

ГЛОБАЛЬНАЯ ДРОБНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КХД И ЕЕ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*А. П. Бакулев**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1351
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ	1357
Однопетлевая АТВ (N_f фиксировано).	1361
Глобальная АТВ: учет порогов тяжелых кварков.	1365
ОТ АТВ К ДРОБНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ	1368
Однопетлевая ДАТВ ($N_f = 3$).	1370
Двухпетлевая ДАТВ ($N_f = 3$).	1373
Глобальная ДАТВ: учет порогов тяжелых кварков.	1375
РАСЧЕТ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ЧАСТИ ФОРМФАКТОРА ПИОНА В АТВ И ДАТВ	1379
АТВ: выбор схемы и масштаба перенормировки.	1383
ДАТВ: Зависимость от масштаба факторизации.	1387
АТВ и ДАТВ: изящное решение проблемы порогов тяжелых кварков.	1389
Переход в область Минковского: роль дисперсионного представления.	1390
РАСЧЕТ ШИРИНЫ РАСПАДА $H^0 \rightarrow \bar{b}b$ В ДАТВ	1392
Стандартная теория возмущений для R_S .	1393
Анализ R_S в ДАТВ.	1394
Сравнение различных подходов к расчету R_S .	1397
СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В АТВ И ДАТВ	1399
Однопетлевые АТВ и ДАТВ ($N_f = 3$).	1399

*E-mail: bakulev@theor.jinr.ru

Глобальная однопетлевая АТВ в области Минковского.	1403
Глобальная однопетлевая АТВ в евклидовой области.	1405
Глобальная однопетлевая ДАТВ.	1407
Приложения техники суммирования в однопетлевой (Д)АТВ.	1410
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1410
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1421

ГЛОБАЛЬНАЯ ДРОБНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КХД И ЕЕ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. П. Бакулев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлено глобальное обобщение дробно-аналитической теории возмущений (ДАТВ), учитывающее пороги тяжелых кварков и позволяющее работать с КХД-амплитудами как в евклидовой, так и во времениподобной областях значений квадрата передачи импульса q^2 . Кратко изложен аналитический подход в теории возмущений (ТВ) КХД, инициированный работами Джонса, Соловцова и Ширкова. Также кратко изложены основные положения ДАТВ при фиксированном числе кварковых ароматов. Более подробно обсуждаются проблема порогов тяжелых кварков и построение глобальной версии ДАТВ, в том числе вопрос об аналитических константах связи во времениподобной области значений $q^2 = s > 0$ для описания e^+e^- -аннигиляции и формфактора пиона. Достаточно подробно описаны приложения развитой глобальной версии ДАТВ к феноменологически интересным процессам (формфактор пиона и ширина распада хиггсовского бозона $H \rightarrow b\bar{b}$), а также к суммированию пертурбативных рядов.

We give the generalization of Fractional Analytic Perturbation Theory (FAPT) for QCD observables, recently developed for both the Euclidean and Minkowski regions of squared momentum transfer q^2 , which takes into account heavy-quark thresholds. The original analytic approach to QCD, initiated by Jones, Solovtsov and Shirkov, is shortly summarized. We also shortly consider the basic aspects of FAPT and then concentrate on the accounting for the heavy-quark thresholds problem and the construction of global version of FAPT. We discuss what one should use as an analytic coupling in the timelike region $q^2 = s > 0$ for the e^+e^- -annihilation and the pion form factor, and consider applications to phenomenologically relevant processes (the factorizable part of the pion form factor and the Higgs boson decay into a $b\bar{b}$ pair), as well as to the summation of perturbative series.

PACS: 11.10.Ni; 11.15.Bt; 12.38.Bx; 12.38.Cy

Посвящается памяти Игоря Соловцова, одного из создателей аналитической теории возмущений

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория возмущений в КХД в области пространственноподобных передач 4-импульса ($Q^2 = -q^2 > 0$ — в дальнейшем будем называть эту область

*E-mail: bakulev@theor.jinr.ru

евклидовой) основана на разложениях в ряды по степеням эффективного заряда (или эффективной константы связи) $\alpha_s(Q^2)$, который в однопетлевом приближении имеет вид

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} a[L] = \frac{4\pi}{b_0} \frac{1}{L} \quad (1.1)$$

с $b_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f$, $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$, где $\Lambda^2 \equiv \Lambda_{\text{QCD}}^2$, а «нормированный» заряд $a[L]$ удовлетворяет уравнению ренормгруппы (РГ) [1–3]

$$\frac{da[L]}{dL} = -a^2 (1 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots). \quad (1.2)$$

Здесь $c_1 = b_1/b_0^2$ и $c_2 = b_2/b_0^3$ — вспомогательные параметры разложения (см. приложение А). Однопетлевое (при $c_1 = c_2 = 0$) решение этого уравнения есть просто $1/L$, и оно, как видно, имеет сингулярность в виде полюса в точке $L = 0$, называемую полюсом Ландау. По этой причине применение теории возмущений в области малых передач импульса $Q^2 \sim \Lambda^2$ или $L \ll 1$ затруднено, так что характеристики адронных процессов, рассчитываемые в КХД на партонном уровне в виде разложений в ряды по степеням эффективного заряда, не являются всюду хорошо определенными величинами.

В свое время появление такой сингулярности в КЭД [4, 5], названной призрачной из-за отрицательности вычета в появляющемся полюсе пропагатора, было проинтерпретировано как указание на противоречивость квантовой теории поля. Однако, как было показано в работе [6, 7], это всего лишь свидетельствует о неприменимости теории возмущений в области, где параметр разложения не мал. Указание на то, что эта сингулярность не настоящая, следует также из изучения характера этой сингулярности в высших приближениях. Рассмотрим, например, двухпетлевое уравнение (1.2) с $c_1 \neq 0$ и $c_2 = 0$. Вблизи сингулярности $a[L] \gg 1$, и поэтому уравнение можно переписать в виде $da[L]/dL \approx -c_1 a^3$, что немедленно определяет поведение эффективного заряда вблизи сингулярности при $L \ll 1$:

$$a^{2-\text{loop}}[L] \approx \frac{1}{\sqrt{2} c_1 L}. \quad (1.3)$$

Мы видим, что тип сингулярности изменился: вместо полюса появляется точка ветвления типа $L^{-1/2}$, а при учете вкладов высших петель степень сингулярности очевидным образом уменьшается все сильнее (на самом деле она просто равна $1/l$, где l — число петель).

Появление таких «призрачных» сингулярностей с теоретической точки зрения противоречит принципу причинности квантовой теории поля [7, 8], поскольку делает спектральное представление Челлена–Лемана невозможным.

С другой стороны, оно также осложняет определение эффективного заряда КХД во временноподобной области ($q^2 > 0$). С момента появления КХД многие исследователи пытались определить соответствующий эффективный заряд в области временноподобных передач 4-импульса (в дальнейшем будем говорить «область Минковского»), который был бы пригоден для описания процессов типа e^+e^- -аннигиляции в адроны, распадов кваркониев и τ -лептонов в адроны, и т. п. Многие такие попытки, см., например, [9–11], использовали аналитическое продолжение эффективного заряда из глубокоевклидовой области, где хорошо работала теория возмущений КХД, в область Минковского, где проводились реальные эксперименты: $\alpha_s(Q^2) \rightarrow \alpha_s(s = -Q^2)$.

С течением времени стало ясно, что в инфракрасной (ИК) области малых значений Q^2 эффективный заряд $\alpha_s(Q^2)$ может иметь устойчивую неподвижную точку и перестать возрастать. Такое поведение означало бы, что при очень малых импульсах в окрестности этой точки цветовые силы насыщаются и глюоны перестают видеть кварки как цветные объекты, поскольку воспринимают их как целое квазибесцветное состояние. Так, Корнвел [12] в модели с конденсацией вихрей изучил формирование эффективной массы у глюона, которое приводит к такому насыщению эффективного заряда и делает его значение конечным в полюсе Ландау. Похожие попытки предпринимались при изучении других моделей [13–16], причем всюду глюон приобретал эффективную массу, которая играла роль ИК-регулятора сингулярного поведения эффективного заряда в области малых импульсов. В работе [17] было показано, что такая ИК защищенная модель эффективного заряда может быть связана с формфактором Судакора, подавляющим излучение мягких глюонов, так что глюоны с длиной волны, превышающей некоторую характерную (непертурбативную) длину волны, не могут различать индивидуальные кварки внутри бесцветного адронного состояния.

Параллельно с этими работами Радюшкин [18]* и Красников и Пивоваров [19], используя интегральное преобразование функции Адлера $D(Q^2)$ в отношение сечений $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$, получили аналитические выражения для однопетлевого эффективного заряда (и его первых степеней) сразу в области Минковского (за подробностями отсылаем заинтересованного читателя к работам [20–22]). Этот тип анализирования эффективного заряда в КХД во временноподобной области был переоткрыт позже в подходе пересуммирования фермионных пузырей Бенеке и Брауном [23], а также Баль, Бенеке и Брауном [24], причем в последней работе в связи с приложениями к расчету ширины распада $\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{адроны}$.

*Эта работа была опубликована 26 февраля 1982 г. в виде препринта ОИЯИ (*Raduyshkin A. V. JINR Preprint E2-82-159, Dubna, 1982*), затем послана для публикации в журнал «Physics Letters B», но была отвергнута редакцией.

Систематический подход, называемый аналитической теорией возмущений (АТВ), появился и утвердился в последнее десятилетие благодаря работам, инициированным Джонсом и Соловцовым, Ширковым и Соловцовым, Милтоном и Соловцовым [25–30]. Главными объектами в этом подходе являются спектральные плотности, с помощью которых аналитический эффективный заряд и его целые степени определяются в евклидовой области в виде дисперсионных интегралов. Те же спектральные плотности используются для построения эффективного заряда и его степеней в области Минковского с помощью дисперсионного соотношения, связывающего D -функцию Адлера и R -отношение [27, 31]. Эти интегральные преобразования, названные Ширковым \hat{R} - и \hat{D} -операциями* (см. следующий раздел), дают возможность определить одновременно аналитический эффективный заряд как в евклидовой области значений квадратов передач импульса, так и в области Минковского.

Вскоре были развиты аналитические и численные методы, необходимые для расчетов в двух- и трехпетлевых приближениях [33–38]. Этот подход был применен для расчета характеристик ряда адронных процессов, в том числе ширины инклюзивного распада τ -лептона в адроны [25, 39, 40], зависимости от выбора схемы и масштаба перенормировок в правилах сумм Бьеркена [41] и Гросса–Левеллина Смита [42], ширины распада Υ -мезона в адроны [43] и т.п. Более того, АТВ была применена также для анализа процессов, в которых имеется не один, а два масштаба, а именно: переходного $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi$ -формфактора [44, 45] и электромагнитного формфактора пиона в $O(\alpha_s^2)$ -порядке [44–46].

Суммируя, можно сказать, что этот аналитический подход (см. обзоры [21, 47, 48]) дает достаточно разумное описание адронных величин в КХД, хотя имеются как скептические мнения на этот счет [49], так и альтернативные подходы к трактовке сингулярности эффективного заряда в КХД [32, 50–60] — в частности, в отношении глубокоинфракрасной области $Q^2 \leq \Lambda^2$, где, в конечном счете, может стать важным появление ненулевых адронных масс [61, 62]. Кроме того, подход АТВ имеет строгие ограничения в приложении к описанию КХД-процессов, поскольку неявно подразумевает, что единственными величинами, подлежащими аналитизации, являются эффективный заряд $\alpha_s(Q^2)$ и его целые степени $[\alpha_s(Q^2)]^n$.

Но, как было показано в [62–67], трехточечные функции, такие, например, как используемые при описании электромагнитного формфактора пиона или переходного $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi$ -формфактора, в следующем за ведущим порядке

*Д. В. Ширков объясняет такие обозначения двойственно: преобразование \hat{D} связано с D -функцией Адлера и с работой Докшицера с соавторами [32], а преобразование \hat{R} является обратным (reverse) по отношению к преобразованию \hat{D} , но также связано с именами Радюшкина [18], Красникова и Пивоварова [19].

КХД-теории возмущений содержат логарифмические вклады, связанные с дополнительным масштабом факторизации. Эти логарифмы, хотя и не влияют на сингулярность Ландау, видоизменяют пертурбативную спектральную плотность, используемую в АТВ для проведения анализизации. Именно этот факт привел Караникаса и Стефаниса [68,69] к предложению расширить концепцию анализизации (дисперсионного представления) от уровня эффективного заряда и его степеней до уровня КХД-амплитуд в целом*. Применение такой концепции анализизации требует обобщения исходной АТВ на дробные степени эффективного заряда, а также на их произведения со степенями логарифмов.

Стоит отметить, что дробные степени эффективного заряда были рассмотрены неявно в [70, 71]**. Необходимое для КХД обобщение АТВ на дробные степени эффективного заряда, названное дробно-аналитической теорией возмущений (ДАТВ), было недавно проведено в [74, 75] (в качестве краткого введения — см. [76]), а затем применено в [77] для анализа факторизуемого вклада в электромагнитный формфактор пиона. Кардинальным преимуществом ДАТВ в этом случае стало уменьшение зависимости пертурбативных результатов от выбора значения масштаба факторизации. Это напоминает результаты применения АТВ для анализа того же формфактора пиона в $O(\alpha_s^2)$ -порядке, где результаты также практически перестали зависеть от выбора схемы перенормировки и ее масштаба [46] (краткое изложение см. в [76, 78–81]). В работе [75] в рамках ДАТВ для области Минковского было проведено изучение процесса распада хиггсовского бозона в пару $b\bar{b}$ -кварков. Хотя область значений энергии в системе центра масс, интересная для эксперимента, здесь очень велика, $\sqrt{s} \approx 100$ ГэВ, т. е. здесь не следует ожидать заметных отличий ДАТВ от стандартной ТВ КХД, тем не менее, интересно было проверить влияние переноса π^2 -вкладов из коэффициентов, посчитанных в стандартном подходе Четыркиным с соавторами [82–84] в $O(\alpha_s^4)$ -порядке, в анализизированный эффективный заряд \mathcal{A}_1 и его степени \mathcal{A}_n (более точно, в $\mathcal{A}_{1+\nu}$ и $\mathcal{A}_{n+\nu}$, см. подробнее в [75] и в разд. 5). Результаты работы показали, что отличия действительно невелики, меньше или порядка 2 %.

В этой работе мы попытаемся последовательно рассказать об основных элементах глобальной версии ДАТВ, в которой учитываются пороги тяже-

*Более точно, в работах [68,69] изучалась анализизация объектов типа $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \alpha_s(Q^2 xy) f(x)f(y)$, которые можно трактовать как эффективный учет логарифмических вкладов, появляющихся в следующем за ведущим порядке теории возмущений КХД.

**Здесь интересно вспомнить ранние попытки изучать спектральную плотность, отвечающую дробной степени эффективного заряда в КЭД [72]. Подобная спектральная плотность была заново переоткрыта Оэме в КХД [73].

лых кварков, чтобы дать читателю возможность применять ее на практике для расчетов реальных процессов. При этом сама ДАТВ будет освещена достаточно сжато, поскольку более полный обзор оснований ДАТВ будет дан в готовящейся совместной публикации авторов ДАТВ [74, 75]. План изложения таков. В разд. 2 дается краткий обзор основных положений АТВ на примере расчета D -функции Адлера в пространственноподобной области и ее двойника во временноподобной области — R -отношения e^+e^- -аннигиляции. Мы кратко обсуждаем формализм АТВ в однопетлевом приближении для случая фиксированного числа ароматов, затем переходим к вопросу об учете порогов тяжелых кварков в АТВ и построению так называемой глобальной АТВ. В разд. 3 обсуждается неполнота АТВ и в качестве способа пополнения предлагается ДАТВ. Приводятся основные формулы ДАТВ, отвечающей $N_f = 3$, и обсуждается построение глобальной версии ДАТВ, в которой учитываются пороги тяжелых кварков. Разд. 4 посвящен расчету факторизуемой части формфактора пиона в глобальной ДАТВ. Кратко обсуждаются результаты, полученные в АТВ (существенное снижение зависимости результатов от выбора схемы и масштаба перенормировки), после чего рассматривается зависимость результатов от масштаба факторизации в глобальной ДАТВ, а также переход в область Минковского и роль дисперсионного представления в этом переходе. В разд. 5 рассмотрен расчет ширины распада $H^0 \rightarrow \bar{b}b$ в глобальной ДАТВ. Показывается, что в то время как результаты ДАТВ с $N_f = 5$, отвечающие переносу π^2 -вкладов из коэффициентов теории возмущений в аналитические эффективные заряды, прекрасно согласуются с результатами стандартной теории возмущений уже на уровне двухпетлевого приближения, результат глобальной ДАТВ отличается от них на уровне 14%. В разд. 6 обсуждается суммирование рядов $\sum_n d_n \mathcal{A}_n[L]$ теории возмущений в АТВ и ДАТВ: оказывается, что в случае однопетлевой АТВ можно такое суммирование провести точно [85] и выразить ответ в виде интеграла от $\mathcal{A}_1[L-t]$ по t с весом $P(t)$, определяемых коэффициентами пертурбативного ряда d_n . Мы показываем, что аналогичное суммирование можно провести и в случае однопетлевой ДАТВ. Получены все необходимые формулы для учета порогов кварков в этих методах суммирования для АТВ и ДАТВ.

В заключении суммированы основные выводы работы, а важные технические детали собраны в пяти приложениях.

Прежде чем приступить к собственно изложению, сделаем пояснение об используемых обозначениях. По историческим причинам, чтобы иметь прямую связь с работами [74, 75, 77] и чтобы упростить основные формулы, в тех подразделах, где мы будем обсуждать случаи фиксированного значения числа активных кварков (или флейворов) N_f , мы будем считать основным элементом теории нормализованный по Ширкову [86] и Михайлову [85] эффективный заряд $a(Q^2) = b_0 \alpha_s(Q^2)/(4\pi)$, и аналитические образы будут

строиться для степеней именно этого объекта:

$$\mathcal{A}_n = \mathbf{A}_E [a^n]; \quad \mathfrak{A}_n = \mathbf{A}_M [a^n]. \quad (1.4a)$$

При переходе же к обсуждению глобальной версии теории, когда Q^2 (или s) меняются во всей области значений $[0, \infty)$ и N_f эффективно становится зависящим от Q^2 (или s), мы будем считать основным объектом теории сам эффективный заряд $\alpha_s(Q^2)$ и строить анализацию степеней этого объекта, т. е. мы будем считать

$$\mathcal{A}_n^{\text{glob}} = \mathbf{A}_E [\alpha_s^n]; \quad \mathfrak{A}_n^{\text{glob}} = \mathbf{A}_M [\alpha_s^n]. \quad (1.4б)$$

Чтобы различать два типа величин, мы ввели верхний индекс «glob». Нам также понадобятся заряды со стандартной нормировкой при фиксированном значении N_f :

$$\bar{\mathcal{A}}_n(Q^2; N_f) \equiv \frac{\mathcal{A}_n(Q^2)}{\beta_f^n}; \quad \bar{\mathfrak{A}}_n(s; N_f) = \frac{\mathfrak{A}_n(s)}{\beta_f^n}; \quad \beta_f = \frac{b_0(N_f)}{4\pi}, \quad (1.4в)$$

которые обладают дисперсионными интегральными представлениями со спектральными плотностями $\bar{\rho}_n(\sigma; N_f) = \rho_n(\sigma)/\beta_f^n$.

Кроме того, мы часто будем обсуждать эффективные заряды как функции не Q^2 или s , а логарифмов $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ или $L_s = \ln(s/\Lambda^2)$. В таких случаях мы будем использовать те же обозначения зарядов, но аргумент ставить не в круглых скобках, а в квадратных, т. е. писать вместо $\alpha_s^\nu(Q^2)$, $\mathcal{A}_\nu(Q^2)$ и $\mathfrak{A}_\nu(Q^2)$ следующие выражения: $\alpha_s^\nu[L]$, $\mathcal{A}_\nu[L]$ и $\mathfrak{A}_\nu[L_s]$.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом разделе мы обсуждаем основные положения и элементы АТВ, следуя в основном работам Ширкова и Соловцова [48, 86].

Как уже говорилось в разд. 1, изначальной мотивацией введения новых эффективных зарядов было желание связать рассчитываемую в евклидовой области D -функцию Адлера и величину $R_{e^+e^-} = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$, измеряемую в минковской области. Для определения функции Адлера рассмотрим поляризационный оператор

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int e^{iqx} \langle T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle d^4x \quad (2.1)$$

векторных кварковых токов $J_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$. В киральном пределе, когда массы легких кварков равны нулю, эта функция зависит только от одной переменной $Q^2 = -q^2$ (≥ 0 для пространственноподобных q^2)

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(Q^2). \quad (2.2)$$

В КХД поляризационный оператор $\Pi(Q^2)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению с одним вычитанием, причем обычно вычитание производят в точке $Q^2 = 0$:

$$\Pi(Q^2) = \Pi(0) - Q^2 \int_0^\infty \frac{R(\sigma) d\sigma}{\sigma(\sigma + Q^2)} \quad (2.3)$$

с $R(\sigma) = \text{Im } \Pi(\sigma)/\pi$. Функция Адлера [87] определяется в виде логарифмической производной поляризационного оператора $\Pi(Q^2)$, т. е.

$$D(Q^2) = -Q^2 \frac{d\Pi(Q^2)}{dQ^2}, \quad (2.4)$$

так что дисперсионное представление для нее

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{R(\sigma, \mu^2)}{(\sigma + Q^2)^2} d\sigma \quad (2.5a)$$

не содержит вычитательной константы $\Pi(0)$ и инвариантна относительно преобразований ренормализационной группы (РГ). Функция $R(s)$, пропорциональная мнимой части $\text{Im } \Pi(s)$, в 1-петлевом приближении КЭД связана с отношением сечений e^+e^- -аннигиляции в адроны и в $\mu^+\mu^-$. Из дисперсионного представления (2.5a), рассматриваемого в комплексной плоскости переменной z , которая на действительной положительной полуоси совпадает с Q^2 , и связи (2.4) немедленно следует обратное представление

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\varepsilon}^{-s+i\varepsilon} \frac{D(z)}{z} dz, \quad (2.5b)$$

где интеграл берется вдоль контура в комплексной плоскости z , как показано на рис. 1.

Обе функции изучаются в стандартной теории возмущений КХД:

$$D(Q^2, \mu^2) = \sum_n d_n(Q^2/\mu^2) a_s^n(\mu^2) \xrightarrow{\mu^2=Q^2} D(Q^2) = \sum_n d_n a_s^n(Q^2), \quad (2.6a)$$

$$R(s, \mu^2) = \sum_m r_m(s/\mu^2) a_s^m(\mu^2) \xrightarrow{\mu^2=s} R(s) = \sum_m r_m a_s^m(s), \quad (2.6b)$$

причем эффективные заряды $a_s^m(\mu^2)$, $a_s^m(Q^2)$, $a_s^m(\mu^2)$ и $a_s^m(s)$ определяются ренормгрупповым уравнением. Однако, разложив по теории возмущений левые части (2.6a) и (2.6b), мы можем получить соотношения, связывающие степени $\ln(s/\mu^2)$ и $\ln(Q^2/\mu^2)$ в коэффициентах $r_m(s/\mu^2)$ и $d_n(Q^2/\mu^2)$, в то время как степени $a_s(\mu^2)$ остаются числовыми параметрами. При $\mu^2 = Q^2$ в правой части (2.6a) (или $\mu^2 = s$ в (2.6b)) коэффициенты $d_n = d_n(1)$

(аналогично $r_n = r_n(1)$) становятся числовыми константами, а степени зарядов $a_s^n(Q^2)$ (соответственно, $a_s^n(s)$) теперь подвергаются интегральным преобразованиям (см. ниже).

В случае, когда эти заряды являются стандартными эффективными зарядами пертурбативной КХД, эта связь нарушается в любом петлевом порядке из-за наличия сингулярности Ландау в евклидовой области. Естественно возникает вопрос: можно ли построить аналитические версии обоих типов зарядов, для которых функции D и R могут быть связаны дисперсионным соотношением? АТВ как раз и дает *положительный* ответ на этот вопрос, вводя в рассмотрение нестепенные (функциональные) разложения [21, 22, 27, 29, 31, 47, 48, 86, 88].

Аналитические образы степеней нормированного эффективного заряда, см. (1.1), в евклидовой области определяются с помощью формальной линейной операции \mathbf{A}_E :

$$\mathbf{A}_E [a_{(l)}^n] = \mathcal{A}_n^{(l)}, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}_n^{(l)}(Q^2) \equiv \int_0^\infty \frac{\rho_n^{(l)}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma \quad (2.7)$$

и спектральная плотность задается мнимой частью пертурбативной величины:

$$\rho_n^{(l)}(\sigma) \equiv \frac{1}{\pi} \text{Im} [a_{(l)}^n(-\sigma)]. \quad (2.8)$$

Степень (индекс) n имеет здесь только положительные целые значения, а петлевой порядок приближения указывается символом l в скобках.

Аналогично, аналитические образы степеней нормированного эффективного заряда в области Минковского определяются с помощью другой линейной операции, \mathbf{A}_M , а именно,

$$\mathbf{A}_M [a_{(l)}^n] = \mathfrak{A}_n^{(l)}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}_n^{(l)}(s) \equiv \int_s^\infty \frac{\rho_n^{(l)}(\sigma)}{\sigma} d\sigma. \quad (2.9)$$

Эти «анализирующие» операции определяются, в свою очередь, с помощью следующих двух интегральных преобразований (мы сохраняем здесь терминологию Ширкова, см., например, [21, 22, 89], а также примечание на с. 1354):

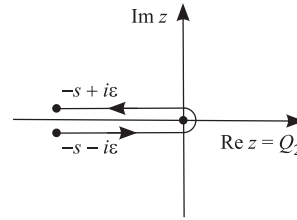


Рис. 1. Контур интегрирования для \hat{R} -преобразования в (2.11)

\hat{D} — преобразование из временноподобной области в пространственноподобную область

$$\hat{D}[\mathfrak{A}_n^{(l)}] = \mathcal{A}_n^{(l)}, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}_n^{(l)}(Q^2) \equiv Q^2 \int_0^\infty \frac{\mathfrak{A}_n^{(l)}(\sigma)}{(\sigma + Q^2)^2} d\sigma; \quad (2.10)$$

и \hat{R} — обратное преобразование

$$\hat{R}[\mathcal{A}_n^{(l)}] = \mathfrak{A}_n^{(l)}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}_n^{(l)}(s) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\varepsilon}^{-s+i\varepsilon} \frac{\mathcal{A}_n^{(l)}(\sigma)}{\sigma} d\sigma \quad (2.11)$$

и интеграл берется вдоль контура в комплексной плоскости z , как показано на рис. 1. Заметим, что эти операции связаны теперь друг с другом соотношением взаимности

$$\hat{D}\hat{R} = \hat{R}\hat{D} = 1, \quad (2.12)$$

справедливым для всего набора $\{\mathcal{A}_n, \mathfrak{A}_n\}$ и в любом петлевом порядке именно в силу регулярности новых эффективных зарядов $\mathcal{A}_n(Q^2)$ и $\mathfrak{A}_n(s)$.

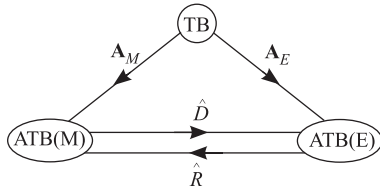


Рис. 2. Схема аналитизации как переход от стандартной теории возмущений к аналитической ТВ в областях Минковского (АТВ(М)) и Евклида (АТВ(Е))

\mathbf{A}_E в соответствии с правой стрелкой рис.2 переводит ее в нестепенной ряд [21, 86] $\mathcal{D}_A(Q^2)$ в евклидовой области:

$$D(Q^2) = \sum_n d_n a_{(l)}^n(Q^2) \Rightarrow \mathbf{A}_E[D] \equiv \mathcal{D}_A, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}_A(Q^2) = \sum_n d_n \mathcal{A}_n^{(l)}(Q^2). \quad (2.13)$$

Затем мы можем применить операцию \hat{R} , задаваемую формулой (2.11), см. нижнюю линию на рис. 2, и получить величину $\mathcal{R}(s)$ в области Минков-

Схематически операции \mathbf{A}_E и \mathbf{A}_M , определяющие аналитические эффективные заряды в пространственно- ($Q^2 > 0$) и временноподобной ($s > 0$) областях, представлены графически на рис.2. Логика «аналитизации» приводит к схожим выражениям для разложений КХД-амплитуд, зависящих от единственного масштаба Q^2 , и для их продолжений из евклидовой области в область Минковского.

В качестве примера рассмотрим D -функцию Адлера в правой части (2.6а), которая разлагается в ряд по степеням $a_{(l)}^n(Q^2)$. Применение к ней операции

ского также в виде нестепенного разложения:

$$\hat{R}[\mathcal{D}_A] \equiv \mathcal{R}, \quad \text{где} \quad \mathcal{R}(s) = \sum_n d_n \mathfrak{A}_n^{(l)}(s). \quad (2.14)$$

С другой стороны, то же самое выражение для функции $\mathcal{R}(s)$ может быть получено [18, 19] в соответствии с левой стрелкой рис. 2 с помощью операции \mathbf{A}_M :

$$D(Q^2) = \sum_n d_n a_{(l)}^n(Q^2) \Rightarrow \mathbf{A}_M[D] = \mathcal{R}, \quad \text{где} \quad \mathcal{R}(s) = \sum_n d_n \mathfrak{A}_n^{(l)}(s). \quad (2.15)$$

2.1. Однопетлевая АТВ (N_f фиксировано). Рассмотрим применение этого формализма в однопетлевом приближении с фиксированным числом флейворов N_f . Пользуясь простым видом эффективного заряда (1.1) и рецептом построения спектральной плотности (2.8), мы получаем очень простое выражение для однопетлевой спектральной плотности ($L_\sigma = \ln(\sigma/\Lambda^2)$):

$$\rho_1^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{L_\sigma - i\pi} = \frac{1}{L_\sigma^2 + \pi^2}. \quad (2.16)$$

Подстановка его в (2.7) и (2.9) дает однопетлевые аналитические эффективные заряды $\mathcal{A}_1^{(1)}$ [28, 29] и $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ [18, 25–27]*

$$\mathcal{A}_1^{(1)}[L] = \frac{1}{L} - \frac{1}{e^L - 1}; \quad (2.17)$$

$$\mathfrak{A}_1^{(1)}[L_s] = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{L_s}{\sqrt{L_s^2 + \pi^2}} \right), \quad (2.18)$$

где

$$L = \ln(Q^2/\Lambda^2), \quad L_s = \ln(s/\Lambda^2). \quad (2.19)$$

Из этих уравнений мы заключаем, что на однопетлевом уровне «анализация» (\mathbf{A}_E) в евклидовой области означает вычитание полюса Ландау, в то время как в области Минковского аналогичная операция (\mathbf{A}_M) означает суммирование π^2/L^2 -вкладов во всех порядках: $\mathfrak{A}_1^{(1)}[L_s]$ при $L \gg 1$ имеет разложение $1/L(1 - \pi^2/(3L^2) + \dots)$.

Спектральные плотности высших степеней эффективного заряда, определяемые в соответствии с (2.8), также можно записать достаточно компактно

*Заметим, что $\arccos(L/\sqrt{L^2 + \pi^2}) = \text{arctg}(\pi/L)$ при $L > 0$, так что формула, полученная в [18], совпадает с (2.18).

($L_\sigma = \ln(\sigma/\Lambda^2)$):

$$\rho_n^{(1)}(\sigma) = \frac{\sin[n\varphi_{(1)}[L_\sigma]]}{R_{(1)}^n[L_\sigma]}, \quad \varphi_{(1)}[L_\sigma] = \arccos\left(\frac{L_\sigma}{\sqrt{L_\sigma^2 + \pi^2}}\right), \quad (2.20)$$

$$R_{(1)}[L_\sigma] = \sqrt{L_\sigma^2 + \pi^2}. \quad (2.21)$$

Они при $n \geq 2$ обладают рекуррентным свойством:

$$\rho_n^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{-d}{dL_\sigma}\right) \rho_{n-1}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-d}{dL_\sigma}\right)^{n-1} \rho_1^{(1)}(\sigma), \quad (2.22)$$

следующим из очевидного соотношения

$$\frac{1}{(L-i\pi)^n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{-d}{dL}\right) \frac{1}{(L-i\pi)^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-d}{dL}\right)^{n-1} \frac{1}{L-i\pi}.$$

Это свойство позволяет записать выражения для аналитических образов n -х степеней эффективных зарядов через сами аналитические заряды в виде их n -х производных:

$$\mathcal{A}_n^{(1)}[L] = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-d}{dL}\right)^{n-1} \mathcal{A}_1^{(1)}[L]; \quad (2.23a)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n^{(1)}[L_s] &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{-d}{dL_s}\right)^{n-1} \mathfrak{A}_1^{(1)}[L_s] = \\ &= \frac{\sin\left[(n-1)\arccos\left(L_s/\sqrt{L_s^2 + \pi^2}\right)\right]}{(n-1)\pi \left[\sqrt{L_s^2 + \pi^2}\right]^{n-1}}, \end{aligned} \quad (2.23б)$$

$$= \frac{\operatorname{Im}\left[(L_s + i\pi)^{n-1}\right]}{(n-1)\pi (L_s^2 + \pi^2)^{n-1}} \quad \text{для } n > 1, n \in \mathbb{N}. \quad (2.23в)$$

Отметим, что явное выражение для правой части в (2.23б) было получено в [75] с помощью преобразования Лапласа, см. разд. 3, формулу (3.2).

На рис. 3 мы сравниваем поведение аналитических зарядов в пространственно- и временноподобных областях. На рис. 3, а показаны кривые для $\mathfrak{A}_1(s)$ и $\mathcal{A}_1(Q^2)$, и для лучшей видимости проставлена черная точка, указывающая предельное значение обоих зарядов при $Q^2 = s = 0$. На рис. 3, б кроме аналитических образов квадратов зарядов $\mathfrak{A}_2(s)$ и $\mathcal{A}_2(Q^2)$ (сплошные кривые) для сравнения мы показываем штриховыми линиями, как ведут себя квадраты анализированных зарядов: видно, что при $Q^2 < 1 \text{ ГэВ}^2$ и $s < 1 \text{ ГэВ}^2$ аналитические квадраты существенно меньше, причем в точке $Q^2 = s = 0$

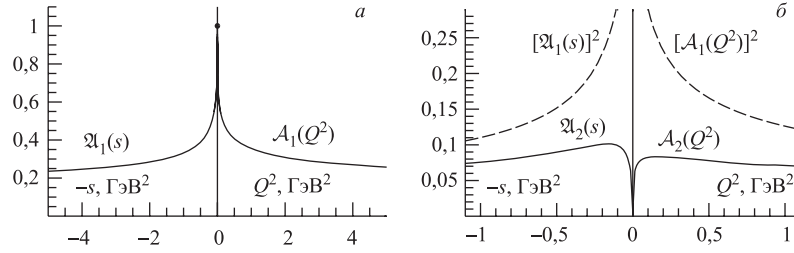


Рис. 3. Поведение однопетлевых аналитических зарядов $\mathfrak{A}_1(s)$ и $\mathcal{A}_1(Q^2)$ (а) и $\mathfrak{A}_2(s)$ и $\mathcal{A}_2(Q^2)$ (б). На рис. б штриховыми линиями показаны для сравнения квадраты соответствующих аналитических зарядов

они и вовсе обращаются в нуль, в то время как $\mathfrak{A}_1^2(0) = \mathcal{A}_1^2(0) = 1$. На обох графиках рис. 3 виден эффект «искажающего зеркала» [29, 47]: при переходе от области Минковского к евклидовой области зависимость заряда от аргумента меняется только слегка, причем имеются три точки, в которых значения зарядов в обеих областях совпадают:

$$\text{а) } \mathfrak{A}_1(0) = \mathcal{A}_1(0) = 1, \text{ причем } \mathfrak{A}_1(s) = \mathcal{A}_1(s) = 1 + \frac{1}{\ln[s/\Lambda^2]} \text{ при } s \rightarrow 0;$$

$$\text{б) } \mathfrak{A}_1(\Lambda^2) = \mathcal{A}_1(\Lambda^2) = 1/2;$$

$$\text{в) } \mathfrak{A}_1(\infty) = \mathcal{A}_1(\infty) = 0, \text{ причем } \mathfrak{A}_1(s) = \mathcal{A}_1(s) = \frac{1}{\ln[s/\Lambda^2]} \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

В то же время для анализированных квадратов таких точек уже четыре: кроме точек а) и в) появляются еще две точки, по одной между а) и б) и между б) и в), причем в точке а) значения функций равны уже не 1, а 0. Появление при переходе от n к $n + 1$ еще одной точки, в которой функция разности $\Delta_n(s) = \mathfrak{A}_n(s) - \mathcal{A}_n(s)$ обращается в ноль, вполне понятно, если вспомнить про рекуррентные соотношения (2.23), благодаря которым

$$\Delta_{n+1}[L] = \frac{1}{n} \left(\frac{-d}{dL} \right) \Delta_n[L].$$

Функция $\Delta_1[L]$ имеет три нуля: на концах ($L_- = -\infty$ и $L_+ = +\infty$) и в центре ($L_0 = 0$). Значит $\Delta_2[L]$ вдобавок к двум нулям на концах (L_- и L_+) будет иметь нули в точках максимумов и минимумов функции $\Delta_1[L]$, которые достигаются между ее нулями, т. е. один между L_- и L_0 , другой между L_0 и L_+ . Рассуждая аналогично, мы убеждаемся, что $\Delta_n[L]$ обращается в ноль в $n + 2$ точках.

Стоит отметить также следующие свойства однопетлевых функций $\mathfrak{A}_1[L]$ и $\mathcal{A}_1[L]$ [29], рассматриваемых как функции не Q^2 и s , а их логарифмов (см.

(2.19) и конец введения):

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_m[-L] \\ \mathfrak{A}_m[-L] \end{pmatrix} = (-1)^m \begin{pmatrix} \mathcal{A}_m[L] \\ \mathfrak{A}_m[L] \end{pmatrix} \text{ для } m \geq 2, m \in \mathbb{N}; \quad (2.24)$$

$$\mathcal{A}_m[\pm\infty] = \mathfrak{A}_m[\pm\infty] = 0 \text{ для } m \geq 2, m \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

На рис. 4 мы сравниваем поведение аналитических образов высших степеней зарядов в пространственно- (рис. а) и временноподобных (рис. б) областях. Эффект «искажающего зеркала» виден также и здесь, но степень искажения растет с ростом степени заряда n : значения $\mathcal{A}_4[0]$ и $\mathfrak{A}_4[0]$ различаются почти в два раза, в то время как $\mathcal{A}_2[0] \simeq \mathfrak{A}_2[0]$.

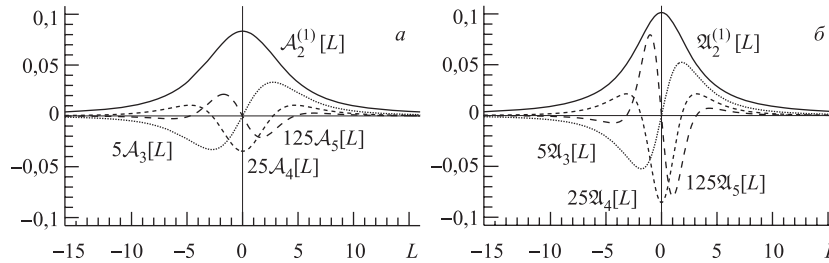


Рис. 4. Графики функций $\mathcal{A}_n^{(1)}[L]$ (а) и $\mathfrak{A}_n^{(1)}[L]$ (б) для $n = 2, 3, 4, 5$. Для того чтобы показать все кривые вместе, мы масштабировали функции с помощью факторов 5^{n-2}

Для получения двухпетлевых аналитических зарядов необходимо использовать в качестве исходного пертурбативного эффективного заряда $a_{(2)}^n(Q^2)$ точное решение двухпетлевого РГ-уравнения (А.3), которое выражается через функцию Ламберта, как было показано в [35], см. (А.5). Решения для эффективного заряда в высших петлевых приближениях могут быть также выражены через функцию Ламберта, см. (В.8), или аппроксимированы с использованием приближенных выражений для спектральных плотностей с последующим их численным интегрированием (см. приложение А, где мы детально разобрали процедуру построения спектральных плотностей $\rho_1^{(2)it-1}[L_\sigma]$, формула (А.9), и $\rho_1^{(2)it-2}[L_\sigma]$, формула (А.10), отвечающие итерационным решениям (А.76)).

Как видно из этого краткого обсуждения, все проблемы, связанные с наличием «призрачной» сингулярности у эффективного заряда в евклидовой области, устраняются при аналитизации, основанной на принципе причинности («спектральности» [86]) и РГ-инвариантности. При этом устранение полюса Ландау (аналогично, компенсация сингулярностей типа точек ветвления в высших петлевых приближениях) *не вводится руками, а появляется как естественное следствие принципа аналитизации* эффективного заряда, без какой-либо апелляции к непертурбативным механизмам, приводящим к

степенным поправкам. Тем не менее, такие поправки типа $(M^2/Q^2)^n$, где M может отвечать, например, составной массе кварка, иногда вводят в спектральную плотность, чтобы учесть непертурбативные эффекты, см. [50, 51].

2.2. Глобальная АТВ: учет порогов тяжелых кварков. Рассмотрим схему глобализации АТВ, т.е. учета порогов тяжелых кварков, следуя подходу Ширкова–Соловцова [29, 35, 36, 90], в котором они используют следующие значения полюсных масс c -, b - и t -кварков: $m_c = 1,2$ ГэВ, $m_b = 4,3$ ГэВ и $m_t = 175$ ГэВ. При этом в стандартной теории возмущений КХД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме необходимо согласовывать значения эффективных зарядов в евклидовой области на значениях Q^2 , отвечающих этим массам*: $M_4 = m_c$, $M_5 = m_b$ и $M_6 = m_t$.

Будем в дальнейшем определять логарифмы L только по отношению к трехфлейворному масштабу Λ_3^2 : $L(Q^2) = \ln(Q^2/\Lambda_3^2)$. Пересчет к другим масштабам осуществляется путем конечных добавок:

$$\ln(Q^2/\Lambda_f^2) = L(Q^2) + \lambda_f, \quad \text{где} \quad \lambda_f \equiv \ln(\Lambda_3^2/\Lambda_f^2), \quad (2.26)$$

а Λ_f^2 — отвечающий данному N_f КХД-масштаб. Определим также соответствующие значения логарифмов на порогах M_k ($k = 4, 5, 6$):

$$L_k \equiv \ln(M_k^2/\Lambda_3^2). \quad (2.27)$$

Все КХД-масштабы Λ_f , $f = 4, 5, 6$, мы будем трактовать как функции одного параметра, а именно трехфлейворного масштаба Λ_3 :

$$\Lambda_f = \Lambda_f(\Lambda_3) \quad \text{с} \quad \Lambda_3 > \Lambda_4(\Lambda_3) > \Lambda_5(\Lambda_3) > \Lambda_6(\Lambda_3), \quad (2.28)$$

которые должны определяться из условий согласования на порогах для эффективного заряда в обычной КХД. Рассмотрим здесь для примера двухпетлевое приближение с эффективным зарядом $\alpha_s^{(2)}[L_f; N_f]$ (см. (A.5); показатель петлевого порядка ⁽²⁾ в этом примере далее будем опускать для экономии места)

$$\alpha_s[L_f; N_f] = \frac{-4\pi}{b_0(N_f)c_1(N_f)[1 + W_{-1}(z_W[L; N_f])]}, \quad (2.29)$$

где $z_W[L; N_f] = (1/c_1(N_f)) \exp[-1 + i\pi - L/c_1(N_f)]$. Тогда условия согласования в евклидовой области Q^2 таковы:

$$\alpha_s[L_4; 3] = \alpha_s[L_4 + \lambda_4; 4]; \quad (2.30a)$$

*Вопрос о том, почему в $\overline{\text{MS}}$ -схеме лучше согласовывать эффективные заряды на значениях m_q^2 , а не $4m_q^2$, разбирается подробно в работе [90]. Если говорить кратко, то это связано с безмассовым характером ренормгрупповых генераторов в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, в которой учет порогов массивных кварков производится путем сравнения с MOM-схемой, где массы частиц учитываются явно.

$$\alpha_s [L_5 + \lambda_4; 4] = \alpha_s [L_5 + \lambda_5; 5]; \quad (2.30б)$$

$$\alpha_s [L_6 + \lambda_5; 5] = \alpha_s [L_6 + \lambda_6; 6]. \quad (2.30в)$$

Они определяют константы λ_f с $f = 4, 5, 6$ как функции Λ_3 и непрерывный глобальный эффективный заряд КХД

$$\begin{aligned} \alpha_s^{\text{glob}}(Q^2) = & \alpha_s [L(Q^2); 3] \theta(Q^2 < M_4^2) + \alpha_s [L(Q^2) + \lambda_4; 4] \theta(M_4^2 \leq Q^2 < M_5^2) + \\ & + \alpha_s [L(Q^2) + \lambda_5; 5] \theta(M_5^2 \leq Q^2 < M_6^2) + \alpha_s [L(Q^2) + \lambda_6; 6] \theta(M_6^2 \leq Q^2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Приведем для примера значения Λ_f , λ_f и L_f с $f = 4, 5, 6$ для случая $\Lambda_3 = 400$ МэВ:

$$\Lambda_4 = 344 \text{ МэВ}, \quad \Lambda_5 = 245 \text{ МэВ}, \quad \Lambda_6 = 103 \text{ МэВ}, \quad (2.32а)$$

$$\lambda_4 = 0,299, \quad \lambda_5 = 0,984, \quad \lambda_6 = 2,716, \quad (2.32б)$$

$$L_4 = 2,197, \quad L_5 = 4,750, \quad L_6 = 12,162. \quad (2.32в)$$

Спектральная плотность аналитического образа n -й степени эффективного заряда $\mathcal{A}_n^{\text{glob}}$ тогда есть кусочно-непрерывная функция

$$\begin{aligned} \rho_n^{\text{glob}}(s) = & \bar{\rho}_n [L(s); 3] \theta(s < M_4^2) + \bar{\rho}_n [L(s) + \lambda_4; 4] \theta(M_4^2 \leq s < M_5^2) + \\ & + \bar{\rho}_n [L(s) + \lambda_5; 5] \theta(M_5^2 \leq s < M_6^2) + \bar{\rho}_n [L(s) + \lambda_6; 6] \theta(M_6^2 \leq s), \end{aligned} \quad (2.33а)$$

которую можно эквивалентно представить как функцию логарифма $L = \ln(s/\Lambda_3^2)$ (рис. 5, где для сравнения представлена также спектральная плотность $\bar{\rho}_1[L + \lambda_5; 5]$ со сдвигом аргумента на λ_5 для того, чтобы в области $L \in [L_5; L_6]$ обе плотности совпадали):

$$\begin{aligned} \rho_n^{\text{glob}}[L] = & \bar{\rho}_n [L; 3] \theta(L < L_4) + \bar{\rho}_n [L + \lambda_4; 4] \theta(L_4 \leq L < L_5) + \\ & + \bar{\rho}_n [L + \lambda_5; 5] \theta(L_5 \leq L < L_6) + \bar{\rho}_n [L + \lambda_6; 6] \theta(L_6 \leq L) \end{aligned} \quad (2.33б)$$

со спектральными плотностями $\bar{\rho}_n [L; N_f]$, отвечающими числу активных кварков N_f и равными (см. (3.16) для случая $\nu = n$)

$$\bar{\rho}_n [L; N_f] = \frac{\rho_n [L; N_f]}{\beta_f^n} \equiv \frac{\sin[n \varphi_{(2)}(L; N_f)]}{\pi [\beta_f R_{(2)}(L; N_f)]^n}, \quad (2.34)$$

где $R_{(2)}(L; N_f)$ и $\varphi_{(2)}(L; N_f)$ определены в п. 3.2 (см. (3.14б) и (3.14в); заметим, что в этих формулах не указана явная зависимость от N_f , но она подразумевается, так как параметр $c_1 = c_1(N_f) = b_1(N_f)/b_0^2(N_f)$ явно зависит

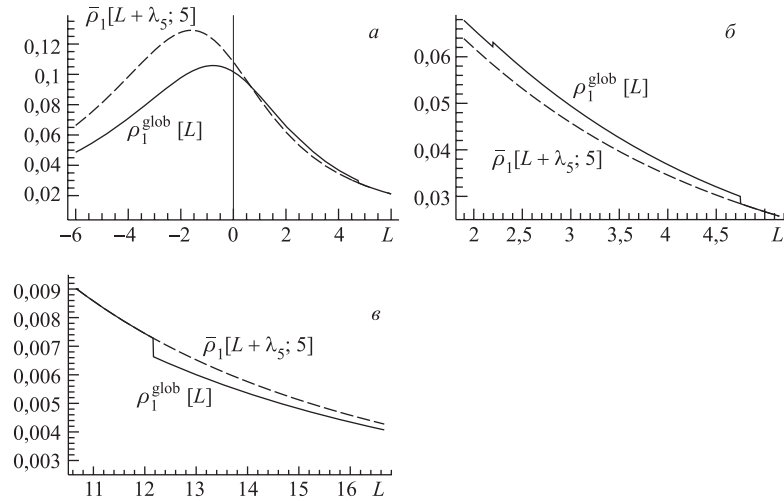


Рис. 5. Поведение глобальной спектральной плотности $\rho_1^{\text{glob}}[L]$ для $\Lambda_3 = 400$ МэВ. Для сравнения штриховыми линиями мы показываем поведение локальной спектральной плотности, отвечающей пяти флейворам, $\bar{\rho}_1[L + \lambda_5; 5]$. а) Интервал $L \in [-6; +6]$, где явно виден порог $L_5 = 4,75$, б) в увеличенном по оси ординат масштабе интервал $L \in [+2; +5]$, так что видны оба порога $L_4 = 2,20$ и $L_5 = 4,75$, в) снова в увеличенном по оси ординат масштабе интервал $L \in [+11; +16]$, так что становится явным разрыв на пороге $L_6 = 12,16$

от N_f), а $\beta_f = b_0(N_f)/(4\pi)$. Тогда глобальные аналитические эффективные заряды в евклидовой области и в области Минковского определяются в соответствии с (2.7) и (2.9)

$$\mathcal{A}_n^{\text{glob}}(Q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho_n^{\text{glob}}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma \quad \text{или} \quad \mathcal{A}_n^{\text{glob}}[L] = \int_{-\infty}^\infty \frac{\rho_n^{\text{glob}}[L_\sigma] dL_\sigma}{1 + \exp[L - L_\sigma]}; \quad (2.35a)$$

$$\mathfrak{A}_n^{\text{glob}}(s) = \int_s^\infty \frac{\rho_n^{\text{glob}}(\sigma)}{\sigma} d\sigma \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}_n^{\text{glob}}[L] = \int_L^\infty \rho_n^{\text{glob}}[L_\sigma] dL_\sigma. \quad (2.35b)$$

Несмотря на то, что спектральная плотность $\rho_n^{\text{glob}}(\sigma)$ является кусочно-непрерывной функцией и в точках $\sigma = m_f^2$, $f = 4, 5, 6$, она терпит разрывы, эффективный заряд $\mathcal{A}_n^{\text{glob}}(Q^2)$ оказывается аналитической функцией, а $\mathfrak{A}_n^{\text{glob}}(s)$ — просто непрерывной функцией, которая в точках $s = m_f^2$, $f = 4, 5, 6$, имеет разрыв производной.

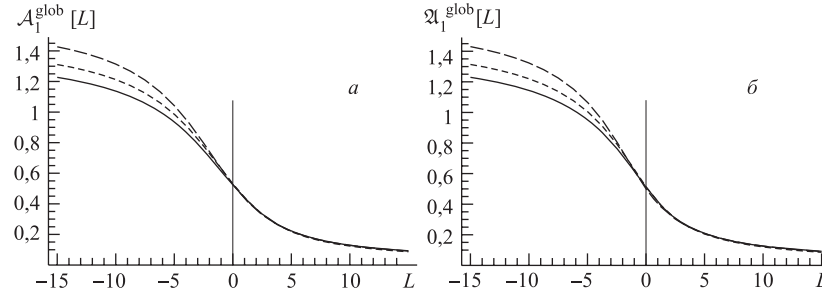


Рис. 6. Поведение глобальных аналитических зарядов $\mathcal{A}_1^{(2);glob}[L]$ (а) и $\mathcal{Q}_1^{(2);glob}[L]$ (б) для $\Lambda_3 = 400$ МэВ. Для сравнения штриховыми (штрихпунктирными) линиями показано поведение $\mathcal{A}_1^{(2)}[L + \lambda_4; N_f = 4]$ ($\mathcal{A}_1^{(2)}[L + \lambda_5; N_f = 5]$) и $\mathcal{Q}_1^{(2)}[L + \lambda_4; N_f = 4]$ ($\mathcal{Q}_1^{(2)}[L + \lambda_5; N_f = 5]$), поделенных на β_f см. (1.4а), (1.4б)

На рис.6 мы показываем графики $\mathcal{A}_1^{(2);glob}[L]$ и $\mathcal{Q}_1^{(2);glob}[L]$ для $\Lambda_3 = 400$ МэВ. Мы видим, что анализация приводит к уменьшению эффективных зарядов $\mathcal{A}_1^{(2);glob}[L]$ и $\mathcal{Q}_1^{(2);glob}[L]$ в сравнении с $\beta_4^{-1}\mathcal{A}_1^{(2)}[L + \lambda_4; 4]$ ($\beta_5^{-1}\mathcal{A}_1^{(2)}[L + \lambda_5; 5]$) и с $\beta_4^{-1}\mathcal{Q}_1^{(2)}[L + \lambda_4; 4]$ ($\beta_5^{-1}\mathcal{Q}_1^{(2)}[L + \lambda_5; 5]$): это понятно, поскольку соответствующая глобальная плотность стала эффективно меньше, см. рис. 5, а. Кроме того, создается впечатление, что кривые на рис. 6, а и б ничем не отличаются друг от друга. Но это не так: они действительно совпадают при $L \rightarrow \pm\infty$, но в точке $L = 0$ они различаются, правда, разность имеет порядок 2 %.

Отметим также, что удобные для численных приложений простые параметризации двухпетлевых глобальных аналитических зарядов получены в нашей работе [46] (только для $\mathcal{A}_1^{(2);glob}(Q^2)$ и $\mathcal{A}_2^{(2);glob}(Q^2)$) и в работе Заякина–Ширкова [43] (как для $\mathcal{A}_n^{(2);glob}(Q^2)$, так и для $\mathcal{Q}_n^{(2);glob}(Q^2)$ с $n = 1, 2, 3, 4$).

3. ОТ АТВ К ДРОБНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Напомним, что амплитуды, зависящие от единственной кинематической переменной Q^2 , которые в стандартной теории возмущений разлагаются в ряд по степеням эффективного заряда, в АТВ представляются в виде нестепенного ряда [18, 27, 86], см. (2.13):

$$D[L] = \sum_n d_n a^n[L] \Rightarrow \mathcal{D}_A[L] = \sum_n d_n \mathcal{A}_n[L] \quad \text{и} \quad \mathcal{R}[L] = \sum_n d_n \mathcal{Q}_n[L], \quad (3.1)$$

где d_n — численные коэффициенты, полученные в схеме минимальных вычитаний. Кажется бы, сделав этот шаг, мы уже построили «анализацию» всей пертурбативной КХД.

Но это не так, и вот почему. В стандартной теории возмущений мы также имеем:

- факторизационную КХД-процедуру, которая дает возможность разделять вклады больших и малых расстояний и фактически применять теорию возмущений КХД для описания вклада малых расстояний (область больших евклидовых Q^2). При этом естественным образом в жестких КХД-амплитудах возникают логарифмические факторы типа $a^\nu[L] L^*$;

- ренормгрупповую эволюцию, генерирующую в партонных амплитудах факторы $B(Q^2) = [Z(Q^2)/Z(\mu^2)] B(\mu^2)$, которые в однопетлевом приближении сводятся к $Z[L] \sim a^\nu[L]$, где $\nu = \gamma_0/(2b_0)$ — дробное число.

Таким образом, нам надо построить еще рецепты анализации для новых объектов: $a^\nu, a^\nu L^m, \dots$. Наш набор $\{\mathcal{A}_n\}$ образует линейное пространство, которое, однако, не снабжено операцией умножения элементов: произведение $\mathcal{A}_n \cdot \mathcal{A}_m$ не принадлежит $\{\mathcal{A}_n\}$, так как не имеет дисперсионного представления (2.7), а элемент $\mathcal{A}_{m+n}[L]$ при всех конечных L серьезно отличается от $\mathcal{A}_n[L] \cdot \mathcal{A}_m[L]$. В некотором смысле можно говорить о восстановлении стандартной алгебры для указанного набора базовых функций только в пределе $L \rightarrow \infty$, когда $\{\mathcal{A}_n\} \rightarrow \{a^n\}$ [29, 48, 86] и, в частности, $\mathcal{A}_n[L] \cdot \mathcal{A}_m[L] \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}[L]$. Все то же самое справедливо и для произведения $\mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}_m$ в отношении набора $\{\mathfrak{A}_n\}$ и представления (2.9).

Мы пополняем эти наборы, определяя отображения \mathbf{A}_E и \mathbf{A}_M

$$\mathbf{A}_E [a^\nu] [L] \equiv \mathcal{A}_\nu [L] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_\nu [L_\sigma] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}}, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{A}_M [a^\nu] [L_s] \equiv \mathfrak{A}_\nu [L_s] = \int_{L_s}^{\infty} \rho_\nu [L_\sigma] dL_\sigma, \quad (3.2b)$$

для новых элементов так, что выполняются следующие свойства:

1. Они являются изоморфизмами, т. е. сохраняют линейную структуру исходного набора функций:

$$\mathbf{A}_E [a^0] = \mathcal{A}_0 \equiv 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_M [a^0] = \mathfrak{A}_0 \equiv 1. \quad (3.3)$$

2. Они дают возможность проводить ренормгрупповое улучшение АТВ, т. е. определены для

$$f(a) = a^\nu, \quad \text{где} \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

*Первое указание на необходимость определения специальной процедуры «анализации» для работы с такими логарифмами появилось в работе [68], где было предложено применять концепцию аналитичности к партонной амплитуде *в целом*, а не только к эффективному заряду и его степеням.

Оказывается, что пополнение исходных наборов $\{\mathcal{A}_n; n \in \mathbb{N}\}$ и $\{\mathfrak{A}_n; n \in \mathbb{N}\}$ такими объектами, т. е. расширение их до наборов $\{\mathcal{A}_\nu; \nu \in \mathbb{R}\}$ и $\{\mathfrak{A}_\nu; \nu \in \mathbb{R}\}$, дает также возможность и дифференцировать по индексу ν , а значит строить анализации для величин $a^\nu \ln(a) = (d/d\nu)a^\nu$:

$$\mathcal{L}_\nu \equiv \mathbf{A}_E [a^\nu \ln(a)] = \mathcal{D} \mathbf{A}_E [a^\nu] \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_\nu \equiv \mathbf{A}_M [a^\nu \ln(a)] = \mathcal{D} \mathbf{A}_M [a^\nu], \quad (3.5a)$$

$$\text{где } \mathcal{D} \equiv \frac{d}{d\nu}. \quad (3.5b)$$

3. Они дают возможность пользоваться факторизацией в КХД, т. е. определены для

$$f(a) = a^\nu L^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.6a)$$

давая в результате аналитические образы

$$\mathcal{L}_{\nu,m} \equiv \mathbf{A}_E [a^\nu L^m] \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_{\nu,m} \equiv \mathbf{A}_M [a^\nu L^m]. \quad (3.6b)$$

Заметим, что в однопетлевом приближении такие объекты сводятся просто к $[a^{\nu-m}]_{\text{ан}}$, так что этот пункт сводится к предыдущему. Но в высших порядках это не так, и решение здесь достигается определением спектральной плотности $\rho_{\nu,m}$, отвечающей $[a^\nu L^m]_{\text{ан}}$.

Принципиальная схема анализации в АТВ, показанная на рис. 2, применима и к ДАТВ. Различие между АТВ и ДАТВ состоит в объектах, на которые действуют операторы анализации \mathbf{A}_E и \mathbf{A}_M , а также операторы перехода от евклидовых объектов к минковским (\hat{R}) и обратно (\hat{D}): в ДАТВ набор шире за счет включения зарядов с вещественными (дробными) значениями индексов, а также объектов типа \mathcal{L}_ν , \mathfrak{L}_ν , $\mathcal{L}_{\nu,m}$ и $\mathfrak{L}_{\nu,m}$.

На первый взгляд, предлагаемое нами пополнение набора базисных зарядов АТВ, $\{\mathcal{A}_n\}$ и $\{\mathfrak{A}_\nu\}$, может быть неединственным: можно, например, преобразовать полученные наборы $\{\mathcal{A}_\nu\}$ и $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ в наборы $\{\mathcal{A}'_\nu[L]\}$ и $\{\mathfrak{A}'_\nu[L]\}$, определяемые элементарными сдвигами $\mathcal{A}'_\nu[L] = \mathcal{A}_\nu[L] + \sin(\pi\nu) f_\nu[L]$ и $\mathfrak{A}'_\nu[L] = \mathfrak{A}_\nu[L] + \sin(\pi\nu) g_\nu[L]$, которые при целых значениях $\nu \in \mathbb{Z}$ совпадают друг с другом и с исходными целоиндексными наборами функций. Однако нас спасает от этой неединственности спектральное представление (3.2): оно серьезно ограничивает класс возможных функций, в частности, исключая указанную многозначность.

3.1. Однопетлевая ДАТВ ($N_f = 3$). Реализация этих идей в однопетлевом приближении с фиксированным числом флейворов N_f была осуществлена в работах [74, 75] полностью в аналитическом виде. Поскольку этот материал является предметом подготавливаемого обзора всех троих авторов этих работ, здесь мы не будем подробно останавливаться на нем и дадим только краткую сводку результатов.

В основе метода [74, 75] лежат рекуррентные соотношения (2.23), связывающие $\mathcal{A}_n[L]$ и $\mathfrak{A}_n[L]$ с $\mathcal{A}_1[L]$ и $\mathfrak{A}_1[L]$, при этом получены явные выражения для аналитических образов искомых дробных степеней зарядов:

$$\mathcal{A}_\nu[L] = \frac{1}{L^\nu} - \frac{F(e^{-L}, 1 - \nu)}{\Gamma(\nu)}; \tag{3.7a}$$

$$\mathfrak{A}_\nu[L] = \frac{\sin [(\nu - 1) \arccos (L/\sqrt{\pi^2 + L^2})]}{\pi(\nu - 1) (\pi^2 + L^2)^{(\nu-1)/2}}. \tag{3.7b}$$

Здесь $F(z, \nu)$ — редуцированная трансцендентная функция Лерха [91]:

$$F(z, \nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^\nu}. \tag{3.8}$$

Интересно отметить, что $\mathcal{A}_\nu[L]$ оказывается целой функцией по ν , а $\mathfrak{A}_\nu[L]$ выражается полностью через элементарные (тригонометрические) функции*. При этом евклидовы «обратные степени» $\mathcal{A}_{-m}[L] = L^m$ совпадают с обратными степенями исходного эффективного заряда $a^{-m}[L] = L^m$, в то время как для минковских «обратных степеней» возникают добавки в виде низших степеней L с π^2 -коэффициентами:

$$\mathcal{A}_{-m}[L] = L^m, \quad \mathfrak{A}_{-m}[L] = \frac{1}{\pi(m+1)} \operatorname{Im} [(L + i\pi)^{m+1}] \quad \text{для } m \in \mathbb{N}; \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{-1}[L] &= L, \quad \mathfrak{A}_{-2}[L] = L^2 - \frac{\pi^2}{3}, \\ \mathfrak{A}_{-3}[L] &= L^3 - \pi^2 L, \quad \mathfrak{A}_{-4}[L] = L^4 - 2L^2\pi^2 + \frac{\pi^4}{5}, \dots \end{aligned} \tag{3.10}$$

Таким образом, линейные пространства $\{\mathcal{A}_n\}$ и $\{\mathfrak{A}_n\}$ теперь пополнены путем включения элементов \mathcal{A}_ν и \mathfrak{A}_ν с любыми вещественными значениями индексов ν , так что становится возможной операция дифференцирования по индексу (3.5б). Спектральные плотности $\rho_\nu[L]$, отвечающие таким решениям, обладают следующим важным свойством:

$$\rho_{n+\nu}[L] = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n+\nu)} \left(-\frac{d}{dL}\right)^n \rho_\nu[L]. \tag{3.11}$$

В табл. 1 мы сравниваем основные элементы обычной ТВ, АТВ и ДАТВ в евклидовой и минковской областях.

*Заметим, что это выражение было получено в работе [71] в виде, приспособленном для последующего разложения по положительным $1/L$, т. е. $\arccos (L/\sqrt{\pi^2 + L^2})$ был заменен на $\operatorname{arctg} (\pi/L)$, что верно только при $L > 0$.

Таблица 1. Сравнение обычной ТВ, АТВ и ДАТВ в евклидовой области ((E), $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$) и в области Минковского ((M), $L = \ln(s/\Lambda^2)$). В ряду «Обратные степени» записано $\mathfrak{A}_{-m}[L] = L^m + O(L^{m-2})$, что означает просто свойство (3.10)

Теория	ТВ	АТВ(E, M)	ДАТВ(E)	ДАТВ(M)
Набор зарядов	$\{a^\nu\}_{\nu \in \mathbb{R}}$	$\{\mathcal{A}_m, \mathfrak{A}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$	$\{\mathcal{A}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{R}}$	$\{\mathfrak{A}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{R}}$
Разложение в ряд	$\sum_m f_m a^m$	$\sum_m f_m \mathcal{A}_m (f_m \mathfrak{A}_m)$	$\sum_m f_m \mathcal{A}_m$	$\sum_m f_m \mathfrak{A}_m$
Разложение в ряд	$a^\nu \sum_m f_m a^m$	—	$\sum_m f_m \mathcal{A}_{m+\nu}$	$\sum_m f_m \mathfrak{A}_{m+\nu}$
Обратные степени	$(a[L])^{-m}$	—	$\mathcal{A}_{-m}[L] = L^m$	$\mathfrak{A}_{-m}[L] = L^m + O(L^{m-2})$
Производные по ν	$a^\nu \ln a$	—	$\mathcal{L}_\nu = \mathcal{D}\mathcal{A}_\nu$	$\mathfrak{L}_\nu = \mathcal{D}\mathfrak{A}_\nu$
Степени логарифма	$a^\nu L^m$	—	$\mathcal{L}_{\nu,m} = \mathcal{A}_{\nu-m}$	$\mathfrak{L}_{\nu,m} = \mathfrak{A}_{\nu-m}$

Прежде чем закончить этот раздел и перейти к обсуждению двухпетлевого случая, обсудим вопрос, насколько сильно отличаются аналитические образы дробных степеней эффективных зарядов от дробных степеней аналитических зарядов $\mathcal{A}_1[L]$ и $\mathfrak{A}_1[L]$. Для этого мы проанализируем относительные отклонения в минковской ($\Delta_M(L, \nu)$) и евклидовой ($\Delta_E(L, \nu)$) областях:

$$\Delta_M(L, \nu) = \frac{\mathfrak{A}_\nu[L] - (\mathfrak{A}_1[L])^\nu}{\mathfrak{A}_\nu[L]}; \quad \Delta_E(L, \nu) = \frac{\mathcal{A}_\nu[L] - (\mathcal{A}_1[L])^\nu}{\mathcal{A}_\nu[L]}. \quad (3.12)$$

На рис. 7 показано поведение $\Delta_M(L, \nu)$ (рис. а) и $\Delta_E(L, \nu)$ (рис. б). Видно, что как $\Delta_M(L, 0,62)$, так и $\Delta_E(L, 0,62)$ меньше 5% при $Q^2, s \gtrsim 1$ ГэВ² (что

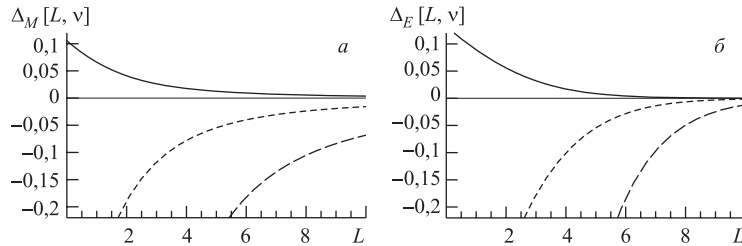


Рис. 7. а) Сравнение различных кривых для $\Delta_M(L, \nu)$ как функций $L = \ln(s/\Lambda^2)$, отвечающих различным значениям ν . б) То же сравнение для $\Delta_E(L, \nu)$ как функций $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$. Сплошные линии отвечают значению $\nu = 0,62$, пунктирные — $\nu = 1,62$ и штриховые — $\nu = 2,62$

отвечает $L \gtrsim 2,4$ при $\Lambda = 300$ МэВ). С другой стороны, и $|\Delta_M(L, 1,62)|$, и $|\Delta_E(L, 1,62)|$ становятся меньше или порядка 5% только при $L \gtrsim 5,1$, т. е. при $Q^2, s \gtrsim 15,2$ ГэВ². В то же время $|\Delta_M(L, 2,62)| > 0,23$ и $|\Delta_E(L, 2,62)| > 0,31$ при $L \lesssim 5,1$, т. е. при $Q^2, s \lesssim 15,2$ ГэВ². Отсюда мы можем сделать вывод, что анализация дробных степеней эффективных зарядов особенно важна при $\nu > 1$. Кроме того, мы видим, что при $0 < \nu < 1$ анализированные степени $\mathfrak{A}_\nu[L]$ и $\mathcal{A}_\nu[L]$ больше $(\mathfrak{A}_1[L])^\nu$ и $(\mathcal{A}_1[L])^\nu$, а при $\nu > 1$ анализированные степени $\mathfrak{A}_\nu[L]$ и $\mathcal{A}_\nu[L]$ становятся меньше $(\mathfrak{A}_1[L])^\nu$ и $(\mathcal{A}_1[L])^\nu$, причем с ростом ν это уменьшение становится все более заметным.

3.2. Двухпетлевая ДАТВ ($N_f = 3$). Обобщение на случай высших петель можно проводить двумя путями. В первом подходе используют разложения ДАТВ для многопетлевых величин по однопетлевым зарядам. Во втором, более мощном, подходе используют точные выражения для многопетлевых спектральных плотностей, с помощью которых, пользуясь интегральными представлениями (3.2), численно восстанавливают сами аналитические заряды и связанные с ними функции. Мы будем использовать второй метод, а использование его результатов для оценки точности ДАТВ-разложений, получаемых в первом подходе, будет изложено в готовящемся обзоре трех авторов ДАТВ [74, 75].

Рассмотрим l -петлевую спектральную плотность $\rho_\nu^{(l)}(\sigma)$. Она может быть представлена в том же виде, что и в однопетлевом случае, см. (2.20), т. е.

$$\rho_\nu^{(l)}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \text{Im} [a_{(l)}^\nu[L_{-\sigma}]] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\nu \varphi_{(l)}[L_\sigma]]}{(R_{(l)}[L_\sigma])^\nu}, \quad (3.13)$$

где фаза $\varphi_{(l)}$ и модуль $R_{(l)}$ имеют теперь l -петлевой смысл. Поясним на примере двухпетлевого приближения, где эффективный заряд точно выражается через функцию Ламберта $W_{-1}[z_W[L_\sigma]]$, см. (A.5). Нас интересует значение мнимой части для эффективного заряда при $s = -\sigma < 0$, поэтому нам надо определять значение $a_{(2)}[L]$ при $L = L_{-\sigma} = L_\sigma - i\pi$. Представим $a_{(2)}[L_\sigma - i\pi]$ в виде

$$a_{(2)}[L_\sigma - i\pi] = \frac{e^{i\varphi_{(2)}[L_\sigma]}}{R_{(2)}[L_\sigma]}, \quad (3.14a)$$

где

$$R_{(2)}[L] = c_1 |1 + W_{-1}[z_W(L - i\pi)]|; \quad (3.14б)$$

$$\varphi_{(2)}[L] = \arccos \left[\text{Re} \left(\frac{-R_{(2)}[L]}{c_1 (1 + W_{-1}[z_W(L - i\pi)])} \right) \right]. \quad (3.14в)$$

Тогда мы сразу получим

$$[a_{(2)}[L_\sigma - i\pi]]^\nu = \frac{e^{i\nu\varphi_{(2)}[L_\sigma]}}{(R_{(2)}[L_\sigma])^\nu}, \quad (3.15)$$

откуда немедленно следует формула (3.13) для случая $l = 2$:

$$\rho_{\nu}^{(2)}[L_{\sigma}] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\nu \varphi_{(2)}[L_{\sigma}]]}{(R_{(2)}[L_{\sigma}])^{\nu}}. \quad (3.16)$$

Для «аналитизации» более сложных выражений, содержащих кроме степеней заряда $(a_{(2)})^{\nu}$ еще и степени логарифмов заряда, нам потребуется следующее свойство

$$\mathcal{L}_{\nu}^{(l)} = \left[a_{(l)}^{\nu} \ln(a_{(l)}) \right]_{\text{an}} = \frac{d}{d\nu} \mathcal{A}_{\nu}^{(l)} \equiv \mathcal{D} \mathcal{A}_{\nu}^{(l)}, \quad (3.17a)$$

$$\mathcal{L}_{\nu}^{m,(l)} = \left[a_{(l)}^{\nu} \ln^m(a_{(l)}) \right]_{\text{an}} = \mathcal{D}^m \mathcal{A}_{\nu}^{(l)}. \quad (3.17b)$$

В однопетлевом приближении этого самого по себе уже достаточно, а в двухпетлевом приближении мы используем интегральные представления типа (3.2) для интересующей нас величины \mathcal{L}_{ν} со спектральной плотностью

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{L}_{\nu}}^{(2)}[L] &= \text{Im} \left[a_{(2)}^{\nu} [L - i\pi] \ln(a_{(2)}[L - i\pi]) \right] = \frac{d}{d\nu} \text{Im} \left[a_{(2)}^{\nu} [L - i\pi] \right] = \\ &= \frac{d}{d\nu} \rho_{\nu}^{(2)}[L] = \frac{\cos[\nu \varphi_{(2)}[L]]}{R_{(2)}^{\nu}[L]} \varphi_{(2)}[L] - \frac{\sin[\nu \varphi_{(2)}[L]]}{R_{(2)}^{\nu}[L]} \ln[R_{(2)}[L]]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Спектральные плотности степеней заряда, умноженных на логарифмы передачи импульса, т. е. $(a_{(2)})^{\nu} L^m$,

$$\rho_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(2)}[L] = \text{Im} \left[a_{(2)}^{\nu} [L - i\pi] [L - i\pi]^m \right] = \text{Im} \left[\frac{a_{(2)}^{\nu} [L - i\pi]}{a_{(1)}^m [L - i\pi]} \right]$$

тоже можно получить достаточно просто, если использовать представления (3.13) для $l = 1$ и $l = 2$:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(2)}[L] &= \text{Im} \left[\frac{R_{(1)}^m[L]}{R_{(2)}^{\nu}[L]} e^{i[\nu \varphi_{(2)}[L] - m \varphi_{(1)}[L]]} \right] = \\ &= \frac{R_{(1)}^m[L]}{R_{(2)}^{\nu}[L]} \sin[\nu \varphi_{(2)}[L] - m \varphi_{(1)}[L]]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим здесь, кстати, что сходимость интеграла по L_{σ} в $\int \rho_{\mathcal{L}_{\nu,m}}[L_{\sigma}] dL_{\sigma}$ при больших L_{σ} имеется не при любых значениях m и ν : так как $|\rho_{\mathcal{L}_{\nu,m}}[L_{\sigma}] \sim L_{\sigma}^{m-\nu}|$, то интеграл сходится только при $m < \nu$ (при $\nu - 1 \leq m < \nu$ он сходится благодаря знакопеременности спектральной плотности (3.19)). К счастью, в ТВ КХД такие объекты возникают именно в виде «допустимых»

комбинаций, например, $\alpha_s^{2+\nu} L$ или $\alpha_s^{3+\nu} L^2$ с $\nu > 0$, идущими от эволюционных факторов, следующих из уравнений ЕРБЛ (Ефремова–Радюшкина–Бродского–Лепаж) или ДГЛАП (Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи).

3.3. Глобальная ДАТВ: учет порогов тяжелых кварков. Как было показано в п. 2.2, главный объект в глобальной теории — спектральная плотность $\rho_n^{\text{glob}}[L]$, см. (2.33б), а все анализированные заряды и другие величины определяются по спектральным плотностям через формулы типа (2.35а), (2.35б). Точно так же главным объектом в глобальной ДАТВ является спектральная плотность $\rho_\nu^{\text{glob}}[L]$

$$\begin{aligned} \rho_\nu^{\text{glob};(l)}[L] = & \bar{\rho}_\nu^{(l)}[L; 3] \theta(L < L_4) + \bar{\rho}_\nu^{(l)}[L + \lambda_4; 4] \theta(L_4 \leq L < L_5) + \\ & + \bar{\rho}_\nu^{(l)}[L + \lambda_5; 5] \theta(L_5 \leq L < L_6) + \bar{\rho}_\nu^{(l)}[L + \lambda_6; 6] \theta(L_6 \leq L) \end{aligned} \quad (3.20)$$

со спектральными плотностями $\bar{\rho}_\nu[L; N_f]$, определяемыми в полной аналогии с (2.34):

$$\bar{\rho}_\nu^{(l)}[L; N_f] = \frac{\rho_\nu^{(l)}[L; N_f]}{\beta_f^n} \equiv \frac{\sin[\nu \varphi_{(l)}(L; N_f)]}{\pi [\beta_f R_{(l)}(L; N_f)]^\nu}. \quad (3.21)$$

Благодаря наличию ступенчатой спектральной плотности даже в однопетлевом случае основное рекуррентное соотношение (2.23) нарушается и заменяется на более сложное. Поэтому изящные формулы (3.7) здесь неприменимы и приходится пользоваться интегральными представлениями

$$\mathcal{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_\nu^{\text{glob};(l)}[L_\sigma] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L_s] = \int_{L_s}^{\infty} \rho_\nu^{\text{glob};(l)}[L_\sigma] dL_\sigma, \quad (3.22a)$$

где логарифмы $L = \ln Q^2/\Lambda_3^2$ и $L_s = \ln s/\Lambda_3^2$ определяются по отношению к трехфлейворному масштабу Λ_3 .

Благодаря тому, что спектральные плотности с фиксированным числом флейворов просто связаны с анализированными зарядами в области Минковского

$$\bar{\rho}_\nu^{(l)}[L; N_f] = \left(\frac{-d}{dL} \right) \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L; N_f], \quad (3.22б)$$

что следует из (3.2б), мы можем преобразовать выражение для $\mathfrak{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L_s]$ к явному виду:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L_s] = & \theta[L_s < L_4] \left(\bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_s; 3] - \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_4; 3] + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_4 + \lambda_4; 4] - \right. \\ & \left. - \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_5 + \lambda_4; 4] + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_5 + \lambda_5; 5] - \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_6 + \lambda_5; 5] + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)}[L_6 + \lambda_6; 6] \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \theta [L_4 \leq L_s < L_5] \left(\bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_s + \lambda_4; 4] - \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_5 + \lambda_4; 4] + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_5 + \lambda_5; 5] - \right. \\
 & \quad \left. - \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_6 + \lambda_5; 5] + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_6 + \lambda_6; 6] \right) + \theta [L_5 \leq L_s < L_6] \left(\bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_s + \right. \\
 & \quad \left. + \lambda_5; 5] - \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_6 + \lambda_5; 5] + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_6 + \lambda_6; 6] \right) + \theta [L_6 \leq L_s] \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(l)} [L_s + \lambda_6; 6].
 \end{aligned}
 \tag{3.22в}$$

Для евклидовой области таких простых формул нет, но мы также можем все свести к эффективному заряду при $N_f = 6$ с конечными поправками:

$$\mathcal{A}_\nu^{\text{glob};(l)} [L] = \bar{\mathcal{A}}_\nu^{(l)} [L + \lambda_6; 6] + \Delta \bar{\mathcal{A}}_\nu [L]; \tag{3.22г}$$

$$\Delta \bar{\mathcal{A}}_\nu^{(l)} [L] \equiv \sum_{f=3}^5 \int_{L_f}^{L_{f+1}} \frac{\bar{\rho}_\nu^{(l)} [L_\sigma + \lambda_f; N_f] - \bar{\rho}_\nu^{(l)} [L_\sigma + \lambda_6; 6]}{1 + e^{L-L_\sigma}} dL_\sigma, \tag{3.22д}$$

где мы определили $L_3 = -\infty$ и $\lambda_3 = 0$. На рис. 8, *а* мы сравниваем зависимости $\Delta \bar{\mathcal{A}}_1^{(2)} [L]$ (сплошная линия) и $\mathcal{A}_1^{\text{glob};(2)} [L]$ (штриховая), а на рис. 8, *б* показано, как ведет себя отношение $\Delta \bar{\mathcal{A}}_1^{(2)} [L] / \mathcal{A}_1^{\text{glob};(2)} [L]$ в зависимости от значения аргумента L : оно меняется от -20% при больших отрицательных значениях $L \approx -10$, затем в районе $L \approx -5$ проходит через ноль и растет до значения $+20\%$, достигаемого при $L \approx 0$, и затем падает до 0 при $L \rightarrow \infty$.

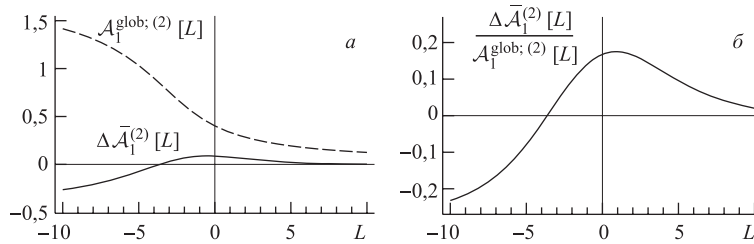


Рис. 8. *а*) Зависимости $\Delta \bar{\mathcal{A}}_1^{(2)} [L]$ (сплошная линия) и $\mathcal{A}_1^{\text{glob};(2)} [L]$ (штриховая); *б*) отношение $\Delta \bar{\mathcal{A}}_1^{(2)} [L] / \mathcal{A}_1^{\text{glob};(2)} [L]$ в зависимости от значения аргумента L

Аналогичные интегральные представления используются и для аналитизации более сложных выражений с логарифмами ($[\alpha_s^{\text{glob};(l)}]^\nu \ln[\alpha_s^{\text{glob};(l)}]$ и $[\alpha_s^{\text{glob};(l)}]^\nu L^m$):

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{glob};(l)} [L] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{\mathcal{L}_\nu}^{\text{glob};(l)} [L_\sigma] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_\nu^{\text{glob};(l)} [L] = \int_L^{\infty} \rho_{\mathcal{L}_\nu}^{\text{glob};(l)} [L_\sigma] dL_\sigma; \tag{3.22е}$$

$$\mathcal{L}_{\nu;m}^{\text{glob};(l)}[L] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{\mathcal{L}_{\nu;m}}^{\text{glob};(l)}[L_{\sigma}] dL_{\sigma}}{1 + e^{L-L_{\sigma}}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_{\nu;m}^{\text{glob};(l)}[L] = \int_L^{\infty} \rho_{\mathcal{L}_{\nu;m}}^{\text{glob};(l)}[L_{\sigma}] dL_{\sigma}. \quad (3.22\text{ж})$$

Глобализованные спектральные плотности $\rho_{\mathcal{L}_{\nu}}^{\text{glob};(l)}[L_{\sigma}]$ строятся по аналогии с (3.20) из плотностей (3.18):

$$\bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu}}^{(l)}[L; N_f] = \frac{\cos[\nu\varphi_{(l)}[L]]}{[\beta_f R_{(l)}[L]]^{\nu}} \varphi_{(l)}[L] - \frac{\sin[\nu\varphi_{(l)}[L]]}{[\beta_f R_{(l)}[L]]^{\nu}} \ln[\beta_f R_{(l)}[L]], \quad (3.23)$$

нормированных введением необходимых степеней β_f . В то же время глобализованные спектральные плотности $\rho_{\mathcal{L}_{\nu;m}}^{\text{glob};(l)}[L_{\sigma}]$ имеют более сложную структуру, так как анализируется произведение двух объектов, один из которых, а именно $\alpha_s^{\nu}[L']$, непрерывен за счет использования разных Λ_f в аргументе $L' = L + \lambda_f$, где $L = \ln(Q^2/\Lambda_3^2)$, см. (2.26); второй же фактор L^m непрерывен с самого начала, так как он определяется по отношению к фиксированному масштабу Λ_3 . Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{\text{glob};(l)}[L] &= \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L, L; 3] \theta(L < L_4) + \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L, L + \lambda_4; 4] \theta(L_4 \leq L < L_5) + \\ &+ \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L, L + \lambda_5; 5] \theta(L_5 \leq L < L_6) + \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L, L + \lambda_6; 6] \theta(L_6 \leq L), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L, L'; N_f] = \frac{R_{(1)}^m[L]}{[\beta_f R_{(l)}[L']]^{\nu}} \sin[\nu\varphi_{(l)}[L'] - m\varphi_{(1)}[L]]. \quad (3.25)$$

Отметим здесь сразу полезное свойство этой плотности, следующее из ее определения

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,1}}^{(l)}[L - \lambda, L; N_f] &= \text{Im} \left[(L - \lambda - i\pi) \frac{\exp(i\nu\varphi_{(l)}[L])}{[\beta_f R_{(l)}[L]]^{\nu}} \right] = \\ &= \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,1}}^{(l)}[L, L; N_f] - \lambda \bar{\rho}_{\nu}^{(l)}[L; N_f]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Понятно, что аналогичные соотношения можно записать и для $\bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L - \lambda, L; N_f]$ при других целых значениях $m > 1$:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m}}^{(l)}[L - \lambda, L; N_f] &= \text{Im} \left[(L - \lambda - i\pi)^m \frac{\exp(i\nu\varphi_{(l)}[L])}{[\beta_f R_{(l)}[L]]^{\nu}} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k (-\lambda)^k \bar{\rho}_{\mathcal{L}_{\nu,m-k}}^{(l)}[L, L; N_f] + (-\lambda)^m \bar{\rho}_{\nu}^{(l)}[L; N_f]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Интересно сравнить результат такой полной аналитизации с аналитизацией, применявшейся в [77], где использовался аналитизированный образ $\mathcal{L}_{2;1}^{\text{glob};(l)}[L]$ в виде наивного разложения с учетом только $O(c_1)$ -вклада:

$$\mathcal{L}_{\nu;1}^{\text{nai}}[L] = \beta_3^{-1} \mathcal{A}_{\nu-1}^{\text{glob};(2)}[L] + c_1 [3] \beta_3^{-\nu} \mathcal{D} \mathcal{A}_{\nu}^{(1)}[L]. \quad (3.28a)$$

Это разложение можно улучшить, если вместо однопетлевого заряда с $N_f = 3$ в слагаемом с фактором c_1 использовать двухпетлевой глобальный заряд:

$$\mathcal{L}_{\nu;m}^{2\text{-loop}}[L] = \beta_3^{-1} \mathcal{A}_{\nu-1}^{\text{glob};(2)}[L] + c_1 [3] \mathcal{D} \mathcal{A}_{\nu}^{(2);\text{glob}}[L]. \quad (3.28б)$$

При этом для работы [77] важна область $Q^2 = 0,01 - 50 \text{ ГэВ}^2$, что соответствует $L \in [-2,8; 6,7]$, причем область $L \in [-2,8; 1,1]$ необходима для анализа VLM-схемы, а $L \in [-1,1; 2,8]$ — для анализа α_V -схемы.

На рис. 9 мы проводим сравнение этих функций во всей области $L \in [-3; 7]$. Относительная ошибка наивной аппроксимации (3.28a) меняется от -10% при $L = -3$, проходит через минимум -20% при $L \simeq +1$ и потом монотонно растет до -14% при $L = +7$. В то же время относительная ошибка двухпетлевой аппроксимации (3.28б) меняется от $+2\%$ при $L = -3$, проходит через максимум $+4\%$ при $L \simeq +1$ и потом монотонно падает до -4% при $L = +7$. Из этого обсуждения заключаем, что использованная в [77] аппроксимация (3.28a) слишком груба и требуется перепроверить выводы этой работы, используя точную формулу аналитизации (3.22ж) и (3.24), что и будет сделано в п. 4.2.

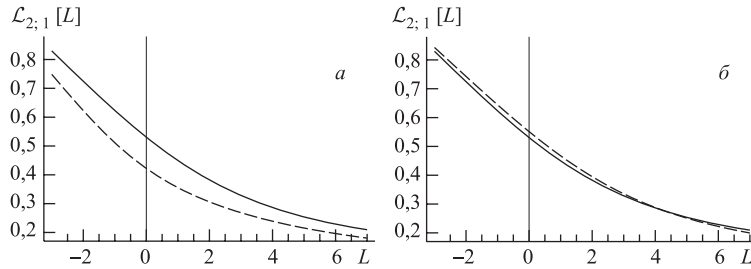


Рис. 9. Сравнение различных «аналитизаций» величины $\alpha_{s;(2)}^2[L] L$. Сплошная кривая отвечает точной аналитизации $\mathcal{L}_{2;1}^{\text{glob};(l)}[L]$ (см. (3.22ж) со спектральной плотностью (3.24)), а штриховая — наивному разложению, $\mathcal{L}_{\nu;1}^{\text{nai}}[L]$, применявшемуся в работе [77] (а), или разложению через двухпетлевые заряды, $\mathcal{L}_{\nu;1}^{2\text{-loop}}[L]$ (б)

Перед тем как закончить этот раздел, скажем несколько слов о численном интегрировании в (3.22). Проблема здесь заключается в медленной сходимости интегралов на «плюс»-бесконечности, $L_{\sigma} \rightarrow +\infty$, которая

обеспечивается только убыванием спектральной плотности, в то время как $1/(1 + e^{-L_\sigma}) \simeq 1 + O(e^{-L_\sigma})$. Положение спасает то, что в однопетлевом случае интеграл берется точно, а при больших $L_\sigma \gg L_* \sim 10^2$ l -петлевые спектральные плотности очень близки к однопетлевым:

$$\bar{\rho}_\nu^{(l)}[L, N_f] = \bar{\rho}_\nu^{(1)}[L, N_f] (1 + \varepsilon_\nu[L]),$$

где ошибка $\varepsilon_\nu[L_*]$ легко оценивается для каждого значения ν . Однопетлевые же спектральные плотности являются производными однопетлевых аналитических зарядов в пространстве Минковского (см. (3.22б)), поэтому, например, в случае евклидова глобального заряда будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L] = \int_{-\infty}^{L_*} \frac{\rho_\nu^{\text{glob};(l)}[L + L_\sigma]}{1 + e^{-L_\sigma}} dL_\sigma + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(1)}[L + L_* + \lambda_6; 6] + \\ + O(\varepsilon_\nu[L + L_* + \lambda_6]). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для глобальных аналитических зарядов в минковской области это представление упрощается еще больше:

$$\mathfrak{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L] = \int_L^{L_*} \rho_\nu^{\text{glob};(l)}[L_\sigma] dL_\sigma + \bar{\mathfrak{A}}_\nu^{(1)}[L_* + \lambda_6; 6] + O(\varepsilon_\nu[L_* + \lambda_6]). \quad (3.30)$$

4. РАСЧЕТ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ЧАСТИ ФОРМФАКТОРА ПИОНА В АТВ И ДАТВ

В этой главе мы рассмотрим расчет электромагнитного формфактора (ФФ) пиона в теории возмущений КХД. Как хорошо известно (см., например, [92, 93]), он определяется матричным элементом

$$\langle \pi^+(P') | J_\mu(0) | \pi^+(P) \rangle = (P + P')_\mu F_\pi(Q^2), \quad (4.1)$$

где J_μ — электромагнитный ток, записанный через операторы кварковых полей, $(P' - P)^2 = q^2 \equiv -Q^2$ — виртуальность фотона, т. е. квадрат большого импульса, передаваемого пиону от фотона. ФФ нормирован на единицу $F_\pi(0) = 1$ за счет сохранения векторного тока в КХД, что гарантируется электромагнитным тождеством Уорда. Исторически именно при расчете формфакторов адронов в КХД возникло понятие о факторизации жестких (пертурбативных) и мягких (непертурбативных) вкладов [94–99] и были определены так называемые амплитуды распределений (АР) кварков и глюонов в

адронах [100–102]. При этом доказанные теоремы факторизации определяли, каким образом нужно выделять вклады жестких партонных подпроцессов, которые описываются теорией возмущений КХД. Именно, $\Phi\Phi$ пиона представляется в виде свертки жесткой КХД-амплитуды партонного рассеяния с двумя матричными элементами операторов ведущего твиста, которые параметризуются АР кварков в начальном и конечном пионах, $\varphi_\pi(x, \mu_F^2)$:

$$F_\pi(Q^2) = F_\pi^{\text{fact}}(Q^2) + F_\pi^{\text{non-fact}}(Q^2), \quad (4.2a)$$

$$F_\pi^{\text{fact}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) = \int_\pi^2 \varphi_\pi(x, \mu_F^2) \otimes_x T_H(x, y, Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) \otimes_y \varphi_\pi(y, \mu_F^2), \quad (4.2b)$$

где $F_\pi^{\text{fact}}(Q^2)$ — факторизируемая часть $\Phi\Phi$, описываемая пертурбативной КХД, символ \otimes обозначает обычную свертку ($A(z) \otimes B(z) \equiv \int_z^1 dz A(z)B(z)$) по долям продольного импульса x (y), μ_F обозначает масштаб факторизации больших и малых импульсов, μ_R — масштаб перенормировки константы связи, а $F_\pi^{\text{non-fact}}(Q^2)$ представляет нефакторизируемую часть, называемую обычно «мягким вкладом» [92], которая генерируется непертурбативными поправками и при больших Q^2 подавлена дополнительной степенью $1/Q^2$ по сравнению с $F_\pi^{\text{fact}}(Q^2)$. Важно подчеркнуть, что представление (4.2a) становится все более неадекватным по мере того, как Q^2 приближается к m_ρ^2 , играющему роль характерного адронного масштаба в этом случае. Это связано с нарушением представления о коллинеарности кварков в пионе: в этой области поперечные импульсы кварков в пионе становятся сравнимыми с Q^2 , и необходимо каким-то образом модифицировать коллинеарный факторизируемый вклад $F_\pi^{\text{fact}}(Q^2)$, как это сделано, например, в [46]. Кроме того, в обычной ТВ КХД масштаб перенормировки $\mu_R^2 \sim Q^2$ при столь малых Q^2 приближается к сингулярности Ландау, так что сам подход теории возмущений становится необоснованным.

В представлении (4.2b) $T_H(x, y, Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2)$ — амплитуда жесткого рассеяния, описывающая взаимодействие коллинеарной кварк-антикварковой пары с полным импульсом P , ударяемой виртуальным фотоном с импульсом q , в результате чего она переходит опять же в коллинеарную кварк-антикварковую пару с импульсом $P' = P + q$. Эта амплитуда была рассчитана в теории возмущений КХД при больших Q^2 в виде разложения по степеням эффективного заряда [63, 65, 103, 104]:

$$T_H(x, y, Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) = \alpha_s(\mu_R^2) T_H^{(0)}(x, y, Q^2) + \frac{\alpha_s^2(\mu_R^2)}{4\pi} T_H^{(1)}(x, y, Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) + \dots \quad (4.3)$$

Явный вид вкладов $T_H^{(0)}$ и $T_H^{(1)}$ нам здесь не очень важен (за деталями отсылаем читателя к нашей работе [46], а также к работе [67]), мы только

хотим отметить появление характерных логарифмов $\ln(Q^2/\mu_R^2)$ и $\ln(Q^2/\mu_F^2)$ в $T_H^{(1)}(x, y, Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2)$, причем первый логарифм появляется, как и следовало ожидать, в сочетании с b_0 -фактором, что важно для реализации схемы Бродского–Лепаж–Маккензи (BLM) [105].

Амплитуда распределения кварков в пионе параметризует следующий матричный элемент калибровочно-инвариантного раздвинутого аксиального кваркового тока между физическим вакуумом $\langle 0 |$ и физическим пионом $| \pi(P) \rangle$ с импульсом P [100]

$$\langle 0 | \bar{d}(z) \gamma^\mu \gamma_5 C(z, 0) u(0) | \pi(P) \rangle_{z^2=0} = i f_\pi P^\mu \int_0^1 dx e^{ix(zP)} \varphi_\pi(x, \mu_0^2); \quad (4.4)$$

$$\int_0^1 \varphi_\pi(x, \mu_0^2) dx = 1, \quad (4.5)$$

где $f_\pi = (130,7 \pm 0,4)$ МэВ [106] — константа распада пиона, а

$$C(0, z) = \mathcal{P} \exp \left[-i g_s \int_0^z t^\alpha A_\mu^\alpha(y) dy^\mu \right] \quad (4.6)$$

есть фазовый струнный фактор Фока–Швингера, упорядоченный вдоль прямого пути, соединяющего точки 0 и z , и вводимый для обеспечения калибровочной инвариантности раздвинутого кваркового тока. Определенная таким образом АР пиона имеет физический смысл амплитуды перехода физического пиона в валентные кварк (с импульсом xP) и антикварк (с импульсом $\bar{x}P$, $\bar{x} \equiv 1 - x$). Масштаб μ_0^2 является масштабом нормировки пионной АР и связан с УФ-регуляризацией кварковых полевых операторов, раздвинутых на световом конусе. В работе [46] мы подробно обсудили вопросы, связанные с двухпетлевой эволюцией ЕРБЛ [96, 97, 99] АР пиона, и показали, что для диктуемой пертурбативной КХД дугегенбауэровской модели [107, 108]

$$\varphi_\pi(x, \mu^2) = 6x(1-x) \left[1 + a_2(\mu^2) C_2^{3/2}(2x-1) + a_4(\mu^2) C_4^{3/2}(2x-1) \right] \quad (4.7)$$

в рассматриваемой задаче с 1%-й точностью можно использовать однопетлевую эволюцию:

$$a_n^{\text{LO}}(\mu^2) = a_n(\mu_0^2) E_n^{\text{LO}}(\mu^2, \mu_0^2) \quad \text{и} \quad E_n^{\text{LO}}(\mu_F^2, \mu_0^2) = \left[\frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{\alpha_s(\mu_0^2)} \right]^{\gamma_n^{(0)}/(2b_0)}, \quad (4.8)$$

где $\gamma_n^{(0)}$ — аномальные размерности ведущего порядка (см. приложение В, (С.46)).

Запишем теперь выражение для факторизуемой части $\Phi\Phi$ пиона (4.2б), получаемое с использованием двуегенбауэровской модели для амплитуды распределения кварков в пионе (4.7), (4.8):

$$F_\pi^{\text{fact}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) = \alpha_s(\mu_R^2) \mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2) + \frac{\alpha_s^2(\mu_R^2)}{\pi} \mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2), \quad (4.9)$$

где каллиграфические выражения используются для обозначения величин без соответствующих α_s -факторов, ведущий вклад есть

$$\mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2) \equiv \frac{8\pi f_\pi^2}{Q^2} [1 + a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) + a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2)]^2, \quad (4.10)$$

а неведущий

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) \equiv & b_0 \mathcal{F}_\pi^{(1,\beta)}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) + \mathcal{F}_\pi^{(1,\text{FG})}(Q^2; \mu_F^2) + \\ & + C_F \mathcal{F}_\pi^{(1,F)}(Q^2; \mu_F^2) \end{aligned} \quad (4.11a)$$

представлен в виде разложения по характерным цветовым структурам (b_0 — первый коэффициент разложения β -функции, а C_F — глюонный цветовой фактор (см. приложение А, (А.2), (А.3)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pi^{(1,\beta)}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) = & \frac{2\pi f_\pi^2}{Q^2} \left[\frac{5}{3} + \frac{3 + (43/6)a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) + (136/15)a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2)}{1 + a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) + a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2)} - \right. \\ & \left. - \ln \frac{Q^2}{\mu_R^2} \right] [1 + a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) + a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2)]^2, \end{aligned} \quad (4.11б)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pi^{(1,\text{FG})}(Q^2; \mu_F^2) = & -\frac{2\pi f_\pi^2}{Q^2} \left\{ 15,67 + a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) [21,52 - 6,22 a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2)] + \right. \\ & \left. + a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2) [7,37 - 37,40 a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) - 33,61 a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.11в)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pi^{(1,F)}(Q^2; \mu_F^2) = & -\frac{2\pi f_\pi^2}{Q^2} \ln \left[\frac{Q^2}{\mu_F^2} \right] \left[\frac{25}{3} a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) + \frac{182}{15} a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2) \right] \times \\ & \times [1 + a_2^{\text{LO}}(\mu_F^2) + a_4^{\text{LO}}(\mu_F^2)]. \end{aligned} \quad (4.11г)$$

В п. 4.1 мы будем исследовать применение АТВ в задаче расчета факторизуемой части пионного $\Phi\Phi$ и выбирать при этом масштаб факторизации $\mu_F^2 = Q^2$, что приведет к обращению $\mathcal{F}_\pi^{(1,F)}(Q^2; \mu_F^2)$ в ноль. В п. 4.2 мы будем выбирать фиксированный масштаб факторизации $\mu_F^2 = \text{const}$ и обсуждать зависимость результатов анализа от выбора этого постоянного значения масштаба факторизации в интервале $\mu_F^2 = 1-10$ ГэВ².

4.1. АТВ: выбор схемы и масштаба перенормировки. Рассмотрим сначала, что дает применение АТВ для факторизуемой части ФФ пиона, следуя в основном работе [46], где с самого начала выбирался масштаб факторизации $\mu_F^2 = Q^2$. При таком выборе логарифм $\ln(Q^2/\mu_F^2)$ обращается в ноль и не возникает проблем с его аналитизацией. Однако при этом возникают эволюционные факторы $E_n^{LO}(Q^2, \mu_0^2) \sim \alpha_s^{\nu_n}(Q^2)$, см. (4.8), где $\nu_n = \gamma_n^{(0)}/(2b_0)$ — дробное число, проводить аналитизацию которых в АТВ нет возможности. Поэтому в [46] мы проводили численное решение уравнений эволюции ЕРБЛ с аналитической константой связи. Таким способом были исследованы стандартная схема перенормировки \overline{MS} с несколькими способами выбора масштаба перенормировки (стандартный $\mu_F^2 = Q^2$, по принципу минимальной чувствительности, по методу быстрой сходимости, простое и модифицированное VLM-предписание), а также α_V -схема [109].

4.1.1. Схема \overline{MS} . Итак, займемся различными способами выбора масштаба перенормировки μ_R^2 в \overline{MS} -схеме. Формулы (4.9)–(4.11a) показывают нам, что эта зависимость имеется в эффективном заряде $\alpha_s(\mu_R^2)$, а также в неведущей поправке $\mathcal{F}_\pi^{(1,\beta)}$, которая пропорциональна коэффициенту b_0 и, таким образом, зависит явно от N_f . В результате естественно возникает вопрос: как определить правильное значение N_f в формулах (4.9)–(4.11a) для ФФ?

Имеется несколько рецептов. Разберем их по порядку.

(i) В первом из них предлагается основываться на стандартном выборе $\mu_R^2 = Q^2$ (или $\mu_R^2 = Q^2/\lambda_{PMS}$, или $\mu_R^2 = Q^2/\lambda_{FAC}$) и сдвигать μ_R^2 на порогах тяжелых кварков так, чтобы обеспечить непрерывность самого ФФ.

(ii) Во втором подходе используется VLM-предписание для выбора масштаба перенормировки, $\mu_R^2 = \mu_{BLM}^2$, при котором b_0 -вклад полностью обращается в ноль. В этом случае единственной проблемой являются малые значения масштаба $\mu_R^2 \approx Q^2/100$, поскольку b_0 -вклад полностью отсутствует и N_f -зависящие вклады не появляются.

(iii) Модифицированное VLM-предписание (\overline{BLM}) предлагает использовать $\mu_R^2 = \mu_{BLM}^2$ только когда этот масштаб больше или порядка некоторого минимального масштаба, μ_{min} , имеющего значение некоторого характерного адронного масштаба, например, m_ρ^2 . Ниже этого значения VLM-масштаб замораживается на величине μ_{min} , где только легкие кварки дают вклад, и, таким образом, $N_f = 3$.

Обрыв ряда теории возмущений на конечном порядке (в нашем случае — на третьем, второй порядок мы учитываем) индуцирует остаточную зависимость результатов анализа от масштаба μ_R , в то время как учет более высоких порядков теории возмущений должен уменьшать эту зависимость. Мы проанализируем несколько способов выбора этого масштаба, предложенных как раз с целью ослабить зависимость получаемых результатов от отбрасывания неизвестных поправок:

1. Простейший и широко используемый стандартный выбор

$$\mu_R^2 = Q^2 \quad (4.12)$$

основан на допущении, что отбрасываемые вклады имеют порядок α_s^3 и при $Q^2 \gtrsim 10 \text{ ГэВ}^2$ малы. Однако в области $Q^2 \lesssim 10 \text{ ГэВ}^2$ этот выбор не столь очевиден.

2. Принцип быстрой сходимости (FAC), предложенный в [110, 111], предлагает фиксировать μ_R из требования, чтобы следующая за ведущей поправка полностью обращалась в ноль. В нашем случае это означает

$$\mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2 = \mu_{\text{FAC}}^2) = 0. \quad (4.13)$$

3. Принцип минимальной чувствительности (PMS) [112–115], с другой стороны, минимизирует зависимость результатов от выбора масштаба требованием совпадения μ_R со стационарной точкой оборванного пертурбативного ряда, т. е.

$$\frac{d}{d\mu_R^2} \left[\alpha_s(\mu_R^2) \mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2) + \frac{\alpha_s^2(\mu_R^2)}{\pi} \mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2) \right]_{\mu_R^2 = \mu_{\text{PMS}}^2} = 0. \quad (4.14)$$

4. VLM-предписание [105] предлагает все эффекты поляризации вакуума, пропорциональные первому коэффициенту β -функции КХД b_0 , перевести в изменение масштаба эффективного заряда КХД:

$$\mathcal{F}_\pi^{(1,\beta)}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2 = \mu_{\text{VLM}}^2) = 0. \quad (4.15)$$

В табл. 2 мы показываем численные значения обсуждаемых масштабов для различных AP пиона: экстремальных (асимптотической [96, 97] и Черняка–Житницкого (ЧЖ) [116]) и реалистической — Бакулева–Михайлова–Стефаниса (БМС) [107, 108]. Это ставит под сомнение применимость предписания VLM при экспериментально доступных значениях Q^2 в обычной ТВ КХД. Однако в АТВ оно может применяться без всяких ограничений и, как мы увидим, дает вполне разумные результаты.

Таблица 2. Масштабы μ_{PMS} , μ_{FAC} , μ_{VLM} и μ_V для AP пиона: асимптотической, БМС и ЧЖ

AP	$\lambda_{\text{FAC}} = Q^2/\mu_{\text{FAC}}^2$	$\lambda_{\text{PMS}} = Q^2/\mu_{\text{PMS}}^2$	$\lambda_{\text{VLM}} = Q^2/\mu_{\text{VLM}}^2$	$\lambda_V = Q^2/\mu_V^2$	Q^2
Асимптотическая	18	27	106	20	Любое
БМС	16–20	24–29	105–117	20–22	1–50 ГэВ ²
ЧЖ	146–62	217–92	475–278	90–52	1–50 ГэВ ²

4.1.2. α_V -схема. В работе [109] была предложена модификация BLM-предписания в так называемой α_V -схеме, в которой эффективный заряд $\alpha_V(\mu^2)$ определяется с использованием потенциала в системе тяжелых кварков $V(\mu^2)$. Соотношение между эффективными зарядами $\alpha_{\overline{MS}}$ и α_V дается [109]

$$\alpha_s(\mu_{\text{BLM}}^2) = \alpha_V(\mu_V^2) \left[1 + \frac{\alpha_V(\mu_V^2)}{4\pi} \frac{8C_A}{3} + \dots \right], \quad \text{где } \mu_V^2 = e^{5/3} \mu_{\text{BLM}}^2. \quad (4.16)$$

Численные значения масштаба μ_V для трех выбранных пионных AP показаны в табл. 2. С учетом (4.16) $O(\alpha_s)$ -вклад для ФФ пиона, задаваемый (4.11), модифицируется в этой схеме следующим образом:

$$\alpha_s(\mu_R^2) \rightarrow \alpha_V(\mu_V^2), \quad (4.17)$$

$$\mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2) \rightarrow \mathcal{F}_\pi^{(1, \text{FG})}(Q^2; \mu_F^2) + 2\mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2).$$

При этом в качестве $\alpha_V(\mu^2)$ в АТВ мы будем использовать сам аналитический эффективный заряд $\mathcal{A}_1(\mu^2)$, который всюду конечен и по этой причине вполне подходит на роль низкоэнергетического физического эффективного заряда.

4.1.3. Численные результаты для ФФ пиона: триумф АТВ. Процедура аналитизации пионного формфактора в $O(\alpha_s^2)$ -порядке ведет к неоднозначности, впервые обсуждавшейся в [45]. Именно, возникает вопрос: если мы заменяем $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \mathcal{A}_1(\mu^2)$, то как поступать с квадратом эффективного заряда, $\alpha_s^2(\mu^2)$? Исторически было предложено два рецепта действий:

(i) В работе [45] использовалась схема «наивной аналитизации», в которой $\alpha_s^2(\mu^2) \rightarrow [\mathcal{A}_1(\mu^2)]^2$:

$$\begin{aligned} [F_\pi^{\text{fact}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2)]_{\text{nai. an}} &= \mathcal{A}_1(\mu_R^2) \mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2) + \\ &+ \frac{[\mathcal{A}_1(\mu_R^2)]^2}{\pi} \mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2). \end{aligned} \quad (4.18a)$$

Заметим, что в этом подходе квадрат аналитической константы связи не имеет дисперсионного представления, а значит, и пионный формфактор тоже.

(ii) В соответствии с принципом аналитизации пионного формфактора «как целого» [68, 69] в работе [46] была предложена схема «максимальной аналитизации», когда $\alpha_s^2(\mu^2) \rightarrow \mathcal{A}_2(\mu^2)$:

$$\begin{aligned} [F_\pi^{\text{fact}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2)]_{\text{max. an}} &= \mathcal{A}_1(\mu_R^2) \mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2) + \\ &+ \frac{\mathcal{A}_2(\mu_R^2)}{\pi} \mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2, \mu_R^2). \end{aligned} \quad (4.18b)$$

В обоих случаях в качестве аналитических зарядов $\mathcal{A}_1(\mu_R^2)$ и $\mathcal{A}_2(\mu_R^2)$ использовались двухпетлевые глобальные заряды $\mathcal{A}_1^{(2);glob}(\mu_R^2)$ и $\mathcal{A}_2^{(2);glob}(\mu_R^2)$.

На рис. 10 мы показываем полученные результаты для факторизуемой части пионного формфактора в различных подходах: в стандартной теории возмущений КХД (рис. *а*), в схемах АТВ с «наивной аналитизацией» (рис. *б*) и с «максимальной аналитизацией» (рис. *в*). В случае стандартной теории возмущений мы видим большое расхождение предсказаний в области $Q^2 = 1-50$ ГэВ². На рис. *а* показаны предсказания, отвечающие следующим масштабам перенормировки: стандартному $\mu_R^2 = Q^2$ (штриховая линия), BLM с $\mu_{\min}^2 = 1$ ГэВ² (сплошная линия), FAC (штрихпунктирная линия) и PMS (пунктирная линия). Простой BLM-выбор приводит к результатам, просто не помещающимся в видимой части рисунка.

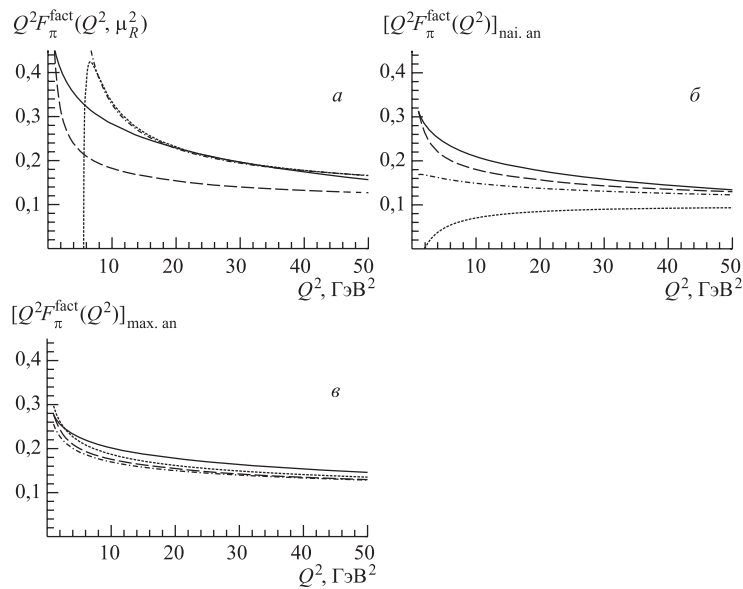


Рис. 10. Результаты для $Q^2 F_{\pi}^{\text{fact}}$, полученные в стандартной ТВ (*а*), АТВ с «наивной аналитизацией» (*б*) и с «максимальной аналитизацией» (*в*). Обозначения кривых см. в тексте. Все расчеты проведены для реалистической AP [107, 108]

В случае АТВ с «наивной аналитизацией» (рис. 10, *б*) мы видим не столь большое расхождение предсказаний в области $Q^2 = 1-50$ ГэВ² по сравнению со стандартной ТВ КХД, особенно если учесть, что теперь показаны предсказания, полученные с BLM-предписанием (пунктирная линия) и в α_V -схеме (штрихпунктирная линия). Но все же это расхождение заметно и оставляет вопрос о выборе масштаба открытым. А вот для АТВ с «максимальной анали-

тизацией» (рис. *в*) вопрос о выборе масштаба практически не встает вообще: все схемы (обозначения кривых те же, что и на рис. *б*) дают практически одни и те же результаты! Этот нетривиальный результат применения АТВ, с нашей точки зрения, свидетельствует о мощи принципа аналитичности в квантовой теории поля.

4.2. ДАТВ: Зависимость от масштаба факторизации. В этом пункте мы будем обсуждать, что дает применение ДАТВ при анализе пионного ФФ. ДАТВ может применяться в двух разных подходах:

- Можно, как это было сделано в п. 4.1, зафиксировать $\mu_F^2 = Q^2$ и использовать ДАТВ для корректного учета эволюционных факторов $E_n^{\text{LO}}(Q^2, \mu_0^2) \sim \alpha_s^{\nu_n}(Q^2)$ в гегенбауэровских коэффициентах $a_2(Q^2)$ и $a_4(Q^2)$;
- Можно же, напротив, зафиксировать $\mu_F^2 = \text{const}$ и использовать ДАТВ для корректного учета появляющегося эволюционного логарифма $\ln(Q^2/\mu_F^2)$ в (4.11г).

Исторически, в работе [77] мы проанализировали только второй вариант применения ДАТВ. Первый вариант до сих пор не анализировался, и мы восполним этот пробел в п. 4.3. В этом же пункте мы займемся подходом работы [77] и сначала обсудим, какие изменения по сравнению с п. 4.1 необходимо сделать при использовании ДАТВ для учета эволюционного логарифма в (4.11г).

Итак, мы фиксируем масштаб факторизации $\mu_F^2 = \text{const}$, так что гегенбауэровские коэффициенты $a_2(\mu_F^2)$ и $a_4(\mu_F^2)$ также становятся константами, а масштаб перенормировки выбираем пропорциональным Q^2 : $\mu_R^2 = \lambda_R Q^2$. Взамен у нас возникает добавок $(\alpha_s^2(\lambda_R Q^2)/\pi) C_F \mathcal{F}_\pi^{(1,F)}(Q^2; \mu_F^2)$, где $\mathcal{F}_\pi^{(1,F)}(Q^2; \mu_F^2)$ содержит $\ln(Q^2/\mu_F^2)$, см. (4.11г). Дальше мы преобразуем этот логарифм очевидным образом:

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) = \ln\left(\frac{\lambda_R Q^2}{\Lambda_3^2}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda_3^2}{\lambda_R \mu_F^2}\right) = L(\lambda_R Q^2) + \ln\left(\frac{\Lambda_3^2}{\lambda_R \mu_F^2}\right), \quad (4.19)$$

и тогда

$$\begin{aligned} \left[\alpha_s^2(\lambda_R Q^2) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) \right]_{\text{ДАТВ}} &\rightarrow \mathcal{L}_{2;1}^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) + \\ &+ \mathcal{A}_2^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) \ln\left(\frac{\Lambda_3^2}{\lambda_R \mu_F^2}\right) = \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}_{2;1}^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) - \mathcal{A}_2^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) L(\lambda_R Q^2) + \\ &+ \mathcal{A}_2^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Последнее слагаемое в этом выражении, $\mathcal{A}_2^{(2);glob}(\lambda_R Q^2) \ln(Q^2/\mu_F^2)$, дает анализацию всего вклада $\alpha_s^2(\lambda_R Q^2) \ln(Q^2/\mu_F^2)$ в подходе «максимальной анализации» АТВ. Следовательно, разность $\mathcal{L}_{2;1}^{(2);glob}(\lambda_R Q^2) - \mathcal{A}_2^{(2);glob} \times (\lambda_R Q^2)L(\lambda_R Q^2)$ и дает эффект анализации по ДАТВ. Получаемые при учете этого вклада ФФ мы будем обозначать $[F_\pi^{\text{fact}}(Q^2)]_{\text{ДАТВ}}$. На рис. 11 мы показываем результаты расчетов таких ФФ при различных значениях масштаба факторизации (см. подпись). Различные кривые на рисунке отвечают различным схемам и выборам масштаба перенормировки (обозначения согласованы с обозначениями рис. 10): сплошная линия соответствует ВЛМ-предписанию с $\mu_{\text{min}}^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$, штриховая линия — стандартному выбору $\lambda_R = 1$, штрихпунктирная (почти сливается со штриховой) — α_V -схеме, пунктирная — ВЛМ-предписанию. Заметим, что при построении этих графиков мы пользовались точным анализированным выражением $\mathcal{L}_{2;1}^{(2);glob} \times (\lambda_R Q^2)$, которое очень близко к приближенному, рассчитываемому по формуле (3.28б), и на 10–20% отличается от приближенного выражения (3.28а), использовавшегося в работе [77].

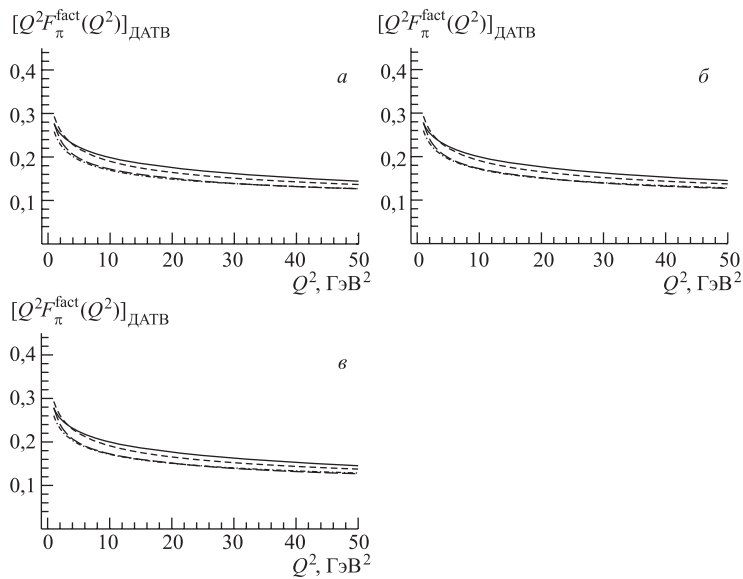


Рис. 11. Результаты для $Q^2 F_\pi^{\text{fact}}$, полученные в подходе ДАТВ с различными масштабами факторизации: $\mu_F^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ (а), $\mu_F^2 = 5,76 \text{ ГэВ}^2$ (б) и $\mu_F^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ (в). Обозначения кривых см. в тексте. Все расчеты проведены для реалистической АР [107, 108]

Мы видим опять, что все кривые очень близки друг к другу: ширина полосы относительно центральной линии имеет порядок 7,5%, а если не учитывать достаточно экзотическое ВЛМ-предписание — то и вовсе 5%. Зависимость самих результатов от выбора масштаба факторизации также оказывается очень малой: относительная разность между результатами, отвечающими $\mu_F^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ и $\mu_F^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$, составляет 1% для случая α_V -схемы (для других выборов масштаба перенормировки — еще меньше), а если сравнивать случай $\mu_F^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ со случаем $\mu_F^2 = 50 \text{ ГэВ}^2$, тогда относительная разность результатов доходит до 2%.

Таким образом, использование принципа аналитичности также снижает зависимость от выбора масштаба факторизации.

4.3. АТВ и ДАТВ: изящное решение проблемы порогов тяжелых кварков. Итак, мы хотим теперь зафиксировать $\mu_F^2 = Q^2$ и использовать ДАТВ для корректного учета эволюционных факторов $E_n^{\text{LO}}(Q^2, \mu_0^2) \sim \alpha_s^{\nu_n}(Q^2)$ в гегенбауэровских коэффициентах $a_2(Q^2)$ и $a_4(Q^2)$. Нам интересно сравнить полученный при таком образе действий результат с тем, что мы получили в предыдущем разделе.

Но прежде чем приступить к расчетам и обратиться к получающимся результатам, давайте обсудим чрезвычайно красивое (по мнению автора) решение проблемы порогов тяжелых кварков, предоставляемое АТВ. Напомним сами себе, в чем состоит проблема. Формулы (4.9)–(4.11а) показывают, что неведущая поправка $\mathcal{F}_\pi^{(1,\beta)}$ пропорциональна коэффициенту b_0 и, таким образом, зависит явно от N_f . Это и есть проблема: при выборе μ_R в формулах (4.9)–(4.11а) для ФФ по стандартному рецепту $\mu_R^2 = Q^2$ и сдвигов μ_R^2 на порогах тяжелых кварков так, чтобы обеспечить непрерывность самого ФФ, мы получим ФФ пиона как непрерывную функцию, но уж никак не аналитическую.

Решение этой проблемы в АТВ полностью аналогично рецепту глобализации эффективного заряда в АТВ: зависящие от N_f пертурбативные результаты дают нам зависящие от N_f спектральные плотности, разрывные на порогах, однако генерируемые ими через дисперсионные интегральные представления эффективные заряды в евклидовой области являются аналитическими функциями!

Подробнее это выглядит так. В формулах (4.9)–(4.11а) у нас есть три типа величин, которые зависят явно от N_f : $\alpha_s(Q^2)$, $\alpha_s(Q^2)^2$ и $b_0(N_f)\alpha_s(Q^2)^2$, причем первые две величины непрерывны на порогах, а последняя — разрывна. Очевидно, что эта последняя величина генерирует следующую спектральную плотность:

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} [b_0(N_f)\alpha_s[L - i\pi]^2] \equiv \bar{\rho}_{2;b_0}[L] = \frac{4\pi}{\beta_f} \rho_2[L]. \quad (4.22)$$

Таким образом, у нас кроме $\mathcal{A}_1^{\text{glob}}[L]$ и $\mathcal{A}_2^{\text{glob}}[L]$ появится еще одна глобализованная аналитическая функция $\mathcal{A}_{2;b_0}^{\text{glob}}[L]$, определяемая глобальной спектральной плотностью

$$\begin{aligned} \rho_{2;b_0}^{\text{glob}}[L] = & \bar{\rho}_{2;b_0}[L, L; 3] \theta(L < L_4) + \bar{\rho}_{2;b_0}[L, L + \lambda_4; 4] \theta(L_4 \leq L < L_5) + \\ & + \bar{\rho}_{2;b_0}[L, L + \lambda_5; 5] \theta(L_5 \leq L < L_6) + \bar{\rho}_{2;b_0}[L, L + \lambda_6; 6] \theta(L_6 \leq L). \end{aligned} \quad (4.23)$$

На каждом из этих трех базовых аналитических эффективных зарядов еще «вырастут веточки» за счет наличия эволюционных факторов. Разберем их появление на примере $\mathcal{A}_1^{\text{glob}}[L]$. У нас есть следующие эволюционные факторы: единица и пять факторов типа $(\alpha_s[L])^{\nu_i}$ с $\nu_1 = \gamma_2^{(0)}/(2b_0)$, $\nu_2 = \gamma_4^{(0)}/(2b_0)$, $\nu_3 = 2\gamma_2^{(0)}/(2b_0)$, $\nu_4 = (\gamma_2^{(0)} + \gamma_4^{(0)})/(2b_0)$ и $\nu_5 = 2\gamma_4^{(0)}/(2b_0)$, т.е. кроме $\mathcal{A}_1^{\text{glob}}[L]$ у нас появятся еще пять дробно-индексных аналитических зарядов типа $\mathcal{A}_{1+\nu_i}^{\text{glob}}[L]$.

Теперь мы можем взглянуть на результаты расчетов пионного ФФ в разных подходах: на рис. 12 пунктирная линия отвечает подходу АТВ с «максимальной аналитизацией», штриховая линия — ДАТВ с $\mu_F^2 = 5,76 \text{ ГэВ}^2$, в то время как сплошная линия показывает результат ДАТВ с $\mu_F^2 = Q^2$ (везде выбран масштаб перенормировки $\mu_R^2 = Q^2$).

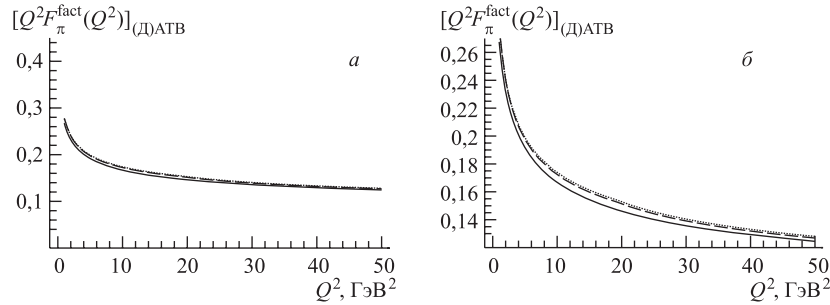


Рис. 12. Результаты для $Q^2 F_\pi^{\text{fact}}$, полученные в подходах АТВ_{max.ан.}, ДАТВ с фиксированным масштабом факторизации и ДАТВ с $\mu_F^2 = Q^2$. Обозначения кривых см. в тексте. На рис. б просто увеличен масштаб оси ординат, чтобы лучше можно было увидеть все три кривые

Полученное согласие (на уровне 1,5%, что можно увидеть на рис. 12, б) впечатляет!

4.4. Переход в область Минковского: роль дисперсионного представления. Из дисперсионного представления (3.22а) для аналитического эффек-

тивного заряда КХД $\mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}[L]$ мы имеем следующее представление для него в области $Q^2 = -s$ с $s > 0$

$$\mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}(-s) = \mathcal{P.V.} \int_0^\infty \frac{\rho_\nu^{\text{glob}}(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma + i\pi \rho_\nu^{\text{glob}}(s). \quad (4.24)$$

Заметим здесь, что из дисперсионного представления $\Phi\Phi$ пиона следует, что именно эти выражения должны входить в выражение для факторизуемой части пионного $\Phi\Phi$ (с $\nu = 1$ и $\nu = 2$) во временноподобной области передач импульса:

$$s F_\pi^{\text{fact}}(-s) \sim \mathcal{A}_1^{\text{glob}}(-\lambda_R s) \mathcal{F}_\pi^{\text{LO}} + \frac{\mathcal{A}_2^{\text{glob}}(-\lambda_R s)}{\pi} \mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}, \quad (4.25)$$

где $\mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}$ и $\mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}$ — числовые множители, зависящие от параметров $a_2(\mu_F^2)$ и $a_4(\mu_F^2)$ пионной AP, а λ_R — числовой параметр, характеризующий выбор масштаба перенормировки $\mu_R^2 = \lambda_R Q^2$. Появление мнимых частей в $\Phi\Phi$ -выражениях совершенно естественно и связано с рождением реальных физических частиц. Конечно, в нашей модели эффективного заряда безмассовой КХД, в которой нет учета адронизации свободных кварков в реальные физические частицы и пороги тяжелых кварков учитываются достаточно грубо, эта мнимая часть отлична от 0 даже и в области малых $s \sim m_\pi^2$, где никаких физических частиц не рождается, но этот недостаток может быть исправлен, как это предложено в работах [61, 117, 118].

Тем не менее, в этой области вклад факторизованной части пионного $\Phi\Phi$ в суммарный $\Phi\Phi$ (4.2а) мал (детали см. в [46]), так что этот недостаток не столь важен. В области же $s \geq m_\rho^2$ у нашего $\Phi\Phi$ всюду имеется мнимая часть, и это хорошо объясняется эффектами рождения реальных адронов. Как раз отсутствие мнимой части у $\Phi\Phi$ пиона в этой области должно было бы вызывать недоумение. А именно такое отсутствие гарантируется использованием при расчете $\Phi\Phi$ аналитического эффективного заряда $\mathfrak{A}_\nu(s)$, предложенного в [18, 19] для описания сечения e^+e^- -аннигиляции в адроны. Для сечения, которое должно быть всегда вещественным, такое предложение совершенно оправданно и дает, как мы говорили во введении, вполне разумные результаты. А вот для расчетов $\Phi\Phi$ такое использование оказывается физически неоправданным — здесь нужно использовать заряд (4.24), т. е. $\mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}(-s)$.

Насколько важно такое уточнение численно для абсолютной величины $\Phi\Phi$? На рис. 13, а мы сравниваем зависимости $|\mathcal{A}_1^{(1)}[L_s - i\pi]|$ (сплошная линия) и $\mathfrak{A}_1^{(1)}[L_s]$ (штриховая линия), а на рис. б показана относительная разность этих двух функций, $\Delta(s) = 1 - \mathfrak{A}_1^{(1)}(s)/|\mathcal{A}_1^{(1)}(-s)|$. Хорошо видно, что максимальное отличие имеет порядок +15% и достигается при $s \approx 0,03 \text{ ГэВ}^2$.

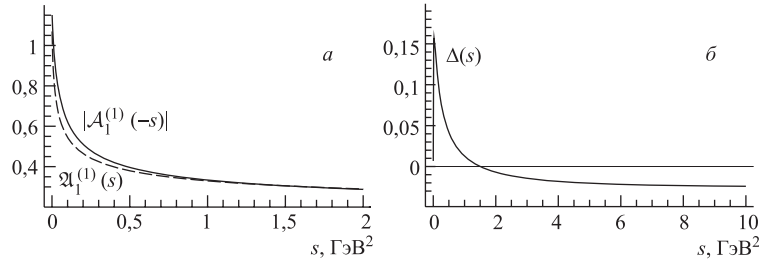


Рис. 13. а) Зависимости $|A_1^{(1)}[L_s - i\pi]|$ (сплошная линия) и $\mathfrak{A}_1^{(1)}[L_s]$ (штриховая линия); б) $\Delta(s)$

Учитывая, что в реальных приложениях анализируются достаточно большие значения $s \sim 6-10 \text{ GeV}^2$, имеем, что численно заряд $\mathfrak{A}_1(s)$ оказывается достаточно близок (на уровне 3 %) к $|A_1(-s)|$. Тем не менее нам представляется важным сделанное уточнение, поскольку оно показывает не абсолютный характер аналитических зарядов $\mathfrak{A}_\nu(s)$ в области Минковского: они пригодны только для описания величин типа сечений $R(s) = \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}}(s) / \sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)$, но не $\Phi\Phi$, для которых аналитические свойства, т. е. дисперсионные представления типа (2.7), диктуют использование зарядов $\mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}(-s)$.

Интересным следствием использования формулы (4.24) для $\Phi\Phi$ пиона в минковской области является фиксация масштаба перенормировки на значении $\mu_R^2 = Q^2/4$. Действительно, мнимая часть $\mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}(-\lambda_R s)$ пропорциональна спектральной плотности $\pi \rho_\nu^{\text{glob}}(\lambda_R s)$, которая скачками меняется при пересечении порогов тяжелых кварков, т. е. при $\lambda_R s = m_Q^2$ (где $Q = c, b, t$), см. обсуждение в п. 2.2. И только при выборе $\lambda_R = 1/4$, т. е. $\mu_R^2 = Q^2/4$, положения этих нерегулярностей в мнимой части $\Phi\Phi$ пиона совпадают с кинематическими порогами образования пары тяжелых кварков, $s_{Q\bar{Q}} = 4m_Q^2$.

5. РАСЧЕТ ШИРИНЫ РАСПАДА $H^0 \rightarrow b\bar{b}$ В ДАТВ

Займемся теперь приложением ДАТВ в задаче расчета ширины распада бозона Хиггса H^0 на кварк-антикварковую пару $b\bar{b}$. В стандартной теории возмущений из-за аналитического продолжения из глубокоевклидовой в глубокоминковскую область возникают π^2 -добавки в коэффициенты разложения: $r_k = d_k + O(\pi^2)$, см., например, [82]. Эти вклады могут быть велики, особенно для высших коэффициентов разложения. Следовательно, даже при высоких энергиях, существенных для анализа распада хиггсовского бозона, учет этих вкладов во всех порядках разложения представляется важным. Но

именно такой учет и доставляется применением ДАТВ*: аналитические эффективные заряды содержат все π^2 -вклады внутри себя явно по построению!

Расчет $\Gamma(H \rightarrow b\bar{b})$ с использованием функции R_S проводится в $\overline{\text{MS}}$ -схеме с учетом эволюции как эффективного заряда и его степеней, так и массы b -кварка согласно работе [75]. Мы сравним полученные результаты с полученными также в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в работах [70, 82–84], где широко использовался заряд $a_s = \alpha_s/\pi$, так что и мы будем его использовать.

5.1. Стандартная теория возмущений для R_S . Распад бозона Хиггса в кварк-антикварковую пару $b\bar{b}$ в КХД описывается с помощью коррелятора двух скалярных (S) b -кварковых токов $J_b^S = \bar{\Psi}_b \Psi_b$

$$\Pi(Q^2) = (4\pi)^2 i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T[J_b^S(x) J_b^S(0)] | 0 \rangle, \quad (5.1)$$

с $Q^2 = -q^2$. Его мнимая часть $R_S(s) = \text{Im} \Pi(-s - i\epsilon)/(2\pi s)$ определяет полную ширину распада:

$$\Gamma(H \rightarrow b\bar{b}) = \frac{G_F}{4\sqrt{2}\pi} M_H m_b^2(M_H^2) R_S(M_H^2), \quad (5.2)$$

где M_H — масса хиггсовского бозона, а $m_b(Q^2)$ — эволюционирующая масса b -кварка. Явные многопетлевые расчеты обычно проводятся в евклидовой области для отвечающей коррелятору (5.1) функции Адлера D_S [70, 71, 82, 83, 119], где хорошо работает теория возмущений КХД:

$$\tilde{D}_S(Q^2; \mu^2) = 3 m_b^2(Q^2) \left[1 + \sum_{n \geq 1} d_n \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) a_s^n(\mu^2) \right]. \quad (5.3)$$

Здесь мы использовали обозначение $a_s = \alpha_s/\pi$, а тильда над $D_S(Q^2; \mu^2)$ напоминает, что эта функция включает в себя также фактор $m_b^2(Q^2)$. В согласии с обсуждением в разд. 2 после уравнения (2.66) мы можем сразу же записать для R_S соответствующее разложение (см., например, [84]):

$$\tilde{R}_S(s) \equiv \tilde{R}_S(s, s) = 3 m_b^2(s) \left[1 + \sum_{n \geq 1} r_n a_s^n(s) \right]. \quad (5.4)$$

*Интересно заметить, что в работе [71] были фактически записаны основные формулы 1-петлевой ДАТВ в пространстве Минковского и даже обсуждена функциональная схема перехода из евклидовой области к минковской. Но затем авторы проводили разложение по $1/L$, возвращаясь таким образом к стандартной теории возмущений КХД.

Коэффициенты r_n здесь содержат характерные « π^2 -вклады», связанные с интегральным преобразованием \hat{R} (аналитическим продолжением) степеней логарифмов, появляющихся в \tilde{D}_S . Эти логарифмы возникают из двух различных источников: одни — из коэффициентов $d_n(Q^2/\mu^2)$ в \tilde{D}_S , появление логарифмов в которых связано с зависимостью эффективного заряда $\alpha_s(\mu^2)$ от μ^2 , другие связаны с наличием фактора $m_b^2(Q^2)$ и определяются комбинацией аномальных размерностей массы кварка γ_i (см. приложение Г) и коэффициентов β -функции b_j , умноженных на степени π^2 [70, 83, 84, 119]. Как показали недавние расчеты, выполненные в [82], учет таких π^2 -вкладов может быть существенным:

$$\begin{aligned} [3m_b^2]^{-1} \tilde{R}_S = & 1 + 5,667 a_s + a_s^2 [51,57 - \underline{15,63} - N_f (1,907 - \underline{0,548})] + \\ & + a_s^3 [648,7 - \underline{484,6} - N_f (63,74 - \underline{37,97}) + N_f^2 (0,929 - \underline{0,67})] + \\ & + a_s^4 [9470,8 - \underline{9431,4} - N_f (1454,3 - \underline{1233,4}) + \\ & + N_f^2 (54,78 - \underline{45,10}) - N_f^3 (0,454 - \underline{0,433})]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В этом выражении мы подчеркнули те π^2 -вклады, которые возникают за счет аналитического продолжения из евклидовой области в минковскую. Легко видеть, что полный вклад таких членов по порядку величины сравним со значением исходного коэффициента d_n , особенно в случае коэффициента d_4 . Таким образом, необходимо провести учет таких вкладов во всех порядках теории возмущений. Именно это и позволяет сделать подход ДАТВ, причем такой учет производится автоматически без использования дополнительных процедур оптимизации. Действительно, в ДАТВ нам не нужно разлагать перенормировочные множители в ряд по логарифмам — вместо этого мы можем преобразовать их в минковскую область «как целое» посредством A_M -операции.

Завершим обсуждение стандартного подхода численным результатом в $O(a_s^4)$ -порядке, взятым из [82]:

$$[3m_b^2]^{-1} \tilde{R}_S = 1 + 5,6668 a_s + 29,147 a_s^2 + 41,758 a_s^3 - 825,7 a_s^4, \quad (5.6)$$

$$= 1 + 0,2075 + 0,0391 + 0,0020 - 0,00148. \quad (5.7)$$

В последнем уравнении выбрано $a_s = a_s(M_H^2) = 0,0366$, что отвечает массе бозона Хигса $M_H = 120$ ГэВ.

5.2. Анализ \tilde{R}_S в ДАТВ. Сначала мы построим анализацию выражения для \tilde{R}_S , считая, что коэффициенты d_n в (5.3) не зависят от N_f , а именно, зафиксируем их на значениях, отвечающих $N_f = 5$, см. приложение Г, формулы (Г.2). Начнем с учета эффектов, связанных с перенормировкой массы b -кварка. Эволюция $m_{(l)}(Q^2)$ в l -петлевом приближении, как показано в приложении Г, может быть записана в виде (Д.12). Таким образом, задача ана-

литизации выражения для \tilde{D}_S свелась к задаче аналитизации произведений вида

$$m_{(l)}^2[L] (\alpha_s[L])^n = \hat{m}_{(l)}^2 (\alpha_s[L])^{n+\nu_0} f_{(l)} (\alpha_s[L]), \quad (5.8)$$

где $\hat{m}_{(l)}^2$ есть просто числовая константа. В принципе, можно действовать так, как было предложено в [75]: разложить $f_{(l)}(\alpha_s[L])$ в ряд по степеням $(\alpha_s[L])^m$ и затем применять ДАТВ к этому разложению, которое, благодаря аналитизации, очень быстро сходится (достаточно учета четырех порядков для достижения точности, лучшей 0,01 %).

Однако мы предлагаем здесь использовать всю мощь ДАТВ и получить точные формулы для аналитизации выражений (5.8) для случаев, когда $f_{(l)}(\alpha_s[L])$ представима в виде (Д.7) или (Д.10а). Разберем подробно случай двухпетлевой эволюции (Д.7),

$$f_{(2)}(\alpha_s) = [1 + \delta_1 \alpha_s]^{\nu_1},$$

после чего обобщение на случай (Д.10а) станет очевидным. Итак, мы хотим построить глобальный аналитический образ выражения

$$B_\nu^{(2)}[L; \{\delta, \mu\}] \equiv \left(\alpha_s^{(2)}[L]\right)^\nu \left[1 + \delta \alpha_s^{(2)}[L]\right]^\mu, \quad (5.9)$$

т. е. нам нужно построить спектральные плотности $\bar{\rho}_{B_\nu\{\delta,\mu\}}^{(2)}[L; N_f]$, отвечающие пертурбативному вкладу $B_\nu^{(2)}[L; \{\delta, \mu\}]$ при заданных числах флейворов N_f . Спектральная плотность у нас определяется мнимой частью $B_\nu^{(2)}[L - i\pi; \{\delta, \mu\}]$, причем мы знаем из (3.14а), что

$$\alpha_s^{(2)}[L - i\pi; N_f] = \frac{e^{i\varphi_{(2)}[L]}}{\beta_f R_{(2)}[L]}.$$

Тогда мы можем записать

$$1 + \delta \alpha_s^{(2)}[L - i\pi; N_f] = \frac{e^{i\varphi_\Delta[L, \delta, N_f]}}{R_\Delta[L, \delta, N_f]}, \quad (5.10а)$$

где

$$R_\Delta[L, \delta, N_f] = \frac{\beta_f R_{(2)}[L]}{\sqrt{\beta_f^2 R_{(2)}^2[L] + 2\delta\beta_f R_{(2)}[L] \cos \varphi_{(2)}[L] + \delta^2}}, \quad (5.10б)$$

$$\varphi_\Delta[L, \delta, N_f] = \varepsilon(\delta) \arccos \left[\frac{\beta_f R_{(2)}[L] + \delta \cos \varphi_{(2)}[L]}{\sqrt{\beta_f^2 R_{(2)}^2[L] + 2\delta\beta_f R_{(2)}[L] \cos \varphi_{(2)}[L] + \delta^2}} \right], \quad (5.10в)$$

где $\varepsilon(x)$ — функция знака переменной x (т. е. $\varepsilon(x) = +1$ для $x > 0$ и $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$). После этого мнимая часть (5.9) определяется элементарно, так что искомые спектральные плотности есть

$$\bar{\rho}_{B_\nu\{\delta,\mu\}}^{(2)}[L; N_f] = \frac{\sin[\nu\varphi_{(2)}[L] + \mu\varphi_\Delta[L, \delta, N_f]]}{(\beta_f R_{(2)}[L])^\nu (R_\Delta[L, \delta, N_f])^\mu}, \quad (5.11)$$

а глобальная спектральная плотность $\rho_{B_\nu\{\delta,\mu\}}^{(2);\text{glob}}[L]$ определяется по ним по формулам типа (3.20). В результате аналитический образ выражения (5.8), который мы будем обозначать $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(2);\text{glob}}[L]$, определяется в двухпетлевом приближении с помощью спектральной плотности $\rho_{B_{n+\nu_0}\{\delta_1,\nu_1\}}^{(2);\text{glob}}[L]$ (выражения для δ_1 и ν_1 см. в приложении Д — формулы (Д.7)).

В трехпетлевом паде-приближении необходимые спектральные плотности имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{B_\nu\{\delta_1,\mu_1;\delta_2,\mu_2\}}^{(3)}[L; N_f] &= \\ &= \frac{\sin[\nu\varphi_{(3-P)}[L] + \mu_1\varphi_\Delta[L, \delta_1, N_f] + \mu_2\varphi_\Delta[L, \delta_2, N_f]]}{(\beta_f R_{(3-P)}[L])^\nu (R_\Delta[L, \delta_1, N_f])^{\mu_1} (R_\Delta[L, \delta_2, N_f])^{\mu_2}}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

глобальная спектральная плотность $\rho_{B_\nu\{\delta_1,\mu_1;\delta_2,\mu_2\}}^{(3);\text{glob}}[L]$ определяется по ним по формулам типа (3.20), и аналитический образ выражения (5.8), обозначаемый $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(3);\text{glob}}[L]$, определяется с помощью спектральной плотности $\rho_{B_{n+\nu_0}\{\delta_{22},\nu_{22};-\delta_{23},\nu_{23}\}}^{(3);\text{glob}}[L]$ (выражения для δ_{22} , ν_{22} , δ_{23} и ν_{23} см. в приложении Д — формулы (Д.10)).

Для получения $\tilde{R}_S^{\text{ДАТВ};5}$ мы применим операцию \mathbf{A}_M , описанную в разд. 2*:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ};5}(s) &= \mathbf{A}_M[\tilde{D}_S^{(l);5}] = \\ &= 3\hat{m}_{(l)}^2 \left[\mathfrak{B}_{\nu_0}^{(l);\text{glob}}(s) + \sum_{n \geq 1} d_n(5) \frac{\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l);\text{glob}}(s)}{\pi^n} \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

где верхний индекс (l) обозначает петлевой порядок эволюции и в то же самое время порядок пертурбативного разложения D_S -функции. Подчеркнем, что это выражение строится из тех же самых коэффициентов d_n , что и евклидова $\tilde{D}_S^{(l);5}$ -функция, и что глобальные аналитические заряды $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l);\text{glob}}$ вобрали в себя все эффекты эволюции массы, а также все π^2 -вклады.

*Верхний индекс «5» в $\tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ};5}$ напоминает нам, что мы зафиксировали значения коэффициентов d_n при $N_f = 5$.

В то же время мы можем построить полную аналитизацию $\tilde{R}_S^{\text{ДАТВ}}$, явно учитывая зависимость коэффициентов разложения от N_f в полной аналогии с тем, как мы сделали это для ФФ пиона в п. 4.3: там пертурбативные формулы тоже содержали явную N_f -зависимость, и это привело просто к определению новых спектральных плотностей. Точно так же мы можем действовать и здесь: кроме спектральных плотностей $\rho_{B_{n+\nu_0}\{\dots\}}^{(l);\text{glob}}$, отвечающих глобальным аналитическим зарядам $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l);\text{glob}}$, появятся так же дополнительные глобальные спектральные плотности, построенные на основе выражений типа $d_n(N_f) \tilde{\rho}_{B_{n+\nu_0}\{\dots\}}^{(l)}$, которые дадут нам новые аналитические заряды $\mathfrak{B}_{n+\nu_0;d_n}^{(l);\text{glob}}$. Соответствующая полная ДАТВ формула будет такой:

$$\tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ}}(s) = \mathbf{A}_M[\tilde{D}_S^{(l)}] = 3 \hat{m}_{(l)}^2 \left[\mathfrak{A}_{\nu_0}^{(l);\text{glob}}(s) + \sum_{n \geq 1}^l \frac{\mathfrak{B}_{n+\nu_0;d_n}^{(l);\text{glob}}(s)}{\pi^n} \right]. \quad (5.14)$$

С точки зрения принципа аналитизации всего выражения «как целого», такой подход представляется нам наиболее последовательным. В минковской области он приводит к результатам, отличным от частичной аналитизации, когда коэффициенты разложения «замораживаются» на каком-либо значении N_f (в этой задаче естественной представляется обычно заморозка на значении $N_f = 5$). В самом деле, когда мы вставляем N_f -зависящие части в спектральную плотность, в минковской области мы получаем в некотором роде усреднение коэффициентов $d_n(N_f)$ по нескольким значениям N_f . Так, в области $s \sim (100 \text{ ГэВ})^2$ коэффициенты будут эффективно усредняться по значениям $N_f = 5$ (интегрирование по $L_s \lesssim 12$) и $N_f = 6$ (интегрирование по $L_s \gtrsim 12$), что приведет к понижению результата для $\tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ}}(s)$ в сравнении с $\tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ};5}(s)$.

5.3. Сравнение различных подходов к расчету \tilde{R}_S . В этом пункте мы сравниваем результаты расчетов \tilde{R}_S в различных подходах.

- Бродхерст, Катаев и Максвелл (БКМ) [70] в подходе так называемой «наивной неабелинизации» (ННА) использовали для расчета \tilde{R}_S оптимизацию степенного разложения, основанную на методе «контурного интегрирования». Их результаты очень близки к однопетлевому подходу ДАТВ (см. более подробное обсуждение в [75]):

$$\tilde{R}_S^{(l=1)\text{ДАТВ}}(s) = 3 \hat{m}_{(l=1)}^2 \left[\mathfrak{A}_{\nu_0}^{(1);\text{glob}}(s) + \sum_{n \geq 1}^4 d_n(5) \frac{\mathfrak{A}_{n+\nu_0}^{(1);\text{glob}}(s)}{\pi^n} \right]. \quad (5.15)$$

Имеет смысл уточнить используемые значения $\Lambda^{(1)}$. В работе [75] применялось значение $\Lambda_{N_f=3}^{(1);\text{KPS}} = 312 \text{ МэВ}$, предложенное в [120] для $N_f = 3$, а

по сути должно было бы использоваться отвечающее этому выбору значение $\Lambda_{N_f=5}^{(1);KPS} = 221$ МэВ. Здесь же мы используем $\Lambda_{N_f=5}^{(1);Z} = 111$ МэВ, получаемое из требования $\mathfrak{A}_1^{(1);glob}(m_Z^2) = 0,120$. В результате соответствующая этому выбору пунктирная кривая на рис. 14 оказывается ниже чисто пертурбативного результата (штриховая кривая) на 8% (в [75] соответствующая кривая шла выше на 16%, а при выборе $\Lambda_{N_f=5}^{(1);KPS} = 221$ МэВ она оказывается выше на 8%).

• Байков, Четыркин и Кюн (БЧК) [82] использовали стандартную теорию возмущений в $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ -порядке, см. (5.5), с $\Lambda_{N_f=5}^{(4)} = 231$ МэВ:

$$\tilde{R}_S^{(l=4)БЧК}(s) = 3m_{(l=4)}^2(s) \left[1 + \sum_{n \geq 1}^4 r_n(5) \left(\frac{\alpha_s^{(l=4)}}{\pi} \right)^n \right]. \quad (5.16)$$

• В подходе ДАТВ с «заморозкой» коэффициентов $d_n(N_f)$ на значении $d_n(5)$ (так же, как и в предыдущих двух подходах) мы получаем $\tilde{R}_S^{(3)ДАТВ;5}(s)$, см. (5.13), и результат для $\Lambda_{N_f=5}^{(4)} = 261$ МэВ (нормировка на $\mathfrak{A}_1^{(3);glob}(m_Z^2) = 0,120$) представлен на рис. 14, *a* сплошной линией. Видно, что он очень близок к результату БЧК (отличие имеет порядок 2%, а если сравнивать с трехпетлевым результатом БЧК — 1,5%).

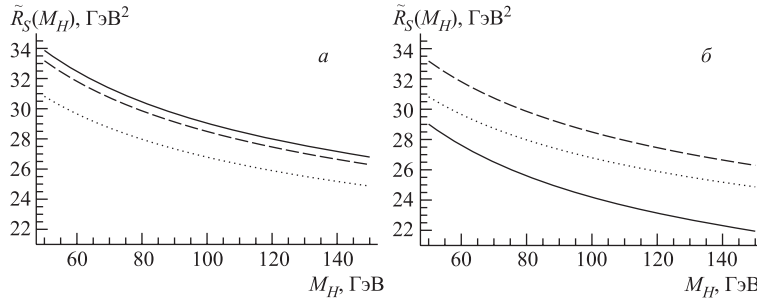


Рис. 14. Результаты расчета величины $\tilde{R}_S(M_H^2)$ в различных подходах (пояснения см. в тексте)

• В подходе ДАТВ с полной анализацией N_f -зависимостей мы получаем $\tilde{R}_S^{(3);ДАТВ}(s)$, см. (5.14). Результат показан сплошной кривой на рис. 14, *б* и, как мы и ожидали, оказался меньше «замороженного» результата. Это отличие меняется от 12,5% (при $M_H = 50$ ГэВ) до 16,5% (при $M_H = 150$ ГэВ).

Таким образом, мы можем сделать вывод, что ряд стандартной теории возмущений КХД и нестепенное разложение ДАТВ в области больших логарифмов L оказываются близки в сценарии с заморозкой коэффициентов

$d_n(N_f)$ на значениях, отвечающих $N_f = 5$. Полная ДАТВ с анализацией всей зависимости пертурбативных результатов от N_f естественно дает другой, в нашем случае меньший, результат. Удивляться тут нечему, поскольку, как мы уже говорили, такая анализация эффективно усредняет коэффициенты $d_n(N_f)$, что приводит к их уменьшению и, как результат, к уменьшению всей суммы нестепенного ряда. Чтобы проанализировать этот эффект, определим эффективные коэффициенты, отвечающие полностью анализированному ряду $\tilde{R}_S^{(3);ДАТВ}[L]$, следующим образом:

$$d_n^{\text{eff}}[L] = \frac{\mathfrak{B}_{n+\nu_0; d_n}^{(l); \text{glob}}[L]}{\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l); \text{glob}}[L]}. \quad (5.17)$$

Мы видим из табл. 3, что эффективные коэффициенты действительно уменьшились, в среднем на 16–18 %.

Таблица 3. Эффективные значения коэффициентов $d_n^{\text{eff}}[L]$ (см. (5.17)) при $L = 11$ –13. В двух последних колонках приведены значения соответствующих сумм ряда для $\tilde{R}_S^{(3)}[L]$ в случае ДАТВ с «заморозкой» коэффициентов на $N_f = 5$ и в случае полной ДАТВ

Эффективные коэффициенты	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$\tilde{R}_S^{(3);ДАТВ;5}[L]$	$\tilde{R}_S^{(3);ДАТВ}[L]$
$d_n(N_f = 5)$	1,00	5,67	42,0	353	—	—
$d_n^{\text{eff}}[L = 11]$	0,84	4,90	36,1	292	32,01	27,16
$d_n^{\text{eff}}[L = 12]$	0,83	4,77	34,6	271	28,75	23,90
$d_n^{\text{eff}}[L = 13]$	0,82	4,63	32,8	245	26,07	21,21

Физически эффект полной анализации ряда для $\tilde{R}_S(s)$ отвечает учету вкладов петель с t -кварками даже в области $\sqrt{s} \leq 175$ ГэВ, где в обычной теории возмущений дают вклад только пять кварков u , d , s , c и b . И мы видим, что эффект этот не мал!

6. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В АТВ И ДАТВ

6.1. Однопетлевые АТВ и ДАТВ ($N_f = 3$). Рассмотрим следующий ряд

$$D[L] = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n a_s^n[L] \quad (6.1a)$$

с коэффициентами

$$d_n = d_1 \int_0^{\infty} P(t) t^{n-1} dt, \quad \text{причем} \quad \int_0^{\infty} P(t) dt = 1. \quad (6.1б)$$

Для облегчения восприятия последующих формул мы вводим следующее обозначение:

$$\langle\langle f(t) \rangle\rangle_P \equiv \int_0^{\infty} f(t) P(t) dt, \quad (6.1\text{в})$$

так что $d_{n+1} = d_1 \langle\langle t^n \rangle\rangle_P$. Рассмотрим пару примеров явного вида функции $P(t)$:

• функция $P(t; \tau_0) = \delta(t - \tau_0)$ приводит к коэффициентам, зависящим от порядка n степенным образом

$$d_n = d_1 \tau_0^{n-1}. \quad (6.2\text{а})$$

• функция

$$P(t; c, \delta) = e^{-t/c} \frac{(t/c)^\delta}{c \Gamma(1 + \delta)} \quad (6.2\text{б})$$

генерирует факториально растущие коэффициенты

$$d_n = d_1 c^{n-1} \frac{\Gamma(n + \delta)}{\Gamma(1 + \delta)}, \quad (6.2\text{в})$$

которые имитируют «липаатовское» поведение при больших $n \gg 1$ в квантовой теории поля, см. [121, 122].

Благодаря однопетлевому рекуррентному соотношению

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(-\frac{d}{dL}\right)^n \mathcal{A}_1[L] = \mathcal{A}_{n+1}[L] \quad (6.3)$$

аналитический образ этого ряда, как показано Михайловым [85], представляется следующей функцией:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[L] &= d_0 + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathcal{A}_{n+1}[L] = d_0 + d_1 \left\langle\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dL^n} \mathcal{A}_1[L] \right\rangle\right\rangle_P = \\ &= d_0 + d_1 \langle\langle \mathcal{A}_1[L-t] \rangle\rangle_P. \end{aligned} \quad (6.4\text{а})$$

Эта формула и является формулой суммирования рядов теории возмущений в АТВ, причем она справедлива и для суммирования в минковской области:

$$\mathcal{R}[L] = d_0 + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathfrak{A}_{n+1}[L] = d_0 + d_1 \langle\langle \mathfrak{A}_1[L-t] \rangle\rangle_P. \quad (6.4\text{б})$$

Если теперь рассмотреть ряд, стартующий не с 1, а с дробной степени эффективного заряда, что имеет место, например, для ширины распада $H^0 \rightarrow \bar{b}b$, см. [75],

$$\mathcal{R}_\nu = d_0 \mathfrak{A}_\nu + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathfrak{A}_{n+1+\nu}, \quad (6.5)$$

то благодаря рекуррентному соотношению

$$\mathfrak{A}_{n+\nu}[L] = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n+\nu)} \left(-\frac{d}{dL}\right)^n \mathfrak{A}_\nu[L], \quad (6.6)$$

которое есть прямое следствие (3.11), мы получим

$$\mathcal{R}_\nu = d_0 \mathfrak{A}_\nu + d_1 \langle\langle X(t; 1 + \nu) \rangle\rangle_P, \quad (6.7)$$

где

$$X(t; 1 + \nu) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hat{x})^n \Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(n + 1 + \nu)} \mathfrak{A}_{1+\nu}[L] \Big|_{\hat{x} \rightarrow t \, d/dL}. \quad (6.8)$$

Имеется красивое интегральное представление для интересующего нас ряда (6.8), см. формулу (5.2.7.20) в [123]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hat{x})^n \Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(n + 1 + \nu)} = \int_0^1 \exp(\hat{x} \cdot u^{1/\nu} - \hat{x}) \, du. \quad (6.9)$$

Вспоминая, что $\hat{x} = t \cdot d/dL$, так что оператор $e^{z \hat{x}}$ при действии на функцию $A[L]$ просто сдвигает ее аргумент: $e^{z \hat{x}} A[L] = A[L + zt]$, мы имеем

$$X(t; 1 + \nu) = \int_0^1 \mathfrak{A}_{1+\nu} \left[L + t \left(u^{1/\nu} - 1 \right) \right] \, du. \quad (6.10)$$

Подставляя (6.10) в (6.7), получаем окончательно

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\nu[L] &= d_0 \mathfrak{A}_\nu[L] + d_1 \left\langle\left\langle \int_0^1 du \mathfrak{A}_{1+\nu} \left[L - t \left(1 - u^{1/\nu} \right) \right] \right\rangle\right\rangle_P = \\ &= d_0 \mathfrak{A}_\nu[L] + d_1 \langle\langle \mathfrak{A}_{1+\nu}[L - t] \rangle\rangle_{P_\nu}, \end{aligned} \quad (6.11a)$$

где

$$P_\nu(t) \equiv \int_0^1 P\left(\frac{t}{1-u^{1/\nu}}\right) \frac{du}{1-u^{1/\nu}} = \int_0^1 P\left(\frac{t}{1-t'}\right) \Phi_\nu(t') \frac{dt'}{1-t'}; \quad (6.11б)$$

$$\Phi_\nu(t) \equiv \nu t^{\nu-1} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0+} \delta(t). \quad (6.11в)$$

Опять же, точно такая же формула справедлива и для суммирования в евклидовой области:

$$\mathcal{D}_\nu[L] \equiv d_0 \mathcal{A}_\nu[L] + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathcal{A}_{n+1+\nu}[L] = d_0 \mathcal{A}_\nu[L] + d_1 \langle \langle \mathcal{A}_{1+\nu}[L-t] \rangle \rangle_{P_\nu}. \quad (6.11г)$$

Интересно отметить, что в случае функции $P(t; c, \delta)$ из (6.2б) интеграл для функции $P_\nu(t)$ в (6.11б) вычисляется точно, так что мы имеем

$$P_\nu(t; \delta) = \frac{\nu {}_1F_1(1-\nu; 1-\delta; -t/c)}{c\delta} - \frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\delta) {}_1F_1(1+\delta-\nu; 1+\delta; -t/c)}{c\Gamma(1+\delta)\Gamma(\nu-\delta)(c/t)^\delta}, \quad (6.12)$$

где ${}_1F_1$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера, определяемая как

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+n)n!} z^n. \quad (6.13)$$

Для целых значений $\delta = m \geq 0$ формулы упрощаются к виду

$$P_\nu(t; m) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{c\Gamma(1+m)} G_{1,2}^{2,0} \left(\frac{t}{c} \middle| \begin{matrix} \nu \\ 0, m \end{matrix} \right), \quad (6.14)$$

где $G_{1,2}^{2,0}(z|\dots)$ — G -функция Мейера, определяемая как

$$G_{1,2}^{2,0} \left(z \middle| \begin{matrix} a \\ b_1, b_2 \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Gamma(b_1+s)\Gamma(b_2+s)}{\Gamma(a+s)} \frac{ds}{z^s}, \quad (6.15)$$

причем контур интегрирования C выбирается так, что все полюса функций $\Gamma(b_1+s)$ и $\Gamma(b_2+s)$ находятся по одну сторону от него (внутри или снаружи).

6.2. Глобальная однопетлевая АТВ в области Минковского. Теперь мы обсудим ситуацию с суммированием рядов в глобальной АТВ с одним порогом тяжелого кварка, флейвору которого мы будем приписывать значение 4. Для простоты начнем с области Минковского, где формулы оказываются более компактными. В этом случае однопетлевая спектральная плотность $\rho_n^{\text{glob}}[L]$, где $L = \ln(s/\Lambda_3^2)$, выражается через спектральные плотности с тремя и четырьмя флейворами, $\bar{\rho}_n[L; 3]$ и $\bar{\rho}_n[L + \lambda_4; 4]$:

$$\rho_n^{\text{glob}}[L] = \bar{\rho}_n[L; 3] \theta(L < L_4) + \bar{\rho}_n[L + \lambda_4; 4] \theta(L_4 \leq L), \quad (6.16)$$

с $\lambda_4 \equiv \ln(\Lambda_3^2/\Lambda_4^2)$, $L_4 \equiv \ln(M_4^2/\Lambda_3^2)$, и

$$\bar{\rho}_n[L; N_f] = \frac{\rho_n[L]}{\beta_f^n} \equiv \frac{\sin \left[n \arccos \left(L_\sigma / \sqrt{L_\sigma^2 + \pi^2} \right) \right]}{\pi \left[\beta_f \sqrt{L_\sigma^2 + \pi^2} \right]^n}. \quad (6.17)$$

Аналитизированные степени эффективного заряда в области Минковского есть при этом

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n^{\text{glob}}[L] &= \int_L^\infty \rho_n^{\text{glob}}[L_\sigma] dL_\sigma = \\ &= \theta(L < L_4) \int_L^{L_4} \bar{\rho}_n[L_\sigma; 3] dL_\sigma + \int_{\max(L, L_4)}^\infty \bar{\rho}_n[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Для однопетлевых спектральных плотностей, отвечающих фиксированному числу флейворов, $\rho_n[L]$ и $\bar{\rho}_n[L; N_f]$, имеются рекуррентные соотношения:

$$\rho_{n+1}[L] = \frac{1}{n} \left(-\frac{d}{dL} \right) \rho_n[L] = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(-\frac{d}{dL} \right)^n \rho_1[L]; \quad (6.19a)$$

$$\bar{\rho}_{n+1}[L; N_f] = \frac{1}{n \beta_f} \left(-\frac{d}{dL} \right) \bar{\rho}_n[L; N_f] = \frac{1}{\Gamma(n+1) \beta_f^{n+1}} \left(-\frac{d}{dL} \right)^n \rho_1[L], \quad (6.19b)$$

которые справедливы (за исключением промежуточных средних равенств) для $n \geq 0$ и позволяют нам немедленно переписать (6.18) в более полезном виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L] &= \theta(L < L_4) \left[\frac{\bar{\rho}_n[L; 3] - \bar{\rho}_n[L_4; 3]}{n \beta_3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\rho}_n[L_4 + \lambda_4; 4]}{n \beta_4} \right] + \theta(L \geq L_4) \frac{\bar{\rho}_n[L + \lambda_4; 4]}{n \beta_4}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Используя (6.19) и соотношение

$$\rho_1[L] = \left(\frac{-d}{dL}\right) \mathfrak{A}_1[L], \quad (6.21)$$

мы можем свести (6.20) к представлению, в котором вся n -зависимость становится явной:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L] = & \frac{\theta(L < L_4)}{\Gamma(n+1)} \left\{ \left[\left(\frac{-1}{\beta_3} \frac{d}{dL}\right)^n \bar{\mathfrak{A}}_1[L; 3] - \left(\frac{-1}{\beta_3} \frac{d}{dL_4}\right)^n \bar{\mathfrak{A}}_1[L_4; 3] \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{-1}{\beta_4} \frac{d}{dL_4}\right)^n \bar{\mathfrak{A}}_1[L_4 + \lambda_4; 4] \right\} + \frac{\theta(L \geq L_4)}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{-1}{\beta_4} \frac{d}{dL}\right)^n \bar{\mathfrak{A}}_1[L + \lambda_4; 4]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Таким образом, общая структура n -зависимости в (6.22) есть просто $\hat{x}_f^n / \Gamma(n+1)$ с $\hat{x}_f = [-1/\beta_f](d/dL)$. Но мы знаем, как такие зависимости суммируются, см. (6.4):

$$\mathcal{R}^{\text{glob}}[L] \equiv d_0 + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathfrak{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L] \equiv d_0 + d_1 \sum_i \theta_i[L] \mathfrak{S}_{f;i}[L + \lambda_f]; \quad (6.23)$$

$$\mathfrak{S}_{f;i}[L] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle\langle t^n \rangle\rangle_P}{\beta_f^n \Gamma(n+1)} \left(-\frac{d}{dL}\right)^n \bar{\mathfrak{A}}_1[L; N_f] = \langle\langle \bar{\mathfrak{A}}_1[L - t/\beta_f; N_f] \rangle\rangle_P. \quad (6.24)$$

Собирая вместе вклады от различных θ -структур в (6.22) и вставляя их в (6.24), мы получаем ответ:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{glob}}[L] = & d_0 + d_1 \theta(L < L_4) \left\langle\left\langle \bar{\mathfrak{A}}_1\left[L - \frac{t}{\beta_3}; 3\right] + \Delta_4 \bar{\mathfrak{A}}_1[t] \right\rangle\right\rangle_P + \\ & + d_1 \theta(L \geq L_4) \left\langle\left\langle \bar{\mathfrak{A}}_1\left[L + \lambda_4 - \frac{t}{\beta_4}; 4\right] \right\rangle\right\rangle_P, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где обозначено (с $\lambda_3 \equiv 0$)

$$\Delta_f \bar{\mathfrak{A}}_1[t] \equiv \bar{\mathfrak{A}}_1\left[L_f + \lambda_f - \frac{t}{\beta_f}; f\right] - \bar{\mathfrak{A}}_1\left[L_f + \lambda_{f-1} - \frac{t}{\beta_{f-1}}; f-1\right].$$

Если мы примем во внимание все пороги, т. е. в дополнение к порогу L_4 учтем также пороги L_5 и L_6 , тогда ответ запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{glob}}[L] = & d_0 + d_1 \sum_{f=3}^6 \theta(L_f \leq L < L_{f+1}) \left\langle\left\langle \bar{\mathfrak{A}}_1\left[L + \lambda_f - \frac{t}{\beta_f}; f\right] \right\rangle\right\rangle_P + \\ & + d_1 \sum_{f=3}^5 \theta(L_f \leq L < L_{f+1}) \sum_{k=f+1}^6 \langle\langle \Delta_k \bar{\mathfrak{A}}_1[t] \rangle\rangle_P, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где мы определили $L_3 = -\infty$ и $L_7 = +\infty$.

6.3. Глобальная однопетлевая АТВ в евклидовой области. Теперь мы готовы рассмотреть вопрос о суммировании рядов в глобальной АТВ в евклидовой области

$$\mathcal{D}^{\text{glob}}[L] \equiv d_0 + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathcal{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L], \quad (6.27)$$

также сперва с учетом порога только одного тяжелого кварка. Анализированные степени эффективного заряда здесь есть

$$\mathcal{A}_n^{\text{glob}}[L] = \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_n[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} dL_\sigma + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_n[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} dL_\sigma. \quad (6.28)$$

Для спектральных плотностей, отвечающих фиксированному числу флейворов, имеется рекуррентное соотношение (6.19а), из которого и следует рекуррентное соотношение (6.3) для $\mathcal{A}_{n+1}[L]$ и $\mathcal{A}_1[L]$, а также соотношения (6.19б), что позволяет нам записать

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L] = & \frac{1}{n} \left[\frac{\bar{\rho}_n[L_4 + \lambda_4; 4]}{\beta_4(1 + e^{L-L_4})} - \frac{\bar{\rho}_n[L_4; 3]}{\beta_3(1 + e^{L-L_4})} \right] - \\ & - \frac{1}{n} \frac{d}{dL} \left[\int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_n[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{\beta_3(1 + e^{L-L_\sigma})} + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_n[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{\beta_4(1 + e^{L-L_\sigma})} \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Продолжая спускаться по лестнице $n + 1 \rightarrow n \rightarrow n - 1 \rightarrow \dots \rightarrow 1$, получим для $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L] = & \frac{1}{n!} \left[-\frac{d}{dL} \right]^n \left\{ \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{\beta_3^n(1 + e^{L-L_\sigma})} + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{\beta_4^n(1 + e^{L-L_\sigma})} \right\} + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{\bar{\rho}_{n-k}[L_4 + \lambda_4; 4]}{\beta_4^{k+1}} - \frac{\bar{\rho}_{n-k}[L_4; 3]}{\beta_3^{k+1}} \right] \left[-\frac{d}{dL} \right]^k \frac{1}{1 + e^{L-L_4}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Воспользуемся теперь соотношением (6.19б) и свойством $d/dL = -d/dL_4$ для функций, зависящих только от разности $L - L_4$, чтобы записать для $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}^{\text{glob}}[L] = & \frac{1}{\beta_3^n n!} \left\{ \left[-\frac{d}{dL} \right]^n \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} - \Phi_{n-1}(L, L_4; 3) \right\} + \\ & + \frac{1}{\beta_4^n n!} \left\{ \left[-\frac{d}{dL} \right]^n \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} + \Phi_{n-1}(L, L_4; 4) \right\}, \quad (6.31) \end{aligned}$$

где ($n \geq 0$ и $\lambda_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \Phi_n(L, \lambda; f) \equiv \sum_{k=0}^n \hat{x}^{n-k} \hat{y}^k \frac{\bar{\rho}_1[\lambda + \lambda_f; f]}{1 + e^{L-L_4}} = \\ = \frac{\hat{y}^{n+1} - \hat{x}^{n+1}}{\hat{y} - \hat{x}} \frac{\bar{\rho}_1[\lambda + \lambda_f; f]}{1 + e^{L-L_4}} \Big|_{\substack{\hat{x} \rightarrow -d/d\lambda \\ \hat{y} \rightarrow d/dL_4}}. \quad (6.32) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{glob}}[L] = d_0 + d_1 \left\langle \left\langle \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_3}} + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_4}} \right\rangle \right\rangle_P + \\ + d_1 \left\langle \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \left[\frac{\Phi_n(L, L_4; 4)}{\beta_4^{n+1}} - \frac{\Phi_n(L, L_4; 3)}{\beta_3^{n+1}} \right] \right\rangle \right\rangle_P. \quad (6.33) \end{aligned}$$

При этом, благодаря (6.32), можно просуммировать по n в (6.33) явно. Действительно, положим $\alpha = t/\beta_f$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \Phi_n(L, L_4; f) = \frac{\exp(\alpha \hat{y}) - \exp(\alpha \hat{x})}{\hat{y} - \hat{x}} \frac{\bar{\rho}_1(\lambda + \lambda_f)}{1 + e^{L-L_4}} \Big|_{\lambda \rightarrow L_4} = \\ = \int_0^{\infty} db \left[e^{(\alpha-b)\hat{y}+b\hat{x}} - e^{-b\hat{y}+(\alpha+b)\hat{x}} \right] \frac{\bar{\rho}_1(\lambda + \lambda_f)}{1 + e^{L-L_4}} \Big|_{\lambda \rightarrow L_4} = \int_0^{\infty} db \left[\frac{\bar{\rho}_1(L_4 + \lambda_f - b)}{1 + e^{L-L_4-\alpha+b}} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\rho}_1(L_4 + \lambda_f - \alpha - b)}{1 + e^{L-L_4+b}} \right] = \alpha \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_1(L_4 + \lambda_f - \alpha x) dx}{1 + e^{L-L_4-\alpha x}}. \quad (6.34) \end{aligned}$$

И теперь мы получаем конечную формулу суммирования ряда (6.1a):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{glob}}[L] &= \\ &= d_0 + d_1 \left\langle\left\langle \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_3}} + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_4}} + \Delta_4[L, t] \right\rangle\right\rangle_P, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_f[L, t] &\equiv \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_1[L_f + \lambda_f - tx/\beta_f; N_f] t}{\beta_f [1 + e^{L-L_f-tx/\beta_f}]} dx - \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_1[L_f + \lambda_{f-1} - tx/\beta_{f-1}; N_{f-1}] t}{\beta_{f-1} [1 + e^{L-L_f-tx/\beta_{f-1}}]} dx. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Заметим, что если учесть все пороги, т. е. в дополнение к L_4 еще L_5 и L_6 , то конечная формула изменится очевидным образом:

$$\mathcal{D}^{\text{glob}}[L] = d_0 + d_1 \sum_{f=3}^6 \left\langle\left\langle \int_{L_f}^{L_{f+1}} \frac{\bar{\rho}_1[L_\sigma + \lambda_f; N_f] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_f}} \right\rangle\right\rangle_P + d_1 \sum_{f=4}^6 \langle\langle \Delta_f[L, t] \rangle\rangle_P, \quad (6.37)$$

где, как и ранее в п. 6.2, мы пользуемся соглашением $L_3 = -\infty$ и $L_7 = +\infty$.

6.4. Глобальная однопетлевая ДАТВ. В этом пункте мы обсудим обобщение метода суммирования рядов в однопетлевой ДАТВ на случай глобальной ДАТВ. Мы будем рассматривать здесь следующие ряды:

$$\mathcal{R}_\nu^{\text{glob}}[L] \equiv d_0 \mathfrak{A}_\nu^{\text{glob}}[L] + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathfrak{A}_{n+1+\nu}^{\text{glob}}[L]; \quad (6.38a)$$

$$\mathcal{D}_\nu^{\text{glob}}[L] \equiv d_0 \mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}[L] + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \mathcal{A}_{n+1+\nu}^{\text{glob}}[L] \quad (6.38б)$$

— и начнем со случая одного порога тяжелого кварка ($f = 4$). Фактически, нам надо объединить результаты пп. 6.1, 6.2 и 6.3. Анализированные $n + 1 + \nu$ -степени эффективного заряда есть

$$\mathfrak{A}_{n+1+\nu}^{\text{glob}}[L] = \theta(L < L_4) \int_L^{L_4} \bar{\rho}_{n+1+\nu}[L_\sigma; 3] dL_\sigma + \\ + \int_{\max(L, L_4)}^{\infty} \bar{\rho}_{n+1+\nu}[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma; \quad (6.39)$$

$$\mathcal{A}_{n+1+\nu}^{\text{glob}}[L] = \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_{n+1+\nu}[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} dL_\sigma + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_{n+1+\nu}[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma}} dL_\sigma. \quad (6.40)$$

Для однопетлевых спектральных плотностей, отвечающих фиксированному числу флейворов, $\rho_{n+1+\nu}[L]$ и $\bar{\rho}_{n+1+\nu}[L; N_f]$, имеются рекуррентные соотношения:

$$\rho_{n+1+\nu}[L] = \frac{1}{n+\nu} \left(-\frac{d}{dL}\right) \rho_{n+\nu}[L] = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(n+1+\nu)} \left(-\frac{d}{dL}\right)^n \rho_{1+\nu}[L]; \quad (6.41a)$$

$$\bar{\rho}_{n+1+\nu}[L; N_f] = \frac{1}{(n+\nu)\beta_f} \left(-\frac{d}{dL}\right) \bar{\rho}_{n+\nu}[L; N_f] = \\ = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(n+1+\nu)\beta_f^{n+1+\nu}} \left(-\frac{d}{dL}\right)^n \rho_{1+\nu}[L], \quad (6.41b)$$

которые справедливы для $n \geq 0$. Пользуясь этими соотношениями и аккуратно повторяя все шаги п. 6.2, мы получим для ряда (6.38a) следующий ответ:

$$\mathcal{R}_\nu^{\text{glob}}[L] = d_0 \mathfrak{A}_\nu^{\text{glob}}[L] + d_1 \theta(L < L_4) \left\langle\left\langle \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}\left[L - \frac{t}{\beta_3}; 3\right] + \Delta_4 \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}[t] \right\rangle\right\rangle_{P_\nu} + \\ + d_1 \theta(L \geq L_4) \left\langle\left\langle \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}\left[L + \lambda_4 - \frac{t}{\beta_4}; 4\right] \right\rangle\right\rangle_{P_\nu}, \quad (6.42)$$

где обозначено (с $\lambda_3 \equiv 0$)

$$\Delta_f \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}[t] \equiv \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}\left[L_f + \lambda_f - \frac{t}{\beta_f}; f\right] - \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}\left[L_f + \lambda_{f-1} - \frac{t}{\beta_{f-1}}; f-1\right]. \quad (6.43)$$

Аналогичная процедура, повторяющая основные шаги п. 6.3 и выполняемая для ряда (6.38б), приводит к ответу

$$\mathcal{D}_\nu^{\text{glob}}[L] = d_0 + d_1 \left\langle\left\langle \int_{-\infty}^{L_4} \frac{\bar{\rho}_{1+\nu}[L_\sigma; 3] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_3}} + \int_{L_4}^{\infty} \frac{\bar{\rho}_{1+\nu}[L_\sigma + \lambda_4; 4] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_4}} + \Delta_{4;\nu}[L, t] \right\rangle\right\rangle_{P_\nu}, \quad (6.44)$$

где

$$\Delta_{f;\nu}[L, t] \equiv \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_{1+\nu}\left[L_f + \lambda_f - \frac{tx}{\beta_f}; N_f\right] t}{\beta_f [1 + e^{L-L_f-tx/\beta_f}]} dx - \int_0^1 \frac{\bar{\rho}_{1+\nu}\left[L_f + \lambda_{f-1} - \frac{tx}{\beta_{f-1}}; N_{f-1}\right] t}{\beta_{f-1} [1 + e^{L-L_f-tx/\beta_{f-1}}]} dx. \quad (6.45)$$

Если мы примем во внимание все пороги, то тогда ответы запишутся в следующем виде:

$$\mathcal{R}_\nu^{\text{glob}}[L] = d_0 \mathfrak{A}_\nu^{\text{glob}}[L] + d_1 \sum_{f=3}^6 \theta(L_f \leq L < L_{f+1}) \left\langle\left\langle \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}\left[L + \lambda_f - \frac{t}{\beta_f}; f\right] \right\rangle\right\rangle_{P_\nu} + d_1 \sum_{f=3}^5 \theta(L_f \leq L < L_{f+1}) \sum_{k=f+1}^6 \left\langle\left\langle \Delta_k \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu}[t] \right\rangle\right\rangle_{P_\nu}, \quad (6.46a)$$

$$\mathcal{D}_\nu^{\text{glob}}[L] = d_0 \mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}[L] + d_1 \sum_{f=3}^6 \left\langle\left\langle \int_{L_f}^{L_{f+1}} \frac{\bar{\rho}_{1+\nu}[L_\sigma + \lambda_f; N_f] dL_\sigma}{1 + e^{L-L_\sigma-t/\beta_f}} \right\rangle\right\rangle_{P_\nu} + d_1 \sum_{f=4}^6 \left\langle\left\langle \Delta_{f;\nu}[L, t] \right\rangle\right\rangle_{P_\nu}, \quad (6.46b)$$

где, как и ранее, мы пользуемся соглашением $L_3 = -\infty$ и $L_7 = +\infty$. Мы видим, что эффект ДАТВ в глобальном подходе свелся к замене исходной производящей функции $P(t)$ ее дробным аналогом $P_\nu(t)$, см. (6.11б), а также тривиальным изменением индексов $1 \rightarrow 1 + \nu$ у функций, входящих под знак операции усреднения $\langle\langle \dots \rangle\rangle_{P_\nu}$, а именно $\mathfrak{A}_1^{\text{glob}}[L]$, $\mathcal{A}_1^{\text{glob}}[L]$ и $\bar{\rho}_1[L]$.

6.5. Приложения техники суммирования в однопетлевой (Д)АТВ. Для иллюстрации возможностей развитой техники суммирования рядов теории возмущений в однопетлевой АТВ и ДАТВ сошлемся на нашу с С. Михайловым недавнюю работу [128], доложенную на семинаре, посвященном памяти Игоря Соловцова, который проходил в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ (Дубна) 17–18 января 2008 г. В этой работе мы проанализировали пертурбативные коэффициенты d_n для распада хиггсовского бозона $H^0 \rightarrow \bar{b}b$, см. разд. 5, построили для них достаточно аккуратную модель (с параметрами $c = 2,4$ и $\beta = -0,52$):

$$\tilde{d}_n^H = c^{n-1} \frac{\Gamma(n+1) + \beta \Gamma(n)}{1 + \beta}, \quad (6.47a)$$

основанную на производящей функции

$$P_H(t) = \frac{\beta + t/c}{c(\beta + 1)} e^{-t/c}, \quad (6.47b)$$

и применили затем описанную здесь технику однопетлевого суммирования к ряду (5.13). В результате мы показали, что для расчета ширины распада бозона Хигса с точностью 1% в области значений его массы $m_H = 60\text{--}180 \text{ ГэВ}^2$ вполне достаточно учета вкладов с коэффициентами d_0, d_1, d_2 и d_3 , а учет вклада с d_4 приводит к улучшению точности до 0,5%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы дали обзор основных элементов глобальной версии ДАТВ, причем старались сделать это в таком виде, чтобы читатель имел возможность применять ее на практике для расчетов реальных процессов.

Мы рассмотрели основы аналитической теории возмущений на примере расчета D -функции Адлера в пространственноподобной области и связанного с ним R -отношения для e^+e^- -аннигиляции в адроны во временноподобной области. Мы кратко обсудили формализм АТВ в однопетлевом приближении для случая фиксированного числа ароматов и также рассмотрели усложнения, связанные с учетом порогов тяжелых кварков при построении глобальной версии АТВ. Мы перечислили недостатки АТВ, связанные с необходимостью анализирования более сложных выражений, возникающих в реальной КХД при использовании методов ренормгруппы и факторизации, и как способ их исправления рассмотрели дробно-аналитическую теорию возмущений. Мы кратко обсудили случай однопетлевой ДАТВ, объяснили, как можно действовать в случае учета высших петель, и обсудили глобальный вариант ДАТВ, в котором учитываются пороги тяжелых кварков.

В качестве одного из приложений ДАТВ в евклидовой области мы рассмотрели расчет факторизуемой части формфактора пиона и продемонстрировали, что использование АТВ и ДАТВ приводит к существенному снижению зависимости результатов от выбора схемы и масштабов перенормировки и факторизации. Кроме того, мы показали, что в АТВ и ДАТВ проблема учета порогов в пертурбативных расчетах решается естественным путем, а переход в область Минковского с помощью дисперсионного представления для формфактора пиона говорит о необходимости использовать в этой области эффективные заряды $\mathcal{A}_\nu(-s)$, обладающие мнимыми частями, а не эффективные заряды $\mathfrak{A}_\nu(s)$, пригодные для расчетов поправок к сечениям реакций. Кроме того, при таком переходе возникает естественное предписание для масштаба перенормировки $\mu_R^2 = Q^2/4$, при котором скачки мнимой части формфактора пиона в минковской области совпадают с порогами рождения пар тяжелых кварков, $s_{\text{th}} = 4m_Q^2$.

В качестве приложения ДАТВ в минковской области мы рассмотрели расчет полной ширины распада бозона Хиггса в кварк-антикварковую $\bar{b}b$ -пару. Область значений энергии в системе центра масс, интересная для эксперимента, здесь очень велика, $\sqrt{s} \gtrsim 100$ ГэВ. Поэтому результаты ДАТВ с $N_f = 5$, отвечающие переносу π^2 -вкладов из коэффициентов теории возмущений в аналитические эффективные заряды $\mathfrak{A}_{n+\nu}$, прекрасно согласуются с результатами стандартной теории возмущений уже на уровне двухпетлевого приближения. В то же время результат глобальной версии ДАТВ отличается от них на уровне 14 %, что связано с учетом эффектов виртуальных t -кварков в петлевых поправках.

Наконец, мы обсудили суммирование нестепенных рядов типа $\sum_n d_n \mathfrak{A}_{n+\nu}[L]$ и $\sum_n d_n \mathcal{A}_{n+\nu}[L]$ в АТВ (с $\nu = 0$) и ДАТВ (с $\nu \neq 0$). Мы продемонстрировали в однопетлевой АТВ, как такое суммирование можно провести точно [85] и выразить ответ в виде интеграла от $\mathcal{A}_1[L-t]$ по t с весом $P(t)$, определяемых коэффициентами пертурбативного ряда d_n . Мы показали, что аналогичное суммирование можно провести и в случае однопетлевой ДАТВ: при этом сумма ряда $\sum_n d_n \mathcal{A}_{n+\nu}[L]$ выражается тоже интегралом по t , но уже от $\mathcal{A}_{1+\nu}[L-t]$ и с модифицированным весом $P_\nu(t)$. Мы получили также основные формулы глобализации (учета порогов тяжелых кварков) для этих методов суммирования в АТВ и ДАТВ.

В качестве возможных направлений развития этого подхода хочется отметить:

- применение ДАТВ в анализе данных глубоконеупругого рассеяния;
- применение АТВ и ДАТВ для анализа суммирования пертурбативных поправок к различным процессам;
- обобщение техники суммирования рядов в АТВ и ДАТВ на двухпетлевой случай.

Благодарности. Автор благодарен своим соавторам С. Михайлову и Н. Стефанису за понимание и поддержку, без которых эта работа никогда не была бы завершена. Я также признателен И. Аникину, О. Теряеву и Д. В. Ширкову за плодотворные обсуждения и ценные советы, К. Гёке и Н. Стефанису за теплый прием в Рурском университете Бохума, где эта работа была начата и частично реализована. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-01-00992, 06-02-16215, 07-02-91557 и 08-01-00686, программы сотрудничества БРФФИ–ОИЯИ (контракт № F06D-002), грантов 2007–2008 гг. программы Гейзенберг–Ландау и гранта DFG (проект DFG 436 RUS 113/881/0).

Приложение А

ДВУХПЕТЛЕВЫЕ РЕНОРМГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ЗАРЯДА В КХД

1. Разложение β -функции дается правой частью следующего уравнения:

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) = \beta \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) = -b_0 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 - b_1 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 - b_2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^4 - \dots, \quad (\text{A.1})$$

где $L = \ln(\mu^2/\Lambda^2)$ и

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_R N_f; & b_1 &= \frac{34}{3} C_A^2 - \left(4C_F + \frac{20}{3} C_A \right) T_R N_f; \\ b_2 &= \frac{2857}{54} C_A^3 + 2C_F^2 T_R N_f - \frac{205}{9} C_F C_A T_R N_f - \\ &\quad - \frac{1415}{27} C_A^2 T_R N_f + \frac{44}{9} C_F (T_R N_f)^2 + \frac{158}{27} C_A (T_R N_f)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

причем $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c = 4/3$, $C_A = N_c = 3$, $T_R = 1/2$, и N_f обозначает число активных флейворов кварков. Соответствующее двухпетлевое уравнение РГ для эффективного заряда $a = b_0 \alpha_s/(4\pi)$

$$\frac{da_{(2)}}{dL} = -a_{(2)}^2 [1 + c_1 a_{(2)}], \quad \text{где } c_1 \equiv \frac{b_1}{b_0^2}. \quad (\text{A.3})$$

Интегрируя по L , можно показать, что $a_{(2)}[L]$ удовлетворяет следующему нелинейному уравнению:

$$\frac{1}{a_{(2)}} + c_1 \ln \left[\frac{a_{(2)}}{1 + c_1 a_{(2)}} \right] = L, \quad (\text{A.4})$$

точное решение которого известно [35, 53]:

$$a_{(2)}[L] = -\frac{1}{c_1} \frac{1}{1 + W_{-1}(z_W(L))}, \quad (\text{A.5})$$

где $z_W(L) = (1/c_1) \exp(-1 + i\pi - L/c_1)$, а W_k , $k = 0, \pm 1, \dots$, обозначают ветви многозначной функции Ламберта $W(z)$, определяемой как решение уравнения

$$z = W(z) e^{W(z)}. \quad (\text{A.6})$$

Обзор свойств этой специальной функции может быть найден в [35, 36, 124]. Заметим здесь также, что эта функция определена в известных программах символьных расчетов Mathematica* и Maple.

2. Разложение решения $a_{(2)}[L]$ уравнения (A.3) по однопетлевому решению $a = 1/L$ в $O(a^4)$ -порядке строится следующим образом. Сначала мы переписываем уравнение (A.4) в виде

$$a_{(2)} = \Phi_{(2)}(a, a_{(2)}) \equiv \frac{a}{1 + c_1 a [\ln(1 + c_1 a_{(2)}) - \ln a_{(2)}]}, \quad (\text{A.7a})$$

а затем получаем его решения методом итераций:

$$a_{(2)}^{1\text{-iter}} = \Phi_{(2)}(a, a), \quad a_{(2)}^{2\text{-iter}} = \Phi_{(2)}(a, a_{(2)}^{1\text{-iter}}), \quad a_{(2)}^{3\text{-iter}} = \Phi_{(2)}(a, a_{(2)}^{2\text{-iter}}). \quad (\text{A.7b})$$

Третьей итерации достаточно, чтобы получить затем правильные коэффициенты разложения $a_{(2)}$ в ряд по a в $O(a^3)$ -порядке из выражения (A.7b):

$$a_{(2)} = a + c_1 a^2 \ln a + c_1^2 a^3 (\ln^2 a + \ln a - 1) + c_1^3 a^4 \left(\ln^3 a + \frac{5}{2} \ln^2 a - 2 \ln a - \frac{1}{2} \right) + O(c_1^4). \quad (\text{A.8})$$

3. Рассмотрим теперь вопрос, насколько хорошо спектральные плотности $\rho_1^{(2)\text{it}-1}[L_\sigma]$ и $\rho_1^{(2)\text{it}-2}[L_\sigma]$, отвечающие итерационным решениям (A.7b), приближают точную спектральную плотность $\rho_1^{(2)}[L_\sigma]$. Строим сначала спек-

*В версиях 3, 4 и 5 пакета Mathematica функция $W_k(z)$ обозначается именем ProductLog[k, z].

тральную плотность 1-й итерации:

$$\rho_{\nu=1}^{(2)\text{it-1}}[L_\sigma] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\varphi_{(2)}^{\text{it-1}}[L_\sigma]]}{R_{(2)}^{\text{it-1}}[L_\sigma]}, \quad (\text{A.9a})$$

$$R_{(2)}^{\text{it-1}}[L] = \sqrt{[L + c_1 \ln r[L]]^2 + [\pi + c_1 \phi[L]]^2}, \quad (\text{A.9б})$$

$$\varphi_{(2)}^{\text{it-1}}[L] = \arccos \left[\frac{L + c_1 \ln r[L]}{R_{(2)}^{\text{it-1}}[L]} \right], \quad (\text{A.9в})$$

где

$$r[L] = \sqrt{[L + c_1]^2 + \pi^2}; \quad \phi[L] = \arccos \left[\frac{L + c_1}{r[L]} \right]. \quad (\text{A.9г})$$

Эта спектральная плотность оказывается достаточно близкой к точной плотности $\rho_1^{(2)}(\sigma)$: максимальное отличие имеет порядок 5% (рис. 15, а). Теперь

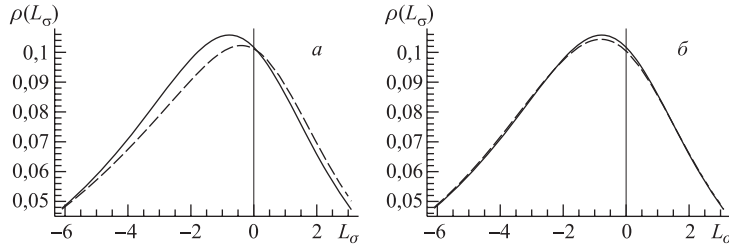


Рис. 15. Сравнение спектральных плотностей, отвечающих 1-й (а) и 2-й (б) итерациям (А.7б), с точной спектральной двухпетлевой плотностью. Штриховая линия отвечает на рис. а $\rho_1^{(2)\text{it-1}}[L_\sigma]$, см. (А.9), а на рис. б — $\rho_1^{(2)\text{it-2}}[L_\sigma]$, см. (А.10), в то время как сплошная линия на обоих графиках представляет $\rho_1^{(2)}[L_\sigma]$, см. (3.16). Для лучшего сравнения показана та область значений L_σ , где отличия сравниваемых плотностей максимальны

обратимся к приближенному решению, генерируемому второй итерацией (А.7б). Оно дает нам такие плотность, модуль и фазу:

$$\rho_{\nu=1}^{(2)\text{it-2}}[L_\sigma] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\varphi_{(2)}^{\text{it-2}}[L_\sigma]]}{R_{(2)}^{\text{it-2}}[L_\sigma]}, \quad (\text{A.10a})$$

$$R_{(2)}^{\text{it-2}}[L] = \sqrt{[L + c_1 \ln R[L]]^2 + [\pi + c_1 \Phi[L]]^2}, \quad (\text{A.10б})$$

$$\varphi_{(2)}^{\text{it-2}}[L] = \arccos \left(\frac{L + c_1 \ln R[L]}{R_{(2)}^{\text{it-2}}[L]} \right), \quad (\text{A.10в})$$

где

$$R[L] = \sqrt{[L + c_1 + c_1 \ln r[L]]^2 + [\pi + c_1 \phi[L]]^2}, \quad (\text{A.10г})$$

$$\Phi[L] = \arccos\left(\frac{L + c_1 + c_1 \ln r[L]}{R[L]}\right). \quad (\text{A.10д})$$

Эта спектральная плотность оказывается гораздо ближе к точной, $\rho_1^{(2)}(\sigma)$: отличие в области максимума имеет порядок 1 % (рис. 15, б).

Приложение Б

ТРЕХПЕТЛЕВЫЕ РЕНОРМГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ЗАРЯДА В КХД

1. В трехпетлевом приближении β -функция задается следующим выражением:

$$\beta_{(3)}\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) = -b_0\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 - b_1\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 - b_2\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^4, \quad (\text{Б.1})$$

Соответствующее трехпетлевое уравнение РГ для эффективного заряда таково:

$$\frac{da_{(3)}}{dL} = -a_{(3)}^2 \left[1 + c_1 a_{(3)} + c_2 a_{(3)}^2\right], \quad \text{где } c_2 \equiv \frac{b_2}{b_0^3}. \quad (\text{Б.2})$$

Интегрируя по L , можно показать, что $a_{(3)}[L]$ удовлетворяет следующему нелинейному уравнению*:

$$L = \frac{1}{a_{(3)}} + c_1 \ln \left[\frac{a_{(3)}}{\sqrt{1 + c_1 a_{(3)} + c_2 a_{(3)}^2}} \right] + \frac{c_1^2 - 2c_2}{\sqrt{c_1^2 - 4c_2}} \ln \left[\frac{2 + a_{(3)} \left(c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2} \right)}{2 + a_{(3)} \left(c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2} \right)} \right]. \quad (\text{Б.3})$$

Точное решение этого уравнения неизвестно, поэтому для его применения обычно используют численные методы поиска решений или разложение по

*Заметим, что для $N_f = 3$ $c_1 \simeq 0,624$, $c_2 \simeq 0,883$, так что $c_1^2 - 4c_2 \simeq -2,908 < 0$. Тем не менее правая часть (Б.3) записана в таком виде, что она остается чисто вещественной и в этом случае.

$a = 1/L$ в области больших L :

$$a_{(3)} = a + a^2 c_1 \ln a_{(1)} + a^3 [c_1^2 (\ln^2 a + \ln a - 1) + c_2] + a^4 \left[c_1^3 \left(\ln^3 a + \frac{5}{2} \ln^2 a - 2 \ln a - \frac{1}{2} \right) + 3c_2 c_1 \ln a \right] + O(a^5 \ln^4 a). \quad (\text{Б.4})$$

2. Рассмотрим здесь решение РГ-уравнения для эффективного заряда в модифицированном по Паде трехпетлевом приближении в КХД [33, 34], где β -функция (А.1) задается так:

$$\beta_{(3-P)} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) = -b_0 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left[1 + \frac{b_1 \alpha_s / (4\pi)}{b_0 (1 - b_2 \alpha_s / (4b_1 \pi))} \right]. \quad (\text{Б.5})$$

Легко видеть, что первые три члена в разложениях (Б.1) и (Б.5) совпадают, зато их асимптотики при $a \rightarrow \infty$ совершенно различны: $\beta_{(3)}(a) \sim -a^4$ и $\beta_{(3-P)}(a) \sim -a^2$. Соответствующее РГ-уравнение (Б.2) модифицируется к виду

$$\frac{da_{(3-P)}}{dL} = -a_{(3-P)}^2 \left[1 + \frac{c_1 a_{(3-P)}}{1 - (c_2/c_1) a_{(3-P)}} \right]. \quad (\text{Б.6})$$

Его решение, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\frac{1}{a_{(3-P)}} + c_1 \ln \left[\frac{a_{(3-P)}}{1 + (c_1 - c_2/c_1) a_{(3-P)}} \right] = L, \quad (\text{Б.7})$$

что очень похоже по форме на (А.4). Неудивительно поэтому, что точное решение (Б.7) также может быть выражено через функцию Ламберта $W(z)$, а именно:

$$a_{(3-P)}[L] = -\frac{1}{c_1} \frac{1}{1 - c_2/c_1^2 + W_{-1}(z_W^{(3-P)}(L))}, \quad (\text{Б.8})$$

где $z_W^{(3-P)}(L) = (1/c_1) \exp[-1 + i\pi + c_2/c_1^2 - L/c_1]$. Относительная точность этого решения в сравнении с численным решением стандартного трехпетлевого уравнения (Б.2) лучше 1% для $L \geq 7$ (и лучше 0,5% для $L \geq 9$).

3. Для модифицированного по Паде трехпетлевого приближения соответствующие спектральные плотности определяются с помощью (Б.8):

$$\rho_\nu^{(3-P)}[L_\sigma] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\nu \varphi_{(3-P)}[L_\sigma]]}{(R_{(3-P)}[L_\sigma])^\nu}, \quad (\text{Б.9а})$$

$$R_{(3-P)}[L] = c_1 \left| 1 - \frac{c_2}{c_1^2} + W_{-1}[z_W^{(3-P)}(L - i\pi)] \right|, \quad (\text{Б.9б})$$

$$\varphi_{(3-P)}[L] = \arccos \left[\operatorname{Re} \left(\frac{-R_{(3-P)}[L]}{c_1 (1 - c_2/c_1^2 + [z_W^{(3-P)}(L - i\pi)])} \right) \right]. \quad (\text{Б.9в})$$

Следующие явные выражения для аналитических образов эффективного заряда для области Минковского

$$\mathfrak{A}_1^{(3-P)}[L_s] = \frac{1}{\pi} \left\{ \pi - \frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2} \operatorname{Im} \left[\ln W_1(z_s) \right] + \frac{c_2}{c_1^2 - c_2} \operatorname{Im} \left[\ln \left(1 - \frac{c_2}{c_1^2} + W_1(z_s) \right) \right] \right\} \quad (\text{Б.10})$$

с $z_s = z_W^{(3-P)}[L_s]$ были получены Маградзе [36]. Относительная точность этих решений по сравнению с результатами численного интегрирования обычной, немодифицированной по Паде, спектральной плотности $\rho_1^{(3)}[L_s]$ оказывается лучше 0,25 % при $L_s \geq 2$.

Приложение В

ЭВОЛЮЦИЯ ПИОННОЙ АР

АР пиона эволюционирует с изменением масштаба нормировки μ^2 в соответствии с уравнением эволюции ЕРБЛ [96–99]

$$\frac{d\varphi_\pi(x, \mu_F^2)}{d \ln \mu_F^2} = V(x, u, \alpha_s(\mu_F^2)) \otimes_u \varphi_\pi(u, \mu_F^2), \quad (\text{В.1})$$

где $V(x, u, \alpha_s)$ — пертурбативно рассчитываемое ядро эволюции, которое в ведущем $O(\alpha_s)$ -порядке имеет вид

$$V(x, u, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{4\pi} V_0(x, u). \quad (\text{В.2})$$

Решение этого уравнения в ведущем порядке есть (4.7), (4.8). Удобно представлять АР $\varphi_\pi(x, \mu^2)$ в виде разложения по полиномам Гегенбауэра $C_k^{3/2}(2x-1)$, которые являются собственными функциями ядра эволюции ЕРБЛ в ведущем порядке, V_0 , т. е.

$$\varphi_\pi(x, \mu^2) = 6x(1-x) \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}(\mu^2) C_{2m}^{3/2}(2x-1) \right]. \quad (\text{В.3})$$

При этом вся зависимость от μ^2 переходит в коэффициенты разложения $a_m(\mu^2)$. Имеется разложение аномальных размерностей, являющихся собственными значениями ядра V_0 , по степеням α_s :

$$\gamma_n(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_n^{(0)} + \dots, \quad (\text{В.4a})$$

где аномальные размерности ведущего порядка есть

$$\gamma_n^{(0)} = 2C_F \left[4S_1(n+1) - 3 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right] \quad (\text{B.46})$$

с $S_1(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} 1/i = \psi(n+2) - \psi(1)$, а функция $\psi(z)$ определена как $\psi(z) = d \ln \Gamma(z)/dz$.

Приложение Г РАЗЛОЖЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ D -ФУНКЦИИ

Первые три коэффициента d_1, d_2, d_3 разложения D_S -функции двух скалярных кварковых токов,

$$D_S(Q^2) = 3 m_b^2(Q^2) \left[1 + \sum_{n>0} d_n \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right)^n \right], \quad (\text{Г.1})$$

были рассчитаны в [83], они равны

$$d_1 = C_F \left[\frac{17}{4} \right], \quad (\text{Г.2a})$$

$$d_2 = C_F^2 \left[\frac{691}{64} - \frac{9}{4} \zeta(3) \right] + C_F C_A \left[\frac{893}{64} - \frac{31}{8} \zeta(3) \right] + T_R N_f C_F \left[-\frac{65}{16} + \zeta(3) \right], \quad (\text{Г.2б})$$

$$d_3 = C_F^3 \left[\frac{23443}{768} - \frac{239}{16} \zeta(3) + \frac{45}{8} \zeta(5) \right] + C_F^2 C_A \left[\frac{13153}{192} - \frac{1089}{32} \zeta(3) + \frac{145}{16} \zeta(5) \right] + C_F C_A^2 \left[\frac{3894493}{62208} - \frac{2329}{96} \zeta(3) + \frac{25}{48} \zeta(5) \right] + T_R N_f C_F^2 \left[-\frac{88}{3} + \frac{65}{4} \zeta(3) + \frac{3}{4} \zeta(4) - 5 \zeta(5) \right] + T_R N_f C_F C_A \left[-\frac{33475}{972} + \frac{22}{3} \zeta(3) - \frac{3}{4} \zeta(4) + \frac{5}{6} \zeta(5) \right] + T_R^2 N_f^2 C_F \left[\frac{15511}{3888} - \zeta(3) \right]. \quad (\text{Г.2в})$$

Коэффициент d_4 был получен совсем недавно в [82]:

$$\begin{aligned}
 d_4 = & N_f^3 \left[-\frac{520771}{559872} + \frac{65}{432} \zeta(3) + \frac{1}{144} \zeta(4) + \frac{5}{18} \zeta(5) \right] + \\
 & + N_f^2 \left[\frac{220313525}{2239488} - \frac{11875}{432} \zeta(3) + \frac{5}{6} \zeta^2(3) + \frac{25}{96} \zeta(4) - \frac{5015}{432} \zeta(5) \right] + \\
 & + N_f \left[-\frac{1045811915}{373248} + \frac{5747185}{5184} \zeta(3) - \frac{955}{16} \zeta^2(3) - \frac{9131}{576} \zeta(4) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{41215}{432} \zeta(5) + \frac{2875}{288} \zeta(6) + \frac{665}{72} \zeta(7) \right] + \\
 & + N_f^0 \left[\frac{10811054729}{497664} - \frac{3887351}{324} \zeta(3) + \frac{458425}{432} \zeta^2(3) + \frac{265}{18} \zeta(4) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{373975}{432} \zeta(5) - \frac{1375}{32} \zeta(6) - \frac{178045}{768} \zeta(7) \right]. \quad (\text{Г.2г})
 \end{aligned}$$

Приложение Д

АНОМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ И ЭВОЛЮЦИЯ КВАРКОВЫХ МАСС

1. Коэффициенты γ_i определяют разложение аномальной размерности кварковой массы аналогично тому, как это сделано в (А.1) по отношению к разложению β -функции, а именно,

$$\frac{d}{dL} \ln(m[L]) \equiv \gamma_{\text{mass}} \left(\frac{\alpha_s[L]}{4\pi} \right) = - \sum_{i \geq 0} \gamma_i \left(\frac{\alpha_s[L]}{4\pi} \right)^{i+1}. \quad (\text{Д.1})$$

Их явные выражения таковы, см. [126]:

$$\gamma_0 = 3C_F; \quad (\text{Д.2})$$

$$\gamma_1 = \left[\frac{202}{3} - \frac{20}{9} N_f \right]; \quad (\text{Д.3})$$

$$\gamma_2 = \left[1249 - \left(\frac{2216}{27} + \frac{160}{3} \zeta(3) \right) N_f - \frac{140}{81} N_f^2 \right]; \quad (\text{Д.4})$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 = & \left[\frac{4603055}{162} + \frac{135680}{27} \zeta(3) - 8800 \zeta(5) - \right. \\
 & - \left(\frac{91723}{27} + \frac{34192}{9} \zeta(3) - 880 \zeta(4) - \frac{18400}{9} \zeta(5) \right) N_f + \\
 & \left. + \left(\frac{5242}{243} + \frac{800}{9} \zeta(5) - \frac{160}{3} \zeta(4) \right) N_f^2 - \left(\frac{332}{243} - \frac{64}{27} \zeta(3) \right) N_f^3 \right], \quad (\text{Д.5})
 \end{aligned}$$

где $\zeta(\nu)$ обозначает ζ -функцию Римана. Эволюция $m_{(l)}(Q^2)$ в l -петлевом приближении описывается следующим общим решением уравнений РГ:

$$m_{(l)}^2(Q^2) = m_{(l)}^2(\mu^2) \exp \left[2 \int_{\alpha_s(\mu^2)/(4\pi)}^{\alpha_s(Q^2)/(4\pi)} \frac{\gamma_{\text{mass}}(x)}{\beta(x)} dx \right] = \quad (\text{Д.6а})$$

$$= m_{(l)}^2(\mu^2) \frac{[\alpha_s(Q^2)]^{\nu_0} f_{(l)}(\alpha_s(Q^2))}{[\alpha_s(\mu^2)]^{\nu_0} f_{(l)}(\alpha_s(\mu^2))}, \quad (\text{Д.6б})$$

где

$$\nu_0 = 2 \frac{\gamma_0}{b_0} \quad (\text{Д.6в})$$

и функция $f_{(l)}(\alpha_s)$, задаваемая

$$f_{(l)}(\alpha_s) = \exp \left[2 \int_0^{\alpha_s/(4\pi)} \left(\frac{\gamma_m^{(l)}(x)}{\beta^{(l)}(x)} - \frac{\gamma_0 x}{b_0 x^2} \right) dx \right], \quad (\text{Д.6г})$$

аккумулирует эффекты многопетлевой (начиная с двухпетлевой) эволюции $m_{(l)}^2(Q^2)$ с Q^2 . В однопетлевом приближении ($l = 1$), $f_{(l)}(\alpha_s)$ по определению задается равной единице. С другой стороны, при $l = 2$ и $l = 3$ мы имеем

$$f_{(2)}(\alpha_s) = [1 + \delta_1 \alpha_s]^{\nu_1}, \quad \text{где } \delta_1 = \frac{b_1}{4\pi b_0} = \frac{c_1 b_0}{4\pi}, \quad \nu_1 = 2 \left(\frac{\gamma_1}{b_1} - \frac{\gamma_0}{b_0} \right), \quad (\text{Д.7})$$

и

$$f_{(3)}(\alpha_s) = [1 + \delta_1 \alpha_s + \delta_2 \alpha_s^2]^{\nu_{20}} \exp \left[\nu_{21} \arccos \left(\frac{1 + \delta_1 \alpha_s / 2}{\sqrt{1 + \delta_1 \alpha_s + \delta_2 \alpha_s^2}} \right) \right], \quad (\text{Д.8а})$$

где

$$\delta_2 = \frac{b_2}{16\pi^2 b_0}, \quad \nu_{20} = \left(\frac{\gamma_2}{b_2} - \frac{\gamma_0}{b_0} \right), \quad \nu_{21} = \frac{-2 b_1}{\sqrt{4b_2 b_0 - b_1^2}} \left(\frac{\gamma_2}{b_2} - 2 \frac{\gamma_1}{b_1} + \frac{\gamma_0}{b_0} \right). \quad (\text{Д.8б})$$

Для нас важен случай РГ-уравнения для эффективного заряда в модифицированном по Паде трехпетлевом приближении в КХД [33, 34], где β -функция задается уравнением (Б.5). В этом подходе аналогичным образом задается и аномальная размерность:

$$\gamma_{\text{mass}}^{(3-P)} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) = - \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) \left[\gamma_0 + \frac{\gamma_1 \alpha_s / (4\pi)}{1 - \gamma_2 \alpha_s / (4\gamma_1 \pi)} \right]. \quad (\text{Д.9})$$

Тогда функция $f_{(3-P)}(a_s)$ очень напоминает $f_{(2)}(a_s)$:

$$f_{(3-P)}(a_s) = [1 + \delta_{22} \alpha_s]^{\nu_{22}} [1 - \delta_{23} \alpha_s]^{\nu_{23}}, \quad (\text{Д.10а})$$

где (напомним: $c_1 = b_1/b_0^2$ и $c_2 = b_2/b_0^3$)

$$\delta_{22} = b_0 \frac{c_1^2 - c_2}{4\pi c_1}, \quad \nu_{22} = \frac{c_1}{2\pi\delta_{22}} \left(\frac{\gamma_1}{4\pi(\delta_{22} + \delta_{23})} - \gamma_0 \right), \quad (\text{Д.10б})$$

$$\delta_{23} = \frac{\gamma_2}{4\pi\gamma_1}, \quad \nu_{23} = \frac{\gamma_1}{2\pi\delta_{23}} \left(\frac{c_1}{4\pi(\delta_{22} + \delta_{23})} - \frac{1}{b_0} \right). \quad (\text{Д.10в})$$

Вводя ренормгрупповой инвариант $\hat{m}_{(l)}$, см., например, [70, 127],

$$\hat{m}_{(l)} = m_{(l)}(\mu^2) \left\{ [\alpha_s(\mu^2)]^{\nu_0} f_{(l)}(\alpha_s(\mu^2)) \right\}^{-1/2}, \quad (\text{Д.11})$$

можно переписать (Д.6б) в виде

$$m_{(l)}^2(Q^2) = \hat{m}_{(l)}^2 [\alpha_s(Q^2)]^{\nu_0} f_{(l)}(\alpha_s(Q^2)). \quad (\text{Д.12})$$

Отметим, что для полюсной массы b -кварка, равной 4,07 ГэВ, ренормгрупповые инварианты $\hat{m}_{(2)} = 8,012$ ГэВ и $\hat{m}_{(3-P)} = 7,995$ ГэВ. Разложение $f_{(l)}(x)$ в трехпетлевом приближении есть (оно одно и то же как в обычной трехпетлевой схеме, так и в ее паде-модификации)

$$\begin{aligned} f_{(3)}(\alpha_s) = & 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{b_1}{2b_0} \left(\frac{\gamma_1}{b_1} - \frac{\gamma_0}{b_0} \right) + \\ & + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \frac{b_1^2}{16b_0^2} \left[\frac{\gamma_0}{b_0} - \frac{\gamma_1}{b_1} + 2 \left(\frac{\gamma_0}{b_0} - \frac{\gamma_1}{b_1} \right)^2 + \frac{b_0 b_2}{b_1^2} \left(\frac{\gamma_2}{b_2} - \frac{\gamma_0}{b_0} \right) \right] + O(\alpha_s^3), \end{aligned} \quad (\text{Д.13})$$

что находится во взаимно-однозначном соответствии с формулой (15), полученной Четыркиным в [126]*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stueckelberg E. C. G., Petermann A.* Normalization of Constants in the Quanta Theory // *Helv. Phys. Acta.* 1953. V. 26. P. 499–520.

*Заметим, однако, что Четыркин разлагает выражение $\sqrt{f_{(l)}(x)} \equiv c(x)$ и использует отличную от нашей нормировку коэффициентов, а именно, $\bar{\beta}_n = b_n/(4^n b_0)$ и $\bar{\gamma}_n = \gamma_n/(4^n b_0)$.

2. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Группа перенормировок заряда в квантовой теории поля // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. С. 391.
3. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Charge Renormalization Group in Quantum Field Theory // Nuovo Cim. 1956. V. 3. P. 845–863.
4. *Landau L. D., Abrikosov A., Halatnikov L.* On the Quantum Theory of Fields // Nuovo Cim. Suppl. 1956. V. 3. P. 80–104.
5. *Гросс Д. Д.* Открытие асимптотической свободы и появление КХД // УФН. 2005. Т. 175. С. 1306–1318.
6. *Bogolyubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields // Intersci. Monogr. Phys. Astron. 1959. V. 3. P. 1–720.
7. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 597 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
9. *Marshall R.* A Determination of the Strong Coupling Constant α_s from e^+e^- Total Cross-Section Data // Z. Phys. C. 1989. V. 43. P. 595.
10. *Pennington M. R., Roberts R. G., Ross G. G.* How to Continue the Predictions of Perturbative QCD from the Spacelike Region Where They Are Derived to the Time-like Region Where Experiments Are Performed // Nucl. Phys. B. 1984. V. 242. P. 69.
11. *Pennington M. R., Ross G. G.* Perturbative QCD for Time-Like Processes: What Is the Best Expansion Parameter? // Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 167.
12. *Cornwall J. M.* Dynamical Mass Generation in Continuum QCD // Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1453.
13. *Parisi G., Petronzio R.* Small Transverse Momentum Distributions in Hard Processes // Nucl. Phys. B. 1979. V. 154. P. 427.
14. *Mattingly A. C., Stevenson P. M.* QCD Perturbation Theory at Low Energies // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 1320–1323.
15. *Gay Ducati M. B., Halzen F., Natale A. A.* Diffraction and the Gluon Mass // Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 2324–2328.
16. *Simonov Y. A.* Perturbative Theory in the Nonperturbative QCD Vacuum // Phys. At. Nucl. 1995. HEP-PH/9311247;
17. *Stefanis N. G.* The Physics of Exclusive Reactions in QCD: Theory and Phenomenology // Eur. Phys. J. Direct. C. 1999. V. 7. P. 1–109.
18. *Radyushkin A. V.* Optimized Lambda-Parametrization for the QCD Running Coupling Constant in Spacelike and Timelike Regions // JINR Rapid Commun. 1996. No. 4[78]. P. 96–99.
19. *Krasnikov N. V., Pivovarov A. A.* The Influence of the Analytical Continuation Effects on the Value of the QCD Scale Parameter Lambda Extracted from the Data on Charmonium and Upsilon Hadron Decays // Phys. Lett. B. 1982. V. 116. P. 168–170.

20. *Bakulev A. P., Radyushkin A. V., Stefanis N. G.* Form Factors and QCD in Spacelike and Timelike Regions // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 113001.
21. *Shirkov D. V.* Analytic Perturbation Theory for QCD Observables // *Theor. Math. Phys.* 2001. V. 127. P. 409–423.
22. *Shirkov D. V.* Analytic Perturbation Theory in Analyzing Some QCD Observables // *Eur. Phys. J. C.* 2001. V. 22. P. 331–340.
23. *Beneke M., Braun V. M.* Naive Nonabelianization and Resummation of Fermion Bubble Chains // *Phys. Lett. B.* 1995. V. 348. P. 513–520.
24. *Ball P., Beneke M., Braun V. M.* Resummation of $(\beta_0\alpha_s)^n$ Corrections in QCD: Techniques and Applications to the Tau Hadronic Width and the Heavy Quark Pole Mass // *Nucl. Phys. B.* 1995. V. 452. P. 563–625.
25. *Jones H. F., Solovtsov I. L.* QCD Running Coupling Constant in the Timelike Region // *Phys. Lett. B.* 1995. V. 349. P. 519–524.
26. *Jones H. F., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* Analytic Properties of the QCD Running Coupling Constant and Tau Decay // *Ibid.* V. 357. P. 441–445.
27. *Milton K. A., Solovtsov I. L.* Analytic Perturbation Theory in QCD and Schwinger's Connection between the Beta Function and the Spectral Density // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55. P. 5295–5298.
28. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic QCD Running Coupling with Finite IR Behaviour and Universal $\bar{\alpha}_s(0)$ Value // *JINR Rapid Commun.* 1996. No. 2[76]. P. 5–10.
29. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal $\bar{\alpha}_s(0)$ Value // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1209–1212.
30. *Solovtsov I. L., Shirkov D. V.* Analytic Approach to Perturbative QCD and Renormalization Scheme Dependence // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 442. P. 344–348.
31. *Milton K. A., Solovtsova O. P.* Analytic Perturbation Theory: A New Approach to the Analytic Continuation of the Strong Coupling Constant α_s into the Timelike Region // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 5402–5409.
32. *Dokshitzer Y. L., Marchesini G., Webber B. R.* Dispersive Approach to Power-Behaved Contributions in QCD Hard Processes // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 469. P. 93–142.
33. *Kourashev D. S., Magradze B. A.* Explicit Expressions for Euclidean and Minkowskian QCD Observables in Analytic Perturbation Theory. Preprint RMI-2001-18. 2001; hep-ph/0104142.
34. *Kourashev D. S., Magradze B. A.* Explicit Expressions for Timelike and Spacelike Observables of Quantum Chromodynamics in Analytic Perturbation Theory // *Theor. Math. Phys.* 2003. V. 135. P. 531–540.
35. *Magradze B. A.* Analytic Approach to Perturbative QCD // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2000. V. 15. P. 2715–2734.
36. *Magradze B. A.* QCD Coupling up to Third Order in Standard and Analytic Perturbation Theories. JINR Preprint E2-2000-222. Dubna, 2000; hep-ph/0010070.

37. *Magradze B. A.* Practical Techniques of Analytic Perturbation Theory of QCD. Preprint RMI-2003-55. 2003; hep-ph/0305020.
38. *Magradze B. A.* A Novel Series Solution to the Renormalization Group Equation in QCD // *Few Body Syst.* 2006. V. 40. P. 71–99.
39. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* Analytic Perturbation Theory and Inclusive Tau Decay // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 415. P. 104–110.
40. *Milton K. A. et al.* Renormalization Scheme and Higher Loop Stability in Hadronic Tau Decay within Analytic Perturbation Theory // *Eur. Phys. J. C.* 2000. V. 14. P. 495–501.
41. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* The Bjorken Sum Rule in the Analytic Approach to Perturbative QCD // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 439. P. 421–427.
42. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* The Gross-Llewellyn Smith Sum Rule in the Analytic Approach to Perturbative QCD // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 016001.
43. *Shirkov D. V., Zayakin A. V.* Analytic Perturbation Theory for Practitioners and Upsilon Decay // *Phys. At. Nucl.* 2007. V. 70. P. 775–783.
44. *Stefanis N. G., Schroers W., Kim H.-C.* Pion Form Factors with Improved Infrared Factorization // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 449. P. 299.
45. *Stefanis N. G., Schroers W., Kim H.-C.* Analytic Coupling and Sudakov Effects in Exclusive Processes: Pion and $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ Form Factors // *Eur. Phys. J. C.* 2000. V. 18. P. 137–156.
46. *Bakulev A. P. et al.* Pion Form Factor in QCD: From Nonlocal Condensates to NLO Analytic Perturbation Theory // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 033014; Erratum // *Ibid.* P. 079906.
47. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Ten Years of the Analytic Perturbation Theory in QCD // *Theor. Math. Phys.* 2007. V. 150. P. 132–152.
48. *Solovtsov I. L., Shirkov D. V.* The Analytic Approach in Quantum Chromodynamics // *Theor. Math. Phys.* 1999. V. 120. P. 1220–1244.
49. *Geshkenbein B. V., Ioffe B. L., Zyablyuk K. N.* The Check of QCD Based on the Tau Decay Data Analysis in the Complex q^2 Plane // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 093009.
50. *Alekseev A. I.* Synthetic Running Coupling of QCD // *Few Body Syst.* 2006. V. 40. P. 57–70.
51. *Cvetic G., Valenzuela C.* An Approach for Evaluation of Observables in Analytic Versions of QCD // *J. Phys. G.* 2006. V. 32. P. L27.
52. *Dokshitzer Y. L.* Perturbative QCD Theory (Includes Our Knowledge of α_s) // 29th Intern. Conf. on High-Energy Physics (ICHEP 98), Vancouver, British Columbia, Canada, July 23–29, 1998. V. 1. Singapore: World Scientific, 1999. P. 305–324.
53. *Gardi E., Grunberg G., Karliner M.* Can the QCD Running Coupling Have a Causal Analyticity Structure? // *JHEP.* 1998. V. 07. P. 007.

54. *Grunberg G.* Power Corrections and Landau Singularity. Preprint CPTH-S505-0597. 1997; hep-ph/9705290.
55. *Le Diberder F., Pich A.* Testing QCD with Tau Decays // *Phys. Lett. B.* 1992. V. 289. P. 165–175.
56. *Nesterenko A. V.* Analytic Invariant Charge in QCD // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2003. V. 18. P. 5475–5520.
57. *Pivovarov A. A.* Renormalization Group Analysis of the Tau-Lepton Decay within QCD // *Z. Phys. C.* 1992. V. 53. P. 461–464.
58. *Pivovarov A. A.* Spectrality, Coupling Constant Analyticity and the Renormalization Group // *Phys. At. Nucl.* 2003. V. 66. P. 724–736.
59. *Raczka P. A.* Improving Reliability of Perturbative QCD Predictions at Moderate Energies. Preprint IFT-16-2005. 2005; hep-ph/0602085.
60. *Catani S. et al.* The Resummation of Soft Gluon in Hadronic Collisions // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 478. P. 273–310.
61. *Nesterenko A. V., Papavassiliou J.* The Massive Analytic Invariant Charge in QCD // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 016009.
62. *Braaten E., Tse S.-M.* Perturbative QCD Correction to the Hard Scattering Amplitude for the Meson Form Factor // *Phys. Rev. D.* 1987. V. 35. P. 2255.
63. *Думтес Ф. М., Радюшкин А. В.* Радиационные поправки к пионному формфактору в КХД // *ЯФ.* 1981. Т. 34. С. 293.
64. *Melić B., Müller D., Passek-Kumerički K.* Next-to-Next-to-Leading Prediction for the Photon-to-Pion Transition Form Factor // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 014013.
65. *Melić B., Nižić B., Passek K.* Complete Next-to-Leading Order Perturbative QCD Prediction for the Pion Form Factor // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 074004.
66. *Melić B., Nižić B., Passek K.* The BLM Scale Setting for the Pion Transition Form Factor // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 053020.
67. *Müller D.* Scheme Dependence of NLO Corrections to Exclusive Processes // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 116003.
68. *Karanikas A. I., Stefanis N. G.* Analyticity and Power Corrections in Hard-Scattering Hadronic Functions // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 504. P. 225–234.
69. *Stefanis N. G.* Perturbative Logarithms and Power Corrections in QCD Hadronic Functions: A Unifying Approach // *Lect. Notes Phys.* 2003. V. 616. P. 153–166.
70. *Broadhurst D. J., Kataev A. L., Maxwell C. J.* Renormalons and Multiloop Estimates in Scalar Correlators, Higgs Decay and Quark-Mass Sum Rule // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 592. P. 247–293.
71. *Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A.* The Width of Higgs Boson Decay into Hadrons: Three-Loop Corrections of Strong Interactions // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1984. V. 40. P. 329–334.
72. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.* Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 37. С. 805.

73. *Oehme R.* On Superconvergence Relations in Quantum Chromodynamics // *Phys. Lett. B.* 1990. V. 252. P. 641–646.
74. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* QCD Analytic Perturbation Theory: From Integer Powers to Any Power of the Running Coupling // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 074014.
75. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* Fractional Analytic Perturbation Theory in Minkowski Space and Application to Higgs Boson Decay into a $b\bar{b}$ Pair // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 056005.
76. *Bakulev A. P.* Fractional APT in QCD in the Euclidean and Minkowski Regions // *Proc. of the Conf. New Trends in High-Energy Physics (Experiment, Phenomenology, Theory), Yalta, Crimea, Ukraine, Sept. 15–22, 2007. Kiev, 2007.* P. 238–245.
77. *Bakulev A. P., Karanikas A. I., Stefanis N. G.* Analyticity Properties of Three-Point Functions in QCD beyond Leading Order // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 074015.
78. *Bakulev A. P.* Pion Distribution Amplitude: From Theory to Data // *AIP Conf. Proc.* 2005. V. 756. P. 342–344.
79. *Bakulev A. P.* Pion Distribution Amplitude: From Theory to Data (CELLO, CLEO, E-791, JLab $F(\pi)$) // *Proc. of the 13th Intern. Seminar «Quarks'2004», Pushkinogorie, Russia, May 24–30, 2004. M., 2005.* V. 2. P. 536–550.
80. *Stefanis N. G. et al.* Pion Structure: From Nonlocal Condensates to NLO Analytic Perturbation Theory // *First Intern. Workshop «Hadron Structure and QCD (HSQCD 2004): From Low to High Energies», Repino, St. Petersburg, Russia, May 18–22, 2004. Gatchina; St. Petersburg, 2004.* P. 238–245.
81. *Stefanis N. G.* Pion Form Factor Analysis Using NLO Analytic Perturbation Theory // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2006. V. 152. P. 245–248.
82. *Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kühn J. H.* Scalar Correlator at $O(\alpha_s^4)$, Higgs Decay into b -Quarks and Bounds on the Light Quark Masses // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. P. 012003.
83. *Chetyrkin K. G.* Correlator of the Quark Scalar Currents and $\Gamma_{\text{tot}}(H \rightarrow \text{Hadrons})$ at $O(\alpha_s^3)$ in pQCD // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 390. P. 309–317.
84. *Chetyrkin K. G., Kniehl B. A., Sirlin A.* Estimations of Order α_s^3 and α_s^4 Corrections to Mass-Dependent Observables // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 402. P. 359–366.
85. *Mikhailov S. V.* Generalization of BLM Procedure and Its Scales in Any Order of pQCD: A Practical Approach // *JHEP.* 2007. V. 06. P. 009.
86. *Shirkov D. V.* Renormalization Group, Causality, and Nonpower Perturbation Expansion in QFT // *Theor. Math. Phys.* 1999. V. 119. P. 438–447.
87. *Adler S. L.* Some Simple Vacuum Polarization Phenomenology: $e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons}$, the μ -mesic Atom X-ray Discrepancy and $g_\mu - 2$ // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 10. P. 3714.
88. *Shirkov D. V.* The π^2 Terms in the s -channel QCD Observables. JINR Preprint E2-2000-211. Dubna, 2000; hep-ph/0009106.

89. *Shirkov D. V.* QCD Effective Couplings in Minkowskian and Euclidean Domains // AIP Conf. Proc. 2006. V. 806. P. 97–103; hep-ph/0510247.
90. *Shirkov D. V., Mikhailov S. V.* Mass Dependent Alpha- s Evolution and the Light Gluino Existence // Z. Phys. C. 1994. V. 63. P. 463–470.
91. *Batemann H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions (Batemann Manuscript Project). N. Y.: McGraw-Hill, 1953.
92. *Nesterenko V. A., Radyushkin A. V.* Sum Rules and Pion Form Factor in QCD // Phys. Lett. B. 1982. V. 115. P. 410–413.
93. *Ioffe B. L., Smilga A. V.* Pion Form Factor at Intermediate Momentum Transfer in QCD // Ibid. V. 114. P. 353–358.
94. *Черняк В. Л., Житницкий А. П.* Асимптотическое поведение формфакторов адронов в кварковой модели // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 510–513.
95. *Черняк В. Л., Житницкий А. П., Сербо В. Г.* Асимптотическое поведение формфакторов адронов в КХД // Там же. Т. 26. С. 594–597.
96. *Efremov A. V., Radyushkin A. V.* Asymptotical Behavior of Pion Electromagnetic Form Factor in QCD // Theor. Math. Phys. 1980. V. 42. P. 97–110.
97. *Efremov A. V., Radyushkin A. V.* Factorization and Asymptotic Behaviour of Pion Form Factor in QCD // Phys. Lett. B. 1980. V. 94. P. 245–250.
98. *Lepage G. P., Brodsky S. J.* Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form Factors of Mesons // Phys. Lett. B. 1979. V. 87. P. 359–365.
99. *Lepage G. P., Brodsky S. J.* Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2157.
100. *Radyushkin A. V.* Deep Elastic Processes of Composite Particles in Field Theory and Asymptotic Freedom. JINR Preprint P2-10717. Dubna, 1977; hep-ph/0410276.
101. *Radyushkin A. V.* Sum Rules and Exclusive Processes in QCD // Acta Phys. Polon. B. 1984. V. 15. P. 403–417.
102. *Radyushkin A. V.* Exclusive Processes in Perturbative QCD // Nucl. Phys. A. 1991. V. 527. P. 153C.
103. *Kadantseva E. P., Mikhailov S. V., Radyushkin A. V.* Total α_s Corrections to Processes $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$ and $\gamma^*\pi \rightarrow \pi$ in a Perturbative QCD // Sov. J. Nucl. Phys. 1986. V. 44. P. 326–335.
104. *Radyushkin A. V., Khalmuradov R. S.* One-Loop Corrections to Pion Form Factor in QCD in a Lightlike Gauge // Sov. J. Nucl. Phys. 1985. V. 42. P. 289–297.
105. *Brodsky S. J., Lepage G. P., Mackenzie P. B.* On the Elimination of Scale Ambiguities in Perturbative Quantum Chromodynamics // Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 228.
106. *Hagiwara K. et al.* Review of Particle Physics // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 010001.
107. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* QCD-Based Pion Distribution Amplitudes Confronting Experimental Data // Phys. Lett. B. 2001. V. 508. P. 279–289.

108. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* On a QCD Based Pion Distribution Amplitude versus Recent Experimental Data // Proc. of the 36th Rencontres De Moriond On QCD and Hadronic Interactions, Les Arcs, France, March 17–24, 2001. Singapore, 2002. P. 133–136.
109. *Brodsky S. J. et al.* Optimal Renormalization Scale and Scheme for Exclusive Processes // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 245.
110. *Grunberg G.* Renormalization Group Improved Perturbative QCD // Phys. Lett. B. 1980. V. 95. P. 70.
111. *Grunberg G.* Renormalization Scheme Independent QCD and QED: The Method of Effective Charges // Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 2315.
112. *Stevenson P.* Sense and Nonsense in the Renormalization Scheme Dependence Problem // Nucl. Phys. B. 1982. V. 203. P. 472.
113. *Stevenson P. M.* Optimized Perturbation Theory // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 2916.
114. *Stevenson P. M.* Resolution of the Renormalization Scheme Ambiguity in Perturbative QCD // Phys. Lett. B. 1981. V. 100. P. 61.
115. *Stevenson P. M.* Optimization and the Ultimate Convergence of QCD Perturbation Theory // Nucl. Phys. B. 1984. V. 231. P. 65.
116. *Chernyak V. L., Zhimitsky A. R.* Exclusive Decays of Heavy Mesons // Nucl. Phys. B. 1982. V. 201. P. 492.
117. *Aguilar A. C., Nesterenko A. V., Papavassiliou J.* Infrared Enhanced Analytic Coupling and Chiral Symmetry Breaking in QCD // J. Phys. G. 2005. V. 31. P. 997; hep-ph/0504195.
118. *Nesterenko A. V., Papavassiliou J.* A Novel Integral Representation for the Adler Function // J. Phys. G. 2006. V. 32. P. 1025–1034.
119. *Kataev A. L., Kim V. T.* The Effects of the QCD Corrections to $\Gamma(h^0 \rightarrow b\bar{b})$ // Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 1309–1326.
120. *Kataev A. L., Parente G., Sidorov A. V.* Fixation of Theoretical Ambiguities in the Improved Fits to the xF_3 CCFR Data at the Next-to-Next-to-Leading Order and Beyond // Part. Nucl. 2003. V. 34. P. 20–46.
121. *Lipatov L. N.* Divergence of the Perturbation Theory Series and the Quasiclassical Theory // Sov. Phys. JETP. 1977. V. 45. P. 216–223.
122. *Kazakov D. I., Shirkov D. V.* Asymptotic Series of Quantum Field Theory and Their Summation // Fortsch. Phys. 1980. V. 28. P. 465–499.
123. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
124. *Corless R. et al.* On the Lambert W Function // Adv. in Comp. Math. 1996. V. 5. P. 329.
125. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927.

126. *Chetyrkin K. G.* Quark Mass Anomalous Dimension to $O(\alpha_s^4)$ // Phys. Lett. B. 1997. V. 404. P. 161–165.
127. *Korner J. G., Krajewski F., Pivovarov A. A.* Determination of the Strange Quark Mass from Cabibbo Suppressed τ Decays with Resummed Perturbation Theory in an Effective Scheme // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 20. P. 259–269.
128. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V.* Resummation in (F)APT // Proc. of the Memorial Solovtsov Seminar «Analytic Perturbation Theory», Dubna, Jan. 17–18, 2008. Dubna, 2008. P. 119–133; arXiv:0803.3013.