно в инфляционном и квинтэссенционном сценариях. Основное предположение состоит в том, что скалярное и гравитационное поля φ и $g_{\mu\nu}$ связаны с веществом посредством некоторой *эффективной метрики*

$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$. В работе [39] рассматривается скалярно-тензорная модель темной энергии с новой физической степенью свободы, именно, скалярное поле φ гравитона отвечает за изменение гравитации. Скалярно-тензорные модели обычной и фантомной темной энергии были исследованы в [40]. А подобные модели для пространства типа Бианки-I были рассмотрены в [34]. В этой работе динамическое поведение метрических функций было описано для трех различных взаимодействий.

• **Модели с тахионной (tachyon) материей.** Идея тахиона не нова, и после ряда работ [94, 95] эти частицы снова нашли применение в космологии. Они до сих пор не наблюдаются, и некоторые их типы (rolling tachyon) обладают очень интересным уравнением состояния, где его параметры гладко меняются в пределах $(-1, 0)$. Это обстоятельство делает тахион одним из кандидатов на темную энергию [21, 26, 96–98]. Существует несколько моделей тахионной темной энергии. Одна из наиболее эффективных моделей была предложена в [92]. Она задается парами космологической диагностики $\{r, s\}$, называемыми детерминантами состояния (statefinder):

$$r = \frac{\partial^3 a / \partial t^3}{aH^3}, \quad s = \frac{r - 1}{3(q - 1/2)}, \quad (1.5)$$

где q — это параметр замедления; a — масштабный фактор пространства-времени FRW. Поскольку разные космологические модели, связанные с темной энергией, показывают качественно разные траектории на $r - s$ -плоскости, предложенная диагностика может различить эти модели темной энергии.

• **Модели со спинорным полем.** В последнее время космологические модели со спинорным полем широко изучаются разными авторами [6, 78, 79, 83–85]. Одной из основных целей работ [78, 79, 83–85] было нахождение регулярных решений соответствующих уравнений. В некоторых случаях, особенно при наличии космологической постоянной (Λ -члена), которая играет роль дополнительного гравитационного поля, нам удалось получить регулярные решения. Также было обнаружено, что введение нелинейного спинорного поля приводит к быстрому расширению Вселенной. Именно это обстоятельство позволяет нам рассматривать спинорное поле как один из возможных кандидатов для объяснения ускоренной фазы расширения. В связи с этим за последнее время в литературе появился ряд работ, где в качестве альтернативной модели темной энергии рассматривается спинорное поле [72, 87–89].

В настоящем обзоре мы изучим эволюцию изначально анизотропной Вселенной при наличии в ней (i) идеальной жидкости, заданной как обычной жидкостью, так и жидкостью Ван-дер-Ваальса; (ii) темной энергии, заданной в виде Λ -члена, квинтэссенции и газа Чаплыгина; (iii) спинорного поля с самодействием и индуцированной нелинейностью.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как уже упоминалось раньше, мы рассмотрим самосогласованную систему, где в качестве источника гравитационного поля выступают разные материи и поля. Поэтому мы начнем с гравитационного поля. В нашем случае оно задается метрикой Бианки-I (BI)

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 dx_1^2 - a_2^2 dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \quad (2.1)$$

где метрические функции a_i зависят только от времени, а скорость света выбирается равной единице. Мы также определим функцию

$$\tau = a_1 a_2 a_3, \quad (2.2)$$

которая не что иное как масштаб объема (volume scale) пространства-времени BI.

Уравнения Эйнштейна, соответствующие пространству BI, могут быть записаны в виде

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} = \kappa T_1^1, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa T_2^2, \quad (2.3б)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} = \kappa T_3^3, \quad (2.3в)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa T_0^0. \quad (2.3г)$$

Здесь T_μ^ν — тензор энергии-импульса материальных полей. Заметим, что в рассматриваемых случаях имеет место равенство $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. В этом случае уравнение (2.3) решается методом, который был предложен нами еще в 1992 г. и в последние годы широко используется разными авторами.

Метод решения. Разность уравнений (2.3б) и (2.3а) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}_1}{a_1} - \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_3}{a_1 a_3} - \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) + \\ &+ \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.4) находим

$$\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \tau = X_1, \quad (2.5)$$

где X_1 — константа интегрирования. Это означает, что при $\tau \rightarrow \infty$ скорость расширения на плоскости (x, y) становится изотропной, т. е.

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} = \frac{\dot{a}_2}{a_2} \implies a_1 = qa_2, \quad (2.6)$$

где q — некоторая константа интегрирования.

В общем, уравнение (2.5) дает следующее соотношение между метрическими функциями a и b :

$$\frac{a_1}{a_2} = D_1 \exp\left(X_1 \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (2.7)$$

где D_1 — константа интегрирования. Аналогично находим

$$\frac{a_2}{a_3} = D_2 \exp\left(X_2 \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (2.8)$$

$$\frac{a_3}{a_1} = D_3 \exp\left(X_3 \int \frac{dt}{\tau}\right), \quad (2.9)$$

где D_2, D_3, X_2, X_3 — константы интегрирования. Заметим, что, как в случае (2.5), несложно доказать, что скорость расширения становится изотропной во всех направлениях при $\tau \rightarrow \infty$.

Нетрудно установить следующую связь между константами интегрирования X_i и D_i :

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0. \quad (2.10)$$

Наконец, с учетом (2.2) из уравнений (2.7), (2.8) и (2.9) мы получаем метрические функции $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a_3(t)$ в явном виде [78]

$$a_1(t) = A_1 \tau^{1/3} \exp\left[\left(\frac{B_1}{3}\right) \int \tau^{-1} dt\right], \quad (2.11a)$$

$$a_2(t) = A_2 \tau^{1/3} \exp\left[\left(\frac{B_2}{3}\right) \int \tau^{-1} dt\right], \quad (2.11б)$$

$$a_3(t) = A_3 \tau^{1/3} \exp\left[\left(\frac{B_3}{3}\right) \int \tau^{-1} dt\right], \quad (2.11в)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt[3]{(D_1/D_3)}, & A_2 &= \sqrt[3]{1/(D_1^2 D_3)}, & A_3 &= \sqrt[3]{(D_1 D_3^2)}, \\ B_1 &= X_1 - X_3, & B_2 &= -(2X_1 + X_3), & B_3 &= X_1 + 2X_3. \end{aligned}$$

Таким образом, исходная система уравнений Эйнштейна и нелинейных спинорного и скалярного полей полностью проинтегрирована. В процессе

интегрирования использовались только первые три уравнения (2.3а)–(2.3в) полной системы уравнений Эйнштейна. Получено общее решение трех уравнений второго порядка, содержащее четыре произвольные постоянные D_1 , D_3 , X_1 , X_3 . Отметим, что уравнение (2.3г) является следствием первых трех уравнений Эйнштейна. Для того чтобы убедиться в правильности полученного решения, необходимо подставить функции a_1 , a_2 , a_3 в (2.3г) или решать все четыре уравнения системы (2.3) вместе.

Как уже упоминалось, для более реалистичного описания ранней Вселенной нам нужно рассмотреть анизотропные космологические модели, такие как модель Бианки-I. С другой стороны, современная Вселенная удивительным образом изотропна. Поэтому нам надо объяснить, как и когда изначально анизотропное пространство-время превращается в изотропное. В литературе существует множество критериев изотропии. В [53] Якобс использовал параметр анизотропии, чтобы найти время, когда анизотропия перестает быть большой. Два распространенных критерия изотропизации выглядят так:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{H_i^2}{H^2} - 1 \rightarrow 0, \quad (2.12a)$$

$$\Sigma^2 = \frac{1}{2} \mathcal{A} H^2 \rightarrow 0. \quad (2.12b)$$

Здесь \mathcal{A} и Σ^2 — средний параметр анизотропии и сдвиговый (shear) параметр соответственно. $H_i = \dot{a}_i/a_i$ — это направляющий параметр Хаббла и $H = \dot{a}/a$ — средний параметр Хаббла, где $a(t) = \tau^{1/3}$ — средний масштабный фактор. В этой работе мы пользуемся условием изотропизации, введенным в работе [19]. Изотропизация означает, что на больших физических временах, когда объемный параметр (volume scale) τ стремится к бесконечности, все три масштабных фактора $a_i(t)$ растут одинаково. Таким образом, мы говорим, что модель становится изотропной, если

$$a_i/a \rightarrow \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Как видно из (2.11), в нашем случае $a_i/a \rightarrow A_i = \text{const}$ при $\tau \rightarrow \infty$. Напомним, что у изотропной FRW-модели имеются одинаковые масштабные факторы по всем трем направлениям, т.е. $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$. Таким образом, для того чтобы пространство-время BI превратилось в FRW, константы A_i должны быть идентичны, т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 1$. Заметим, что масштабное преобразование некоторых координат приводит к $a_i/a \rightarrow 1$, и метрика очевидно становится изотропной при больших t . Более того, изотропная природа современной Вселенной приводит к тому, что остальные три константы X_i также должны быть близки к нулю, т.е. $|X_i| \ll 1$, $i = 1, 2, 3$, так что $X_i \int [\tau(t)]^{-1} dt \rightarrow 0$ при $t < \infty$ (при $\tau(t) = t^n$ с $n > 1$ интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого X_i).

Итак, метрические функции находятся в функциональной зависимости от τ . Как было показано в ряде работ, спинорное и скалярное поля и другие физические величины, такие как заряд, ток, а также плотность энергии и импульс идеальной жидкости и темной энергии, могут быть выражены через τ . Ввиду этого мы напишем уравнение для нахождения τ . Сумма уравнений (2.3а), (2.3б), (2.3в) и (2.3г), умноженная на 3, дает

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}\kappa(T_1^1 + T_0^0). \quad (2.14)$$

Здесь мы приняли во внимание тот факт, что в рассматриваемых моделях имеет место равенство $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. С другой стороны, из тождества Бианки $G_{\mu;\nu}^\nu = 0$ имеем

$$\dot{T}_0^0 = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(T_0^0 - T_1^1). \quad (2.15)$$

В сопутствующей системе координат уравнение (2.15) приводит к следующим уравнениям:

$$\dot{\epsilon}_{\text{DE}} + \dot{\epsilon}_{\text{pf}} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{DE}} + \epsilon_{\text{pf}} + p_{\text{DE}} + p_{\text{pf}}), \quad (2.16)$$

где ϵ_{pf} и ϵ_{DE} — плотности энергии идеальной жидкости и темной энергии соответственно, а p_{pf} и p_{DE} — соответствующие давления.

Надо подчеркнуть, что предполагается, что темная энергия взаимодействует только сама с собой и минимальным образом связана с гравитационным полем. Вследствие этого уравнение, описывающее эволюцию плотности темной энергии, отделяется от аналогичного уравнения идеальной жидкости, и из уравнения (2.16) мы имеем два уравнения: одно для идеальной жидкости и другое для темной энергии. Таким образом, имеем

$$\dot{\epsilon}_{\text{DE}} + \frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{DE}} + p_{\text{DE}}) = 0, \quad (2.17а)$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{pf}} + \frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{pf}} + p_{\text{pf}}) = 0. \quad (2.17б)$$

В случае спинорного и/или скалярного поля соответствующие слагаемые в (2.15) исчезают благодаря уравнениям спинорного и скалярного полей, и таким образом уравнение (2.15) в этом случае превращается в уравнение состояния идеальной жидкости (2.17б). Далее, для того чтобы решить уравнения (2.14) и (2.15), нам нужно еще одно условие, которое задается уравнением состояния. В последующем мы изучим эволюцию вселенной Бианки-I для конкретных источников.

Можно показать, что в рассматриваемых случаях правая часть уравнения (2.14) есть функция от τ , и, следовательно, оно допускает первый интеграл. Обозначив правую часть как $\mathcal{F}(\tau)$, соответствующее решение можно

представить в виде

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[C - U(\tau)]}, \quad (2.18)$$

где $E = -\int \mathcal{F}(\tau)d\tau$ может быть рассмотрен как некий потенциал, а константа C — как уровень энергии.

Для того чтобы выяснить роль того или иного источника в эволюции Вселенной, нам надо его конкретно задать, чем и мы займемся в следующем разделе.

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

В этом разделе мы подробно изучим эволюцию пространства Бианки-I при наличии различных источников.

3.1. Модель с космологической постоянной. Как уже было отмечено, космологическая постоянная впервые была введена Эйнштейном [30,31] еще в 1917 г. Но только после обнаружения ускорения в расширении Вселенной в 1998 г. она прочно вошла в современную космологию. Поскольку достаточно подробно о ней было написано во введении, мы не будем повторять, а начнем изучать ее роль в эволюции вселенной типа Бианки-I.

Рассмотрим космологическую модель типа Бианки-I в присутствии космологической постоянной и идеальной жидкости. В качестве идеальной жидкости рассматривается жидкость как с баротропическим уравнением состояния, так и с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса. Этот случай подробно описан в работе [80].

Уравнение (2.14) в этом случае имеет вид

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3\kappa}{2}(\varepsilon - p) + 3\Lambda. \quad (3.1)$$

С другой стороны, уравнение (2.15) дает

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\varepsilon + p). \quad (3.2)$$

После некоторой манипуляции из (3.1) и (3.2) находим

$$\dot{\tau}^2 = 3(\kappa\varepsilon + \Lambda)\tau^2 + C_1, \quad (3.3)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Определим по аналогии с изотропной моделью постоянную Хаббла

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 3H. \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) из (3.3) выводим

$$\kappa\varepsilon = 3H^2 - \Lambda - \frac{C_1}{3\tau^2}. \quad (3.5)$$

Надо отметить, что плотность энергии Вселенной есть положительно определенная величина. Предполагается, что в начальной стадии эволюции, когда τ было очень близко к нулю, плотность энергии Вселенной была бесконечно велика. С другой стороны, с расширением Вселенной, т. е. с ростом τ , плотность энергии ε уменьшается, а бесконечно большой τ соответствует ε , близкая к нулю. Допустим, что на некоторой стадии эволюции ε настолько мала, что ею можно пренебречь. В этом случае из (3.5) следует

$$3H^2 - \Lambda \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) можно заключить следующее: (i) в этом случае Λ обязательно неотрицательна; (ii) в отсутствие Λ -члена H становится тривиальной, следовательно, начиная с некоторых значений τ , эволюция Вселенной останавливается, т. е. τ становится постоянной; (iii) в случае положительной Λ процесс расширения Вселенной никогда не остановится [80].

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.1), находим

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left(3H^2 - \Lambda + \frac{C_1}{3\tau^2} + \kappa p \right) = -\frac{\kappa}{2} (\varepsilon + p) - \frac{C_1}{3\tau^2}. \quad (3.7)$$

Ввиду (3.5) из (3.7) следует, что если идеальная жидкость задается вселенной Зельдовича, когда $p = \varepsilon$ (см. (3.9)), то соответствующее решение не зависит от постоянной C_1 .

3.1.1. Идеальная жидкость. Для начала мы рассмотрим случай, когда Вселенная заполнена только идеальной жидкостью. Хотя это самый распространенный случай и он подробно изучен множеством авторов, мы все же опишем его. Обозначим через ε_{pf} и p_{pf} плотность энергии и давление идеальной жидкости соответственно. В рассматриваемом случае идеальная жидкость подчиняется следующему уравнению состояния:

$$p_{\text{pf}} = \zeta \varepsilon_{\text{pf}}. \quad (3.8)$$

Здесь ζ — некая постоянная, лежащая в интервале $\zeta \in [0, 1]$. В зависимости от численного значения ζ описывает следующие типы Вселенной [53]:

$$\zeta = 0 \quad (\text{пыль}), \quad (3.9\text{a})$$

$$\zeta = 1/3 \quad (\text{излучение}), \quad (3.9\text{б})$$

$$\zeta \in (1/3, 1) \quad (\text{жесткая Вселенная}), \quad (3.9\text{в})$$

$$\zeta = 1 \quad (\text{вселенная Зельдовича}). \quad (3.9\text{г})$$

В сопутствующей системе координат закон сохранения тензора энергии-импульса приводит к следующим уравнениям:

$$\dot{\epsilon}_{\text{pf}} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\epsilon_{\text{pf}} + p_{\text{pf}}). \quad (3.10)$$

Ввиду уравнения (3.8) из (3.10) легко находится

$$\epsilon_{\text{pf}} = \epsilon_0/\tau^{(1+\zeta)}, \quad p_{\text{pf}} = \epsilon_0\zeta/\tau^{(1+\zeta)}, \quad (3.11)$$

где ϵ_0 суть постоянная интегрирования. В этом случае для τ находим

$$\tau = Ct^{2/(1+\zeta)}, \quad (3.12)$$

где C — некоторая постоянная интегрирования. Как видно из (2.11), при $\zeta < 1$ изначально анизотропная Вселенная в конце концов превращается во вселенную FRW, тогда как при $\zeta = 1$, т. е. в случае жесткой материи, этого не происходит. Вывод о том, что при наличии идеальной жидкости изначально анизотропная вселенная ВІ со временем изотропизуется, впервые был сделан в работе [53], а в более общем подходе был подтвержден в недавней работе [22]. На рис. 1 показан вид потенциала при отрицательной Λ . Как видно, в модели с пылью, излучением и жесткой материей допускаются как

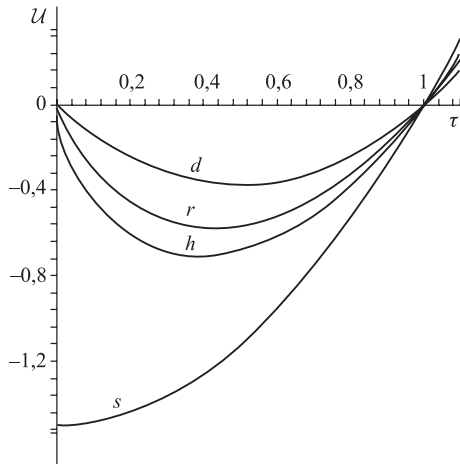


Рис. 1. Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ при отрицательной Λ . Как видно, в случае вселенной Зельдовича этот потенциал допускает только неперриодическое решение

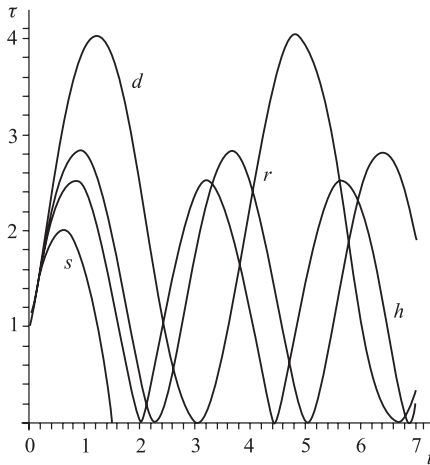


Рис. 2. Эволюция τ с отрицательной Λ и $C = -0,1$. Как видно, в этом случае модели с пылью, излучением и жесткой материей допускается осцилляция, тогда как модель со вселенной Зельдовича дает неперриодическое решение

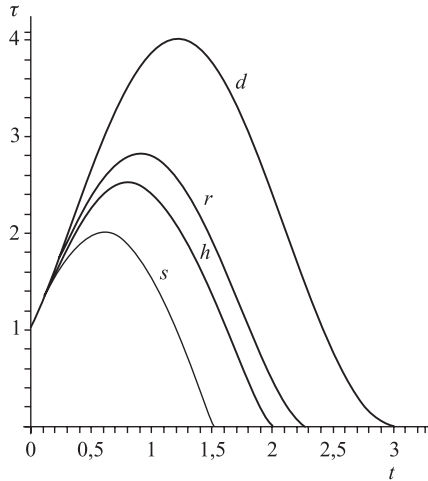


Рис. 3. Эволюция Вселенной с отрицательной Λ и $C = 0$. В этом случае имеется только неперiodическое решение

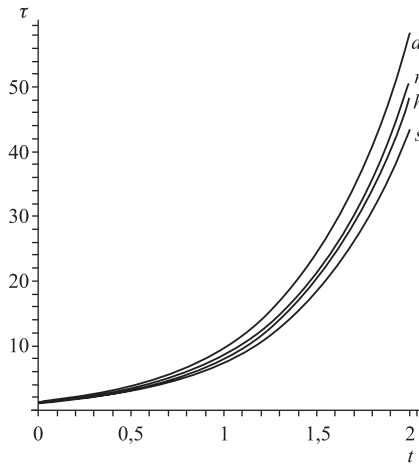


Рис. 4. Эволюция Вселенной с положительной Λ . В этом случае независимо от выбора ζ имеется только расширяющаяся модель Вселенной. В этом случае анизотропия Вселенной исчезает быстрее, чем это происходит при $\Lambda = 0$

осциллирующие, так и неперiodические решения в зависимости от выбора константы интегрирования, тогда как модель со вселенной Зельдовича дает только неперiodическое решение (рис. 2, 3). При положительной Λ имеется только расширяющаяся модель Вселенной (рис. 4).

3.1.2. Жидкость Ван-дер-Ваальса. Рассмотрим случай, когда жидкость подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса в отсутствие диссипативного процесса. Давление газа Ван-дер-Ваальса p_w связано с его плотностью энергии ε_w соотношением [58]

$$p_w = \frac{8W\varepsilon_w}{3 - \varepsilon_w} - 3\varepsilon_w^2. \tag{3.13}$$

В (3.13) давление и плотность энергии написаны в безразмерных переменных и W — это некий параметр, связанный с редуцированной температурой.

На рис. 5 и 6 плотность энергии и давление системы показаны с отрицательной и положительной космологической постоянной, а также при ее отсутствии. Как видно из рис. 6, положительная Λ приводит к уменьшению изначально отрицательного давления (т. е., хотя давление остается отрицательным, его абсолютная величина становится меньше). Это выглядит обескураживающе, так как положительная Λ сама является отрицательным

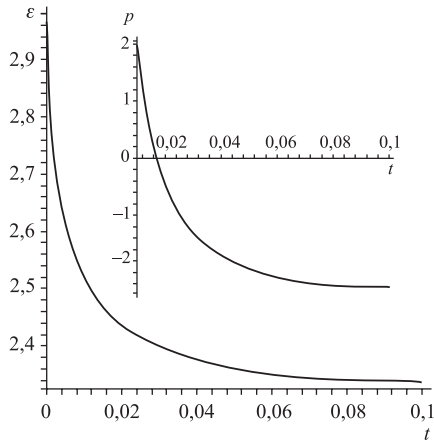


Рис. 5. Вид плотности энергии ε и давления p в случае жидкости Ван-дер-Ваальса с отрицательной Λ

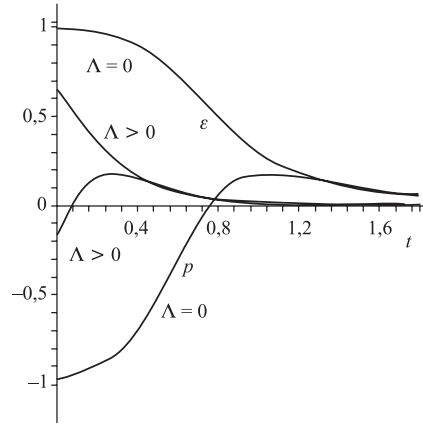


Рис. 6. Вид плотности энергии ε и давления p в случае жидкости Ван-дер-Ваальса с $\Lambda \geq 0$

давлением. Здесь ε и p есть плотность энергии и давление жидкости Ван-дер-Ваальса, которые в силу самосогласованности подвергаются влиянию со стороны пространства-времени. Из уравнения (3.5), т. е.

$$\varepsilon = \frac{H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)}{\kappa},$$

следует, что при данных H , C_1 и τ значение ε в случае положительной Λ меньше, чем соответствующих величин при $\Lambda = 0$. Следовательно, p также и менее отрицательно. Более того, как было упомянуто ранее, положительная Λ , будучи отталкивающей силой, приводит к быстрому росту τ . Это приводит к быстрому спаду ε в начальной стадии эволюции, что в свою очередь приводит к тому, что в этом случае p становится положительным раньше, чем это происходит при тривиальной Λ . Что касается отрицательной Λ , в этом случае плотность энергии ε становится более положительной. Надо также отметить, что поведение всех величин — ε , p , H , τ — критически зависит как от выбора начальных значений H и τ , так и от Λ , C_1 и κ . Как видно из рис. 7, конкретный выбор параметров может привести к более быстрому расширению τ с отрицательной Λ . Это происходит потому, что выбор параметров с отрицательной Λ делает давление более отрицательным (см. рис. 5).

На рис. 8 показано ускорение вселенной типа VI, заполненной жидкостью Ван-дер-Ваальса при разных Λ .

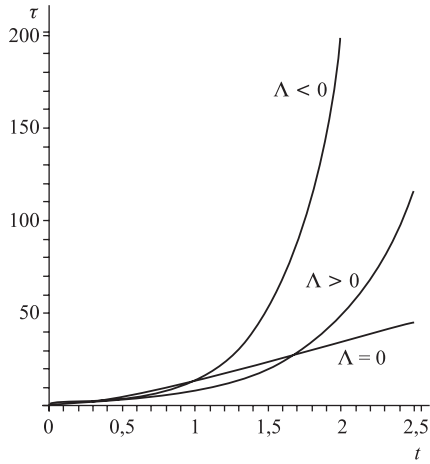


Рис. 7. Эволюция вселенной типа Бианки-I, заполненной жидкостью Ван-дер-Ваальса. Независимо от знака Λ настоящая модель порождает быстро растущую Вселенную

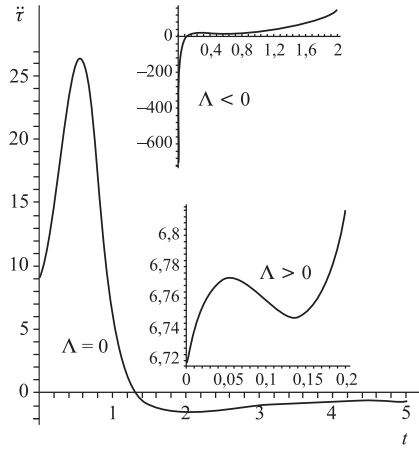


Рис. 8. Ускорение вселенной типа BI, заполненной жидкостью Ван-дер-Ваальса при разных Λ . Здесь $W = 0,5$, а Λ имеет следующие значения: $\Lambda = 0$, $\Lambda = 1$ и $\Lambda = -0,01$

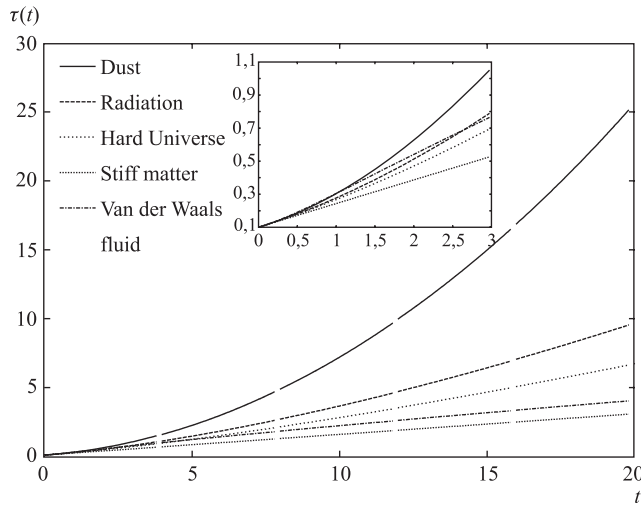


Рис. 9. Эволюция вселенной типа Бианки-I, заполненной идеальной жидкостью разных видов в отсутствие Λ -члена

На рис. 9 видна эволюция вселенной типа Бианки-I, заполненной идеальной жидкостью разных видов в отсутствие Λ -члена. Как видно, в случае жидкости Ван-дер-Ваальса τ растет быстрее в ранней стадии и потом замедляется со временем.

Вернемся теперь к уравнению (3.7). Подставляя (3.13) в (3.7), с учетом (3.5) находим

$$\dot{H} = -\frac{\{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\}[(3 + 8W)\kappa - \{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\}]}{2(3\kappa - \{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\})} + \frac{3}{2\kappa}(\{3H^2 - \Lambda - C_1/(3\tau^2)\})^2. \quad (3.14)$$

Легко можно убедиться в том, что уравнение (3.14) в отсутствие Λ -члена и $C_1 = 0$ и $\kappa = 3$ совпадает с уравнением, рассмотренным в работе [58]:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} \left[H^2 + \frac{8WH^2}{3 - H^2} - 3H^4 \right]. \quad (3.15)$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка (3.14), описывающего эволюцию $H(t)$, может быть найдено только с определением начального значения $H(t)$ при $t = 0$, при заданном значении параметров W . Соответствующие результаты графически изображены на рис. 5–9.

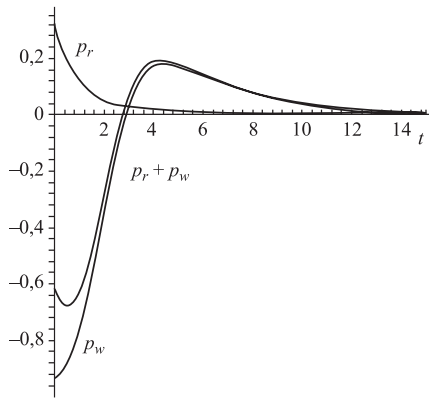


Рис. 10. Давление излучения или жидкости Ван-дер-Ваальса и их суммарное давление

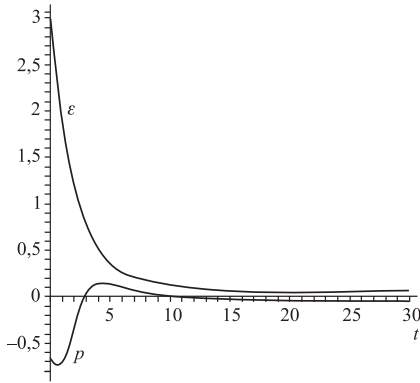


Рис. 11. Эффективные энергия и давление комбинированного излучения и жидкости Ван-дер-Ваальса

На рис. 10 и 11 представлены комбинированные плотности энергии и давления излучения и жидкости Ван-дер-Ваальса, которые показывают, что жидкость Ван-дер-Ваальса в состоянии породить инфляцию в начальной стадии эволюции.

3.2. Модель с квинтэссенцией. Рассмотрим случай, когда темная энергия задается квинтэссенцией. Как уже было отмечено, новый вид материи, часто

называемый квинтэссенцией, может вести себя как космологическая постоянная, и он был определен как комбинация положительной плотности энергии и отрицательного давления, удовлетворяющая уравнению состояния [82]

$$p_q = w_q \varepsilon_q. \quad (3.16)$$

Как видно из (3.16), уравнение сильно напоминает уравнения состояния идеальной жидкости, только с отрицательным коэффициентом w_q , что собственно обеспечивает отрицательное давление. Значение постоянной w_q варьируется между -1 и нулем, т. е. $w_q \in [-1, 0]$. Также стоит отметить, что при $w_q = -1$ квинтэссенция описывает космологическую постоянную, а при $w_q < -1$ она ведет себя как фантомная темная энергия. Вернемся теперь к решению уравнения. С учетом (3.16) из (2.17а) находим

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon_{0q}}{\tau^{(1+w_q)}}, \quad p_q = \frac{w_q \varepsilon_{0q}}{\tau^{(1+w_q)}}. \quad (3.17)$$

Здесь ε_{0q} — некоторая постоянная интегрирования.

Тогда уравнение эволюции для величины τ (3.1) может быть записано в виде

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2} \left(\frac{(1-\zeta)\varepsilon_0}{\tau^\zeta} + \frac{(1-w_q)\varepsilon_{0q}}{\tau^{w_q}} \right). \quad (3.18)$$

Как было отмечено раньше, уравнение (3.18) допускает точное решение, которое может быть выражено в квадратурах [82]:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{C_1 + 3\kappa (\varepsilon_0 \tau^{(1-\zeta)} + \varepsilon_{0q} \tau^{(1-w_q)})}} = t + t_0. \quad (3.19)$$

Постоянная интегрирования t_0 может быть выбрана тривиальной.

На рис. 12 показаны потенциалы в случаях, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, идеальной жидкостью и квинтэссенцией, идеальной жидкостью и газом Чаплыгина и идеальной жидкостью и фантомной темной энергией соответственно. Идеальная жидкость в данном случае соответствует излучению. Как видно, все эти потенциалы допускают только бесконечное движение, т. е. Вселенная расширяется бесконечно. Рис. 13 показывает эволюцию вселенной типа VI. Введение темной энергии, как и полагалось, приводит к ускоренному расширению Вселенной. Вид ускорения показан на рис. 13.

На рис. 14 изображен вид плотности энергии и давления, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, квинтэссенцией и газом Чаплыгина.

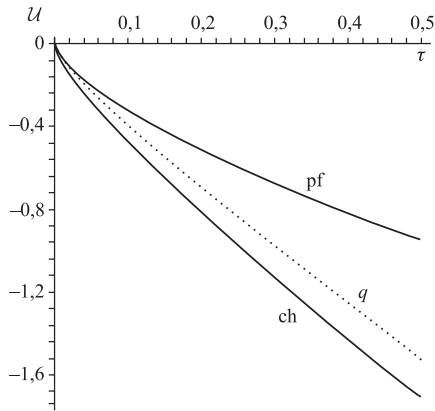


Рис. 12. Вид потенциала, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, идеальной жидкостью и квинтэссенцией, идеальной жидкостью и газом Чаплыгина и идеальной жидкостью и фантомной темной энергией соответственно

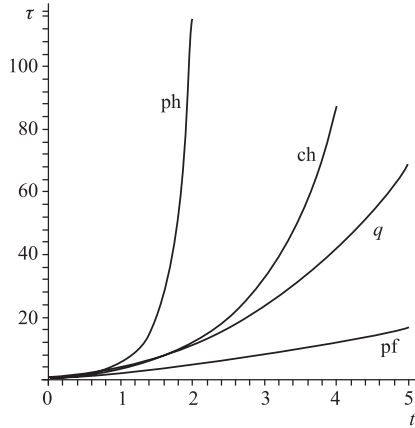


Рис. 13. Эволюция Вселенной, соответствующая потенциалам, изображенным на рис. 12

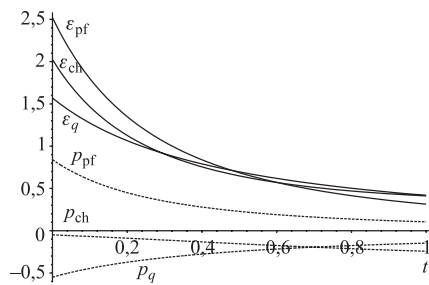


Рис. 14. Вид плотности энергии и давления, когда Вселенная заполнена идеальной жидкостью, квинтэссенцией и газом Чаплыгина соответственно

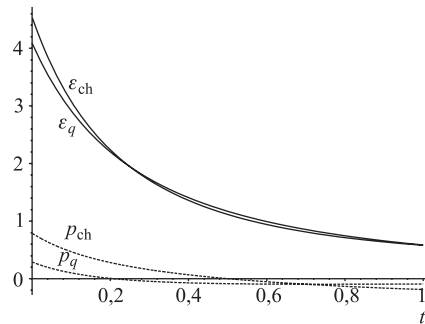


Рис. 15. Вид плотности энергии и давления, когда Вселенная — смесь идеальной жидкости с квинтэссенцией и идеальной жидкости и газа Чаплыгина соответственно

На рис. 15 демонстрируются плотности энергии и давления, когда Вселенная — смесь идеальной жидкости с квинтэссенцией, идеальной жидкостью и газом Чаплыгина.

3.3. Случай с газом Чаплыгина. Давайте теперь рассмотрим случай, когда темная энергия задается газом Чаплыгина. Как уже было отмечено, газ

Чаплыгина был предложен как одна из альтернативных моделей для описания темной энергии с экзотическим уравнением состояния [82]

$$p_{\text{ch}} = -A/\varepsilon_{\text{ch}}^\alpha, \quad (3.20)$$

где A и α — некоторые положительные постоянные. Уравнение (3.20) описывает обобщенный газ Чаплыгина. При $\alpha = 1$ имеем стандартную модель Чаплыгина. Мы рассмотрим стандартный случай. Тогда ввиду уравнения (3.20) из (2.17а) находим

$$\varepsilon_{\text{ch}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{0\text{ch}}}{\tau^2} + A}, \quad p_{\text{ch}} = \frac{-A}{\sqrt{\varepsilon_{0\text{ch}}/\tau^2 + A}}, \quad (3.21)$$

где $\varepsilon_{0\text{ch}}$ — постоянная интегрирования.

Как и в предыдущем случае, для τ находим

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa}{2} \left(\frac{(1-\zeta)\varepsilon_0}{\tau^\zeta} + \sqrt{\varepsilon_{0\text{ch}} + A\tau^2} + \frac{A}{\sqrt{\varepsilon_{0\text{ch}} + A\tau^2}} \right). \quad (3.22)$$

Соответствующие решения могут быть записаны в квадратурах [82]:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{C_1 + 3\kappa(\varepsilon_0\tau^{(1-\zeta)} + \sqrt{\varepsilon_{0\text{ch}}\tau^2 + A\tau^4})}} = t, \quad (3.23)$$

где вторая постоянная интегрирования взята равной нулю.

3.4. Случай с модифицированной квинтэссенцией. Как было уже сказано, введение разного типа темной энергии, например, космологической постоянной, квинтэссенции, газа Чаплыгина и т. д., приводит к появлению вечного ускорения. Существует несколько способов устранения этой проблемы, о чем мы подробно писали во введении. Здесь мы детально опишем модель, способную порождать как циклическую, так и осциллирующую эволюцию. Эта модель была предложена в работе [81]. Рассматриваемая модель задается уравнением состояния

$$p_{\text{DE}} = w(\varepsilon_{\text{DE}} - \varepsilon_{\text{cr}}), \quad (3.24)$$

где $w \in [-1, 0)$. Здесь ε_{cr} — некоторая критическая плотность энергии. Полагая $\varepsilon_{\text{cr}} = 0$, получим обычную квинтэссенцию. Как известно, с расширением Вселенной плотность (темной) энергии (кроме космологической постоянной) убывает. Вследствие этого, будучи линейной отрицательной функцией от плотности энергии, соответствующее давление начинает расти. В случае обычной квинтэссенции давление остается всегда отрицательным, что и приводит к вечному ускорению. Но в случае модифицированной

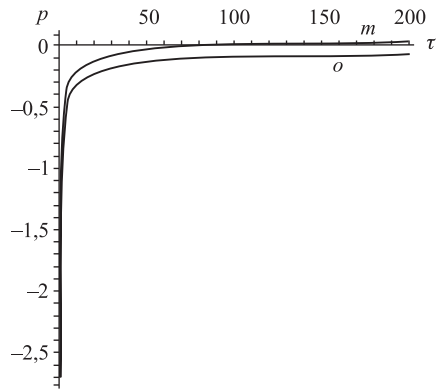


Рис. 16. Эволюция давления с расширением Вселенной, когда она заполнена обычной и модифицированной квинтэссенцией соответственно

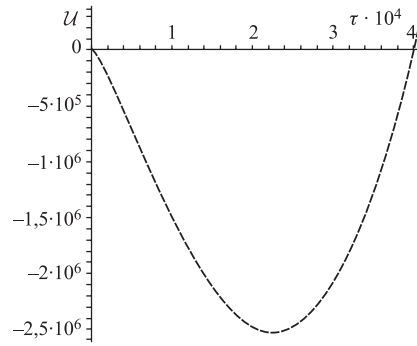


Рис. 17. Вид потенциала, когда вселенная VI заполнена смесью идеальной жидкости и модифицированной квинтэссенции

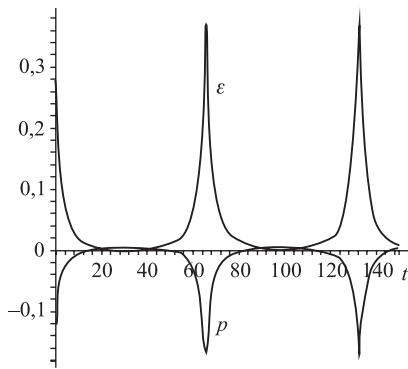


Рис. 18. Вид плотности энергии и давления, когда вселенная VI переживает осцилляцию

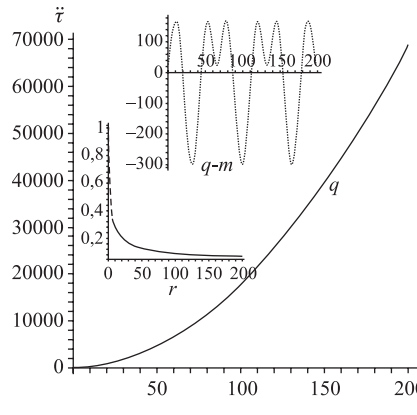


Рис. 19. Вид ускорения с различным источником

квинтэссенции, как только значение ε_q становится меньше критического, давление становится положительным. На рис. 16 показана эволюция давления, соответствующая как обычной, так и модифицированной квинтэссенции. На рис. 17–19 приведены потенциал, динамика эволюции плотности энергии и давления, а также динамика ускорения соответственно. На рис. 19 r , q и $q-m$ обозначают излучение, смесь излучения и обычной квинтэссенции и смесь излучения и модифицированной квинтэссенции соответственно.

4. СПИНОРНОЕ ПОЛЕ КАК АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ИСТОЧНИК УСКОРЕННОГО РАСШИРЕНИЯ

В этом разделе мы покажем, что нелинейное спинорное поле может быть рассмотрено как альтернативный источник ускоренного расширения Вселенной. Лагранжиан нелинейного спинорного поля задается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - m\bar{\psi}\psi + q_1\lambda F + \frac{q_2}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}(1 + \lambda_1 F_1). \quad (4.1)$$

Здесь $F = F(I, J)$ и $F_1 = F_1(I, J)$ — некоторые произвольные функции от инвариантов билинейных спинорных форм $I = I_S = S^2 = (\bar{\psi}\psi)^2$ и $J = I_P = P^2 = (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2$. Отметим, что $F = F(I, J)$ имеет самый общий вид, так как остальные три инварианта могут быть выражены через I и J . Лагранжиан (4.1) при $q_1 = 1$ и $q_2 = 0$ описывает спинорное поле с нелинейностью, возникающей за счет самодействия, тогда как при $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$ он описывает систему взаимодействующих спинорного и скалярного полей. Во втором случае мы имеем спинорное поле с индуцированной нелинейностью. Здесь λ — коэффициент самодействия, а λ_1 — коэффициент связи со скалярным полем. Эти системы были подробно исследованы в работах [78, 79, 83, 84, 86]. В нашей работе мы помимо этих двух рассмотрим еще случай, когда имеются оба вида нелинейности. Поскольку цель этой работы — выяснить роль спинорного поля в ускоренном расширении Вселенной, что можно сделать, исследуя уравнения (3.1), мы не будем останавливаться на изучении уравнений спинорного и скалярного полей. Как известно [78, 79, 86], уравнение спинорного поля при ненулевой массе точно решается, если $F = F(I)$ и $F_1 = F_1(I)$. В случае $F = F(J)$ и $F_1 = F_1(J)$ точные решения допускаются только при нулевой массе спинорного поля. Надо также отметить, что рассматриваемые нами спинорное и скалярное поля, так же как и метрические функции, зависят только от t . В таком случае при $F = F(I)$ и $F_1 = F_1(I)$ из уравнения спинорного поля мы имеем $S = C_0/\tau$ (при $F = F(J)$ и $F_1 = F_1(J)$ аналогично имеем $P = D_0/\tau$). Поскольку после того как F и F_1 выражены через функции τ , уже не имеет значения, являлись F и F_1 функциями от I или J , мы рассмотрим случай, когда $F = F(I)$ и $F_1 = F_1(I)$. Тогда для компонентов тензора энергии-импульса имеем

$$\begin{aligned} T_0^0 &= mS - F + \frac{1}{2}(1 + \lambda_1 F_1)\dot{\varphi}^2 + \varepsilon_{\text{pf}}, \\ T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 &= \mathcal{D}S - F - \frac{1}{2}(1 + \lambda_1 F_1)\dot{\varphi}^2 - p_{\text{pf}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где ε_{pf} и p_{pf} — плотность энергии и давление идеальной жидкости.

Далее мы рассмотрим конкретный случай, когда $F = S^q$ и $F_1 = S^r$. Для простоты также положим $C_0 = 1$.

4.1.1. *Идеальная жидкость.* В случае, когда идеальная жидкость подчиняется уравнению (3.8), полагая $\varepsilon_0 = 1$, из (4.2) находим

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{m}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau^q} + \frac{\tau^{r-2}}{2(\lambda_1 + \tau^r)} + \frac{1}{\tau^{1+\zeta}} \equiv \varepsilon, \\ T_1^1 &= \frac{(q-1)\lambda}{\tau^q} - \frac{[(1-r)\lambda_1 + \tau^r]\tau^{r-2}}{2(\lambda_1 + \tau^r)^2} - \frac{\zeta}{\tau^{1+\zeta}} \equiv p. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если принять во внимание, что T_0^0 и T_1^1 зависят только от τ , то уравнение (3.1) может быть представлено в виде

$$\ddot{\tau} = \mathcal{F}(q_1, \tau). \quad (4.4)$$

Здесь

$$\mathcal{F}(q_1, \tau) = \frac{3}{2}\kappa \left(m + \lambda(q-2)\tau^{1-q} + \frac{\lambda_1 r \tau^{r-1}}{2(\lambda_1 + \tau^r)^2} + \frac{1-\zeta}{\tau^\zeta} \right), \quad (4.5)$$

где $q_1 = \{\kappa, m, \lambda, \lambda_1, q, r, \zeta\}$ — набор параметров. Уравнение (4.4) допускает следующий первый интеграл:

$$\dot{\tau} = \sqrt{2[E - \mathcal{U}(q_1, \tau)]}, \quad (4.6)$$

где мы обозначили

$$\mathcal{U}(q_1, \tau) = -\frac{3}{2} \left[\kappa \left(m\tau - \frac{\lambda}{\tau^{q-2}} - \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \tau^r)} + \tau^{1-\zeta} \right) \right]. \quad (4.7)$$

С математической точки зрения уравнение (4.4) может быть интерпретировано как уравнение движения одной частицы с единичной массой под действием силы $\mathcal{F}(q_1, \tau)$. В выражении (4.6) E — некоторая постоянная интегрирования, которую можно рассматривать как уровень энергии, и $\mathcal{U}(q_1, \tau)$ — потенциал, соответствующий силе $\mathcal{F}(q_1, \tau)$. Решим уравнение (4.4) численно, используя метод Рунге–Кутты. При этом начальное значение τ взято достаточно малым, тогда как соответствующая первая производная $\dot{\tau}$ вычисляется из уравнения (4.6) при заданном E .

Прежде чем представить численный результат, качественно изучим уравнения (4.4), (4.5), (4.6) и (4.7). В силу (4.5) из (4.4) находим, что $\ddot{\tau} \rightarrow (3/2)\kappa m > 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. если $\ddot{\tau}$ рассматривается как ускорение пространства-времени VI , то спинорное поле с нетривиальной массой может быть принято как источник вечного ускорения. Что касается начальной стадии расширения (здесь мы имеем дело только с расширяющейся Вселенной), то положительность подынтегрального выражения налагает некоторые ограничения на значения τ , особенно в случае $\lambda > 0$ и $q \geq 2$ значение τ не может

быть слишком близко к нулю в любой точке пространства-времени. В этом случае существует бесконечно высокая потенциальная стена при $\tau \rightarrow 0$, что делает невозможным для любой классической системы достичь точки $\tau = 0$ (рис. 20). Таким образом, мы утверждаем, что при некоторых особых выборах параметров введение нелинейного спинорного поля с самодействием обеспечивает несингулярное решение. Как было показано в [78], регулярное решение получается только за счет нарушения условия энергодоминантности в теореме Хоукинга–Пенроуза (Hawking–Penrose) [50]. В случае VI пространство-время может быть записано в виде

$$T_0^0 \geq T_1^1 a_1^2 + T_2^2 a_2^2 + T_3^3 a_3^2, \quad (4.8a)$$

$$T_0^0 \geq T_1^1 a_1^2, \quad (4.8б)$$

$$T_0^0 \geq T_2^2 a_2^2, \quad (4.8в)$$

$$T_0^0 \geq T_3^3 a_3^2. \quad (4.8г)$$

Рассмотрим случай, когда λ отрицательна. Из (4.7) видно, что в окрестности $\tau = 0$ существует бездонная потенциальная яма (рис. 21). Если начальное значение τ слишком близко к нулю и постоянная E меньше, чем \mathcal{U}_{\max} (максимальное значение потенциала в присутствии самодействия), Вселенная никогда не выйдет из этой ямы.

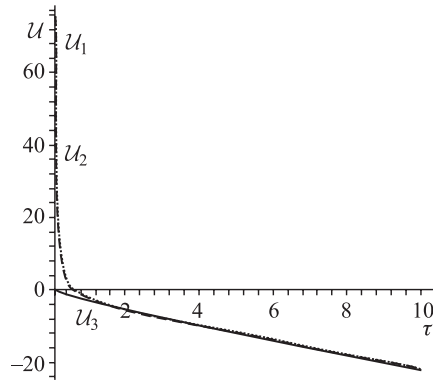


Рис. 20. Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ при $\lambda > 0$

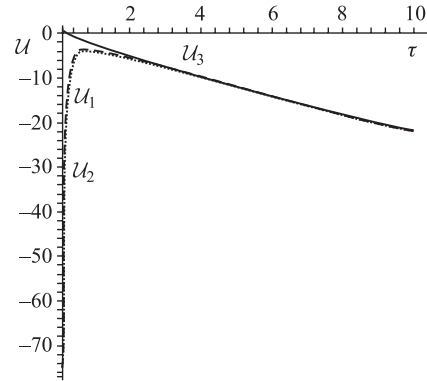


Рис. 21. Вид потенциала $\mathcal{U}(\tau)$ при отрицательной λ

Решим уравнение (4.4) численно. Выберем параметры следующим образом: гравитационная постоянная Эйнштейна $\kappa = 1$, масса спинорного поля $m = 1$, степень нелинейности $q = 4$, $r = 4$ и $\zeta = 1/3$, что соответствует излучению. Мы также положим $C_{00} = -0,001$ и $E = 10$. Начальное значение τ взято $\tau_0 = 0,4$. Константа связи $\lambda_1 = 0,5$, тогда как постоянная самодействия

берется или $\lambda = 0,5$, или $\lambda = -0,5$. Здесь на рисунках мы использовали следующие обозначения: индекс «1» соответствует случаю с самодействием и взаимодействием; индекс «2» соответствует случаю только с самодействием; индекс «3» соответствует случаю только с взаимодействием.

Как видно из рис. 20, в присутствии самодействия спинорного поля с положительной λ возникает бесконечно высокий потенциальный барьер при $\tau \rightarrow 0$, который означает, что в рассматриваемом случае τ не может быть тривиальной (если иметь в виду классический объект, Вселенная не может превращаться в точку, если она не находится на бесконечно высоком энергетическом уровне). Таким образом, нелинейность спинорного поля, предоставляемого самодействием, генерирует несингулярную эволюцию Вселенной. Но, как уже упоминалось раньше, настоящая регулярность достигается только за счет нарушения условия энергодоминантности теоремы Хоукинга–Пенроуза. Ясно также, что если нелинейность спинорного поля индуцируется скалярным полем, τ может иметь нулевое значение, порождая таким образом пространственно-временную сингулярность [79]. Заметим, что регулярность эволюции Вселенной может быть достигнута введением Λ -члена в систему. Подобная система была детально изучена в работах [78, 79]. Было показано, что введение положительного Λ -члена, что соответствует отталкивающей силе и может быть рассмотрено как темная энергия, приводит к ускоренному расширению, тогда как отрицательный Λ -член, соответствующий дополнительной гравитационной силе, в зависимости от выбора E порождает осциллирующий или аperiодический режим расширения. Отметим также, что регулярное решение, полученное за счет отрицательного Λ -члена, в случае взаимодействующих спинорного и скалярного полей приводит к нарушению условия энергодоминантности [79].

На рис. 22 и 23 показаны соответствующие плотность энергии и давление. В случае положительной λ плотность энергии изначально отрицательна, тогда как давление положительно. В этом случае решение хотя и несингулярное, условие энергодоминантности нарушается. В случае отрицательной λ давление всегда отрицательное.

Мы рисовали плотность энергии и давление исключительно для того, чтобы показать, что плотность энергии на самом деле уменьшается с ростом Вселенной. На рис. 22 и 23 также показано, что существует некий интервал, где плотность энергии системы с нелинейностью спинорного поля, порожденной самодействием, является отрицательной. Более того, мы видим, что давление источника становится отрицательным в ходе эволюции (в случае самодействия с положительной λ давление изначально положительно, но в ходе эволюции оно становится отрицательным, тогда как в случае отрицательной λ , так же как и в случае с взаимодействием, давление всегда отрицательное). Напомним, что темная энергия (например, квинтэссенция, газ Чаплыгина), сконструированная для объяснения ускоренного расширения Все-

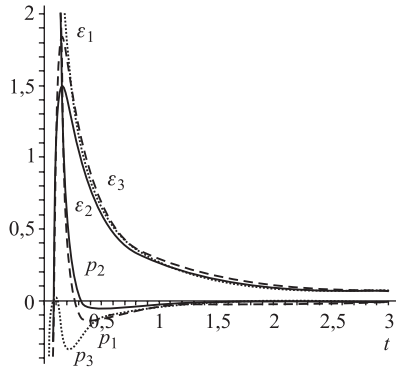


Рис. 22. Плотность энергии и давление при положительной λ

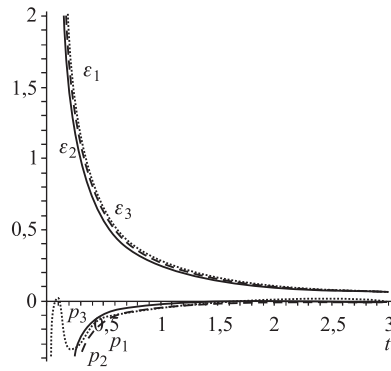


Рис. 23. Плотность энергии и давление при отрицательной λ

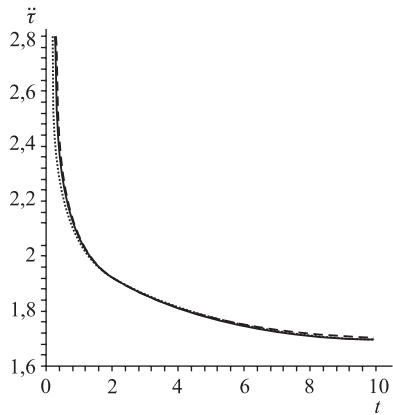


Рис. 24. Ускорение Вселенной, соответствующее положительной λ

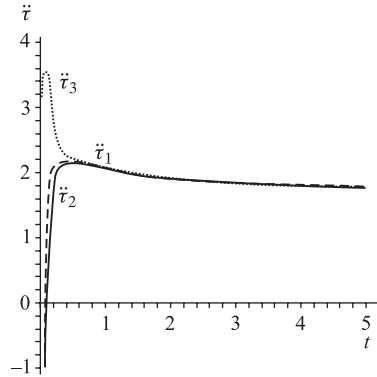
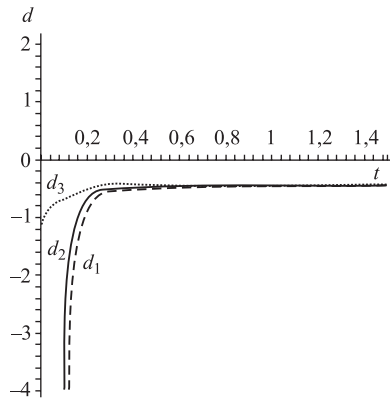
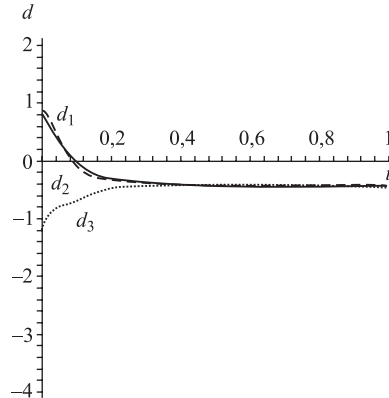


Рис. 25. Ускорение Вселенной, соответствующее отрицательной λ

ленной, имеет отрицательное давление. Поэтому мы требуем рассматривать модели с нелинейным спинорным полем и взаимодействующими спинорным и скалярным полями как альтернативу моделям с темной энергией, поскольку они также способны описать Вселенную с ускоренным расширением [87–89].

На рис. 24 и 25 показано ускорение Вселенной при положительной и отрицательной λ соответственно. Как видно, в обоих случаях имеется уменьшающееся ускорение, которое стремится к $(3/2)\kappa t$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Чтобы закрепить наше утверждение о том, что нелинейное спинорное поле может порождать позднее ускорение, мы графически изображаем параметр замедления при положительной и отрицательной λ (рис. 26 и 27).

Рис. 26. Параметр замедления при положительной λ Рис. 27. Параметр замедления при отрицательной λ

На рис. 24, 25, 26 и 27 показан ускоренный режим расширения Вселенной. Как видно, ускорение уменьшается со временем. В зависимости от выбора нелинейности она подвергается начальной фазе замедления. Также видно, что нелинейный член играет ведущую роль в начале эволюции, тогда как в поздней стадии масса спинорного поля имеет критическое значение для ускоренного режима расширения.

5. ВЫВОДЫ

В рамках космологической модели типа Бианки-I рассмотрено поведение Вселенной при наличии источников с отрицательным давлением, что приводит к ускоренному расширению.

Как и ожидалось, стандартные источники темной энергии, такие как космологическая постоянная, квинтэссенция, газ Чаплыгина, приводят к ускоренному расширению и быстрой изотропизации. Если же заполнить Вселенную жидкостью Ван-дер-Ваальса, то при некоторых значениях параметров в начальной стадии эволюции возникает довольно большое отрицательное давление, что приводит к начальной инфляции.

Предложена модель с модифицированной квинтэссенцией. Эта модель приводит к циклическому или осциллирующему поведению и таким образом избавляет от проблемы вечного ускорения.

Было также показано, что при некоторых выборах параметров модели с нелинейным спинорным полем могут иметь место отрицательные давления и с помощью таких моделей можно объяснить проблемы ускоренного расширения. При этом нелинейность спинорного поля может быть результатом как самодействия, так и взаимодействия со скалярным полем. Показано,

что нелинейность спинорного поля в этом играет важную роль в начальной стадии и приводит к быстрой изотропизации, а ускоренное расширение при больших временах происходит за счет массы спинорного поля. Поскольку нейтрино удовлетворяет уравнению Дирака и, по-видимому, имеет ненулевую массу, то полученный результат дает возможность рассматривать нейтрино как потенциальный источник ускоренного расширения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбаиов Б. М., Первушин В. Н., Проскурин Д. В. Экскурс в современную космологию // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34, вып. 7. С. 137–189.
2. Зельдович Я. Б. Магнитная модель Вселенной // ЖЭТФ. 1970. Т. 48. С. 986–988.
3. Зельдович Я. Б. Рождение частиц в космологии // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 443–447.
4. Лукаш В. Н., Старобинский А. А. Изотропизация космологического расширения за счет эффекта рождения частиц // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 1515–1527.
5. Amendola L. et al. WMAP and the Generalized Chaplygin Gas // JCAP. 2003. V. 0307. P. 005.
6. Armendáriz-Picón C., Greene P. B. Spinors, Inflation, and Non-Singular Cyclic Cosmologies // General Relativity and Gravitation. 2003. V. 35, No. 9. P. 1637–1658.
7. Bean R., Dore O. Are Chaplygin Gases Serious Contenders to the Dark Energy Throne? // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 023515.
8. Beca L. M. et al. The Role of Baryons in Unified Dark Matter Models // Ibid. V. 67. P. 101301.
9. Belinskii V. A., Khalatnikov I. M., Lifshitz E. M. Oscillatory Approach to a Singular Point in the Relativistic Cosmology // Adv. Phys. 1970. V. 19. P. 525–573.
10. Benaoum H. B. Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid. hep-th/0205140.
11. Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A. Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy-Matter Unification // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 043507.
12. Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A. Generalized Chaplygin Gas and CMBR Constraints // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 063003.
13. Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A. WMAP Constraints on the Generalized Chaplygin Gas Model // Phys. Lett. B. 2003. V. 575. P. 172–180.
14. Bertolami O. Challenges to the Generalized Chaplygin Gas Cosmology. astro-ph/0403310.
15. Biesiada M., Godlowski W., Szydlowski M. Generalized Chaplygin Gas Models Tested with SNIa // Astrophys. J. 2005. V. 622. P. 28–38; astro-ph/0403305.
16. Bilic N., Tupper G. B., Viollier R. D. Unification of Dark Matter and Dark Energy: The Inhomogeneous Chaplygin Gas // Phys. Lett. B. 2002. V. 353. P. 17–21.

17. *Bordemann M., Hoppe J.* The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2-Dimensional Fluid Dynamics // *Phys. Lett. B.* 1993. V. 317. P. 315–320.
18. *Brans C., Dicke R.H.* Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation // *Phys. Rev.* 1961. V. 124. P. 925–935.
19. *Bronnikov K.A., Chudayeva E.N., Shikin G.N.* Magneto-dilatonic Bianchi-I Cosmology: Isotropization and Singularity Problems // *Class. and Quant. Gravity.* 2004. V. 21. P. 3389–3403.
20. *Cardenas R. et al.* Model of the Universe Including Dark Energy Accounted for by Both a Quintessence Field and a (Negative) Cosmological Constant // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 083501.
21. *Cardenas V.H.* Tachyonic Quintessential Inflation // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 73. P. 103512.
22. *Chimento L.P.* Internal Symmetry in Bianchi Type-I Cosmologies // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 023504.
23. *Chimento L.P. et al.* Interacting Quintessence Solution to the Coincidence Problem // *Ibid.* 2003. V. 67. P. 083513; astro-ph/0303145.
24. *Cladwell R.R., Dave R., Steinhardt P.J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80, No. 8. P. 1582–1585.
25. *Colistete R. et al.* Dark Energy, Dark Matter and the Chaplygin Gas. gr-qc/0210079.
26. *Copeland E.J. et al.* What Is Needed of a Tachyon if It Is to Be the Dark Energy? // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 043003.
27. *Dabrowski M.P.* Phantom Dark Energy and Its Cosmological Consequences. gr-qc/0701057v1.
28. *Dev A., Jain D., Alcaniz J. S.* Constraints on Chaplygin Quintessence from the CLASS Gravitational Lens Statistics and Supernova Data // *Astronomy and Astrophys.* 2004. V. 417. P. 847–852; astro-ph/0311056.
29. *Diego J.M. et al.* Cosmological Constraints from the Cluster Contribution to the Power Spectrum of the Soft X-ray Background. New Evidence for a Low σ_8 // *Monthly Notice of Roy. Astron. Soc.* 2003. V. 344. P. 951–964.
30. *Einstein A.* Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* 1917. V. 1. P. 142–152.
31. *Einstein A.* Spielen die Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* 1919. V. 1. P. 349–356.
32. *Fabris J.C., Goncalvez S.V., de Souza P.E.* Density Perturbations in a Universe Dominated by the Chaplygin Gas // *Gen. Relativity and Gravitation.* 2002. V. 34. P. 53–63.
33. *Fabris J.C., Goncalvez S.V., de Souza P.E.* Mass Power Spectrum in a Universe Dominated by the Chaplygin Gas // *Ibid.* P. 2111–2126.

34. *Fay S.* Generalized Scalar-Tensor Theory in the Bianchi Type-I Model // *Gen. Relativity and Gravitation*. 2000. V. 32. P. 187–202.
35. *Felder G. et al.* Cosmology with Negative Potentials // *Phys. Rev. D*. 2002. V. 66. P. 023507.
36. *Fierz M.* Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls // *Z. Phys. A: Hadrons and Nuclei*. 1937. V. 104. P. 553–565.
37. *Friedmann A. A.* Über die Krümmung des Raumes // *Z. Phys.* 1922. V. 10. P. 377–386.
38. *Friedmann A. A.* Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes // *Z. Phys.* 1924. V. 21. P. 326–332.
39. *Gannouji R. et al.* Scalar-Tensor Dark Energy Models. astro-ph/0701650v1. 2007.
40. *Gannouji R. et al.* Scalar-Tensor Models of Normal and Phantom Dark Energy // *J. Cosmology and Astropart. Phys. JCAP*. 2006. V. 09. P. 016.
41. *Gibbons G. W.* Pulse Propagation in Born–Infeld Theory, the World Volume Equivalence Principle and the Hagedorn-Like Equation of State of the Chaplygin Gas // *Gravitation & Cosmology*. 2002. V. 8. P. 2–6.
42. *Gonzalez T., Quiros I.* Exact Models with Non-minimal Interaction between Dark Matter and (either Phantom or Quintessence) Dark Energy. gr-qc/0707.2089v1.
43. *Gorini V., Kamenshchik A., Moschella U.* Can the Chaplygin Gas Be a Plausible Model for Dark Energy? // *Phys. Rev. D*. 2003. V. 67. P. 063509.
44. *Gorini V. et al.* The Chaplygin Gas as a Model for Dark Energy. gr-qc/0403062.
45. *Guth A.* Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D*. 1981. V. 23, No. 2. P. 347–356.
46. *Hassaine M., Horvathy P. A.* Chaplygin Gas with Field-Dependent Poincare Symmetry // *Lett. Math. Phys.* 2001. V. 57. P. 33–40.
47. *Hassaine M.* Supersymmetric Chaplygin Gas // *Phys. Lett. A*. 2001. V. 290. P. 157–164.
48. *Harko T., Mak M. K.* Decelerating Causal Bulk Viscous Cosmological Models // *Intern. J. Mod. Phys. D*. 2000. V. 9, No. 2. P. 97–110.
49. *Hawking S. W., Taylor R. J.* Helium Production in Anisotropic Big Bang Universe // *Nature*. 1966. V. 299. P. 1278.
50. *Hawking S. W., Penrose R.* The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology // *Proc. of the Roy. Soc. of London. Math. and Phys. Sci.* 1970. V. 314. P. 529–548.
51. *Hu B. L., Parker L.* Anisotropy Damping through Quantum Effects in the Early Universe // *Phys. Rev. D*. 1978. V. 17. P. 933–945.
52. *Jackiw R.* A Particle Field Theorist’s Lectures on Supersymmetric, Non-Abelian Fluid Mechanics and D-branes. physics/0010042.
53. *Jacobs K. C.* Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear // *Astrophys. J.* 1968. V. 153, No. 2. P. 661–678.

54. *Jordan P.* Zum gegenwertigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen // *Z. Phys. A: Hadrons and Nuclei.* 1959. V. 157. P. 112–121.
55. *Kamenshchik A. Yu., Moschella U., Pasquier V.* An Alternative to Quintessence // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 511, No. 2–4. P. 265–268.
56. *Kantowski R., Sachs R. K.* Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models // *J. Mathem. Phys.* 1966. V. 7. P. 443–446.
57. *Kremer G. M.* Irreversible Processes in a Universe Modelled as a Mixture of a Chaplygin Gas and Radiation // *Gen. Relativity and Gravitation.* 2003. V. 35. P. 1459–1466.
58. *Kremer G. M.* Cosmological Models Described by a Mixture of Van der Waals Fluid and Dark Energy // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 123507.
59. *Kristian J., Sachs R. K.* Observations in Cosmology // *Astrophys. J.* 1966. V. 143. P. 379–399.
60. *Lemaitre G. H.* l’Univers en Expansion // *Ann. Soc. Sci. Brux. A.* 1933. V. 53. P. 51–85.
61. *Linder E. V.* On Oscillating Dark Energy // *Astropart. Phys.* 2006. V. 25, No. 2. P. 167–171.
62. *Lukash V. N. et al.* Quantum Effects and Evolution of Cosmological Models // *Nuovo Cim. B.* 1976. V. 35. P. 293–307.
63. *Misner C. W.* The Isotropy of the Universe // *Astrophys. J.* 1968. V. 151. P. 431–457.
64. *Misner W.* Transport Process in the Primordial Fireball // *Nature.* 1967. V. 214. P. 40–41.
65. *Multamaki T., Manera M., Gaztanaga E.* Large Scale Structure and the Generalised Chaplygin Gas as Dark Energy // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 023004.
66. *Nojiri S., Odintsov S. D.* The Oscillating Dark Energy: Future Singularity and Coincidence Problem // *Phys. Lett. B.* 2006. V. 637, No. 3. P. 139–148.
67. *Ogawa N.* A Note on Classical Solution of Chaplygin Gas as D-brane // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 085023.
68. *Olivares G., Atrio-Barandela F., Pavon D.* Observational Constraints on Interacting Quintessence Models // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 063523.
69. *Padmanabhan T.* Cosmological Constant — The Weight of the Vacuum // *Phys. Rep.* 2003. V. 380, No. 5–6. P. 235–320.
70. *Pavon D., Sen S., Zimdahl W.* CMB Constraints on Interacting Cosmological Models // *JCAP.* 2004. V. 0405. P. 009; astro-ph/0402067.
71. *Perlmutter S. et al.* Supernova Cosmology Project Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae // *Astrophys. J.* 1999. V. 517. P. 565–586.
72. *Ribas M. O., Devecchi F. P., Kremer G. M.* Fermions as Sources of Accelerated Regimes in Cosmology // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 123502.
73. *Riess A. G. et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // *Astron. J.* 1998. V. 116. P. 1009–1038.

74. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure // *Astrophys. J.* 1935. V. 82. P. 284.
75. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure. II // *Astrophys. J.* 1936. V. 83. P. 187.
76. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure. III // *Astrophys. J.* 1936. V. 83. P. 257.
77. *Rubano C., Scudellaro P., Piedipalumbo E.* Oscillating Dark Energy: A Possible Solution to the Problem of Eternal Acceleration // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 123501.
78. *Saha B.* Spinor Field in Bianchi Type-I Universe: Regular Solutions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 123501.
79. *Saha B., Boyadjiev T.* Bianchi Type-I Cosmology with Scalar and Spinor Fields // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 124010.
80. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with a Perfect Fluid and a Λ Term // *Astrophys. Space Sci.* 2006. V. 302. P. 83–91; gr-qc/0411080.
81. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy Re-examined // *Intern. J. Theor. Phys.* 2006. V. 45, No. 5. P. 983–995; gr-qc/0501067.
82. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy // *Chin. J. Phys.* 2005. V. 43, No. 6. P. 1035–1043.
83. *Saha B., Shikin G. N.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions // *J. Math. Phys.* 1997. V. 38, No. 10. P. 5305–5318.
84. *Saha B., Shikin G. N.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type-I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-consistent Solutions // *Gen. Relativity and Gravitation.* 1997. V. 29, No. 9. P. 1099–1112.
85. *Saha B.* Dirac Spinor in Bianchi-I Universe with Time Dependent Gravitational and Cosmological Constants // *Mod. Phys. Lett. A.* 2001. V. 16, No. 20. P. 1287–1296.
86. *Saha B.* Spinor Fields in Bianchi Type-I Universe // *Part. Nucl.* 2006. V. 37. Suppl. 1. P. S13–S44.
87. *Saha B.* Spinor Field and Accelerated Regimes in Cosmology // *Gravitation & Cosmology.* 2006. V. 12, No. 2–3 (46–47). P. 215–218.
88. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Cosmology: Inflation, Isotropization, and Late Time Acceleration // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 124030.
89. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Cosmology: Accelerated Regimes // *Roman. Rep. Phys.* 2007. V. 59, No. 2. P. 649–660.
90. *Sahni V.* Dark Matter and Dark Energy // *Lecture Notes on Physics.* 2004. V. 653. P. 141–180; astro-ph/0403324.
91. *Sahni V., Starobinsky A. A.* The Case for a Positive Cosmological Λ Term // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2000. V. 9, No. 4. P. 373–443.
92. *Sahni V. et al.* Statefinder — A New Geometrical Diagnostic of Dark Energy // *JETP Lett.* 2003. V. 77. P. 243–248.

93. *Sandvik H. et al.* The End of Unified Dark Matter? astro-ph/0212114.
94. *Sen A.* Rolling Tachyon // JHEP. 2002. V.0204. P.048.
95. *Sen A.* Field Theory of Tachyon Matter // Mod. Phys. Lett. A. 2002. V.17. P.1797–1804.
96. *Shao Y., Gui Y.* Statefinder Parameters for Tachyon Dark Energy Model. gr-qc/0703111v1.
97. *Shao Y., Gui Y.X., Wang W.* Parametrization of Tachyon Field // Mod. Phys. Lett. A. 2007. V.22. P.1175–1181.
98. *Srivastava S.K.* Tachyon as a Dark Energy. gr-qc/0409074v4.
99. *Steinhardt P.J., Turok N.* Cosmic Evolution in a Cyclic Universe // Phys. Rev. D. 2002. V.65. P.126003.
100. *Szydlowski M., Czja W.* Stability of FRW Cosmology with Generalized Chaplygin Gas // Phys. Rev. D. 2004. V.69. P.023506.
101. *Thorne K.S.* Primordial Element Formation, Primordial Magnetic Fields, and the Isotropy of the Universe // Astrophys. J. 1967. V.148, No.1. P.51–68.
102. *Thorne K.S.* Effect of a Primordial Magnetic Field on the Dynamics of the Universe // Bull. Am. Phys. Soc. 1966. V.11. P.340.
103. *Walker A.G.* On Milne's Theory of World-Structure // Proc. of the London Math. Soc. 1937. V.42(2). P.90–127.
104. *Weinberg S.* The Cosmological Constant Problem // Rev. Mod. Phys. 1989. V.61. P.1–23.
105. *Will C.M.* Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge Univ. Press, 2001; gr-qc/0103036.
106. *Zlatev I., Wang L., Steinhardt P.J.* Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant // Phys. Rev. Lett. 1999. V.82, No.5. P.896–899.