

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ К ЗАДАЧАМ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В. В. Саргсян^{1,2,*}, *З. Каноков*^{1,3}, *Г. Г. Адамян*¹,
*Н. В. Антоненко*¹

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

² Ереванский государственный университет, Ереван

³ Национальный университет, Ташкент

ВВЕДЕНИЕ	298
ОБОБЩЕННЫЕ НЕМАРКОВСКИЕ КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА И ДИФФУЗИИ	299
ВЛИЯНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИВЕДЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ. ТУННЕЛИРОВАНИЕ С ДИССИПАЦИЕЙ В ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ	328
ПРОЦЕСС ЗАХВАТА НАЛЕТАЮЩЕГО ЯДРА ЯДРОМ-МИШЕНЬЮ	348
ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ КРАМЕРСА	363
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	380
Приложение	382
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	382

*E-mail: sargsyan@theor.jinr.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ К ЗАДАЧАМ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В. В. Саргсян^{1,2,*}, *З. Каноков*^{1,3}, *Г. Г. Адамян*¹,
*Н. В. Антоненко*¹

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

² Ереванский государственный университет, Ереван

³ Национальный университет, Ташкент

Из обобщенных немарковских уравнений Ланжевена выведены квантовые диффузионные уравнения с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени. Исследованы асимптотики коэффициентов трения и диффузии в случаях FC- и RWA-связей между коллективной и внутренней подсистемами. Получено асимптотическое выражение для пропагатора матрицы плотности открытой квантовой системы с общим квадратичным гамильтонианом, линейно связанным (по координате и импульсу) с внутренними степенями свободы. С использованием мастер-уравнения для приведенной матрицы плотности для открытых квантовых систем изучено влияние разных наборов транспортных коэффициентов на декогеренцию и скорость распада из метастабильного состояния. Разработанный подход использован для изучения процесса захвата налетающего ядра ядром-мишенью при энергиях бомбардировки около кулоновского барьера. С учетом расчетных вероятностей захвата получено достаточно хорошее описание сечений захвата в асимметричных реакциях. Найдены конкретные примеры, когда диссипация способствует проникновению через потенциальный барьер. Представлен аналитический вывод обобщенной формулы Крамерса для квазистационарной скорости распада квантовых метастабильных систем.

Quantum diffusion equations with transport coefficients, explicitly depending on time, are derived from the generalized non-Markovian Langevin equations. The asymptotic behavior of the friction and diffusion coefficients is studied in the cases of FC- and RWA-couplings between the collective and internal subsystems. The asymptotics of the propagator of the density matrix of open quantum system is obtained in the general case of quadratic Hamiltonian linearly coupled (in coordinate and momentum) with internal degrees of freedom. The influence of different sets of transport coefficients on decoherence and decay rate of the metastable state is studied by using the master equation for the reduced density matrix of open quantum systems. The developed approach is used to study the capture of the projectile by the target nucleus at energies near the Coulomb barrier. With

*E-mail: sargsyan@theor.jinr.ru

the calculated capture probabilities, a good agreement between the calculated capture cross sections and experimental data is obtained. Specific cases where the dissipation promotes penetration through the potential barrier are revealed. The analytical derivation of the generalized Kramers formula is presented for the quasi-stationary decay rate of quantum metastable systems.

PACS: 25.70.Jj; 24.10.-i; 24.60.-k

ВВЕДЕНИЕ

Развитию формализма для описания статистического и динамического поведения открытых систем посвящено большое количество работ [1–14], в том числе и выполненных в Дубне [15–20]. Данный формализм применяется в ядерной физике для описания реакций слияния, квазиделения, многонуклонных передач с тяжелыми ионами и деления ядер [21–25]. Интерес к стохастическим методам в ядерной физике чрезвычайно возрос после открытия реакций глубоконеупругих столкновений тяжелых ионов [25–28] и существенного увеличения экспериментальной информации по делению атомного ядра [29]. В таких процессах наиболее существенными считаются лишь некоторые коллективные (макроскопические) степени свободы, которые выбираются *a priori*, для интерпретации экспериментальных данных. Оценкой качества преобразования от исходных нуклонных переменных к коллективным может служить, кроме макроскопической аналогии, слабость связи коллективных степеней свободы с остальными (внутренними) степенями свободы. Лишь при этом условии имеет смысл выделение коллективного движения [30]. Наиболее часто используемыми коллективными координатами при описании деления и ядерных реакций с тяжелыми ионами при низких энергиях около кулоновского барьера (≤ 10 МэВ/нуклон) являются межъядерное расстояние или относительное удлинение системы, массовая (зарядовая) асимметрия и деформация ядер. Число явно учитываемых коллективных координат можно уменьшить за счет экспериментально установленного различия их характерных времен релаксации.

Вышеуказанные ядерные процессы описываются с помощью небольшого числа медленных коллективных степеней свободы, которые взаимодействуют с термостатом, образованным всеми остальными быстрыми одночастичными степенями свободы. Тогда динамика коллективных переменных становится похожей на динамику классической броуновской частицы, так как в одном акте взаимодействия с одночастичной подсистемой энергия коллективной подсистемы изменяется на относительно малое значение. Динамическими уравнениями в такой физической модели являются стохастические уравнения или физически эквивалентные им диффузионные уравнения для функции распределения коллективных координат и сопряженных им импульсов.

Квантовые диффузионные уравнения для редуцированной матрицы плотности или функции Вигнера могут быть использованы для изучения квантовых и диссипативных эффектов в процессах слияния, деления и захвата налетающего ядра ядром-мишенью. Среди квантовых транспортных уравнений можно особо отметить феноменологическое уравнение Линдблада [7–10], с помощью которого в работах [31–35] рассмотрен процесс прохождения потенциального барьера в зависимости от значений коэффициентов диффузии. Результаты показали, что вероятность туннелирования в открытых квантовых системах сильно зависит от величины связи с термостатом. Диссипация иногда способствует туннелированию, но препятствует прохождению при надбарьерных энергиях. С ростом значений коэффициента диффузии по координате проницаемость барьера увеличивается, а декогерентность состояний уменьшается.

1. ОБОБЩЕННЫЕ НЕМАРКОВСКИЕ КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА И ДИФФУЗИИ

Определим микроскопический гамильтониан H полной системы (внутренняя подсистема плюс коллективная подсистема), с помощью которого будем получать квантовые немарковские стохастические уравнения Ланжевена и зависящие от времени транспортные коэффициенты для коллективной подсистемы. Для ядерных систем в работах [36, 37] построен квантовый гамильтониан, зависящий явно от коллективной координаты q , канонически сопряженного коллективного импульса p и внутренних степеней свободы:

$$\begin{aligned} H &= H_c + H_b + H_{cb}, \\ H_c &= p \frac{1}{2\mu(q)} p + U(q), \\ H_b &= \sum_{\nu} \hbar\omega_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}, \\ H_{cb} &= \sum_{\nu} V_{\nu}(q)(b_{\nu}^{\dagger} + b_{\nu}) + i \sum_{\nu} G_{\nu}(q, p)(b_{\nu}^{\dagger} - b_{\nu}), \end{aligned} \tag{1}$$

где b_{ν}^{\dagger} и b_{ν} — фоновые операторы рождения и уничтожения соответственно, описывающие внутренние возбуждения системы с энергией $\hbar\omega_{\nu}$ (для простоты обозначений опущены знаки операторов); H_c и H_b — гамильтонианы коллективной и внутренней подсистем соответственно; H_{cb} описывает связь коллективного движения с внутренними возбуждениями и является источником появления диссипативных членов в уравнениях для операторов коллективных переменных. Например, при описании взаимодействия ядер при низких

значениях энергии первый член H_{cb} отвечает воздействию среднего поля каждого из ядер на одночастичное движение в другом ядре, а второй описывает связь тока внутреннего движения с коллективным током. При условии $G_\nu(q, p) = \{\tilde{G}_\nu(q), p\}_+ = \tilde{G}_\nu(q)p + p\tilde{G}_\nu(q)$ гамильтониан H является обратимым по времени. Наша цель — вывести и аналитически решить уравнения Ланжевена для операторов p и q .

Используя гамильтониан (1), получаем систему квантовых гейзенберговских уравнений для операторов, относящихся к коллективному и внутреннему движениям:

$$\dot{q} = \frac{i}{\hbar}[H, q] = \frac{1}{2}\{\mu^{-1}(q), p\}_+ + i \sum_\nu G'_{\nu,p}(b_\nu^+ - b_\nu), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{i}{\hbar}[H, p] = -H'_{c,q}(q, p) - \sum_\nu V'_{\nu,q}(b_\nu^+ + b_\nu) - i \sum_\nu G'_{\nu,q}(b_\nu^+ - b_\nu), \\ \dot{b}_\nu^+ &= \frac{i}{\hbar}[H, b_\nu^+] = i\omega_\nu b_\nu^+ + \frac{1}{\hbar}(iV_\nu(q) + G_\nu(q, p)), \\ \dot{b}_\nu &= \frac{i}{\hbar}[H, b_\nu] = -i\omega_\nu b_\nu + \frac{1}{\hbar}(-iV_\nu(q) + G_\nu(q, p)), \end{aligned} \quad (3)$$

где использованы следующие обозначения: $H'_{c,q}(q, p) \equiv \frac{\partial H_c(q, p)}{\partial q}$, $V'_{\nu,q} \equiv \frac{\partial V_\nu(q(t))}{\partial q}$, $G'_{\nu,p} \equiv \frac{\partial G_\nu(q(t), p(t))}{\partial p}$ и $G'_{\nu,q} \equiv \frac{\partial G_\nu(q(t), p(t))}{\partial q}$.

Подставляя решения (3)

$$\begin{aligned} b_\nu^+(t) + b_\nu(t) &= f_\nu^+(t) + f_\nu(t) - \frac{2V_\nu(q)}{\hbar\omega_\nu} - \\ &\quad - \frac{i}{\omega_\nu} \int_0^t d\tau [\dot{\Phi}^+(\tau) e^{i\omega_\nu(t-\tau)} - \dot{\Phi}(\tau) e^{-i\omega_\nu(t-\tau)}], \\ b_\nu^+(t) - b_\nu(t) &= f_\nu^+(t) - f_\nu(t) + \frac{2iG_\nu(q, p)}{\hbar\omega_\nu} - \\ &\quad - \frac{i}{\omega_\nu} \int_0^t d\tau [\dot{\Phi}^+(\tau) e^{i\omega_\nu(t-\tau)} + \dot{\Phi}(\tau) e^{-i\omega_\nu(t-\tau)}], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} f_\nu(t) &= \left[b_\nu(0) + \frac{i}{\omega_\nu} \Phi(0) \right] e^{-i\omega_\nu t}, \\ \Phi(t) &= \frac{1}{\hbar} [-iV_\nu(q(t)) + G_\nu(q(t), p(t))], \end{aligned}$$

в уравнения (2), получаем систему нелинейных интегродифференциальных стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} \{ \tilde{\mu}^{-1}(q), p \}_+ - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{GV}(t, \tau), \dot{q}(\tau) \}_+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{GG}(t, \tau), \dot{p}(\tau) \}_+ + F_q(t), \\ \dot{p} &= -\tilde{H}'_{c,q}(q, p) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{VV}(t, \tau), \dot{q}(\tau) \}_+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{VG}(t, \tau), \dot{p}(\tau) \}_+ + F_p(t). \end{aligned} \quad (5)$$

При получении системы уравнений (5) мы пренебрегли членами второго порядка по \hbar : $[[G'_{\nu,p}(t), \dot{q}(t')], V'_{\nu,q}(t')]$, $[[G'_{\nu,q}(t), \dot{q}(t')], V'_{\nu,q}(t')]$, $[[G'_{\nu,q}(t), \dot{q}(t')], G'_{\nu,q}(t')]$, $[[G'_{\nu,p}(t), \dot{q}(t')], G'_{\nu,q}(t')]$, $[[G'_{\nu,p}(t), \dot{p}(t')], G'_{\nu,p}(t')]$ и $[[G'_{\nu,q}(t), \dot{p}(t')], G'_{\nu,p}(t')]$. В случае линейной связи по координате и импульсу (V_ν и G_ν — линейные функции q и p соответственно) уравнения движения (5) являются точными.

В уравнениях (5) коллективный гамильтониан

$$\tilde{H}_c(q, p) = p \frac{1}{2\tilde{\mu}(q)} p + \tilde{U}(q)$$

содержит перенормированную массу

$$\tilde{\mu}^{-1}(q(t)) = \mu^{-1}(q(t)) - 2 \sum_\nu \frac{[G'_{\nu,p}(t)]^2}{\hbar\omega_\nu}$$

и потенциальную энергию

$$\tilde{U}(q(t)) = U(q(t)) - \sum_\nu \frac{[V_\nu(q(t))]^2}{\hbar\omega_\nu}.$$

В уравнениях движения (5) диссипативные ядра K_{GV} , K_{VG} , K_{VV} и K_{GG} выделены в членах, пропорциональных \dot{q} и \dot{p} [38–40]. Эти ядра зависят от коэффициентов в H_{cb} . Поскольку диссипативные ядра не зависят от числа фононов, они также не зависят от температуры T термостата. Температура и флуктуации входят в рассмотрение динамики q и p через распределение

начальных условий для внутренней системы. Явные выражения для диссипативных ядер K_{GV} , K_{VG} , K_{VV} , K_{GG} и для операторов $F_q(t) = \sum_{\nu} F_q^{\nu}(t)$ и $F_p(t) = \sum_{\nu} F_p^{\nu}(t)$ в (5), которые играют роль случайной силы по q и p , получены в [16] и приведены в приложении.

Обычно в статистической физике операторы $F_q^{\nu}(t)$ и $F_p^{\nu}(t)$ отождествляются с флуктуациями из-за неопределенности начальных условий для операторов термостата. Для определения статистических свойств этих флуктуаций рассмотрим ансамбль начальных состояний, в котором заданы $q(0)$ и $p(0)$, а начальные операторы термостата выбираются из канонического ансамбля [38–40]. В этом ансамбле флуктуации $F_q^{\nu}(t)$ и $F_p^{\nu}(t)$ распределены по Гауссу и имеют нулевые средние значения

$$\langle\langle F_q^{\nu}(t) \rangle\rangle = \langle\langle F_p^{\nu}(t) \rangle\rangle = 0 \quad (6)$$

и ненулевые вторые моменты. Символ $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ обозначает среднее по переменным термостата. Гауссово распределение случайных сил соответствует случаю, когда термостат представляется набором гармонических осцилляторов [3, 5, 14]. Для расчета корреляционных функций флуктуаций будем использовать термостат со статистикой Бозе–Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \langle\langle f_{\nu}^{+}(t) f_{\nu'}^{+}(t') \rangle\rangle &= \langle\langle f_{\nu}(t) f_{\nu'}(t') \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle f_{\nu}^{+}(t) f_{\nu'}(t') \rangle\rangle &= \delta_{\nu, \nu'} n_{\nu} e^{i\omega_{\nu}(t-t')}, \\ \langle\langle f_{\nu}(t) f_{\nu'}^{+}(t') \rangle\rangle &= \delta_{\nu, \nu'} (n_{\nu} + 1) e^{-i\omega_{\nu}(t-t')}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $n_{\nu} = [\exp(\hbar\omega_{\nu}/T) - 1]^{-1}$ — температурные числа заполнения для фононов.

Таким образом, получена система обобщенных нелинейных уравнений Ланжевена (5). Присутствие интегральных членов в уравнениях движения означает, что немарковская система обладает памятью о движении по траектории, предшествующей моменту времени t . Второе из уравнений (5) содержит также случайную силу, что приводит к ряду математических трудностей при решении [3]. Аналитическое решение возможно, если заменить функционалы $\tilde{\mu}$, $V'_{\nu, q}$, $G'_{\nu, q}$ и $G'_{\nu, p}$ в уравнениях (5) средними значениями, считая их слабоменяющимися за интервал времени t , и аппроксимировать перенормированный потенциал гармоническим (или перевернутым) осциллятором $\tilde{U} = \tilde{\delta}q^2/2$. В этом случае получаем систему обобщенных уравнений Ланжевена с диссипативными ядрами, обладающими памятью. Для ее решения применим преобразование Лапласа \mathcal{L} , чтобы получить линейные уравнения для образов. Зная выражения для образов, получаем явные выражения для

оригиналов:

$$\begin{aligned} q(t) &= A_t q(0) + B_t p(0) + \int_0^t d\tau [C_\tau F_q(t - \tau) + \tilde{C}_\tau F_p(t - \tau)], \\ p(t) &= M_t q(0) + N_t p(0) + \int_0^t d\tau [L_\tau F_p(t - \tau) + \tilde{L}_\tau F_q(t - \tau)], \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned} A_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 + K_{GV}(s))(1 - K_{VG}(s)) + (1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s))K_{VV}(s)}{d(s)} \right], \\ N_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 - K_{VG}(s))(1 + K_{GV}(s)) + (\tilde{\delta} + sK_{VV}(s))K_{GG}(s)}{d(s)} \right], \\ B_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{\mu}^{-1}(1 - K_{VG}(s))}{d(s)} \right], \quad M_t = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{\delta}(1 + K_{GV}(s))}{d(s)} \right], \\ C_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 - K_{VG}(s))}{d(s)} \right], \quad L_t = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 + K_{GV}(s))}{d(s)} \right], \\ \tilde{C}_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s)}{d(s)} \right], \quad \tilde{L}_t = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{\delta} + sK_{VV}(s)}{d(s)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь \mathcal{L}^{-1} обозначает обратное преобразование Лапласа; $K_{VV}(s)$, $K_{GG}(s)$, $K_{GV}(s)$, $K_{VG}(s)$ — изображения Лапласа диссипативных ядер; t и τ указывают на временную зависимость. Используя теорему о вычетах для нахождения перечисленных выше оригиналов, решения $q(t)$ и $p(t)$ могут быть выражены через корни s_i уравнения

$$d(s) \equiv s^2(1 + K_{GV}(s))(1 - K_{VG}(s)) + (\tilde{\delta} + sK_{VV}(s))(1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s)) = 0. \quad (9)$$

1.1. Флуктуационно-диссипационные соотношения. В работе [16] для (5) получены флуктуационно-диссипационные соотношения, которые связывают макроскопическую величину, описывающую диссипацию, с микроскопической характеристикой внутренней подсистемы, выражающей флуктуации случайных сил. Выполнение этих соотношений означает, что мы правильно определили диссипативные ядра в немарковских динамических уравнениях движения. Квантовое флуктуационно-диссипационное соотношение подобной формы было получено в [38] и упомянутых в ней работах для простых случаев FC- и RWA-осцилляторов. В данной работе квантовая флуктуационно-диссипационная теорема обобщена на случай произвольной формы H_{cb} . Квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения отличаются от классических и сводятся к ним в пределе большой температуры T (или $\hbar \rightarrow 0$).

Кроме температурных флуктуаций в них дополнительно учитываются еще и квантовые флуктуации. Поскольку уравнения движения (5) для коллективных координат и импульсов соответствуют флуктуационно-диссипационным соотношениям, то рассматриваемый формализм обеспечивает основу для описания квантовых статистических эффектов коллективного движения.

1.2. Транспортные коэффициенты. Используя явные зависимости p и q от времени, получаем их основные характеристики, т.е. средние значения $\langle q(t) \rangle$ и $\langle p(t) \rangle$ (первые моменты)

$$\begin{aligned}\langle q(t) \rangle &= A_t \langle q(0) \rangle + B_t \langle p(0) \rangle, \\ \langle p(t) \rangle &= M_t \langle q(0) \rangle + N_t \langle p(0) \rangle\end{aligned}\quad (10)$$

и корреляционные функции $\sigma_{q_t q_{t'}} = \langle q(t)q(t') \rangle$, $\sigma_{p_t p_{t'}} = \langle p(t)p(t') \rangle$, $\sigma_{q_t p_{t'}} = \langle q(t)p(t') \rangle$, $\sigma_{p_t q_{t'}} = \langle p(t)q(t') \rangle$:

$$\begin{aligned}\sigma_{q_t q_{t'}} &= A_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + A_t B_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + B_t A_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{q_t q_{t'}}, \\ \sigma_{p_t p_{t'}} &= M_t M_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + N_t N_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + M_t N_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + N_t M_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{p_t p_{t'}}, \\ \sigma_{q_t p_{t'}} &= A_t M_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t N_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + A_t N_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + B_t M_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{q_t p_{t'}}, \\ \sigma_{p_t q_{t'}} &= M_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + N_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + N_t A_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + M_t B_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{p_t q_{t'}}\end{aligned}\quad (11)$$

где выражения для $J_{q_t q_{t'}}$, $J_{p_t p_{t'}}$, $J_{q_t p_{t'}}$ и $J_{p_t q_{t'}}$ приведены в [16].

Чтобы определить коэффициенты трения и диффузии, рассмотрим уравнения для средних и дисперсий по координате $\sigma_{qq}(t) = \langle q^2(t) \rangle - \langle q(t) \rangle^2 = \sigma_{q_t q_t} - \langle q(t) \rangle^2$, по импульсу $\sigma_{pp}(t) = \langle p^2(t) \rangle - \langle p(t) \rangle^2 = \sigma_{p_t p_t} - \langle p(t) \rangle^2$ и координате-импульсу $\sigma_{pq}(t) = (1/2)\langle p(t)q(t) + q(t)p(t) \rangle - \langle p(t) \rangle \langle q(t) \rangle = (1/2)(\sigma_{q_t p_t} + \sigma_{p_t q_t}) - \langle p(t) \rangle \langle q(t) \rangle$. Дифференцируя по времени уравнения (10) и (11) при $t = t'$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle q(t) \rangle &= -\lambda_q(t) \langle q(t) \rangle + \frac{1}{m(t)} \langle p(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p(t) \rangle &= -\xi(t) \langle q(t) \rangle - \lambda_p(t) \langle p(t) \rangle\end{aligned}\quad (12)$$

и

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{qq}(t) &= -2\lambda_q(t)\sigma_{qq}(t) + \frac{2}{m(t)}\sigma_{pq}(t) + 2D_{qq}(t), \\ \dot{\sigma}_{pp}(t) &= -2\lambda_p(t)\sigma_{pp}(t) - 2\xi(t)\sigma_{pq}(t) + 2D_{pp}(t), \\ \dot{\sigma}_{pq}(t) &= -[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma_{pq}(t) - \xi(t)\sigma_{qq}(t) + \frac{1}{m(t)}\sigma_{pp}(t) + 2D_{pq}(t).\end{aligned}\quad (13)$$

Эти уравнения содержат коэффициенты трения по координате

$$\lambda_q(t) = \frac{\dot{A}_t N_t - \dot{B}_t M_t}{B_t M_t - A_t N_t}\quad (14)$$

и импульсу

$$\lambda_p(t) = \frac{A_t \dot{N}_t - B_t \dot{M}_t}{B_t M_t - A_t N_t}, \quad (15)$$

перенормированную обратную массу

$$1/m(t) = \frac{\dot{A}_t B_t - \dot{B}_t A_t}{B_t M_t - A_t N_t}, \quad (16)$$

перенормированный коэффициент жесткости

$$\xi(t) = \frac{\dot{M}_t N_t - \dot{N}_t M_t}{B_t M_t - A_t N_t} \quad (17)$$

и коэффициенты диффузии по координате

$$D_{qq}(t) = \lambda_q(t) J_{q_t q_t} - \frac{1}{2m(t)} (J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \frac{1}{2} \dot{J}_{q_t q_t}, \quad (18)$$

импульсу

$$D_{pp}(t) = \lambda_p(t) J_{p_t p_t} + \frac{\xi(t)}{2} (J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \frac{1}{2} \dot{J}_{p_t p_t} \quad (19)$$

и координате-импульсу

$$D_{pq}(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_p(t) + \lambda_q(t)}{2} (J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \xi(t) J_{q_t q_t} - \frac{1}{m(t)} J_{p_t p_t} + \frac{1}{2} (\dot{J}_{q_t p_t} + \dot{J}_{p_t q_t}) \right]. \quad (20)$$

Таким образом, мы получили уравнения на первые и вторые моменты с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени, коллективной координаты и импульса. Именно временная зависимость этих коэффициентов является следствием немарковости в системе.

1.3. Связь с диффузионными уравнениями. Уравнения (10) и (13) для средних значений и дисперсий коллективной координаты и импульса могут быть получены из мастер-уравнения для матрицы плотности $\rho(t)$ коллективной подсистемы

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_c, \rho] + \frac{i\lambda_q(t)}{2\hbar} [p, \{q, \rho\}_+] - \frac{i\lambda_p(t)}{2\hbar} [q, \{p, \rho\}_+] - \frac{D_{qq}(t)}{\hbar^2} [p, [p, \rho]] - \\ & - \frac{D_{pp}(t)}{\hbar^2} [q, [q, \rho]] + \frac{D_{pq}(t)}{\hbar^2} ([p, [q, \rho]] + [q, [p, \rho]]) \end{aligned} \quad (21)$$

или из уравнения типа Фоккера–Планка для соответствующей функции Вигнера $W(q, p, t)$

$$\begin{aligned} \dot{W} = & -\frac{p}{m(t)} \frac{\partial W}{\partial q} + \xi(t)q \frac{\partial W}{\partial p} + \lambda_p(t) \frac{\partial(pW)}{\partial p} + \lambda_q(t) \frac{\partial(qW)}{\partial q} + \\ & + D_{qq}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + D_{pp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + 2D_{pq}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial p}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь для случая связи общего вида мы предположили, что трение и диффузия зависят от t , но не от p и q . В случае линейной связи этого предположения не требуется, поскольку зависимость лишь от t получается явно. Несмотря на немарковскую природу уравнений (5), эволюции ρ и W описываются дифференциальными уравнениями, локальными по времени. Эффекты памяти приводят к зависимости транспортных коэффициентов от времени. В общем случае мы имеем коэффициенты трения и диффузии по координате и импульсу, что является следствием присутствия случайных сил по q и p . Заметим, что уравнения (21) и (22) имеют ту же структуру, что и соответствующие феноменологические уравнения Линдблада с постоянными транспортными коэффициентами [6–9, 31, 32].

1.4. Линейная связь по координате (ФС-связь). Предполагая, что связь коллективной подсистемы $\left(H_c = \frac{p^2}{2\mu} \pm \frac{\mu\omega^2 q^2}{2}\right)$ с термостатом, состоящим из гармонических осцилляторов, осуществляется через коллективную координату q и внутренние координаты q_ν , гамильтониан взаимодействия коллективной и внутренней подсистем можно записать в виде (ФС-связь)

$$H_{cb} = \frac{\kappa}{\hbar} \lambda^{1/2} q \sum_{\nu} \Gamma_{\nu} (b_{\nu}^{+} + b_{\nu}) + \frac{\kappa^2}{\hbar^2} \lambda q^2 \sum_{\nu} \frac{\Gamma_{\nu}^2}{\hbar \omega_{\nu}}, \quad (23)$$

где Γ_{ν} — константы связи коллективной подсистемы с внутренними координатами q_{ν} ; λ — параметр, который определяет среднюю силу взаимодействия с термостатом, а $\kappa = (2\mu\omega/\hbar)^{1/2}$. Дополнительный член в H_{cb} компенсирует перенормировку потенциала, возникающую из-за связи коллективной и внутренней подсистем [2, 40–42]. Ясно, что квадратичный гамильтониан допускает точное решение уравнений движения для коллективных координат.

С данным типом связи между коллективной и внутренней подсистемами, используя (2), (3) и (23), получаем систему уравнений Гейзенберга для операторов, относящихся к коллективному и внутреннему движениям, в виде

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{i}{\hbar} [H, q] = \frac{1}{\mu} p, \\ \dot{p} &= \frac{i}{\hbar} [H, p] = \mp \mu \omega^2 q - \frac{\kappa}{\hbar} \lambda^{1/2} \sum_{\nu} \Gamma_{\nu} (b_{\nu}^{+} + b_{\nu}) \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned}\dot{b}_\nu^+ &= \frac{i}{\hbar}[H, b_\nu^+] = i\omega_\nu b_\nu^+ + i\frac{\kappa}{\hbar^2}\lambda^{1/2}q\Gamma_\nu, \\ \dot{b}_\nu &= \frac{i}{\hbar}[H, b_\nu] = -i\omega_\nu b_\nu - i\frac{\kappa}{\hbar^2}\lambda^{1/2}q\Gamma_\nu,\end{aligned}\quad (25)$$

где $\tilde{\delta} = \pm\mu\omega^2$ — коэффициент жесткости потенциала коллективной подсистемы. Знак «+» соответствует случаю, когда коллективная система является гармоническим осциллятором, а знак «-» — перевернутому осциллятору. При $t > 0$ степени свободы термостата эволюционируют согласно уравнениям (25), термостат отклоняется от начального состояния теплового равновесия при $t = 0$. Когда влияние коллективной подсистемы на термостат игнорируется, диссипативное ядро равно нулю и термостат всегда находится в состоянии теплового равновесия.

Подставляя решения (25) в уравнения (24), получаем систему интегро-дифференциальных стохастических уравнений [39, 40]:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{\mu}, \\ \dot{p}(t) &= -\tilde{\delta}q(t) - \kappa^2 \int_0^t d\tau K(t - \tau)\dot{q}(\tau) + \kappa F(t).\end{aligned}\quad (26)$$

Как видно из уравнения для $p(t)$, наличие связи по координате приводит к появлению случайной силы по импульсу

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{F_p(t)}{\kappa} = \sum_\nu F^\nu(t) = -\frac{\lambda^{1/2}}{\hbar} \sum_\nu \Gamma_\nu [f_\nu^+(t) + f_\nu(t)], \\ f_\nu^+(t) &= [b_\nu^+(0) + \frac{1}{\hbar^2\omega_\nu}\kappa\lambda^{1/2}\Gamma_\nu q(0)] e^{i\omega_\nu t}\end{aligned}\quad (27)$$

и диссипативного ядра

$$K(t - \tau) = \frac{2\lambda}{\hbar^2} \sum_\nu \frac{\Gamma_\nu^2}{\hbar\omega_\nu} \cos(\omega_\nu[t - \tau]).\quad (28)$$

Используя соотношения (6), (7) и температурные числа заполнения n_ν для симметризованной корреляционной функции случайной силы, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\phi^\nu(t - t') &= \langle (F^\nu(t)F^\nu(t') + F^\nu(t')F^\nu(t)) \rangle = [2n_\nu + 1] \frac{2\lambda}{\hbar^2} \frac{\Gamma_\nu}{\hbar\omega_\nu} \cos(\omega_\nu[t - t']), \\ \sum_\nu \phi^\nu(t - t') &= \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K(t - t').\end{aligned}\quad (29)$$

В данном случае связи между коллективной и внутренней подсистемами корреляционная функция случайной силы и диссипативное ядро не зависят от динамических координат и импульсов полной системы. По этой причине флуктуационно-диссипационное соотношение (29) не зависит от динамических чисел заполнения для фононов. Числа заполнения в квантовом флуктуационно-диссипационном соотношении относятся к начальному моменту времени, когда термостат находится в состоянии теплового равновесия. Как и в общем случае, уравнения движения для коллективных координат удовлетворяют квантовому флуктуационно-диссипационному соотношению, которое отличается от классического и сводится к нему в пределе большой температуры T или $\hbar \rightarrow 0$.

В случае общей связи по импульсу и координате были получены уравнения (12) и (13) для средних значений и дисперсий коллективной координаты и сопряженного ей импульса. В случае отсутствия связи по импульсу между коллективной и внутренней подсистемами уравнения на первые и вторые моменты упрощаются. Эти уравнения не содержат коэффициентов трения и диффузии по координате [$\lambda_q(t) = D_{qq}(t) = 0$]. Аналогично выражениям (19) и (20) получены выражения для коэффициентов диффузии по импульсу

$$D_{pp}(t) = \lambda_p(t) J_{p_t p_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} J_{p_t p_t} + \mu \xi(t) \frac{d}{dt} J_{q_t q_t} \right) \quad (30)$$

и координате-импульсу

$$D_{pq}(t) = \frac{1}{2} \left[\xi(t) J_{q_t q_t} - \frac{1}{\mu} J_{p_t p_t} + \frac{\mu}{2} \left(\lambda_p(t) \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \right) J_{q_t q_t} \right], \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} J_{q_t q_t} &= \frac{2\omega\mu\lambda\hbar\gamma^2}{\pi} \int d\omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \times \\ &\quad \times \operatorname{cth} \left[\frac{\hbar\omega_0}{2T} \right] \int_0^t d\tau' B_{\tau'} \int_0^t d\tau'' B_{\tau''} \cos[\omega_0(\tau' - \tau'')], \\ J_{p_t p_t} &= \frac{2\omega\mu\lambda\hbar\gamma^2}{\pi} \int d\omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \times \\ &\quad \times \operatorname{cth} \left[\frac{\hbar\omega_0}{2T} \right] \int_0^t d\tau' N_{\tau'} \int_0^t d\tau'' N_{\tau''} \cos[\omega_0(\tau' - \tau'')], \\ J_{q_t p_t} &= \frac{2\omega\mu\lambda\hbar\gamma^2}{\pi} \int d\omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \times \\ &\quad \times \operatorname{cth} \left[\frac{\hbar\omega_0}{2T} \right] \int_0^t d\tau' N_{\tau'} \int_0^t d\tau'' B_{\tau''} \cos[\omega_0(\tau' - \tau'')], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_t &= -\mu\tilde{\delta}B_t, \quad N_t = \mu B'_t, \quad \tilde{C}_t = B_t, \quad C_t = \tilde{L}_t = 0, \\
 B_t &= \sum_{i=1}^3 B_t^i = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^3 \beta_i (s_i + \gamma) e^{s_i t}, \\
 A_t &= \sum_{i=1}^3 \beta_i [s_i (s_i + \gamma) + 2\omega\lambda\gamma] e^{s_i t}
 \end{aligned} \tag{32}$$

и

$$d(s) \equiv \frac{(s + \gamma)(s^2 + \tilde{\delta}/\mu) - 2\omega\lambda\gamma s}{s + \gamma} = 0. \tag{33}$$

Здесь $\beta_1 = 1/[(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)]$, $\beta_2 = 1/[(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)]$ и $\beta_3 = 1/[(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)]$, где s_i ($i = 1, 2, 3$) — корни уравнения (33). Для определения явного вида выражений (32) и диссипативного ядра $K(t) = \frac{\lambda\gamma}{\hbar} e^{-\gamma|t|}$ $\left[K(s) = \frac{\lambda\gamma}{\hbar(s + \gamma)} \right]$ суммы $\sum_{\nu} \dots$ заменены интегралами $\int_0^{\infty} d\omega_0 \rho(\omega_0) \dots$ по частоте с плотностью состояний $\rho(\omega_0)$ термостата [38–42], где $\frac{\rho(\omega_0)|\Gamma(\omega_0)|^2}{\hbar^2\omega_0} = \frac{\gamma^2}{\pi(\gamma^2 + \omega_0^2)}$. За появление в стохастических уравнениях коэффициентов трения $\lambda_p(t)$ (см. (15)) и диффузии $D_{pp}(t)$, $D_{pq}(t)$ ответственна линейная связь по координате q . Для перенормированного коэффициента жесткости $\xi(t)$ (см. (17)) в марковском пределе получаем $\xi(t) = \tilde{\delta}$.

Поскольку коэффициенты трения и диффузии рассчитаны самосогласованным образом, то такой набор коэффициентов обеспечивает положительность матрицы плотности в любой момент времени, даже при $D_{qq}(t) = 0$. Это условие выполняется, несмотря на нарушения ограничения

$$D_{pp}D_{qq} - D_{qp}^2 \geq \frac{\hbar^2(\lambda_p + \lambda_q)^2}{16} \tag{34}$$

для не зависящих от времени коэффициентов диффузии и трения [6–10], и является необходимым для выполнения соотношения неопределенности

$$\sigma = \sigma_{pp}\sigma_{qq} - \sigma_{pq}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

в уравнении Линдблада для матрицы плотности. Если связь H_{cb} со средней пропорциональна и p , и q , тогда все коэффициенты диффузии и трения (21) не нулевые [16] и удовлетворяют условию (34).

Для асимптотических значений коэффициентов трения, жесткости и диффузии получаем выражения

$$\lambda_p(\infty) = -(s_2 + s_1), \quad (35)$$

$$\xi(\infty) = \tilde{\delta} \frac{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma) - 2\lambda\gamma\omega}, \quad (36)$$

$$D_{pp}(\infty) = \lambda_p(\infty)J_{p_\infty p_\infty} + \xi(\infty)J_{q_\infty p_\infty}, \quad (37)$$

$$D_{pq}(\infty) = \frac{1}{2} \left[\lambda_p(\infty)J_{q_\infty p_\infty} + \xi(\infty)J_{q_\infty q_\infty} - \frac{1}{\mu}J_{p_\infty p_\infty} \right], \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} J_{q_\infty q_\infty} &= \frac{2\hbar\omega\lambda\gamma^2}{\pi\mu} \sum_{i,j} \beta_i\beta_j(s_i + \gamma)(s_j + \gamma)\phi^a(s_i, s_j), \\ J_{p_\infty p_\infty} &= \frac{2\hbar\omega\mu\lambda\gamma^2}{\pi} \sum_{i,j} \beta_i\beta_j s_i s_j (s_i + \gamma)(s_j + \gamma)\phi^a(s_i, s_j), \\ J_{q_\infty p_\infty} &= \frac{\hbar\omega\lambda\gamma^2}{\pi} \sum_{i,j} \beta_i\beta_j(s_i + s_j)(s_i + \gamma)(s_j + \gamma)\phi^a(s_i, s_j), \\ \phi^a(s_i, s_j) &= \frac{s_j\psi(-\hbar s_j/(2\pi T))}{(s_i + s_j)(s_j^2 - \gamma^2)} + \frac{s_i\psi(-\hbar s_i/(2\pi T))}{(s_i + s_j)(s_i^2 - \gamma^2)} + \\ &\quad + \frac{(\gamma^2 - s_i s_j)\psi(\hbar\gamma/(2\pi T))}{(\gamma^2 - s_i^2)(\gamma^2 - s_j^2)} - \frac{\pi T(s_i + s_j - 2\gamma)}{\hbar\gamma(s_i + s_j)(\gamma - s_i)(\gamma - s_j)}. \end{aligned} \quad (39)$$

В (35)–(39) s_1 и s_2 — сопряженные корни уравнения (33). В случае трех действительных корней берутся два корня, для которых сумма $(s_i + s_j)$ максимальна. В выражениях (39) $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ является логарифмической производной гамма-функции. В случае гармонического осциллятора выражения для $J_{i_\infty j_\infty}$ можно упростить:

$$\begin{aligned} J_{q_\infty q_\infty} &= \frac{2\hbar\omega\lambda\gamma^2}{\pi\mu} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 \operatorname{cth}[\hbar\omega_0/(2T)]}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)}, \\ J_{p_\infty p_\infty} &= \frac{2\hbar\omega\mu\lambda\gamma^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0^3 \operatorname{cth}[\hbar\omega_0/(2T)]}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)}, \\ J_{q_\infty p_\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Используя в (26) приближение

$$\kappa^2 \int_0^t d\tau K(t - \tau) \dot{q}(\tau) \approx \lambda_p p(t),$$

получаем систему дифференциальных стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{\mu}, \\ \dot{p}(t) &= -\tilde{\delta}q(t) - \lambda_p p(t) + F_p(t). \end{aligned} \quad (41)$$

Исходя из уравнений (41), можно получить приближенные уравнения на вторые моменты с коэффициентами диффузии

$$\begin{aligned} D_{pp}(t) &= \frac{1}{2} \langle p(t)F_p(t) + F_p(t)p(t) \rangle, \\ D_{pq}(t) &= \frac{1}{4} \langle q(t)F_p(t) + F_p(t)q(t) \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

Подставив решения уравнений (41) в (42), получаем в пределе $t \rightarrow \infty$ приближенные асимптотические коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned} D_{pp}(\infty) &= -\frac{\mu T \gamma^2 \lambda_p}{\pm \omega^2 + \gamma(\gamma + \lambda_p)} + \frac{\mu \gamma^4 \lambda_p^2 \psi\left(\frac{\gamma}{2\pi T}\right)}{\pi[(\pm \omega^2 + \gamma^2)^2 - \gamma^2 \lambda_p^2]} - \\ &\quad - \frac{2\mu \omega^4 \gamma^2 \lambda_p \psi\left(\frac{s_2}{4\pi T}\right)}{\pi[\omega^4(s_1 - s_2) - \gamma^2 \lambda_p^2 s_1 \pm 2\omega^2 \gamma^2(\lambda + s_1)]} - \\ &\quad - \frac{2\mu \omega^4 \gamma^2 \lambda_p \psi\left(\frac{s_1}{4\pi T}\right)}{\pi[\omega^4(s_2 - s_1) - \gamma^2 \lambda_p^2 s_2 \pm 2\omega^2 \gamma^2(\lambda + s_2)]}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} D_{pq}(\infty) &= -\frac{T \gamma \lambda_p}{2[\pm \omega^2 + \gamma(\gamma + \lambda_p)]} - \frac{\gamma^2(\pm \omega^2 + \gamma^2) \lambda_p \psi\left(\frac{\gamma}{2\pi T}\right)}{2\pi[(\pm \omega^2 + \gamma^2)^2 - \gamma^2 \lambda_p^2]} + \\ &\quad + \frac{\pm \omega^2 \gamma^2 \lambda_p \psi\left(\frac{s_2}{4\pi T}\right)}{\pi[4\omega^4 - \gamma^2 \lambda_p s_1 \pm \omega^2(4\gamma^2 - \lambda_p s_2)]} + \\ &\quad + \frac{\pm \omega^2 \gamma^2 \lambda_p \psi\left(\frac{s_1}{4\pi T}\right)}{\pi[4\omega^4 - \gamma^2 \lambda_p s_2 \pm \omega^2(4\gamma^2 - \lambda_p s_1)]}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $s_1 = \lambda_p + \sqrt{\mp 4\omega^2 + \lambda_p^2}$ и $s_2 = \lambda_p - \sqrt{\mp 4\omega^2 + \lambda_p^2}$. В выражениях (43) и (44) верхний (нижний) знак «+» или «-» относится к случаю, когда коллективным потенциалом является гармонический (перевернутый) осциллятор.

1.5. Линейная связь по координате и импульсу (RWA-связь). В квантовой оптике и других разделах физики широко используется RWA-

связь [3, 5, 11]. В случае RWA-связи гамильтониан H_{cb} записывается в виде

$$\begin{aligned} H_{cb} &= \lambda^{1/2} \sum_{\nu} (\Gamma_{\nu}^* a^+ b_{\nu} + \Gamma_{\nu} a b_{\nu}^+) = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda \mu \omega}{2 \hbar}} q \sum_{\nu} (\Gamma_{\nu}^* b_{\nu} + \Gamma_{\nu} b_{\nu}^+) + i \sqrt{\frac{\lambda}{2 \hbar \mu \omega}} p \sum_{\nu} (\Gamma_{\nu} b_{\nu}^+ - \Gamma_{\nu}^* b_{\nu}), \end{aligned} \quad (45)$$

где a^+ и a — операторы рождения и уничтожения в коллективной подсистеме, а константы связи Γ_{ν} предполагаются комплексными числами. Надо отметить, что FC- и RWA-связи отличаются отсутствием нерезонансных членов $a^+ b_{\nu}^+$ и $a b_{\nu}$ в последнем. Исключая эти слагаемые, мы игнорируем быстро осциллирующие члены. Надо отметить, что в случае RWA-связи, как и в случае FC-связи, выполняется флуктуационно-диссипационное соотношение.

Для коллективного гармонического осциллятора $U(q) = \mu \omega^2 q^2 / 2$, связанного с гармоническими осцилляторами термостата, решения уравнений движения имеют вид

$$\begin{aligned} q(t) &= A_t q(0) + B_t p(0) + i \sqrt{\frac{\hbar}{2 \mu \omega}} \int_0^t d\tau [C_{\tau}^* f^+(t - \tau) - C_{\tau} f(t - \tau)], \\ p(t) &= -(\mu \omega)^2 B_t q(0) + A_t p(0) - \sqrt{\frac{\hbar \mu \omega}{2}} \int_0^t d\tau [C_{\tau}^* f^+(t - \tau) + C_{\tau} f(t - \tau)], \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda^{1/2}}{\hbar} \sum_{\nu} \Gamma_{\nu}^* \left(b_{\nu}(0) + \frac{\Gamma_{\nu}}{\hbar \omega_{\nu}} \left[\sqrt{\frac{\lambda \mu \omega}{2 \hbar}} q(0) + i \sqrt{\frac{\lambda}{2 \hbar \mu \omega}} p(0) \right] \right) e^{-i \omega_{\nu} t}, \\ A_t &= \frac{1}{2} \left[C_t + C_t^* + i \hbar \int_0^t d\tau (C_{\tau} K(t - \tau) - C_{\tau}^* K^*(t - \tau)) \right], \\ B_t &= \frac{i}{2 \mu \omega} \left[C_t - C_t^* + i \hbar \int_0^t d\tau (C_{\tau} K(t - \tau) + C_{\tau}^* K^*(t - \tau)) \right], \\ K(t - \tau) &= \frac{\lambda}{\hbar^2} \sum_{\nu} \frac{|\Gamma_{\nu}|^2}{\hbar \omega_{\nu}} e^{-i \omega_{\nu} [t - \tau]}, \\ C_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + i \hbar s K(s) + i \epsilon / \hbar} \right], \quad \epsilon = \hbar \omega - \lambda \sum_{\nu} \frac{|\Gamma_{\nu}|^2}{\hbar \omega_{\nu}}. \end{aligned}$$

Заменяя в этих выражениях сумму интегралом по частоте с плотностью состояний термостата $\rho(\omega_0)$, получаем

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{\lambda\gamma}{2\hbar} e^{-\gamma|t|} - \frac{i\lambda\gamma^2}{\hbar\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 + \gamma^2}, \\
 K(s) &= \frac{\lambda\gamma}{2\hbar(s + \gamma)} - \frac{i\lambda\gamma^2 \ln(s^2/\gamma^2)}{2\pi\hbar(s^2 - \gamma^2)}, \quad \epsilon = \hbar(\omega - \lambda\gamma), \\
 A_t &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 [\beta_j \eta_j e^{s_j t} + \beta_j^* \eta_j^* e^{s_j^* t}], \\
 B_t &= \frac{i}{2\mu\omega} \sum_{j=1}^2 [\beta_j \eta_j e^{s_j t} - \beta_j^* \eta_j^* e^{s_j^* t}], \\
 C_t &= \sum_{j=1}^2 C_t^j = \sum_{j=1}^2 \beta_j (s_j + \gamma) e^{s_j t}, \\
 \eta_j &= s_j + \gamma + \frac{i\lambda\gamma}{2} + \frac{\lambda\gamma^2 \ln(s_j^2/\gamma^2)}{2\pi(s_j - \gamma)}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\beta_1 = -\beta_2 = (s_1 - s_2)^{-1}$, s_1 и s_2 — простые корни уравнения

$$d(s) = s + i\hbar s K(s) + i\epsilon/\hbar = 0,$$

где

$$K(s) = \frac{\lambda\gamma}{\hbar(s + \gamma)}.$$

Здесь мы увеличили в два раза реальную часть $K(s)$ и пренебрегли мнимым членом, пропорциональным $\ln(s^2/\gamma^2)$. Данное приближение хорошо работает в пределе слабой связи. Надо отметить, что мнимая часть $K(s)$ не приводит к сингулярности при $s = 0$, поскольку $s \ln(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$. Учет этого члена при нахождении корней приводит к поправкам следующего порядка по λ и появлению новых корней, влияние которых на динамику системы предполагается малым. В пределе больших значений γ диссипативное ядро $K(t)$ без приближений сводится к привычной форме [38]:

$$K(t) = \frac{\lambda}{\hbar} \delta(t) - \frac{i\lambda}{\hbar\pi} P \left(\frac{1}{t} \right).$$

Аналогично выражениям (14)–(20) получаем коэффициенты трения по координате и импульсу

$$\lambda_q(t) = \lambda_p(t) = - \frac{\dot{A}_t A_t + (\mu\omega)^2 \dot{B}_t B_t}{A_t^2 + (\mu\omega)^2 B_t^2}, \quad (47)$$

приведенный массовый параметр

$$\frac{1}{m(t)} = \frac{\dot{B}_t A_t - \dot{A}_t B_t}{A_t^2 + (\mu\omega)^2 B_t^2}, \quad (48)$$

коэффициент жесткости

$$\xi(t) = (\mu\omega)^2 \frac{\dot{B}_t A_t - \dot{A}_t B_t}{A_t^2 + (\mu\omega)^2 B_t^2}, \quad (49)$$

коэффициенты диффузии по координате

$$D_{qq}(t) = \lambda_q(t) J_{q_t, q_t} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{q_t, q_t}}{dt}, \quad (50)$$

импульсу

$$D_{pp}(t) = (\mu\omega)^2 D_{qq}(t) \quad (51)$$

и смешанный коэффициент диффузии по координате-импульсу

$$D_{qp}(t) = 0. \quad (52)$$

В выражении (50)

$$J_{qq}(t) = \frac{\hbar\lambda\gamma^2}{2\pi\mu\omega} \sum_{ij} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 [2n_{\omega_0} + 1] \psi_{ij}(t)}{(\gamma^2 + \omega_0^2)(s_i + i\omega_0)(s_j^* - i\omega_0)},$$

где

$$\psi_{ij}(t) = C_t^i C_t^{j*} + C_0^i C_0^{j*} - C_t^i C_0^{j*} e^{i\omega_\nu t} - C_0^i C_t^{j*} e^{-i\omega_\nu t}.$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D_{qq}(\infty) &= \frac{1}{(\mu\omega)^2} D_{pp}(\infty) = \lambda_q(\infty) \sigma_{qq}(\infty), \\ D_{qp}(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Эти коэффициенты диффузии могут быть получены также из мастер-уравнения (21) с предположением, что асимптотические состояния имеют распределение Гиббса $\hat{\rho} = \exp[-\tilde{H}_c/T]/\text{Tr}(\exp[-\tilde{H}_c/T])$ [9]. Если $\text{Re}(s_1) > \text{Re}(s_2)$, тогда

$$\lambda_q(\infty) = -\frac{1}{2}(s_2 + s_2^*), \quad \frac{1}{m}(\infty) = \frac{\xi(\infty)}{(\mu\omega)^2} = \frac{|\text{Im}(s_2)|}{\mu\omega} \quad (54)$$

и легко получить асимптотические дисперсии по координате

$$\begin{aligned} \sigma_{qq}(\infty) &= J_{q_\infty q_\infty} = \frac{\lambda\gamma^2}{2\pi\hbar\omega\mu} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0[2n_{\omega_0} + 1]}{|s_1 + i\omega_0|^2 |s_2 + i\omega_0|^2} = \\ &= \frac{\lambda\gamma^2 T}{\hbar^2 \omega \mu} \left[\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{s_1}{(s_1 - x_n)(s_1 + s_1^*)(s_1 - s_2)(s_1 + s_2^*)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{s_2}{(s_2 - x_n)(s_2 + s_2^*)(s_2 - s_1)(s_2 + s_1^*)} + \text{h. c.} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s_1 + s_1^* + s_2 + s_2^*}{(s_1 + s_1^*)(s_2 + s_2^*)(s_1^* + s_2)(s_2^* + s_1)} \right], \quad (55) \end{aligned}$$

где $x_n = 2\pi nT/\hbar$. При больших температурах ($T \rightarrow \infty$) получаем

$$\sigma_{qq}(\infty) = J_{q_\infty q_\infty} = -\frac{\lambda\gamma^2 T}{\hbar^2 \omega \mu} \frac{s_1 + s_1^* + s_2 + s_2^*}{(s_1 + s_1^*)(s_2 + s_2^*)(s_1^* + s_2)(s_2^* + s_1)}. \quad (56)$$

Поскольку $\text{Re}(s_1) < 0$ и $\text{Re}(s_2) < 0$, то $J_{q_\infty q_\infty} > 0$. При низких температурах ($T \rightarrow 0$) можно получить следующее выражение:

$$\sigma_{qq}(\infty) = J_{q_\infty q_\infty} = \frac{\lambda\gamma^2}{2\hbar\omega\mu} \frac{i(s_1^* s_2^* - s_1 s_2)}{(s_1 + s_1^*)(s_2 + s_2^*)(s_1^* + s_2)(s_2^* + s_1)}. \quad (57)$$

Здесь $J_{q_\infty q_\infty} > 0$, так как $\text{Im}(s_1 s_2) > 0$. В пределе слабой связи $\lambda \ll 1$ уравнения (56) и (57) сводятся к известным формулам

$$\sigma_{qq}(\infty) = \frac{T}{\mu\omega^2}$$

и

$$\sigma_{qq}(\infty) = \frac{\hbar}{2\mu\omega}$$

соответственно.

Поскольку $\lambda_q \neq 0$ и $D_{qq} \neq 0$, уравнение для приведенной матрицы плотности (или уравнение для функции распределения вероятностей Вигнера) имеет структуру уравнения Линдблада. Если матрица плотности положительна в начальный момент времени, то она остается положительной в любой момент времени, даже если использовать асимптотические значения коэффициентов диффузии и трения по координате и импульсу в мастер-уравнении.

Симметризованная корреляционная функция по координате имеет следующую структуру:

$$\sigma_{q_t q_{t'}} = A_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + \frac{\hbar \lambda \gamma^2}{4\pi \mu \omega} \sum_{ij} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 [2n_{\omega_0} + 1] [\psi_{ij}(t, t') + \psi_{ji}^*(t, t')]}{[\gamma^2 + \omega_0^2] [s_i + i\omega_0] [s_j^* - i\omega_0]}, \quad (58)$$

где

$$\psi_{ij}(t, t') = C_t^i C_{t'}^{j*} + C_0^i C_0^{j*} e^{i\omega_0 [t-t']} - C_t^i C_0^{j*} e^{i\omega_0 t'} - C_0^i C_{t'}^{j*} e^{-i\omega_0 t}.$$

В пределах низких и высоких температур асимптотическая ($t \gg t' > 0$) симметризованная корреляционная функция

$$\sigma_{q_t q_{t'}}^{as} = \frac{\lambda \gamma^2}{2\pi \hbar \omega \mu} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 [2n_{\omega_0} + 1] \cos(\omega_0 [t - t'])}{|s_1 + i\omega_0|^2 |s_2 + i\omega_0|^2} \quad (59)$$

имеет степенную зависимость от $(t - t')$:

$$\begin{aligned} \sigma_{q_t q_{t'}}^{as}(T \rightarrow 0) &\rightarrow \frac{-\lambda \gamma^2}{2\pi \hbar \omega \mu |s_1|^2 |s_2|^2 (t - t')^2} \approx \frac{-\lambda \hbar}{2\pi \omega^3 \mu} \frac{1}{(t - t')^2}, \quad (60) \\ \sigma_{q_t q_{t'}}^{as}(T \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{i\lambda \gamma^2 T (s_1^* s_2^* [s_1 + s_2] - s_1 s_2 [s_1^* + s_2^*])}{\pi \hbar^2 \omega \mu |s_1|^4 |s_2|^4 (t - t')^2} \approx \frac{-2\lambda T}{\pi \mu \omega^4} \frac{1}{(t - t')^2}. \quad (61) \end{aligned}$$

Это связано с квантовой природой взаимодействия между коллективной и внутренней подсистемами: каждый акт взаимодействия заключается в уничтожении кванта в одной подсистеме и рождении кванта в другой. Заметим, что (60) и (61) не зависят от значений γ .

1.6. Немарковская динамика квантовых систем: скорость распада и захват. Перейдем к изучению влияния зависимости коэффициентов трения и диффузии от времени, полученных в [16] со связью H_{cb} , пропорциональной только q (ФС-связь), на решение уравнения (21). Особое внимание уделим исследованию роли недиагонального коэффициента диффузии D_{qp} . В качестве примера здесь показаны расчеты скорости потока через ангармонический потенциальный барьер. Результаты расчетов сравниваются с результатами, полученными с «классическим» набором коэффициентов диффузии.

Мастер-уравнение (21) только приближенно описывает диссипативную квантовую динамику для ангармонических систем. Однако в нашем случае мы рассматриваем лишь начальную стадию (относительно короткие времена)

эволюции системы вплоть до момента, когда скорость потока достигает квазистационарного режима. Например, в случае процесса распада волновая функция системы в основном локализована в начальном потенциальном кармане, который может быть хорошо аппроксимирован гармоническим осциллятором. Таким образом, можно предположить, что влияние флуктуаций более высокого порядка на эволюцию системы в рассматриваемой стадии процесса распада мало. Если функция распределения эволюционирует в более сложном потенциале, то ее временное поведение определяется мастер-уравнением с транспортными коэффициентами, зависящими от времени. Для ангармонических систем применение асимптотических транспортных коэффициентов оправдано только в режиме слабой диссипации и высоких температур.

1.6.1. Коэффициенты трения и диффузии, зависящие от времени. Выражения для коэффициентов трения и диффузии для FC-связи, полученные в [16], содержат три параметра: ω , λ и γ . Значение параметра γ , которое характеризует ширину состояний среды, должно удовлетворять условию $\gamma \gg \omega$, где ω — частота осциллятора, который после перенормировки $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$ аппроксимирует потенциал около положения минимума. В наших расчетах $\hbar\gamma = 12$ МэВ. Так как в (45) нет компенсирующего члена, как в [2], то из-за связи со средой потенциал $U(q)$ перенормируется. В рассмотренных здесь приложениях перенормировка приводит к слабой зависимости частоты от времени $\omega(t)$ до достижения асимптотического значения $\tilde{\omega}$. Значения параметров λ и ω задаются таким образом, чтобы при фиксированной температуре T получить заданную асимптотику $\tilde{\omega} = \omega(\infty)$. На рис. 1 показаны зависимости коэффициентов трения и диффузии от времени с начальными значениями $\lambda_p(t=0) = 0$, $D_{pp}(t=0) = 0$ и $D_{qp}(t=0) = 0$ при $\mu = 50m_0$ и $\hbar\tilde{\omega} = 3$ МэВ, где m_0 — масса нуклона. После переходного времени τ транспортные коэффициенты достигают своих асимптотических значений $\lambda_p(\infty)$, $D_{pp}(\infty)$ и $D_{qp}(\infty)$. В то время как λ_p и D_{pp} положительны всегда, D_{qp} положителен только в течение короткого начального периода времени и становится отрицательным при больших временах. Переходное время достаточно короткое: $\tau \ll 2\pi/\tilde{\omega}$. Как следует из аналитических выражений [16], $D_{pp}(\infty)$ пропорционально $\lambda_p(\infty)$, а значение $D_{qp}(\infty)$ убывает с ростом $\lambda_p(\infty)$ и увеличивается с T .

Асимптотическое значение D_{pp} , полученное в [43], почти совпадает со значением $D_{pp}(\infty)$, рассчитанным нами [16]. Однако из-за упрощений, сделанных в [43], значение $D_{qp}(\infty) < 0$ получилось примерно на 25% меньше, чем в наших расчетах.

В случае линейной связи по координате (FC-связь) $D_{qq} = 0$ и $\lambda_p = 0$ в любой момент времени. В данной работе мы ограничились рассмотрением только этой связи и в численных расчетах использовали три набора коэффициентов трения и диффузии.

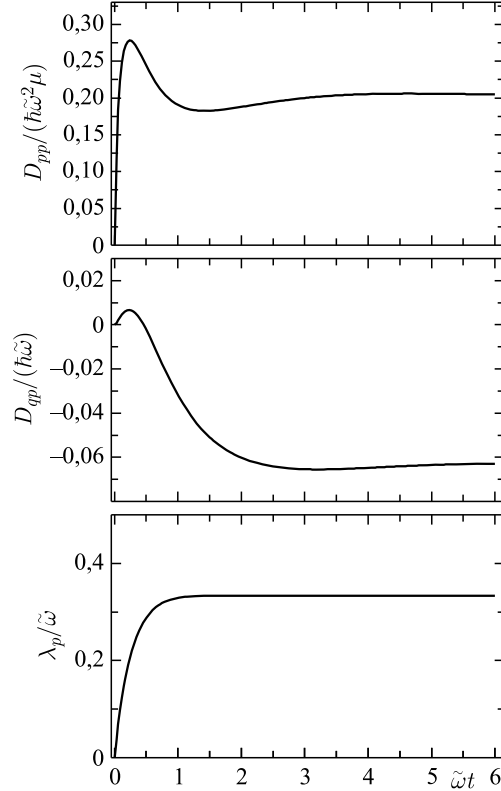


Рис. 1. Зависимости коэффициентов диффузии и трения от времени, рассчитанные при $\hbar\tilde{\omega} = 3$ МэВ, $\mu = 50m_0$ и $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 0,033$. Здесь $\hbar\lambda_p(\infty) = 1$ МэВ

Первый набор коэффициентов — это транспортные коэффициенты (уравнения (15), (30) и (31)), зависящие от времени (см. рис. 1):

$$(i) \quad D_{pp}(t), \quad D_{qp}(t), \quad \lambda_p(t). \quad (62)$$

Второй набор содержит асимптотические значения этих коэффициентов (уравнения (35), (37) и (38)):

$$(ii) \quad D_{pp}(\infty), \quad D_{qp}(\infty), \quad \lambda_p(\infty). \quad (63)$$

Сравнивая результаты, полученные с (62) и (63), можно понять роль временной зависимости коэффициентов диффузии и трения в изменении средних значений и дисперсий.

Третий набор коэффициентов совпадает с первым, но предполагается, что $D_{qp} = 0$:

$$(iii) \quad D_{pp}(t), \quad D_{qp}(t) \equiv 0, \quad \lambda_p(t). \quad (64)$$

Сравнивая результаты, полученные с (62) и (64), можно понять роль D_{qp} в эволюции средних значений и дисперсий, т.е. насколько важен учет D_{qp} при описании динамики системы. Результаты, полученные с этими наборами коэффициентов, можно сравнить также с часто используемым «классическим» набором коэффициентов диффузии:

$$(iv) \quad D_{pp}^c = \mu\lambda_p T^*, \quad D_{qq} = D_{qp} = 0, \quad (65)$$

где $T^* = 0,5\hbar\tilde{\omega} \coth(\hbar\tilde{\omega}/(2T))$ — эффективная температура.

1.6.2. *Распад через потенциальный барьер.* Рассмотрим переход начального гауссовского пакета из мелкой потенциальной ямы в более глобальную яму в асимметричном бистабильном потенциале (рис. 2), представленную полиномом четвертого порядка:

$$\tilde{U}(q) = -\frac{6q_R V_L}{q_L^2(2q_R - q_L)} q^2 - \frac{4(q_L + q_R)V_L}{q_L^3(q_L - 2q_R)} q^3 - \frac{3V_L}{q_L^3(2q_R - q_L)} q^4, \quad (66)$$

где q_L и q_R — положения левого и правого минимумов соответственно, а V_L — глубина левого минимума. Заметим, что барьер находится при $q = q_b = 0$. В расчетах $V_L = 4$ МэВ, $q_L = -1,67$ фм и $q_R = 2,5$ фм. С такими параметрами глубина правого кармана равна 11,8 МэВ. Мы рассмотрели два значения массового параметра $\mu = 50m_0$ и $448m_0$, соответствующие частотам в левом потенциальном минимуме $\hbar\tilde{\omega}_m = 3$ МэВ и $\hbar\tilde{\omega}_m = 1$ МэВ. Начальный гауссовский пакет находится в q_L и имеет квадратный корень от дисперсии $\sqrt{\sigma_{qq}(0)} = 0,35$ и $0,2$ фм при $\mu = 50m_0$ и $448m_0$ соответственно. Дисперсия $\sigma_{pp}(0)$ определяется из соотношения неопределенности с $\sigma_{qp}(0) = 0$, $\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/(4\sigma_{qq}(0))$.

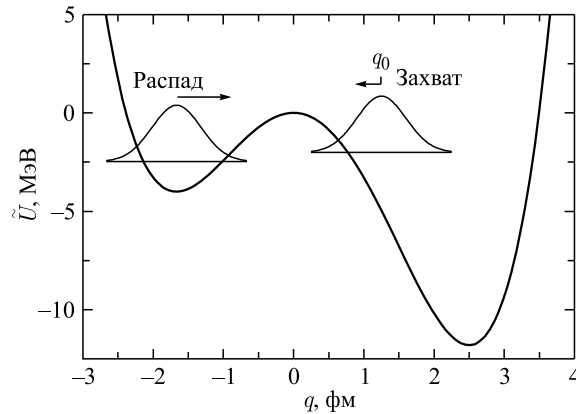


Рис. 2. Бистабильный потенциал (66). Схематически представлен распад гауссовского пакета из левой потенциальной ямы в правую потенциальную яму. Другой пакет приближается к барьеру справа и частично захватывается в левую яму

На рис. 3 и 4 показаны зависимости дисперсий $\sigma_{pp}(t)$, $\sigma_{qp}(t)$ и $\sigma_{qq}(t)$ от времени t при разных значениях массового параметра. При $t > 4 \hbar/\text{МэВ}$, когда в потенциале бистабильного типа устанавливается равновесие по импульсу, $\sigma_{pp}(t)$ достигает своего асимптотического значения. Значения $\sigma_{pp}(t)$ и $\sigma_{qp}(t)$ осциллируют дольше по времени, если значения массы и трения меньше. При большом массовом параметре относительное увеличение значения дисперсии с ростом температуры больше. При больших временах значение $\sigma_{qp}(t)$ меняется слабо.

Поскольку начальное гауссовское распределение изменяется из-за перехода из левого кармана в правый (см. рис. 2), значение $\sigma_{qq}(t)$ растет со временем. При малых значениях массового параметра $\sigma_{qq}(t)$ и $\sigma_{qp}(t)$ увеличиваются с ростом λ_p , тогда как при больших значениях они уменьшаются с

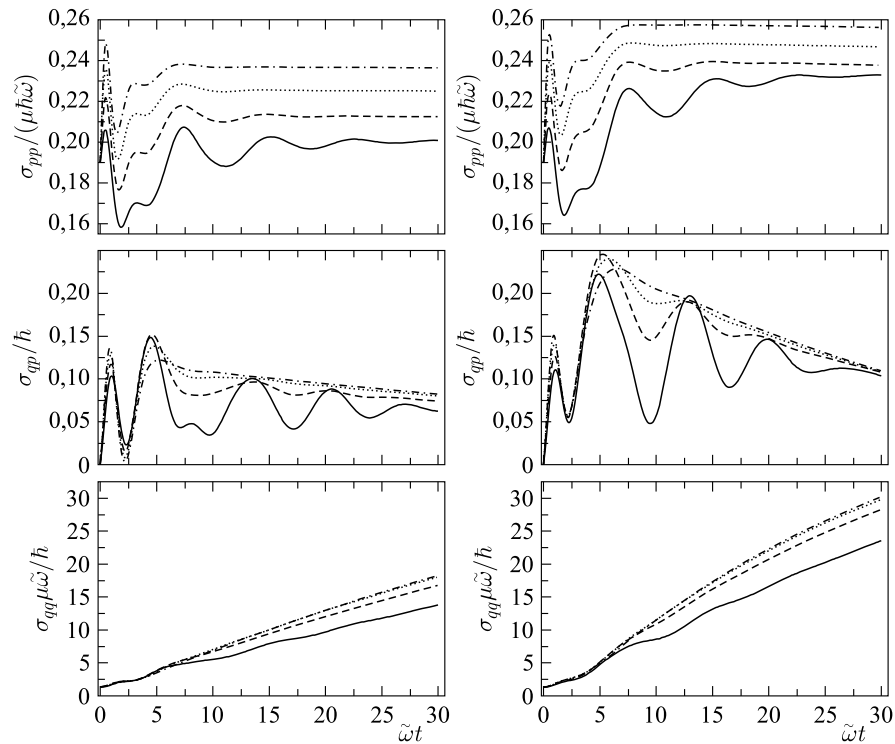


Рис. 3. Зависимости дисперсий $\sigma_{pp}(t)$, $\sigma_{qp}(t)$ и $\sigma_{qq}(t)$ от времени t в случае распада начального гауссовского пакета из левой потенциальной ямы (66) при $\mu = 50m_0$, $\hbar\tilde{\omega} = 3 \text{ МэВ}$, $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 0,033$ (левая сторона), $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 0,33$ (правая сторона) и значениях коэффициента трения $\lambda_p/\tilde{\omega} = 0,17$ (сплошная кривая), $0,33$ (штриховая), $0,50$ (пунктирная) и $0,66$ (штрихпунктирная)

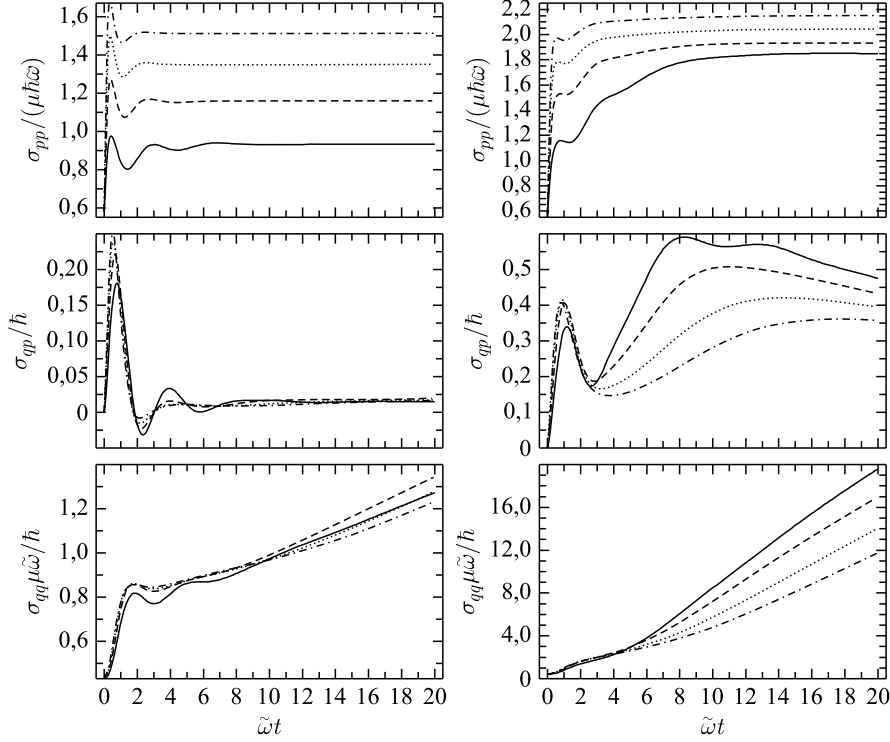


Рис. 4. Зависимости дисперсий $\sigma_{pp}(t)$, $\sigma_{qp}(t)$ и $\sigma_{qq}(t)$ от времени t в случае распада начального гауссовского пакета из левой потенциальной ямы (66) при $\mu = 448m_0$, $\hbar\tilde{\omega} = 1$ МэВ, $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 0,5$ (левая сторона), $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 1,5$ (правая сторона) и значениях коэффициента трения $\lambda_p/\tilde{\omega} = 0,5$ (сплошная кривая), $1,0$ (штриховая), $1,5$ (пунктирная) и $2,0$ (штрихпунктирная)

ростом λ_p . Это происходит из-за баланса между диффузией и трением. При малых значениях массы диффузия может компенсировать уменьшение скорости распада из-за трения. Похожие зависимости дисперсий от времени мы получаем и со вторым набором коэффициентов диффузии и трения (63), особенно при больших временах. Поэтому во многих приложениях можно пренебречь зависимостью коэффициентов диффузии и трения от времени и использовать асимптотические значения λ_p , D_{pp} и D_{qp} . Несмотря на нарушение неравенства (34), использование коэффициентов трения и диффузии (62) не приводит к нарушению соотношения неопределенности, так как значение D_{pp} примерно в 1,5 раза больше, чем значение «классического» D_{pp}^c в (65). С коэффициентами диффузии (65) можно наблюдать нарушение соотношения неопределенности в начальный момент времени (рис. 5).

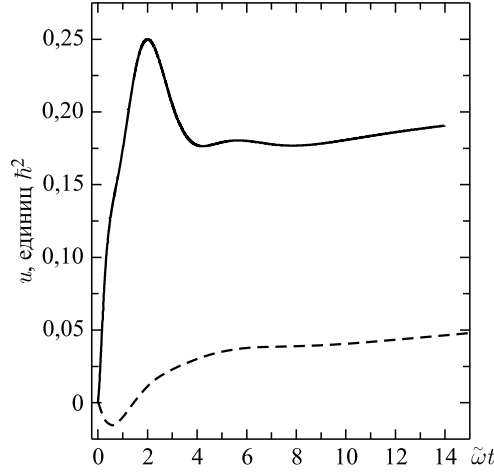


Рис. 5. Зависимость соотношения неопределенности $u(t) = \sigma_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) - \sigma_{qp}^2(t) - \hbar^2/4$ от времени t в начале процесса распада из левой потенциальной ямы (66) с коэффициентами диффузии (62) (сплошная кривая) и (65) (штриховая) при $\mu = 448m_0$, $\hbar\tilde{\omega} = 1$ МэВ, $\lambda_p/\tilde{\omega} = 1$ и $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 0,1$

Решая мастер-уравнение (21) с указанными выше коэффициентами трения и диффузии, мы можем вычислить матрицу плотности $\rho(q, t) = \langle q | \hat{\rho}(t) | q \rangle$ в координатном представлении и найти вероятность проницаемости

$$P(t) = \int_{q_b}^{\infty} dq [\rho(q, t) - \rho(q, t=0)] / \int_{-\infty}^{q_b} dq \rho(q, 0) \quad (67)$$

частицы с массой μ через барьер при $q = q_b$, а также значение скорости потока вероятности

$$\Lambda(t) = \frac{1}{1 - P(t)} \frac{dP(t)}{dt}. \quad (68)$$

При решении уравнения (21) использован осцилляторный базис [31–33]. Такой метод позволяет найти решение для любого непрерывного потенциала и любого набора коэффициентов трения и диффузии.

Для трех наборов коэффициентов трения и диффузии (62)–(64) на рис. 6 показаны зависимости скорости потока вероятности от времени $\Lambda(t)$ в потенциале (66) при $\hbar\lambda_p = 1$ МэВ и $T = 1$ МэВ и двух массовых параметрах. Как можно заметить, при больших t зависимости коэффициентов трения и диффузии от времени слабо влияют на скорость распада. Наборы (62) и (63) приводят к одинаковому значению квазистационарной скорости потока вероятности. На малом начальном интервале времени $\Lambda(t)$ больше с набором

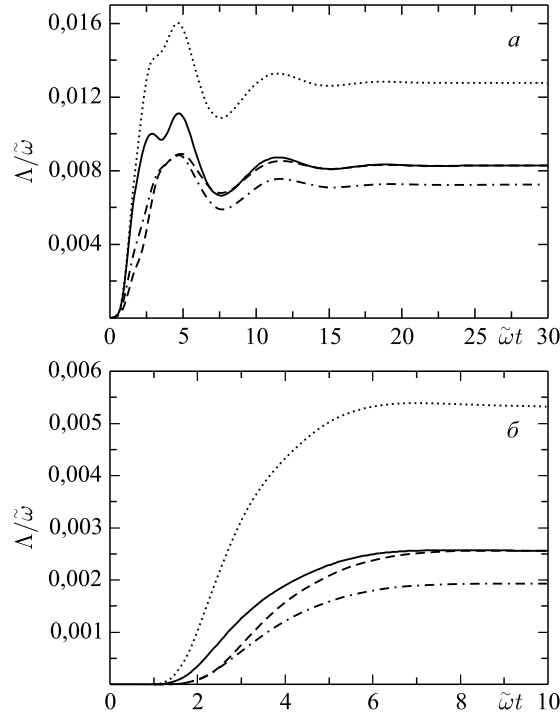


Рис. 6. Зависимость скорости распада $\Lambda(t)/\tilde{\omega}$ от времени t из левой потенциальной ямы (66) при $\mu = 50m_0$ (а), $\mu = 448m_0$ (б), $\lambda_p/\tilde{\omega} = 1/(\hbar\tilde{\omega})$ и $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 1/(\hbar\tilde{\omega})$. Представлены результаты вычислений с наборами коэффициентов диффузии (62) (сплошная кривая), (63) (штриховая) и (64) (пунктирная) и с «классическим» набором (65) (штрихпунктирная)

зависящих от времени коэффициентов, поскольку значение $D_{pp}(t)$ в начале растёт и превышает свое асимптотическое значение. Скорость потока вероятности $\Lambda(t)$ имеет больше осцилляций при меньших (больших) значениях массового параметра (частоты $\tilde{\omega}$), т.е. когда система близка к режиму слабого затухания. «Классический» набор коэффициентов приводит к слегка меньшему асимптотическому значению Λ . Сходство асимптотических значений Λ , полученных с наборами коэффициентов (62), (63) и (65), показывает возможность применения «классического» набора коэффициентов диффузии для описания проницаемости барьера в случае FC-связи между коллективной и внутренней подсистемами.

Как видно из рис.6, скорость потока вероятности больше с набором коэффициентов диффузии (64), чем с набором (62), из-за отрицательного значения D_{qp} в (62). Для того чтобы получить такое же значение скорости

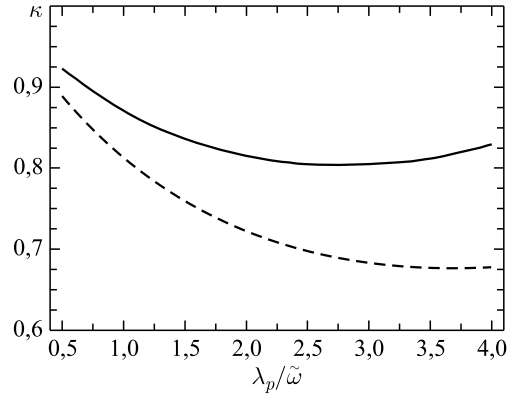


Рис. 7. Зависимость фактора κ от $\lambda_p/\tilde{\omega}$ для $T/(\hbar\tilde{\omega}) = 1,0$ (сплошная кривая) и $0,1$ (штриховая)

потока вероятности в случае, когда $D_{qp} = 0$, в расчетах надо уменьшить коэффициент диффузии D_{pp} на фактор $\kappa < 1$ и в наборе (64) использовать $D'_{pp} = \kappa D_{pp}$ вместо D_{pp} . Зависимость κ от λ_p представлена на рис. 7. При $\hbar\lambda_p > 1,5$ МэВ значение κ слабо зависит от λ_p и чувствительно лишь к температуре.

На рис. 8 представлена зависимость $\Lambda(t)$ при разных значениях температуры и коэффициента трения. Значение $\Lambda(t)$ увеличивается с ростом T . При малых значениях трения и массового параметра $\Lambda(t)$ становится более осциллирующей функцией от t . При больших значениях $\tilde{\omega}$ (малых значениях μ) стационарная скорость потока вероятности увеличивается с ростом λ_p , однако при малых значениях частоты $\tilde{\omega}$ (больших значениях μ) и больших значениях T она, наоборот, уменьшается. Такой результат согласуется с результатами, полученными в [34], и объясняется конкуренцией между диффузией, увеличивающей распад, и диссипацией, замедляющей распад, при различных значениях $\tilde{\omega}$ (μ) и λ_p .

На рис. 9 представлены зависимости квазистационарного значения Λ от T и λ_p при двух значениях $\tilde{\omega}$. Если система близка к режиму слабого затухания, квазистационарная скорость потока вероятности увеличивается с λ_p в большом интервале значений λ_p . Дальнейший рост λ_p , в итоге, приводит к меньшим значениям Λ . В режиме сильного затухания квазистационарная скорость потока вероятности всегда падает с увеличением λ_p .

1.6.3. Вероятность захвата. Рассмотрим захват начального гауссовского пакета, движущегося с некоторой кинетической энергией с правой стороны от барьера ($q = 0$) в потенциальный карман, находящийся с левой стороны от барьера (см. рис. 2). Вероятность захвата $P(t)$ определяется по аналогии

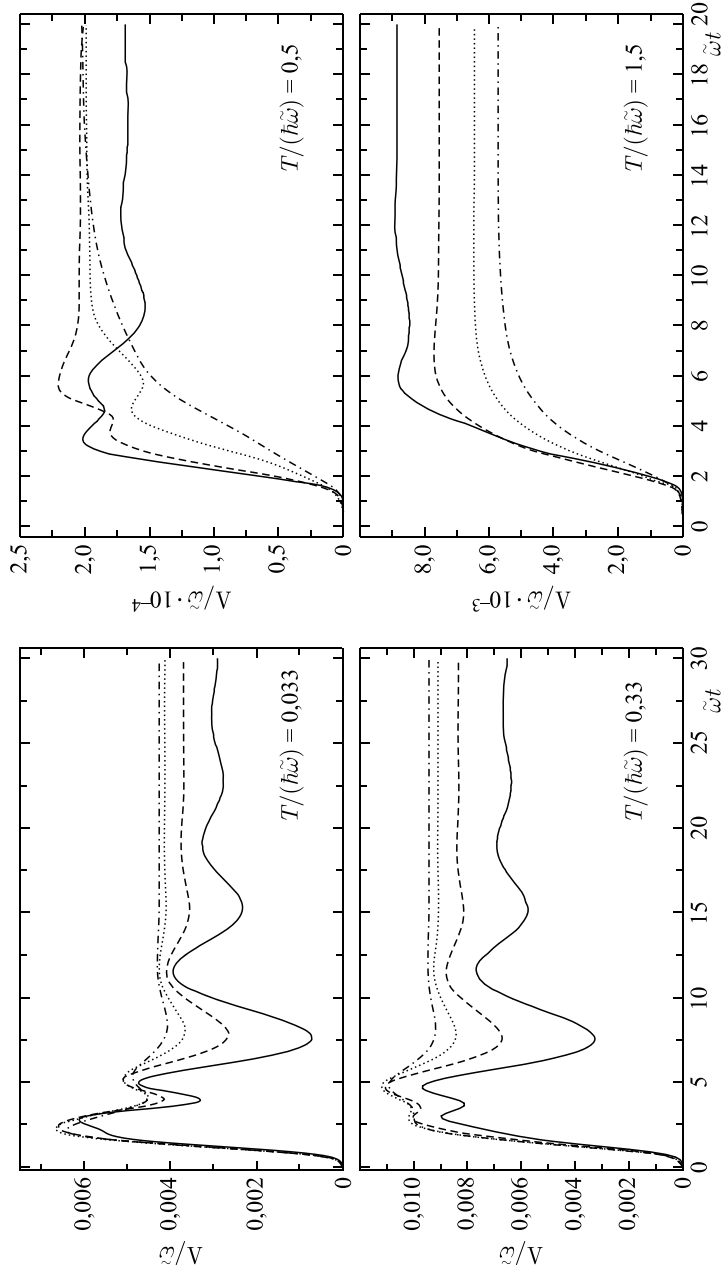


Рис. 8. Зависимость скорости распада $\Lambda(t)/\tilde{\omega}$ от времени t из левой ямы потенциала (66) при $\mu = 50m_0$ (левая сторона) и $\mu = 448m_0$ (правая сторона) и указанных значениях температуры. В расчетах использованы коэффициенты диффузии (62) с коэффициентами трения $\lambda_p/\tilde{\omega} = 0,5/(\hbar\tilde{\omega})$ (сплошная кривая), $1,5/(\hbar\tilde{\omega})$ (штриховая), $1,5/(\hbar\tilde{\omega})$ (пунктирная) и $2,0/(\hbar\tilde{\omega})$ (штрихпунктирная)

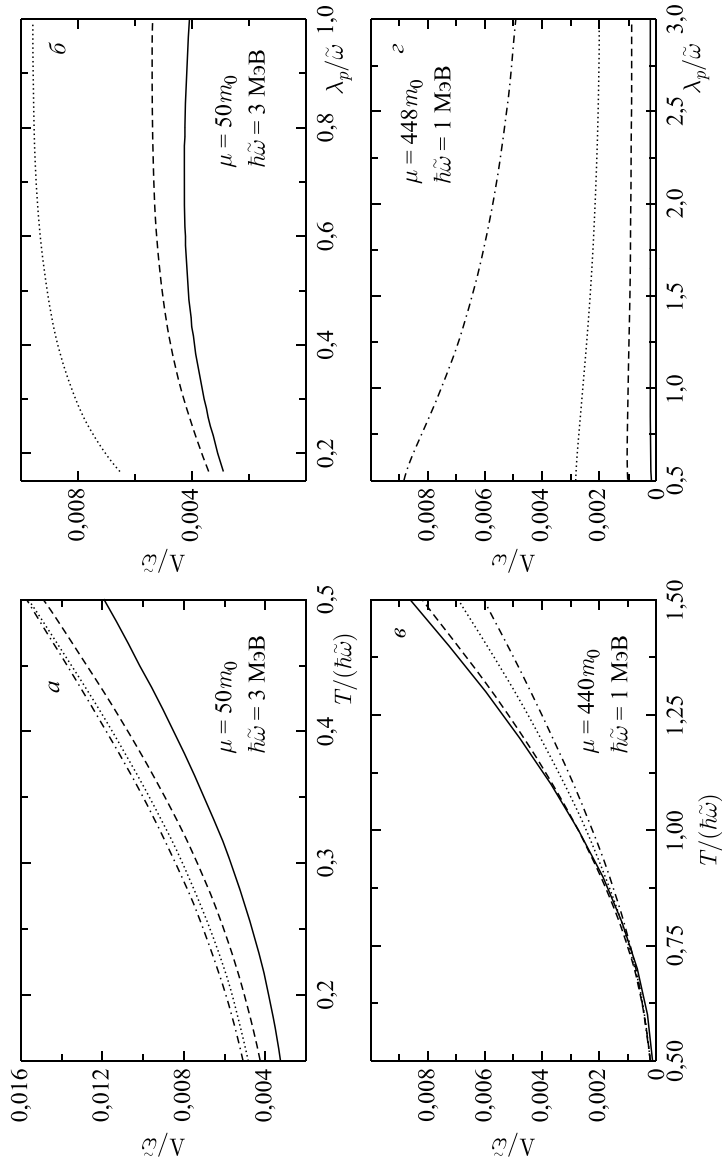


Рис. 9. Квазистационарная скорость потока $\Lambda(t)/\omega$ из левой ямы потенциала (66) как функция от $T/(\hbar\omega)$ и λ_p/ω при $\mu = 50m_0$ (а, б) и $\mu = 448m_0$ (в, г). Температурная зависимость представлена при значениях коэффициента трения $\lambda_p/\omega = 0,5/(\hbar\omega)$ (сплошная кривая), $1,0/(\hbar\omega)$ (штриховая), $1,5/(\hbar\omega)$ (пунктирная) и $2,0/(\hbar\omega)$ (штрихпунктирная). Зависимость от λ_p/ω представлена при значениях температуры $T/(\hbar\omega) = 0,1/(\hbar\omega)$ (сплошная кривая), $0,5/(\hbar\omega)$ (штриховая) и $1,0/(\hbar\omega)$ МэВ (пунктирная) (а, б) и $T/(\hbar\omega) = 0,5/(\hbar\omega)$ (сплошная кривая), $0,75/(\hbar\omega)$ (штриховая), $1,0/(\hbar\omega)$ (пунктирная) и $1,5/(\hbar\omega)$ (штрихпунктирная) (в, г)

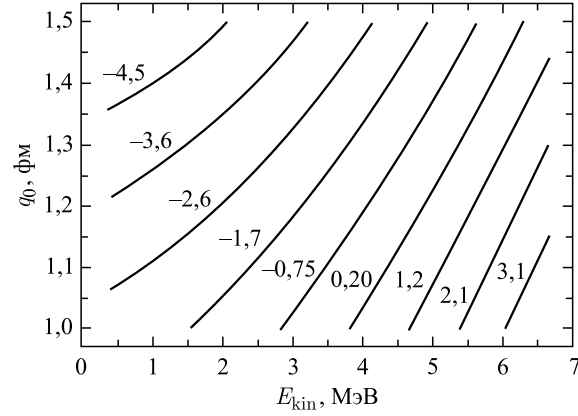


Рис. 10. Зависимость средней полной начальной энергии E_0 гауссовского пакета от его положения q_0 и кинетической энергии E_{kin} в потенциале (66)

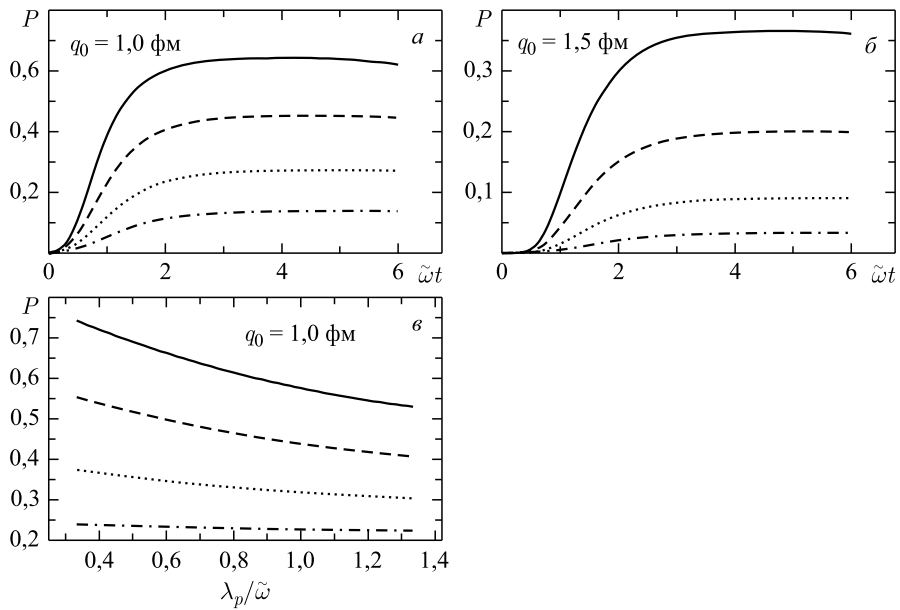


Рис. 11. Вероятность захвата гауссовского пакета в левый потенциальный карман (66) как функция от времени t при $q_0 = 1$ и $1,5$ фм, $\mu = 50m_0$ и $\lambda_p/\tilde{\omega} = 0,33$ (а, б); зависимость асимптотической вероятности захвата P от $\lambda_p/\tilde{\omega}$ (в). Результаты вычислений при $E_{\text{kin}} = 6,7$ МэВ (сплошная кривая), $3,8$ МэВ (пунктирная), $1,8$ МэВ (штриховая) и $0,4$ МэВ (штрихпунктирная)

с вероятностью проницаемости (67):

$$P(t) = \int_{-\infty}^{q_b} dq [\rho(q, t) - \rho(q, t = 0)] / \int_{q_b}^{\infty} dq \rho(q, 0). \quad (69)$$

Когда пакет доходит до барьера, значение $P(t)$ возрастает до своего квазистационарного значения P , который определяет часть исходного пакета, захваченного в потенциальный карман. Из-за наличия трения значение P зависит от начального положения пакета q_0 и от начальной кинетической энергии $E_{\text{kin}} = p_0^2/(2\mu)$. Для потенциала (66) на рис. 10 показана зависимость средней начальной полной энергии $E_0 = \text{Tr}(\hat{\rho}H_0)$ гауссовского пакета с $\sqrt{\sigma_{qq}(0)} = 0,35$ фм и $\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/(4\sigma_{qq}(0))$ от q_0 и E_{kin} .

На рис. 11 показана вероятность захвата $P(t)$ при разных значениях q_0 и E_{kin} и зависимость вероятности захвата $P(\infty)$ от λ_p . Можно увидеть, что только часть начального пакета захватывается даже при надбарьерных энергиях и поэтому $P(\infty) < 1$. При энергиях около барьера зависимость $P(\infty)$ от λ_p достаточно слабая. При энергиях, значительно превышающих барьер, трение влияет на захват сильнее. Поэтому представленные результаты могут быть полезны для расчета сечений захвата налетающего ядра ядром-мишенью. Следует отметить, что ядро-ядерный потенциал взаимодействия имеет достаточно мелкий карман [25–28].

2. ВЛИЯНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИВЕДЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ. ТУННЕЛИРОВАНИЕ С ДИССИПАЦИЕЙ В ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Пренебрегая усреднением по внутренним степеням свободы, можно рассмотреть открытую квантовую систему, стартуя с общего марковского мастер-уравнения для приведенной матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ коллективных степеней свободы, предложенного Линдбладом [7]:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_0, \hat{\rho}] + \frac{1}{2\hbar} \sum_j \left([\hat{V}_j \hat{\rho}, \hat{V}_j^+] + [\hat{V}_j, \hat{\rho} \hat{V}_j^+] \right), \quad (70)$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан коллективной квантовой системы и \hat{V}_j — операторы, действующие в гильбертовом пространстве коллективной квантовой системы. Члены суммы в (70) ответственны за трение и диффузию и обеспечивают необратимость по времени динамики открытой квантовой системы. Исключая эти члены, мы получаем стандартную форму эволюционного уравнения для матрицы плотности закрытых систем. Уравнение (70) и подобные уравнения использовались, например, в работах [6–10, 15, 31, 32, 45].

2.1. Пропагатор интеграла по путям и декогеренция. Используя пропагатор $G(q, q', t; q_0, q'_0, 0)$ и зная начальную матрицу плотности $\langle q|\hat{\rho}(t=0)|q'\rangle$, можно найти матрицу плотности $\langle q|\hat{\rho}(t)|q'\rangle$ (в координатном представлении) в любой момент времени t :

$$\langle q|\hat{\rho}(t)|q'\rangle = \int dq_0 \int dq'_0 G(q, q', t; q_0, q'_0, 0) \langle q_0|\hat{\rho}(t=0)|q'_0\rangle. \quad (71)$$

В одномерном случае выражение для пропагатора (интегралы по путям в фазовом пространстве), соответствующего (70), получено в [31, 32] в виде

$$G(q, q', t; q_0, q'_0, 0) = \int_{(q_0, 0)}^{(q, t)} D[\alpha] \int_{(q'_0, 0)}^{(q', t)} D[\alpha'] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\alpha; \alpha']\right),$$

$$S[\alpha; \alpha'] = S[q, p; q', p'] = \int_0^t d\tau \{ \dot{q}(\tau)p(\tau) - H_{\text{eff}}(q(\tau), p(\tau)) \} -$$

$$- \int_0^t d\tau \{ \dot{q}'(\tau)p'(\tau) - H_{\text{eff}}^*(q'(\tau), p'(\tau)) \} -$$

$$- i \sum_j \int_0^t d\tau \{ V_j(q(\tau), p(\tau)) V_j^*(q'(\tau), p'(\tau)) \} \quad (72)$$

с траекториями в фазовом пространстве $[\alpha] = [q, p]$ и эффективным гамильтонианом

$$H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i}{2} \sum_j |V_j|^2.$$

Здесь величины H_0 , $|V_j|^2$, V_j и V_j^* возникают после преобразований Вигнера операторов \hat{H}_0 , $\hat{V}_j^+ \hat{V}_j$, \hat{V}_j и \hat{V}_j^+ в (70) соответственно.

Выбирая потенциал перевернутого осциллятора, запишем гамильтониан квантовой коллективной системы в общей квадратичной форме:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 - \frac{m\omega^2}{2} \hat{q}^2 + \frac{\mu}{2} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}). \quad (73)$$

Операторы среды предполагаются линейными по q и p :

$$\hat{V}_j = A_j \hat{p} + B_j \hat{q}, \quad \hat{V}_j^+ = A_j^* \hat{p} + B_j^* \hat{q}, \quad j = 1, 2. \quad (74)$$

Определенный выбор A и B , зависящих от времени, позволяет получить уравнения с коэффициентами трения и диффузии, зависящими от времени,

и, таким образом, обобщить мастер-уравнение Линдблада на случай сильной связи и немарковских процессов [46, 47]. Однако более подробный анализ этой возможности здесь не рассмотрен.

Интегралы в (72) по импульсу приводят к гауссовским интегралам и могут быть вычислены аналитически [31, 32]. Тогда пропагатор приводится к интегралам по путям в координатном пространстве [31, 32]:

$$G(q, q', t; q_0, q'_0, 0) = \int_{q_0}^{q(t)} D[q] \int_{q'_0}^{q'(t)} D[q'] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q; q']\right), \quad (75)$$

$$S[q; q'] = S_{cl}[q] - S_{cl}[q'] - i\hbar\lambda t + \Phi[q, q'] + \frac{i}{2}(D[q, q'])^2.$$

Входящие в (75) классическое действие изолированной системы S_{cl} , фазовая функция $\Phi[q, q']$ и квадрат амплитуды декогеренции $D[q, q']$ выражаются в виде

$$S_{cl} = \int_0^t d\tau \left\{ \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \right\}, \quad (76)$$

$$\Phi[q, q'] = m\lambda \int_0^t d\tau (\dot{q}q' - q\dot{q}') + m \frac{\lambda_p - \lambda_q}{2} \int_0^t d\tau (q'\dot{q}' - q\dot{q}) -$$

$$- m \frac{\lambda_p \lambda_q}{2} \int_0^t d\tau (q^2 - q'^2), \quad (77)$$

$$(D[q, q'])^2 = \frac{2}{\hbar} \left\{ (D_{pp} + m^2 \lambda_p^2 D_{qq} + 2m\lambda_p D_{pq}) \int_0^t d\tau (q - q')^2 - \right.$$

$$\left. - 2m(D_{pq} + m\lambda_p D_{qq}) \int_0^t d\tau (q - q')(\dot{q} - \dot{q}') + m^2 D_{qq} \int_0^t d\tau (\dot{q} - \dot{q}')^2 \right\}, \quad (78)$$

где квантово-механические коэффициенты диффузии $D_{qq} = \frac{\hbar}{2} \sum_j |A_j|^2$ по координате, $D_{pp} = \frac{\hbar}{2} \sum_j |B_j|^2$ по импульсу и $D_{qp} = -\frac{\hbar}{2} \text{Re} \sum_j A_j^* B_j$ для смешанного случая. Скорость диссипации $\lambda = -\text{Im} \sum_j A_j^* B_j$ и коэффициенты диффузии должны удовлетворять соотношению $D_{pp} D_{qq} - D_{pq}^2 \geq \lambda^2 \hbar^2 / 4$ с

$D_{qq} > 0$, $D_{pp} > 0$, которое обеспечивает неотрицательность матрицы плотности в любой момент времени. Величины $\lambda_p = \lambda + \mu$ и $\lambda_q = \lambda - \mu$ ($\lambda_p + \lambda_q = 2\lambda$) — коэффициенты трения по координате и импульсу соответственно. В открытой квантовой системе координата и импульс подвергаются прямому затуханию и диффузионному процессу в отличие от классического случая. Если $D[q, q']$ увеличивается со временем при $q \neq q'$, то пропагатор подавляет недиагональные элементы матрицы плотности и интерференция между различными координатами q и q' становится более слабой.

Поскольку H_{eff} зависит линейно и квадратично от p и q , интегралы по траекториям являются гауссовскими. В этом случае полуклассическое решение интегралов по траекториям методом стационарных фаз приводит к точной аналитической оценке пропагатора. Во-первых, уравнения движения вдоль траекторий $q(\tau)$ и $q'(\tau)$ (траектории в комплексной плоскости) вычислены с помощью условия стационарной фазы $\delta S[q, p; q', p'] = 0$ с S из (72). В результате получаем уравнения

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{P}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_q & m^{-1} & \frac{4iD_{pq}}{\hbar} & \frac{-4iD_{qq}}{\hbar} \\ m\omega^2 & -\lambda_p & \frac{4iD_{pp}}{\hbar} & \frac{-4iD_{pq}}{\hbar} \\ 0 & 0 & \lambda_p & m^{-1} \\ 0 & 0 & m\omega^2 & \lambda_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (79)$$

для $Q_1 = q + q'$, $Q_2 = q - q'$, $P_1 = p + p'$ и $P_2 = p - p'$, которые решаются с граничными условиями $\mathbf{q} = (q(0) = q_0, q'(0) = q_0', q'(t))$. Затем решения $q(\tau)$ и $q'(\tau)$ уравнения (79), зависящие от параметров q_0 , $q(t)$, q_0' и $q'(t)$, подставляем в функцию действия $S[q; q']$ (75) и интегрируем по τ . Квадрат амплитуды декогеренции находим в следующем виде:

$$(D[q, q'])^2 = \sinh^{-2}[\psi t] (X_t(q_0 - q_0')^2 - X_{-t}(q(t) - q'(t))^2 + Y_t(q_0 - q_0')(q(t) - q'(t))), \quad (80)$$

где $\psi = \sqrt{\omega^2 + (\lambda_q - \lambda_p)^2/4}$ и

$$\begin{aligned} X_t = & \frac{D_{pp} - m(m\omega^2 D_{qq} + (\lambda_q - \lambda_p)D_{pq})}{2\hbar\lambda} + \\ & + \exp[2\lambda t] \psi^2 \frac{D_{pp} - m(-2D_{pq}\lambda_p + mD_{qq}(\omega^2 - 2\lambda\lambda_p))}{2\hbar\lambda(\lambda_p\lambda_q - \omega^2)} + \\ & + \frac{\psi}{2\hbar(\omega^2 - \lambda_p\lambda_q)} \sinh[2\psi t] \{D_{pp} + m(2D_{pq}\lambda_p + mD_{qq}(\omega^2 - \lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)))\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\hbar(\omega^2 - \lambda_p\lambda_q)} \cosh [2\psi t] \{ -\lambda D_{pp} + m[(-2D_{pq} + m(\lambda_q - \lambda_p)D_{qq})\psi^2 - \\
& \quad - \lambda(-D_{pq}(\lambda_q - \lambda_p) + mD_{qq}(\omega^2 + 0,5(\lambda_q - \lambda_p)^2))] \}, \\
Y_t = & \frac{\psi \sinh [(\psi - \lambda)t]}{\hbar\lambda(\omega^2 - \lambda_p\lambda_q)} \{ \psi[-D_{pp} + m(-2D_{pq}\lambda_p + mD_{qq}(\omega^2 - 2\lambda\lambda_p))] - \\
& \quad - \lambda[D_{pp} + m(2D_{pq}\lambda_p + mD_{qq}(\omega^2 - \lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)))] \} - \\
& - \frac{\psi \sinh [(\psi + \lambda)t]}{\hbar\lambda(\omega^2 - \lambda_p\lambda_q)} \{ \psi[-D_{pp} + m(-2D_{pq}\lambda_p + mD_{qq}(\omega^2 - 2\lambda\lambda_p))] + \\
& \quad + \lambda[D_{pp} + m(2D_{pq}\lambda_p + mD_{qq}(\omega^2 - \lambda_p(\lambda_q - \lambda_p)))] \}. \quad (81)
\end{aligned}$$

Аналогичные аналитические выражения получены для классического действия S_{cl} и фазовой функции $\Phi[q, q']$. Окончательно пропагатор (75) выглядит в виде

$$G(q, q', t; q_0, q'_0, 0) = \frac{m\psi}{2\pi\hbar \sinh(\psi t)} \exp(\lambda t) \exp(iS_R/\hbar) \exp\left[-\frac{(D[q, q'])^2}{2\hbar}\right],$$

$$\begin{aligned}
S_R = S_{cl}[q] - S_{cl}[q'] + \Phi[q, q'] = \\
= \frac{m\omega}{2 \sinh(\psi t)} \left\{ \cosh(\psi t - \phi)[q_0^2 - q'_0{}^2] + \cosh(\psi t + \phi)[q^2 - q'^2] - \right. \\
\left. - 2 \cosh(\phi) \cosh(\lambda t)[q_0 q - q'_0 q'] - 2 \cosh(\phi) \sinh(\lambda t)[q_0 q' - q'_0 q] \right\}, \quad (82)
\end{aligned}$$

где $\sinh \phi = (\lambda_q - \lambda_p)/(2\omega)$. Данный пропагатор является точным для любого квадратичного гамильтониана и является обобщением результатов работ [15, 31, 32], где пропагаторы получены только для гармонического или перевернутого осциллятора. Используя начальную матрицу плотности ($\bar{q}(0)$ и $\bar{p}(0)$ — средние значения)

$$\begin{aligned}
\langle q|\hat{\rho}(0)|q'\rangle = (2\pi\sigma_{qq}(0))^{-1/2} \times \\
\times \exp\left[-\frac{1}{4\sigma_{qq}(0)}\{(q - \bar{q}(0))^2 + (q' - \bar{q}(0))^2\} - \frac{i}{\hbar}\bar{p}(0)(q' - q)\right], \quad (83)
\end{aligned}$$

(71) и (82), вычисляем матрицу плотности в момент времени t

$$\begin{aligned}
\langle q|\hat{\rho}(t)|q'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{qq}(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{qq}(t)}\left(\frac{q + q'}{2} - \bar{q}(t)\right)^2 - \right. \\
- \frac{1}{2\hbar^2}\left(\sigma_{pp}(t) - \frac{\sigma_{pq}^2(t)}{\sigma_{qq}(t)}\right)(q - q')^2 + \\
\left. + \frac{i\sigma_{pq}(t)}{\hbar\sigma_{qq}(t)}\left(\frac{q + q'}{2} - \bar{q}(t)\right)(q - q') + \frac{i}{\hbar}\bar{p}(t)(q - q')\right] \quad (84)
\end{aligned}$$

или в явной форме

$$\langle q|\hat{\rho}(t)|q'\rangle = \frac{m\psi}{2\sinh(\psi t)} \exp(\lambda t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{qq}(0)}} \frac{1}{\sqrt{4f_3f_6 - f_5^2}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{-f_2f_4f_5 + f_1f_5^2 + f_2^2f_6 + f_3(f_4^2 - 4f_1f_6)}{4f_3f_6 - f_5^2}\right], \quad (85)$$

где

$$f_1 = \sinh^{-2}[\psi t] \left(-\frac{\hbar\bar{q}^2(0)}{2\sigma_{qq}(0)} \sinh^2[\psi t] + \frac{1}{2}X_{-t}(q - q')^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}im\omega \cosh[\psi t + \phi] \sinh[\psi t](q^2 - q'^2) \right), \\ f_2 = \sinh^{-2}[\psi t] \left(\frac{2i\sigma_{qq}(0)\bar{p}(0) + \hbar\bar{q}(0)}{2\sigma_{qq}(0)} \sinh^2[\psi t] - \frac{1}{2}Y_t(q - q') - \right. \\ \left. - im\omega \cosh[\phi] \sinh[\psi t](q \cosh[\lambda t] + q' \sinh[\lambda t]) \right), \\ f_3 = \sinh^{-2}[\psi t] \frac{1}{2} \left(im\omega \cosh[\psi t - \phi] \sinh[\psi t] - \frac{\hbar}{2\sigma_{qq}(0)} \sinh^2[\psi t] - X_t \right), \quad (86) \\ f_4 = \sinh^{-2}[\psi t] \left(\frac{-2i\sigma_{qq}(0)\bar{p}(0) + \hbar\bar{q}(0)}{2\sigma_{qq}(0)} \sinh^2[\psi t] + \frac{1}{2}Y_t(q - q') + \right. \\ \left. + im\omega \cosh[\phi] \sinh[\psi t](q \sinh[\lambda t] + q' \cosh[\lambda t]) \right), \\ f_5 = \sinh^{-2}[\psi t] X_t, \\ f_6 = -\sinh^{-2}[\psi t] \frac{1}{2} \left(im\omega \cosh[\psi t - \phi] \sinh[\psi t] + \frac{\hbar}{2\sigma_{qq}(0)} \sinh^2[\psi t] + X_t \right).$$

Здесь $\bar{q}(t)$ и $\bar{p}(t)$ — средние значения \hat{q} и \hat{p} соответственно и $\sigma_{qq}(t)$, $\sigma_{pp}(t)$ и $\sigma_{pq}(t)$ — соответствующие дисперсии [9, 15]. Явные выражения для этих средних значений и дисперсий даны в [15]. Диагональная часть матрицы плотности (84) приводит к распределению Гаусса в момент времени t

$$\rho(q, t) = \langle q|\hat{\rho}(t)|q\rangle = (2\pi\sigma_{qq}(t))^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{qq}(t)}(q - \bar{q}(t))^2\right], \quad (87)$$

где

$$\bar{q}(t) = e^{-\lambda t} \left(\bar{q}(0) \left[\cosh(\psi t) + \frac{\lambda_p - \lambda_q}{\psi} \sinh(\psi t) \right] + \frac{1}{m\psi} \bar{p}(0) \sinh(\psi t) \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{qq}(t) = & \frac{1}{2m^2\lambda(\omega^2 - \lambda_p\lambda_q)} [m^2(\omega^2 - 2\lambda_p\lambda)D_{qq} - D_{pp} - 2m\lambda_p D_{pq}] + \\ & + e^{-2\lambda t} \left[\frac{2C_1}{m(\lambda_q - \lambda_p)} - \frac{1}{2m\omega^2} [(\lambda_q - \lambda_p)C_2 + 2C_3\psi] \cosh(2\psi t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2m\omega^2} [(\lambda_q - \lambda_p)C_3 + 2C_2\psi] \sinh(2\psi t) \right] \quad (88) \end{aligned}$$

со следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{m\omega^2(\lambda_q - \lambda_p)}{4\psi^2} \left[\sigma_{qq}(0) - \frac{1}{m^2\omega^2} \sigma_{pp}(0) + \frac{\lambda_q - \lambda_p}{m\omega^2} \sigma_{pq}(0) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} D_{qq} + \frac{1}{m^2\omega^2\lambda} D_{pp} - \frac{(\lambda_q - \lambda_p)}{m\omega^2\lambda} D_{pq} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & \frac{1}{4\psi^2} \left[\frac{\lambda_q - \lambda_p}{m} (\sigma_{pp}(0) - m^2\omega^2\sigma_{qq}(0)) + 4\omega^2\sigma_{pq}(0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega^2 - \lambda_p\lambda_q} \left(\frac{2\omega^2 - \lambda_p\lambda_q}{m} [D_{pp} + m^2\omega^2 D_{qq}] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\lambda_q^2}{m} D_{pp} + \lambda_p^2 m\omega^2 D_{qq} + 4\lambda\omega^2 D_{pq} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = & -\frac{1}{2m\psi} \left[m^2\omega^2\sigma_{qq}(0) + \sigma_{pp}(0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega^2 - \lambda_p\lambda_q} (\lambda_q D_{pp} + 2m\omega^2 D_{pq} + m^2\omega^2 \lambda_p D_{qq}) \right]. \end{aligned}$$

При $\lambda_p = \lambda_q = 0$, $D_{pp} = D_{qq} = D_{pq} = 0$, $\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/(4\sigma_{qq}(0))$ и $\sigma_{qp}(0) = 0$ получаем результаты работы [48, 49]. При $\lambda_q = 0$, $D_{pp} = D_{qq} = D_{pq} = 0$, $\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/(4\sigma_{qq}(0))$ и $\sigma_{qp}(0) = 0$ наши результаты совпадают в пределе сильного затухания с результатами работы [50], где туннелирование изучено с перевернутым гамильтонианом Caldirola-Kanai. При $\lambda_q = 0$ и $D_{qq} = 0$ воспроизводится результат работы [51].

2.2. Результаты расчетов: декогеренция. Влияние коэффициентов трения и диффузии на процесс туннелирования рассмотрено в [15, 31, 32]. Здесь мы изучаем зависимость матрицы плотности от времени для различных наборов транспортных коэффициентов. Для того чтобы продемонстрировать влияние коэффициентов диффузии D_{qq} и трения λ_q по координате на изменение расстояния между траекториями фазового пространства, характеризующее амплитудой декогеренции (78), мы используем простые выражения для

коэффициентов диффузии:

$$\begin{aligned}
 D_{pp} &= (1 + \kappa)\lambda m \hbar \omega_{\text{eff}} \coth\left(\frac{\hbar \omega_{\text{eff}}}{2T}\right) / 2, \\
 D_{qq} &= (1 - \kappa)\hbar \lambda \coth\left(\frac{\hbar \omega_{\text{eff}}}{2T}\right) / (2m\omega_{\text{eff}}), \quad D_{pq} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

где κ — параметр. Значение ω_{eff} может быть найдено из микроскопического рассмотрения открытой системы. Чтобы обеспечить неотрицательность матрицы плотности в любой момент времени, должно выполняться неравенство $(1 - \kappa)^2 \coth^2(\hbar \omega_{\text{eff}}/(2T)) \geq 1$. С $\kappa = 1$ и $D_{qq} = D_{pq} = 0$ мы получаем «классический» набор коэффициентов диффузии, который не сохраняет неотрицательность матрицы плотности [6, 9, 10]. Связь со средой, которая приводит к $\lambda_q \neq 0$, перенормирует потенциальный барьер и увеличивает проницаемость через него [15, 31]. Проницаемость также очень чувствительна к значению D_{qq} [32]. Можно показать, что скорость диссипации увеличивается с ростом λ_p и D_{qq} , но уменьшается с ростом λ_q и D_{pp} [15, 31, 32]. В столкновениях тяжелых ионов поверхностные колебания и нуклонный обмен между ядрами ответственны за перенормировку кулоновского барьера ядро-ядерного потенциала взаимодействия и диссипацию кинетической энергии относительного движения ядер [25]. Через эффекты перенормировки потенциала и диссипации кинетической энергии мы можем определить $\lambda_p = (1 + \kappa)\lambda$ и $\lambda_q = (1 - \kappa)\lambda$ (или κ и λ), фитируя экспериментальные данные по подбарьерным столкновениям.

В качестве примера мы рассмотрим относительное движение двух ядер ${}^{76}\text{Ge}$ и ${}^{170}\text{Er}$ при энергиях столкновения вблизи кулоновского барьера, аппроксимированного перевернутым осциллятором. На рис. 12 показана зависимость матрицы плотности $\rho(q, q')$ от времени при $\kappa = 0$ и 1 в (89), $\lambda_p = (1 + \kappa)\lambda$ и $\lambda_q = (1 - \kappa)\lambda$. Поскольку с $\kappa = 0$ и 1 матрица плотности фактически диагональна после короткого промежутка времени (приблизительно $5 \cdot 10^{-22}$ с), полуклассические методы работают вполне хорошо в столкновениях тяжелых ионов. Матрица плотности становится диагональной быстрее в случае $\kappa = 1$, чем в случае $\kappa = 0$. Поведение во времени недиагональных элементов матрицы плотности очевидно коррелирует с зависимостью декогеренции D от времени (рис. 13). После уменьшения значения D за короткое время декогеренция увеличивается, что указывает на отрицательную интерференцию между различными состояниями (траекториями). Декогеренция увеличивается медленнее в случае $\kappa = 0$ и быстрее при более высоких температурах.

На рис. 13 видно, что амплитуда декогеренции уменьшается с ростом λ_q . Это влияет на проницаемость через барьер, которая увеличивается из-за большей интерференции между различными состояниями (траекториями) [15, 31].

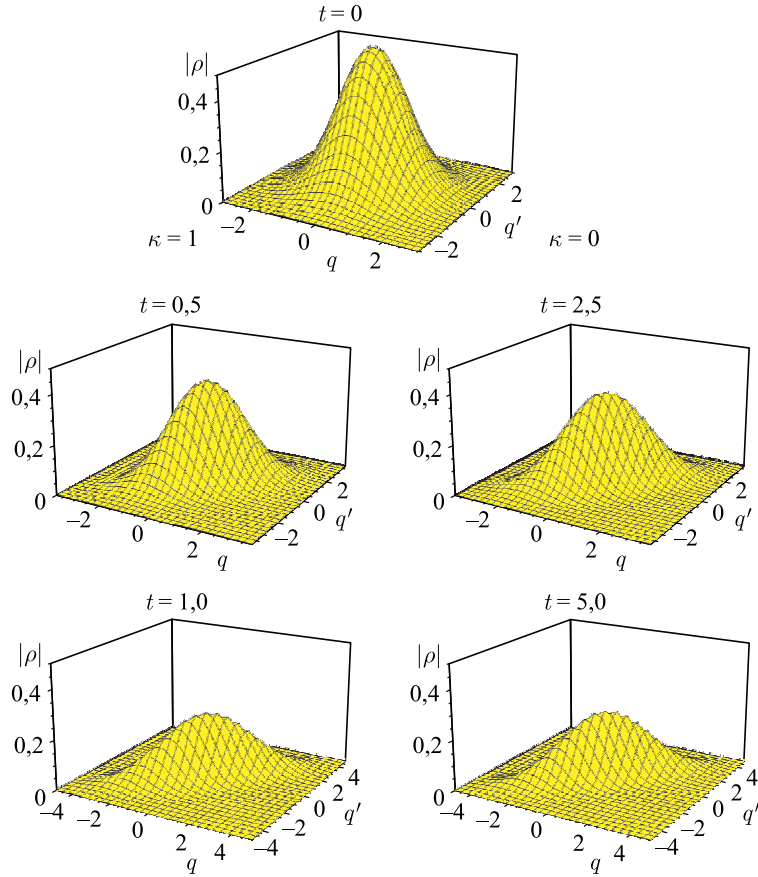


Рис. 12. Рассчитанная зависимость модуля матрицы плотности $|\rho(q, q')|$ от времени t в потенциале перевернутого осциллятора, аппроксимирующего кулоновский барьер в реакции ${}^{76}\text{Ge} + {}^{170}\text{Er}$, для $\kappa = 1$ (левая сторона) и 0 (правая сторона) в (89), $\lambda_p = (1 + \kappa)\lambda$ и $\lambda_q = (1 - \kappa)\lambda$. Параметры: $\bar{q}(0) = 0$, $\bar{p}(0) = 0$, $\hbar\omega = \hbar\omega_{\text{eff}} = 2,0$ МэВ, $\sigma_{qq}(0) = 0,7$ фм², $m = 53m_0$ (m_0 — масса нуклона), $\hbar\lambda = 2$ МэВ и $T = 0$ МэВ. Начальная матрица плотности (верхняя часть) расположена на вершине барьера. Время в единицах $6,582 \cdot 10^{-22}$ с

Для того чтобы показать роль D_{qq} в уменьшении когерентности между состояниями, мы сравниваем зависимость D от времени (рис. 14) при $\kappa = 0, 0,5$ и 1 в (89) и $\lambda_p = 2\lambda$ и $\lambda_q = 0$. За времена $t > 5 \cdot 10^{-22}$ с, которые представляют интерес для физических наблюдаемых, декогеренция увеличивается быстро при $D_{qq} = 0$ ($\kappa = 1$). При $D_{qq} \neq 0$ ($\kappa < 1$) интерференция между различными состояниями сохраняется более длительное время.

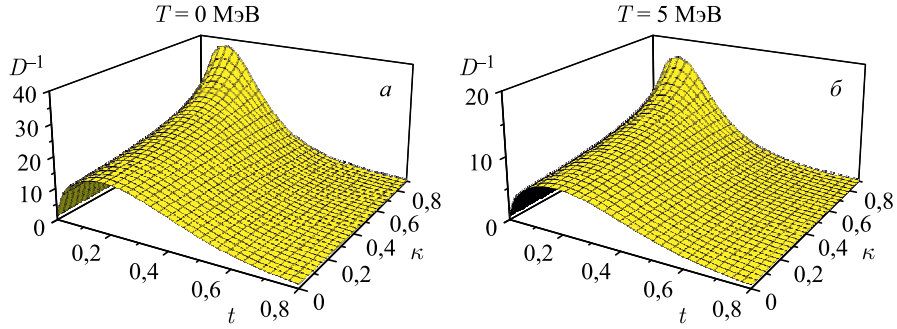


Рис. 13. Зависимость обратной декогеренции D^{-1} (в единицах $\hbar^{-1/2}$) от времени t и κ , используемой в определениях D_{pp} и D_{qq} в (89), $\lambda_p = (1 + \kappa)\lambda$ и $\lambda_q = (1 - \kappa)\lambda$ при $T = 0$ и 5 МэВ. Начальные значения: $q(0) - q'(0) = 0,01$ фм и $p(0) = p'(0) = 0$. Другие параметры совпадают с параметрами на рис. 12. Время в единицах $6,582 \cdot 10^{-22}$ с

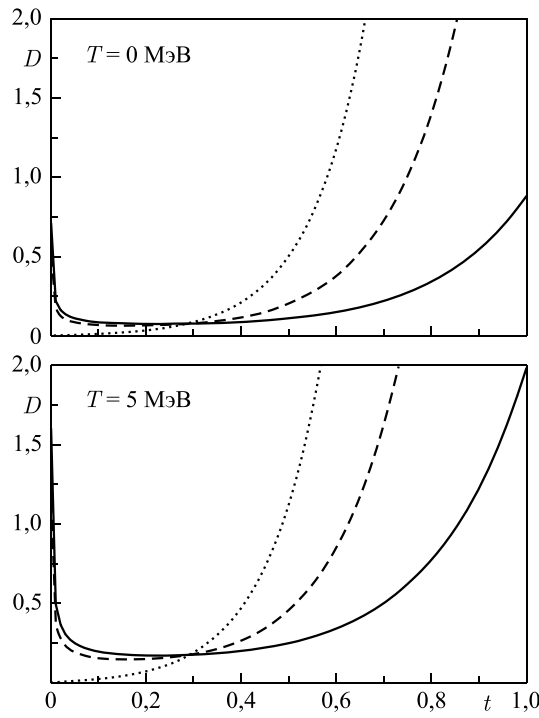


Рис. 14. Зависимость декогеренции D (в единицах $\hbar^{1/2}$) от времени t при $\lambda_p = 2\lambda$, $\lambda_q = 0$, $T = 0$ и 5 МэВ и $\kappa = 0$ (сплошная кривая), 0,5 (штриховая) и 1 (пунктирная). Начальные значения: $q(0) - q'(0) = 0,01$ фм и $p(0) = p'(0) = 0$. Другие параметры совпадают с параметрами на рис. 12. Время в единицах $6,582 \cdot 10^{-22}$ с

Уравнение (70) можно также решить, записав систему уравнений для матричных элементов $\hat{\rho}$ в некотором базисе [32]. Эти уравнения можно численно решить для произвольных потенциалов. С полным ортогональным набором базисных функций $|n\rangle$ мы получаем из (70) систему уравнений для матричных элементов матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$\frac{d\rho_{mn}}{dt} = \sum_l \left\{ -\frac{i}{\hbar} (\langle m|\hat{H}_0|l\rangle\rho_{ln} - \langle l|\hat{H}_0|n\rangle\rho_{ml}) + \right. \\ \left. + \rho_{ml}B_{ln} + \rho_{ln}C_{ml} + \sum_{l'} \rho_{ll'}A_{mll'n} \right\}, \quad (90)$$

где коэффициенты определены следующим образом:

$$B_{ln} = \sum_{l'} (D_1^- \Delta_{ll'}^+ \Delta_{l'n}^+ + D_1^{+*} \Delta_{ll'}^- \Delta_{l'n}^- - D_2^- \Delta_{ll'}^- \Delta_{l'n}^+ - D_2^{+*} \Delta_{ll'}^+ \Delta_{l'n}^-), \\ C_{ml} = \sum_{l'} (D_1^+ \Delta_{l'l}^+ \Delta_{ml'}^+ + D_1^{+*} \Delta_{l'l}^- \Delta_{ml'}^- - D_2^+ \Delta_{l'l}^- \Delta_{ml'}^+ - D_2^{+*} \Delta_{l'l}^+ \Delta_{ml'}^-), \\ A_{mll'n} = -(D_1^- + D_1^+) \Delta_{ml}^+ \Delta_{l'n}^+ - (D_1^{-*} + D_1^{+*}) \Delta_{ml}^- \Delta_{l'n}^- + \\ + (D_2^- + D_2^{-*}) \Delta_{ml}^+ \Delta_{l'n}^- + (D_2^+ + D_2^{+*}) \Delta_{ml}^- \Delta_{l'n}^+. \quad (91)$$

Здесь $\Delta_{mn}^- = \langle m|a|n\rangle$ и $\Delta_{mn}^+ = \langle m|a^+|n\rangle$ — матричные элементы операторов рождения a^+ уничтожения a , $D_1^\pm = 0,5(D_1 \pm 0,5(\lambda_p - \lambda_q))$, $D_2^\pm = 0,5(D_1 \pm 0,5(\lambda_p + \lambda_q))$. Для базиса, связанного с собственными функциями гармонического осциллятора с частотой ω , $D_1 = (m\omega D_{qq} - D_{pp}/m\omega + 2iD_{pq})/\hbar$ и $D_2 = (m\omega D_{qq} + D_{pp}/m\omega)/\hbar$. Как было показано в [47], в пределе слабой связи усреднение по времени ведет к обобщенному мастер-уравнению линдбладовского типа (90), где $(m\omega)^2 D_{qq} = D_{pp}$, $D_{pq} = 0$ и $\lambda_p = \lambda_q$ (или $\mu = 0$).

Собственные функции гармонического осциллятора или собственные функции потенциала $U(\hat{q})$ удобны в качестве полного ортогонального набора базисных функций $|n\rangle$. Начальная матрица плотности вычислена как $\rho_{mn}(t=0) = \langle m|\Psi\rangle\langle\Psi|n\rangle$, где начальное состояние открытой системы определено волновой функцией $\Psi(q)$. Тогда мы можем решить (90) и найти зависимости от времени среднего значения $F = \text{Tr}(\hat{\rho}(t)\hat{F})$ любого оператора \hat{F} , диагональных и недиагональных элементов матрицы плотности.

Рассмотрим систему с массовым параметром $m = 53m_0$ (m_0 — масса нуклона) в симметричном двухцентровом потенциале

$$U(q) = -\frac{8\Delta U}{L^2}q^2 + \frac{16\Delta U}{L^4}q^4 \quad (92)$$

с $\Delta U = 1,5$ МэВ, $L = 3$ фм и начальным гауссовским состоянием для матрицы плотности с дисперсией $\sigma_{qq}(0) = 0,14$ фм² в левой яме при $\bar{q}(0) = -1,5$ фм. Здесь и в дальнейшем мы используем U вместо \tilde{U} для перенормированного потенциала. Рассчитанная зависимость $\rho(q, q')$ от времени представлена на рис. 15 в случае $\kappa = 1$ и 0 в (89) с $\lambda_p = 2\lambda$ и $\lambda_q = 0$. Переход системы в правую яму, главным образом, происходит вдоль направления $q = q'$. Одновременно недиагональная часть матрицы плотности больше с $D_{qq} \neq 0$, чем с $D_{qq} = 0$. При $D_{qq} \neq 0$ распределение в правой яме более широкое, а переход между двумя ямами более быстрый [32, 52].

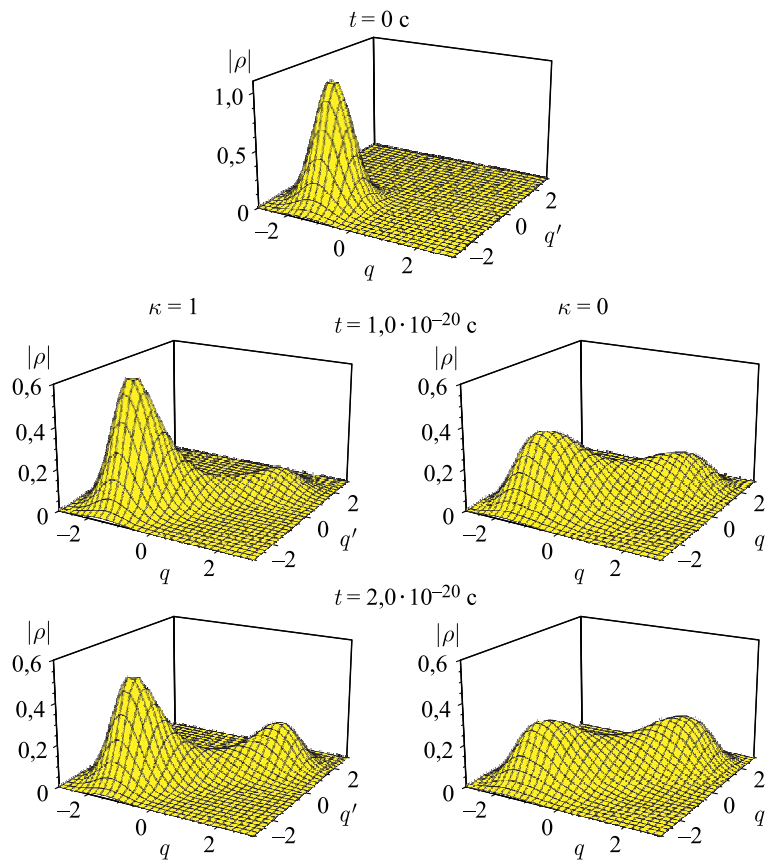


Рис. 15. Рассчитанная зависимость модуля матрицы плотности $|\rho(q, q')|$ от времени t в потенциале (92) с двумя минимумами (объяснение в тексте) при $\kappa = 1$ (левая сторона) и 0 (правая сторона) в (89), $T = 0$ МэВ и $\lambda_p = 2\lambda$, $\lambda_q = 0$. Начальное гауссовское распределение (верхняя часть) с $\sigma_{qq}(0) = 0,14$ фм², $\bar{p}(0) = 0$, $\bar{q}(0) = -1,5$ фм (левый минимум). Другие параметры: $\hbar\omega_{\text{eff}} = 2,0$ МэВ, $\hbar\lambda = 2$ МэВ и $m = 53m_0$

2.3. Результаты расчетов: туннелирование с диссипацией. Вероятность проникновения через параболический барьер в момент времени t определена следующим выражением:

$$P(t) = \int_0^{\infty} dq [\rho(q, t) - \rho(q, t=0)] / \int_{-\infty}^0 dq \rho(q, 0) = 1 - \frac{\text{Erfc}(q(t)/\sqrt{2\sigma_{qq}(t)})}{\text{Erfc}(q(0)/\sqrt{2\sigma_{qq}(0)}), \quad (93)$$

где $q = 0$ соответствует вершине барьера. $P(t)$ является отношением изменения вероятности нахождения справа от барьера в момент времени t к начальной вероятности нахождения частицы слева. Мы берем начальные дисперсии в соответствии с соотношением неопределенности и условием $\sigma_{qq}(0)\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/4$, $\sigma_{pq}(0) = 0$. В расчетах используются квантово-механические коэффициенты диффузии, удовлетворяющие этим условиям, и классические коэффициенты диффузии ($D_{pp} \neq 0$, $D_{qq} = D_{pq} = 0$).

Легко показать, что энергия системы $E(t) = \langle \hat{H}_0 \rangle = \bar{p}^2(t)/(2m) - m\omega^2 \bar{q}^2(t)/2 + \sigma_{pp}(t)/(2m) - m\omega^2 \sigma_{qq}(t)/2$ изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{E} = -2\lambda_p \left(\frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{\sigma_{pp}}{2m} \right) + 2\lambda_q \left(\frac{m\omega^2 \bar{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2 \sigma_{qq}}{2} \right) + \left(\frac{D_{pp}}{m} - m\omega^2 D_{qq} \right). \quad (94)$$

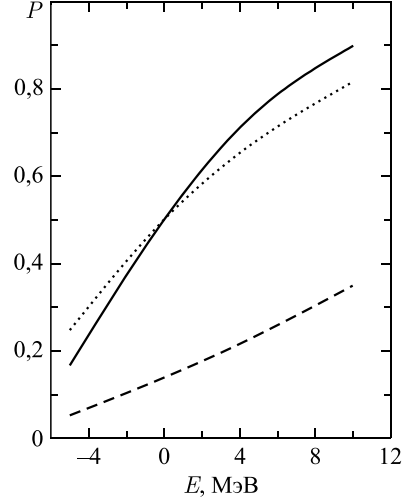
При $\lambda_p = \lambda_q = \lambda$ (94) переходит в

$$\dot{E} = -2\lambda E + \left(\frac{D_{pp}}{m} - m\omega^2 D_{qq} \right). \quad (95)$$

Как видно из (94) и (95), скорость диссипации увеличивается с ростом λ_p и D_{qq} , но уменьшается с ростом λ_q и D_{pp} . Значение \dot{E} , как и следовало ожидать, изменяет знак с ростом λ_q при фиксированном $\lambda_p + \lambda_q = 2\lambda$. При подбарьерных энергиях ($E < 0$) и $\lambda_p = \lambda_q = \lambda$ коллективная система получает энергию из термостата, если правая сторона (95) положительна.

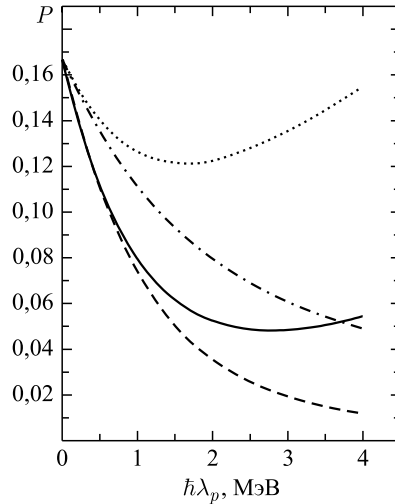
Зависимость вероятности проникновения через параболический барьер от начальной энергии E системы представлена на рис. 16 для трех различных наборов коэффициентов трения λ_p и λ_q . При этом используются следующие коэффициенты диффузии: $D_{qq} = \hbar\lambda/(2m\omega)$, $D_{pp} = \lambda m\hbar\omega/2$ и $D_{pq} = 0$ (см. (51) и (52)). При подбарьерных энергиях вероятность туннелирования больше в случае $\lambda_q = \lambda_p \neq 0$ по сравнению со случаем без трения $\lambda_p = \lambda_q = 0$. Здесь трение по координате λ_q увеличивает проницаемость барьера, но трение по импульсу λ_p , наоборот, уменьшает ее. Это поведение

Рис. 16. Рассчитанная зависимость вероятности проникновения через параболический барьер от начальной энергии. Параметры: $\hbar\omega = 2,0$ МэВ, $\bar{q}(0) = -2$ фм, $\sigma_{qq}(0) = 0,2$ фм², $m = 53m_0$, $D_{qq} = \hbar\lambda/(2m\omega)$, $D_{pp} = \lambda m\hbar\omega/2$ и $D_{pq} = 0$. Результаты расчетов для случаев: $\lambda_p = \lambda_q = 0$ (сплошная кривая), $\hbar\lambda_p = \hbar\lambda_q = 1$ МэВ (пунктирная) и $\hbar\lambda_p = 2$ МэВ, $\lambda_q = 0$ (штриховая). Энергия $E = -4, -2, 0, 4$ и 8 МэВ соответствует начальным импульсам $\bar{p}(0) = 0,8, 0,9, 1,0, 1,2$ и $1,35 \cdot 10^3$ МэВ/с



соответствует зависимости скорости диссипации от λ_q и λ_p . Большая проницаемость барьера, чем в стандартных вычислениях по модели связанных каналов, необходима для объяснения экспериментальных данных по подбарьерному слиянию. В случае, когда связь со средой приводит к $\lambda_q \neq 0$, барьер перенормируется, скорость диссипации уменьшается и проницаемость увеличивается [15]. Трение и диффузия уменьшают пересечение барьера для энергий выше барьера. При $E = 0$ и $\lambda_p = \lambda_q$ вероятности проницаемости равны друг другу с учетом и без учета диссипации.

Рис. 17. Рассчитанная зависимость вероятности туннелирования P через параболический барьер от коэффициента трения λ_p по импульсу при температурах $T = 0$ и 3 МэВ. Параметры: $\hbar\omega = 2,0$ МэВ, $\bar{q}(0) = -2$ фм, $\sigma_{qq}(0) = 0,2$ фм², $E = -5$ МэВ, $m = 53m_0$ и коэффициент трения $\lambda_q = 0$ ($\lambda = \lambda_p/2$). Вычисления для случаев: $T = 0$, $D_{qq} = \hbar\lambda/(2m\omega)$, $D_{pp} = \lambda m\hbar\omega/2$ и $D_{pq} = 0$ (сплошная кривая), $T = 0$, $D_{qq} = 0$, $D_{pp} = \lambda_p m\hbar\omega/2$ и $D_{pq} = 0$ (штриховая), $T = 3$ МэВ, $D_{qq} = \hbar\lambda \coth(\hbar\omega/(2T))/(2m\omega)$, $D_{pp} = \lambda m\hbar\omega \coth(\hbar\omega/(2T))/2$ и $D_{pq} = 0$ (пунктирная) и $T = 3$ МэВ, $D_{qq} = 0$, $D_{pp} = \lambda_p m\hbar\omega \coth(\hbar\omega/(2T))/2$ и $D_{pq} = 0$ (штрихпунктирная)



На рис. 17 показана зависимость туннелирования через параболический барьер от коэффициентов диффузии при различных значениях трения λ_p по импульсу и $\lambda_q = 0$. Видно, что при $D_{qq} = 0$ ($D_{pp} \neq 0$, $D_{pq} = 0$) значение P уменьшается с ростом λ_p . Заметим, что этот набор коэффициентов диффузии несовместим с условием положительности матрицы плотности. При $D_{qq} \neq 0$ значение P первоначально уменьшается с ростом λ_p до некоторого «критического» коэффициента трения, но затем начинает увеличиваться. Этот эффект становится более сильным при более высоких температурах T , когда выбранные коэффициенты $D_{qq} = \hbar\lambda \coth(\hbar\omega/(2T))/(2m\omega)$ и $D_{pp} = \lambda m\hbar\omega \coth(\hbar\omega/(2T))/2$ больше, чем при $T = 0$. «Критический» коэффициент трения уменьшается с ростом T . Поведение P как функции λ_p можно объяснить следующим образом. Туннелирование более чувствительно к значению D_{qq} , чем к значению D_{pp} , потому что $\sigma_{qq}(t)$ более чувствительно к D_{qq} , чем к D_{pp} . Несмотря на то, что скорость диссипации больше с $D_{qq} \neq 0$, проникаемость через барьер усиливается из-за более быстрого роста σ_{qq} по сравнению со случаем $D_{qq} = 0$.

В (88) роль членов, пропорциональных D_{qq} (D_{pp}), увеличивается сильно (слабо) с λ . Увеличение скорости туннелирования с температурой находится в согласии с работой [14]. Усиление туннелирования было получено в рамках микроскопической модели [53] в пределе большого коэффициента трения. Однако в этой модели нельзя отличить влияние трений по координате и импульсу на процесс туннелирования. Усиление туннелирования с диссипацией было найдено в [54] для квантованного вихревого движения.

Вероятность нахождения частицы справа от барьера очень чувствительна к ширине $\sigma_{qq}(0)$ начального волнового пакета, локализованного слева от ба-

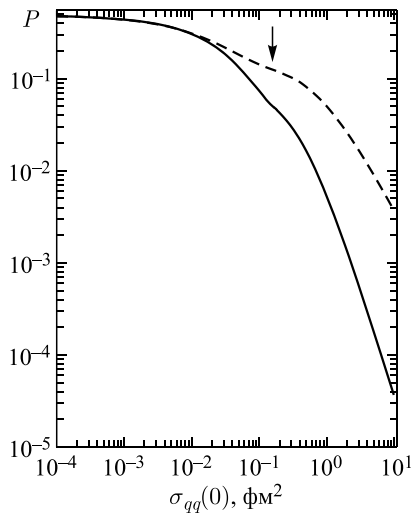


Рис. 18. Рассчитанная зависимость вероятности проникновения через параболический барьер P от начальной дисперсии $\sigma_{qq}(0)$ с $\hbar\omega = 2,0$ МэВ, $\bar{q}(0) = -1$ фм, $p(0) = 0$, $m = 53m_0$, $D_{qq} = \hbar\lambda/(2m\omega)$, $D_{pp} = \lambda m\hbar\omega/2$ и $D_{pq} = 0$. Результаты вычислений при $\lambda = \lambda_p = \lambda_q = 0$ (сплошная кривая) и $\hbar\lambda = \hbar\lambda_p = \hbar\lambda_q = 1$ МэВ (штриховая). Значение $\sigma_{qq}(0) = \hbar/(2m\omega)$ отмечено стрелкой

рьера при $t = 0$ (рис. 18). Данный эффект — более слабый с учетом диссипации. Для меньшего значения $\sigma_{qq}(0)$ значение $\sigma_{pp}(0)$ становится больше ($\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/(4\sigma_{qq}(0))$), и вероятность проникновения через барьер увеличивается из-за большей флуктуации начальной энергии ($E_f = \sigma_{pp}(0)/(2m) - m\omega^2\sigma_{qq}(0)/2$). Около $\sigma_{qq}(0) = \hbar/(2m\omega) = 0,18 \text{ фм}^2$ зависимость P от $\sigma_{qq}(0)$ становится слабой, и кривая на рис. 18 имеет ступенчатое поведение.

Для потенциала с двумя симметричными минимумами (92) зависимости энергии от времени $E(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t)H_0) = (p^2 + \sigma_{pp})/(2m) + \langle U(q) \rangle$ величины $u(t) = \sigma_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) - \sigma_{pq}^2(t) - \hbar^2/4$, контролирующей выполнение соотношения неопределенности, и проницаемости P потенциального барьера между двумя ямами представлены на рис. 19.

При $\lambda_q = 0$ наблюдается большая проницаемость с $D_{qq} \neq 0$. При $D_{qq} \neq 0$ энергия первоначально увеличивается, а затем уменьшается до асимптотиче-

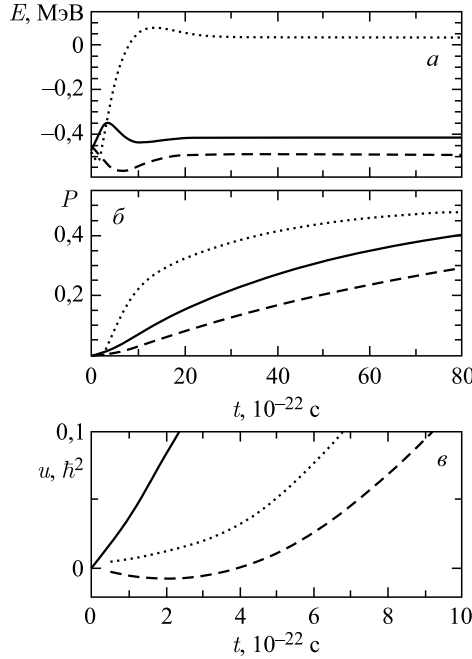


Рис. 19. Рассчитанные зависимости от времени t энергии E (а), u (б) и проницаемости барьера P (в) между двумя минимумами в потенциале (92) с $\Delta U = 1,5 \text{ МэВ}$ и $L = 3 \text{ фм}$. Для системы с $m = 53m_0$ (m_0 — масса нуклона) начальное состояние взято в виде гауссовского распределения с $\sigma_{qq}(0) = 0,18 \text{ фм}^2$ в левом минимуме. В расчетах используются коэффициенты диффузии (89) с $\hbar\omega_{\text{eff}} = 2,0 \text{ МэВ}$ и $T = 0$. Результаты вычислений: при $\hbar\lambda_p = 2 \text{ МэВ}$ и $\lambda_q = 0$ с $\kappa = 1$ (штриховая кривая) и 0 (сплошная) в (89); при $\hbar\lambda_p = \hbar\lambda_q = 1 \text{ МэВ}$ с $\kappa = 0$ (пунктирная)

ского значения. С $D_{qq} = 0$ значение E первоначально уменьшается. В течение короткого начального времени процесс, как предполагается, гауссовский и при $\lambda_q = 0$ скорость диссипации

$$\dot{E}(t) \approx -2\lambda_p \frac{p^2 + \sigma_{pp}}{2m} + \frac{1}{m} D_{pp} + 16D_{qq} \left[-\frac{\Delta U}{L^2} + \frac{12\Delta U}{L^4} (q^2 + \sigma_{qq}) \right].$$

Начальное поведение $E(t)$ при $q = -L/2$ можно просто проследить с помощью этого выражения. При $\lambda_q \neq 0$ потенциальный барьер между двумя минимумами перенормируется, что приводит к большей проницаемости [2, 15]. Следует отметить нарушение соотношения неопределенности с «классическим» набором коэффициентов диффузии ($\kappa = 1$) в начальный момент эволюции коллективной системы. Поэтому данный недостаток этих коэффициентов диффузии может сказаться при описании редких процессов, которые

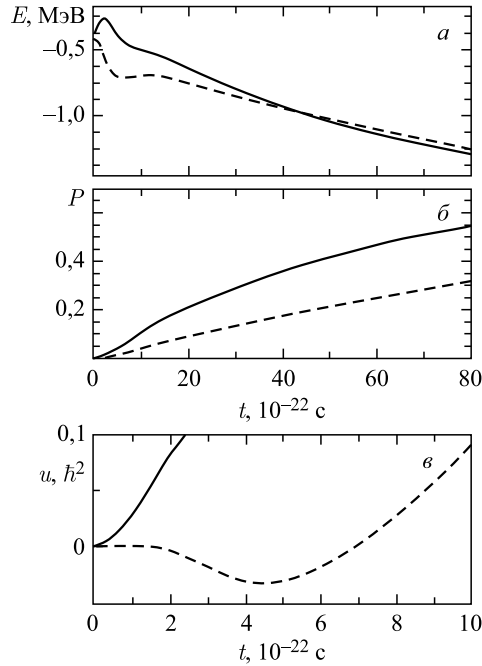


Рис. 20. Рассчитанные зависимости от времени t для энергии E (а) и u (в) и проницаемости барьера P (б) между двумя минимумами в потенциале (96) с $\Delta U = 1,5$ МэВ, $v = 2$ МэВ и $L = 3$ фм. Начальное состояние для системы с $m = 53m_0$ взято в виде гауссовского распределения с $\sigma_{qq}(0) = 0,18$ фм² в левом минимуме. В расчетах использованы коэффициенты диффузии (89) с $\hbar\omega_{\text{eff}} = 2,0$ МэВ и $kT = 0$. Представлены результаты вычислений при $\hbar\lambda_p = 2$ МэВ и $\lambda_q = 0$ с $\kappa = 1$ (штриховая кривая) и 0 (сплошная) в (89)

очень чувствительны к «хвостам» функции распределения. Похожие зависимости E , u и P от времени видны на рис. 20 для асимметричного потенциала с двумя минимумами

$$U(q) = -\frac{4(2\Delta U + v)}{L^2}q^2 - \frac{4v}{L^3}q^3 + \frac{8(2\Delta U + v)}{L^4}q^4, \quad (96)$$

где v — абсолютное значение разницы между глубинами двух минимумов. Однако соотношение неопределенности нарушается на более длительном интервале времени в этом случае ($\kappa = 1$). Несмотря на небольшую разницу между энергиями, полученными с $\kappa = 1$ и 0, различие между проникаемостями все еще достаточно большое.

Как и в случае потенциала (96), при низких температурах с симметричным потенциалом с двумя минимумами [55]

$$U(q) = \frac{\xi^2}{8}(\cosh(4\alpha q) - 1) - 4\xi(\cosh(2\alpha q) - 1), \quad (97)$$

где $\xi = 8 - 2\sqrt{\Delta U}$ и $\alpha = -\operatorname{arccosh}(8/\xi)/L$, мы нашли, что соотношение неопределенности при $\kappa = 1$ в (89) выполняется в начальный момент вре-

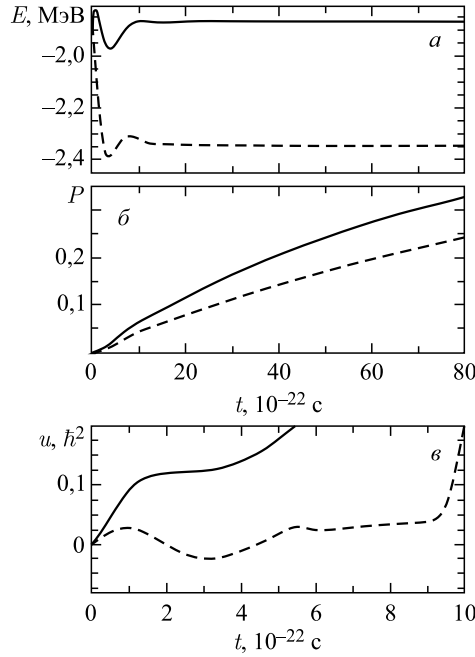


Рис. 21. То же, что и на рис. 20, но для потенциала с двумя минимумами (97) ($\Delta U = 3$ МэВ и $L = 3$ фм)

мени, но затем нарушается в течение некоторого более позднего времени (рис. 21).

Поэтому с коэффициентами диффузии, которые не удовлетворяют условиям (34) в случае потенциалов, отличающихся от потенциала гармонического осциллятора, можно найти примеры нарушения соотношения неопределенности не только на начальной стадии эволюции.

Используя набор коэффициентов диффузии с $D_{qq} = 0$, $D_{pp} \neq 0$ и $D_{pq} < 0$ [51], мы обнаружили нестабильность результатов к малым изменениям параметров. В этом случае изменение коэффициентов диффузии в пределах точности микроскопического вычисления в [51] может привести систему к нефизическому режиму эволюции. С $D_{qq} \neq 0$ результаты вычислений становятся намного устойчивее.

Вычисленная зависимость квазистационарной скорости распада

$$\Lambda(t) = - \int_{-\infty}^0 dq \left(\frac{d\rho(q, t)}{dt} \right) / \int_{-\infty}^0 dq \rho(q, t) \quad (98)$$

нижайшего метастабильного состояния от λ_p в потенциале

$$U(q) = -\frac{3\Delta U}{q_m^2} q^2 + \frac{2\Delta U}{q_m^3} q^3, \quad (99)$$

где q_m — положение минимума, показана на рис. 22. Начальное распределение, соответствующее самому нижайшему состоянию в (99), взято в качестве гауссовского распределения. Значение Λ уменьшается монотонно с λ_p ($\lambda_q = 0$), когда $D_{qq} = 0$. При $D_{qq} \neq 0$ значение Λ первоначально уменьшается с λ_p , но затем увеличивается. Это означает, что при $D_{qq} \neq 0$ и больших значениях λ_p распад метастабильного состояния усиливается. При $D_{qq} \neq 0$ первоначально энергия увеличивается, но потом скорость диссипации становится больше, чем в случае $D_{qq} = 0$. При $D_{qq} \neq 0$ более быстрый рост σ_{qq} способствует также распаду [31].

Спектр излучения определяется формулой

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt t(E(t) - E_{eq}) \sin \omega t, \quad (100)$$

где E_{eq} — энергия равновесного состояния. Спектры излучения для системы, первоначально занимающей пятый уровень в потенциале (92), представлены на рис. 23 при различных коэффициентах трения и диффузии. Для нулевого трения и диффузии система сохраняет свое состояние и $E(\omega) \sim \delta(\omega)$. При маленьких трениях спектры, полученные с $\kappa = 1$ и 0 в (89), фактически совпадают и хорошо аппроксимируются лоренцианами с шириной немного больше, чем λ_p . С увеличением λ_p максимальное абсолютное значение

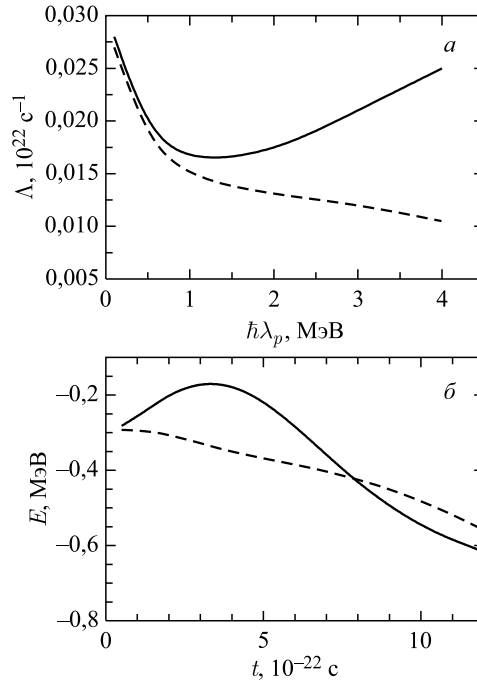


Рис. 22. *a*) Рассчитанная квазистационарная скорость распада нижайшего метастабильного состояния в потенциале (99) ($\Delta U = 1,3$ МэВ и $q_m = -1,23$ фм) как функция коэффициента трения λ_p . *б*) Рассчитанная зависимость от времени t энергии E при выходе скорости распада на квазистационарный предел. Здесь $\lambda_q = 0$, $\bar{p}(0) = 0$, $\sigma_{qq}(0) = 0,2$ фм² и $m = 53m_0$. Вершине барьера соответствует $U = 0$ МэВ и $q = 0$ фм. Представлены результаты вычислений для коэффициентов диффузии (89) с $\kappa = 0$ (сплошная кривая) и 1 (штриховая)

$dE(\omega)/d\omega$ сдвигается в сторону больших значений ω и спектры, полученные с $\kappa = 1$ и 0 в (89), сильно отличаются.

С численным решением уравнения для приведенной матрицы плотности в различных потенциалах мы нашли физические характеристики, которые строго зависят от значения D_{qq} . Проницаемость барьера, а также спектр излучения очень чувствительны к значению D_{qq} . На коротком начальном временном интервале энергия открытой квантовой системы по-разному изменяется в случаях с $D_{qq} \neq 0$ и $D_{qq} = 0$. Нарушение соотношения неопределенности демонстрировалось при $D_{qq} = 0$. Для произвольного потенциала это нарушение может произойти не только в начальном временном интервале. Поэтому описание неравновесного редкого квантового процесса может

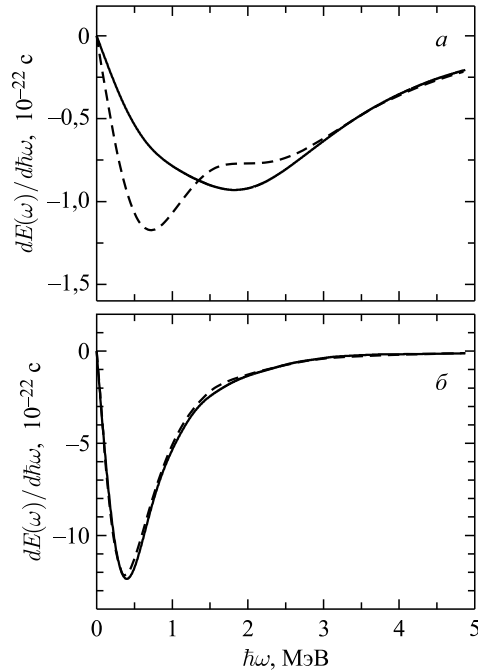


Рис. 23. Расчетные спектры излучения для системы, первоначально занимающей пятый уровень в потенциале (92) ($\Delta U = 1,5$ МэВ, $L = 3$ фм и $m = 53m_0$). Результаты вычислений при $\hbar\lambda_p = 0,5$ МэВ и $\lambda_q = 0$ (б), при $\hbar\lambda_p = 2$ МэВ и $\lambda_q = 0$ (а) с $\kappa = 0$ (сплошная кривая) и $\kappa = 1$ (штриховая) в (89)

быть неправильным с коэффициентами диффузии, которые не удовлетворяют условиям (34).

3. ПРОЦЕСС ЗАХВАТА НАЛЕТАЮЩЕГО ЯДРА ЯДРОМ-МИШЕНЬЮ

3.1. Вероятность захвата. Формализм приведенной матрицы плотности, описанный в разд. 1, впервые применен в ОИЯИ для описания процесса захвата налетающего ядра ядром-мишенью при энергиях бомбардировки около кулоновского барьера. На рис. 24 приведены расчеты ядро-ядерного потенциала для системы $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ при разных значениях углового момента J . С ростом центробежной части потенциала глубина кармана становится меньше, а положение минимума кармана становится ближе к барьеру при $R = R_b$. Значение $R_b \approx R_1 + R_2 + 2$ фм, где R_1 и R_2 — радиусы сталкивающихся ядер. Как видно из рисунка, с увеличением J от 0 до 90 значения глубины и положение (по отношению к барьеру) потенциального

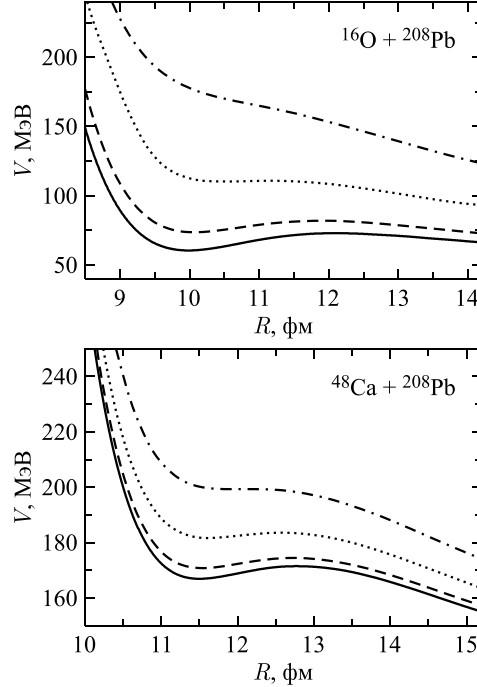


Рис. 24. Ядро-ядерный потенциал взаимодействия как функция от расстояния R между центрами масс сталкивающихся сферических ядер в реакциях ^{16}O , $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ при разных значениях орбитального углового момента: $J = 0$ (сплошная кривая), 30 (штриховая), 60 (пунктирная) и 90 (штрихпунктирная)

кармана изменяются. При больших значениях углового момента потенциальный карман исчезает. Это означает, что для системы $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ угловые моменты $J > J_{\text{max}} = 90$ не дают вклада в сечение захвата.

Захват можно представить как процесс заселения части начального гауссовского пакета, который находится справа от барьера, в левый потенциальный карман (рис. 24). Вероятность захвата определяется отношением

$$P(t = \tau, E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) = \frac{\int_0^0 \rho(R, t = \tau) dR}{\int_0^{\infty} \rho(R, t = 0) dR}. \quad (101)$$

Поскольку движение в правом направлении инфинитно, то со временем устанавливается квазистационарный обратный поток из левого потенциального кармана и τ в формуле (101) определяет время установления квазистационарного режима.

3.2. Сечение захвата. Потенциал взаимодействия двух ядер можно представить в виде

$$V(R, J) = V_{\text{нuc}}(R) + V_{\text{Coul}}(R) + V_{\text{rot}}(R, J), \quad (102)$$

где $V_{\text{нuc}}$, V_{Coul} и V_{rot} соответствуют ядерному, кулоновскому и центробежному потенциалам соответственно. Ядра предполагаются сферическими, и потенциал зависит только от расстояния R между центрами масс сталкивающихся ядер и углового момента J . Для ядерной части ядро-ядерного потенциала взаимодействия используем формализм двойной свертки [56]:

$$V_{\text{нuc}} = \int \rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{R} - \mathbf{r}_2) F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (103)$$

где $F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = C_0 \left[F_{\text{in}} \frac{\rho_0(\mathbf{r}_1)}{\rho_{00}} + F_{\text{ex}} \left(1 - \frac{\rho_0(\mathbf{r}_1)}{\rho_{00}} \right) \right] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ — эффективное нуклон-нуклонное взаимодействие, зависящее от плотности $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r}) + \rho_2(\mathbf{R} - \mathbf{r})$, $F_{\text{in,ex}} = f_{\text{in,ex}} + f'_{\text{in,ex}} \frac{(N_1 - Z_1)(N_2 - Z_2)}{(N_1 + Z_1)(N_2 + Z_2)}$. Здесь $\rho_1(\mathbf{r}_1)$, N_1 , Z_1 [$\rho_2(\mathbf{r}_2)$, N_2 , Z_2] — ядерная плотность, нейтронное, зарядовое числа налетающего ядра (ядра-мишени). В наших расчетах использованы следующие параметры: $C_0 = 300$ МэВ · фм³, $f_{\text{in}} = 0,09$, $f_{\text{ex}} = -2,59$, $f'_{\text{in}} = 0,42$, $f'_{\text{ex}} = 0,54$ и $\rho_{00} = 0,17$ фм⁻³. Для расчета кулоновского и центробежного потенциалов мы используем формулы

$$V_{\text{Coul}} = e^2 \int \frac{\rho_1^z(\mathbf{r}_1) \rho_2^z(\mathbf{R} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (104)$$

и

$$V_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu R^2} \quad (105)$$

соответственно, где ρ_1^z и ρ_2^z — зарядовые плотности ядер. Плотность ядер определяется в форме параметризации Вудса–Саксона, где $r_0 = 1,15$ фм — параметр радиуса ядра и $a = 0,55$ фм — параметр диффузности [56]. Для легких ядер ¹⁶O и ¹⁹F использована $a = 0,53$ фм.

Парциальное и полное сечения захвата (сечения образования двойной ядерной системы) определяются формулами

$$\sigma_c(E_{\text{cm}}, J) = \pi \lambda^2 (2J+1) P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, J), \quad (106)$$

$$\sigma_c(E_{\text{cm}}) = \sum_J \sigma_c(E_{\text{cm}}, J) = \pi \lambda^2 \sum_J (2J+1) P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, J), \quad (107)$$

где $\lambda = \hbar/(2\mu E_{\text{cm}})^{1/2}$ — приведенная длина волны де Бройля.

3.3. Мастер-уравнение для приведенной матрицы плотности. Мастер-уравнение (21) для приведенной матрицы плотности ρ в координатном представлении ($\rho(x, y, t) = \langle x|\rho|y\rangle$) может быть записано как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(x, y, t) &= L(x, y)\rho(x, y, t), \\ L(x, y) &= -i \left[\frac{\hbar}{2\mu}(\partial_{x,x} - \partial_{y,y}) + V(x) - V(y) \right] - \frac{1}{2}\lambda_P(x-y)(\partial_x - \partial_y) - \\ &\quad - \frac{D_{PP}}{\hbar^2}(x-y)^2 - \frac{i}{\hbar}[D_{PR}(\partial_x + \partial_y)(x-y) + (x-y)(\partial_x + \partial_y)D_{PR}], \end{aligned} \quad (108)$$

где использованы обозначения: $\partial_k = \partial/\partial k$, $\partial_{k,k} = \partial^2/\partial^2 k$. Делая следующее преобразование координат

$$x = R + \frac{z}{2}, \quad y = R - \frac{z}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial z} \quad (109)$$

и разлагая потенциал по z

$$V\left(R + \frac{z}{2}\right) - V\left(R - \frac{z}{2}\right) \approx zV'(R) + \frac{1}{24}z^3V'''(R), \quad (110)$$

получаем уравнение для матрицы плотности $\rho(R, z, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(R, z, t) &= L(R, z)\rho(R, z, t), \\ L(R, z) &= i\frac{\hbar}{\mu}\partial_{R,z} - izV'(R) - i\frac{1}{24}z^3V'''(R) - \\ &\quad - \lambda_P z \partial_z - \frac{D_{PP}}{\hbar^2}z^2 - \frac{i}{\hbar}(D_{PR}z\partial_R + \partial_R z D_{PR}). \end{aligned} \quad (111)$$

Для решения (111) используется осцилляторный базис:

$$\begin{aligned} \rho(R, z, t) &= \sum_{k=0}^n f_k(t, R)B_k(\sigma, z), \\ B_k(\sigma, z) &= \frac{i^k}{k!} \left(\frac{k}{2}\right)! \exp\left(-\frac{z^2}{8\sigma^2}\right) H_k\left(\frac{z}{2\sigma}\right), \end{aligned} \quad (112)$$

где $B_k(\sigma, 0) = 1$ и 0 для четных и нечетных k соответственно.

Предлагаемый метод позволяет нам получить ρ для потенциала любой сложности и для любого набора коэффициентов трения и диффузии. Используемые микроскопические коэффициенты диффузии обеспечивают положительность матрицы плотности в любой момент времени и

$$\text{Tr } \rho = \sum_{k=0,2,4,\dots} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, R) dR = 1. \quad (113)$$

В каждом малом интервале по R потенциал $V(R)$ может быть аппроксимирован локальным гармоническим или перевернутым осциллятором с частотой $\omega(R) = \sqrt{\frac{1}{\mu} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right|}$. В случае линейной связи по R между коллективной и внутренней системами выражения для микроскопических коэффициентов диффузии для гармонического осциллятора (знак «+») или перевернутого осциллятора (знак «-») имеют вид

$$D_{PP}(R) = \frac{T\mu\gamma^2\lambda_P}{\gamma(\gamma + \lambda_P) \pm \omega^2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k\gamma\lambda_P \pm \omega^2(\gamma + \nu_k)}{(\gamma + \nu_k)(\nu_k(\nu_k + \lambda_P) \pm \omega^2)} \right), \quad (114)$$

$$D_{PR}(R) = \frac{T\gamma\lambda_P}{2(\gamma(\gamma + \lambda_P) \pm \tilde{\omega}^2)} \left(1 + 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\nu_k\gamma \pm \omega^2}{(\gamma + \nu_k)(\nu_k(\nu_k + \lambda_P) \pm \omega^2)} \right), \quad (115)$$

где $\nu_k = 2\pi T k / \hbar$.

Для зависимости λ_P от R можно использовать известное феноменологическое выражение [26, 27, 72]

$$\lambda_P(R) = \alpha \left| \frac{\partial}{\partial R} V_{\text{нuc}}(R) \right|,$$

где параметр α используется для задания определенной величины $\lambda_P(R_b)$ на вершине кулоновского барьера при $R = R_b$.

3.4. Результаты расчетов. Решая мастер-уравнение (111), находим диагональные элементы $\rho(R, z = 0, t)$ матрицы плотности в координатном представлении. Во всех расчетах в качестве начального состояния используется гауссовский пакет со средней координатой $\langle R(0) \rangle = R_b + 1$ фм и дисперсиями $\sigma_{PR}(0) = 0$, $\sigma_{RR}(0) = 0,25$ фм² и $\sigma_{PP}(0) = 1,0 \hbar^2 \cdot \text{фм}^{-2}$. Начальный средний импульс $\langle P(0) \rangle$ зависит от начальной энергии $E_{\text{см}}$. Диффузионные коэффициенты мастер-уравнения (108) рассчитаны по формулам (114) и (115) при $J = 0$ и $T = 1,2$ МэВ (рис. 25). Следует отметить слабую зависимость вероятности захвата от температуры. Поскольку ядро-ядерное взаимодействие изменяется с угловым моментом, то коэффициенты диффузии являются также функциями J . В области потенциального кармана D_{PP} и D_{PR} достаточно слабо возрастают с увеличением углового момента. Координатная зависимость диффузионных коэффициентов около барьера достаточно слабая.

На рис. 26 приведен расчет зависимости вероятности захвата P от времени. В формуле для начальной кинетической энергии $E_{\text{kin}}(0) = (\langle P(0) \rangle^2 + \sigma_{PP}(0)) / (2\mu)$ учтена энергия, связанная с квантовыми флуктуациями. Полная

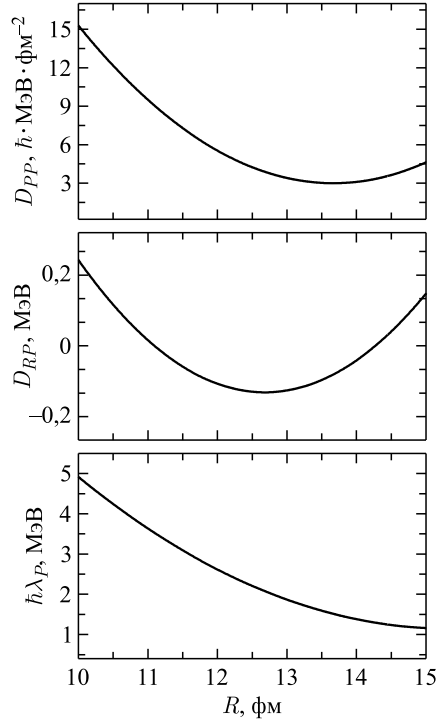


Рис. 25. Зависимости коэффициентов диффузии и трения от относительного расстояния R при $J = 0$ для системы $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$, ядро-ядерный потенциал взаимодействия которой представлен на рис. 24. Параметр α выбран из условия $\hbar\lambda_P(R_b) = 2$ МэВ

энергия коллективной системы отсчитывается от кулоновского барьера, т. е. $\Delta E(0) = E_{\text{cm}} - V(R = R_b, J)$. Как видно из рисунка, время $\tau \approx 2,0 \hbar/\text{МэВ}$ установления квазистационарной скорости потока слабо зависит от трения, углового момента и начального значения полной энергии в рассмотренном диапазоне значений этих величин. При $t > \tau$ значение P экспоненциально падает. Резкое падение потока при больших угловых моментах ($J = 90$, штрихпунктирная линия) связано с очень маленькой глубиной потенциального кармана. При малых угловых моментах значения вероятности захвата при $t = \tau$ близки к максимальному значению $P(t)$ (см. рис. 26).

На рис. 27 приведена зависимость вероятности захвата $P = P(\tau)$ от начальной энергии бомбардировки $\Delta E = E_{\text{cm}} - V(R = R_b, J)$, отсчитываемой от кулоновского барьера при данном угловом моменте J . Вначале с ростом энергии вероятность захвата растет, но дальнейший рост ΔE приводит к уменьшению вероятности, так как при больших надбарьерных энергиях движение пакета становится почти свободным и нечувствительным к наличию

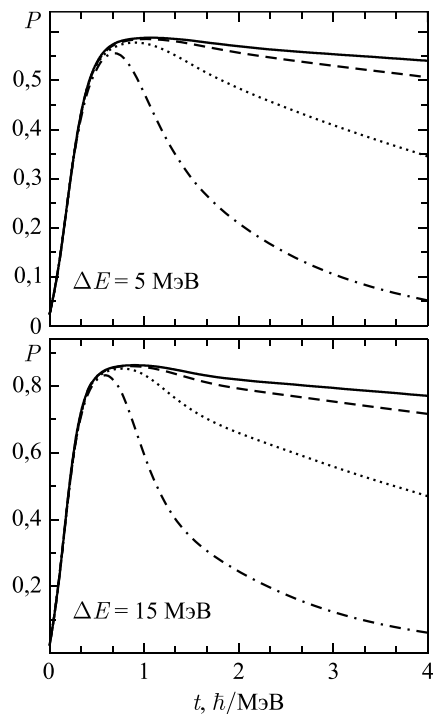


Рис. 26. Вероятность захвата P от времени t при энергии столкновения $\Delta E = E_{\text{cm}} - V(R = R_b, J) = 5$ и 15 МэВ в реакции $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$. Энергия отсчитана от кулоновского барьера при $J = 0$ (сплошная кривая), 30 (штриховая), 60 (пунктирная) и 90 (штрихпунктирная). Параметр α выбран из условия $\hbar\lambda_p(R_b) = 2$ МэВ

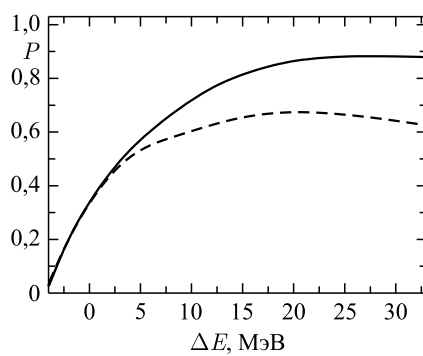


Рис. 27. Вероятность захвата P как функция от энергии столкновения $\Delta E = E_{\text{cm}} - V(R = R_b, J)$, отсчитанной от высоты кулоновского барьера при $J = 0$ (сплошная кривая), 60 (штриховая) в реакции $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$

потенциального кармана. При трении $\hbar\lambda_P = 2$ МэВ и $J = 0$ ($J = 60$) вероятность захвата оказывается максимальной при значении энергии $\Delta E \approx 30$ МэВ (20 МэВ). Надо отметить, что с ростом энергии отношение вероятностей $P(J = 0)/P(J = 60)$ увеличивается, поскольку диссипация энергии больше при $J = 0$, чем при $J = 60$ до установления квазистационарного режима.

На рис. 28 показана зависимость вероятности захвата P от коэффициента трения при двух значениях энергии бомбардировки $\Delta E(0)$ (5 и 15 МэВ) и ширины внутренних возбуждений $\hbar\gamma$ (12 и 20 МэВ). Видно, что зависимость P от γ очень слабая. Как видно из рисунка, с ростом коэффициента трения вероятность захвата сначала увеличивается, однако дальнейший рост коэффициента трения приводит к уменьшению P . Для энергии $\Delta E(0) = 5$ МэВ (15 МэВ) максимальное значение P принимает при трении $\hbar\lambda_P \approx 1,5$ МэВ (2,0 МэВ). Такое поведение связано с тем, что на процесс прохождения пакета через потенциальный барьер влияют два фактора: трение, которое препятствует процессу, и диффузия, которая, наоборот, помогает. С ростом коэффициента трения растет и диффузия, чем и объясняется рост вероятности захвата при малых коэффициентах трения. Однако дальнейший рост трения приводит к уменьшению вероятности захвата. Следует отметить, что диффу-

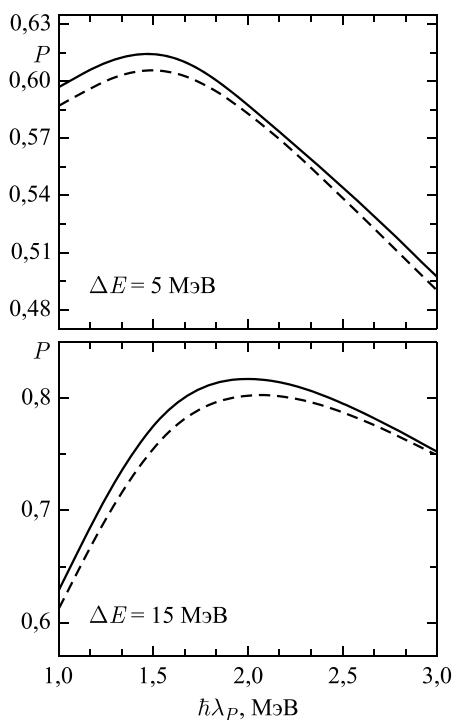


Рис. 28. Вероятность захвата P как функция коэффициента трения $\hbar\lambda_P(R_b)$ в реакции $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ при $\Delta E = 5$ и 15 МэВ, $\hbar\gamma = 12$ МэВ (сплошная кривая) и 20 МэВ (штриховая)

зия является следствием квантово-статистических эффектов и отсутствует в чисто классическом рассмотрении процесса захвата. Из-за диффузии зависимости вероятности захвата от энергии, углового момента и коэффициента трения становятся более плавными. Из изучения реакций глубоконеупругих столкновений извлечено наиболее реалистичное значение коэффициента трения $\hbar\lambda_P \approx 1-2$ МэВ [25, 57]. В этом интервале $\hbar\lambda_P$ значение P меняется достаточно слабо, в пределах 20%. Во всех наших расчетах параметр α выбран из условия $\hbar\lambda_P(R_b) = 2$ МэВ.

На рис. 29 приведена зависимость вероятности захвата от углового момента при различных начальных значениях полной энергии $\Delta E(0) = E_{\text{cm}} - V(R = R_b, J = 0) = 5, 15$ и 30 МэВ. С ростом углового момента J вероятность захвата уменьшается, поскольку глубина потенциального кармана становится меньше. Однако скорость падения вероятности с ростом J зависит от энергии столкновения. Поскольку с увеличением значения $\Delta E(0)$ коллективная энергия относительного движения ядер диссипирует интенсивнее, то уменьшение вероятности захвата с ростом J сильнее при больших значениях $\Delta E(0) > 0$. Заметим, что зависимость P от J достаточно слабая при $J \lesssim 50$.

На рис. 30–32 приведены сравнения вычисленных сечений захвата с имеющимися экспериментальными данными [58–69]. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными почти для всех реакций в диапазоне энергий столкновения ядер: от около 4 МэВ ниже кулоновского барьера до почти 70 МэВ выше барьера. Расхождение между теорией и экспериментом в реакции $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$ можно объяснить следующим образом. Экспериментальное сечение захвата является суммой сечений квазиделения σ_{qf} , слияния-деления σ_{fd} и испарительных остатков σ_{ER} . В реакции $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$ последние два сечения очень маленькие (из-за очень маленькой вероятности слияния) и ими можно пренебречь. Поэтому возникает вопрос, насколько корректно в эксперименте разделены продукты квазиделения от упругих и глубоконеупругих продуктов. В системе $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$ потенциальный минимум по координате зарядовой (массовой) асимметрии препятствует

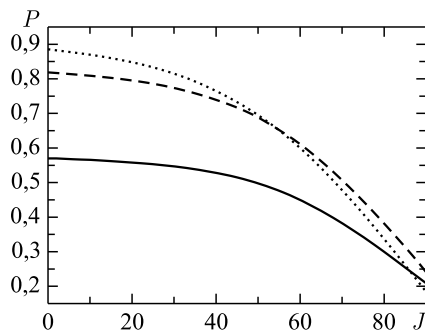


Рис. 29. Вероятность захвата P как функция от орбитального углового момента J при $\Delta E(0) = 5$ МэВ (сплошная кривая), 15 МэВ (штриховая) и 30 МэВ (пунктирная) в реакции $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$. Энергия $\Delta E(0)$ отсчитана от кулоновского барьера при $J = 0$, $\hbar\lambda_P = 2$ МэВ

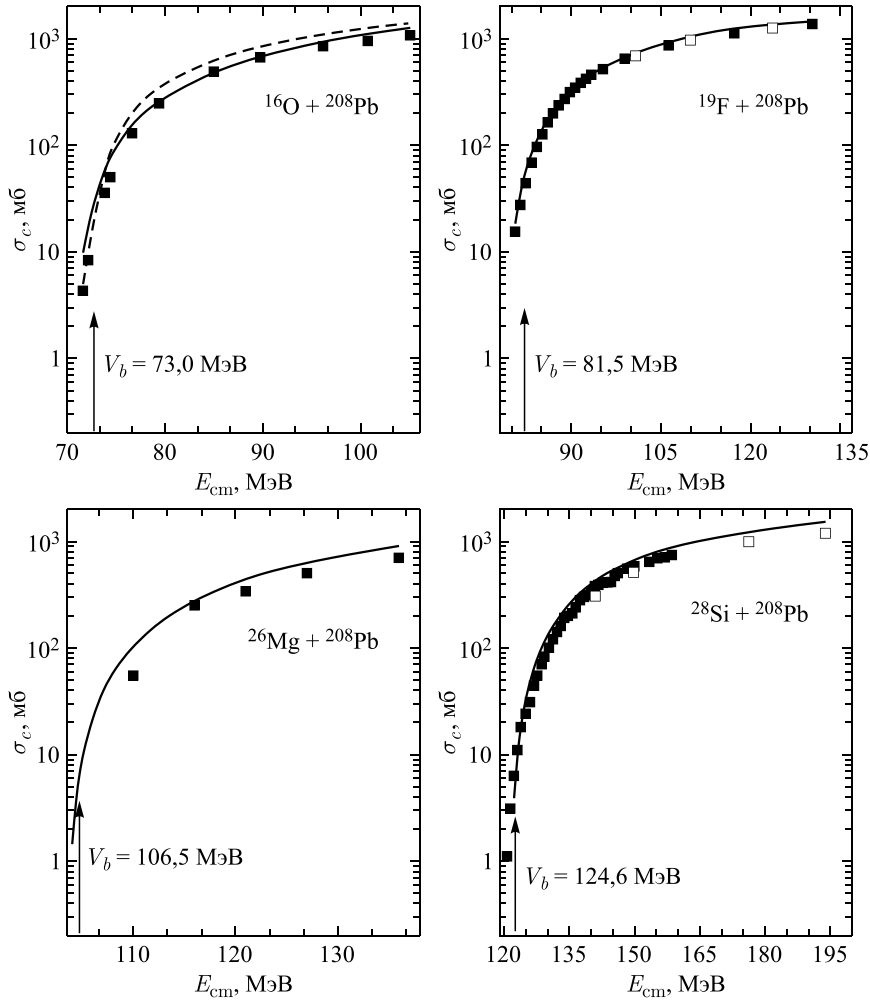


Рис. 30. Рассчитанные сечения захвата (сплошные кривые) для указанных реакций. Экспериментальные данные — из [58] для реакции $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$, из [59] (темные символы) и [60] (светлые символы) для реакции $^{19}\text{F} + ^{208}\text{Pb}$, из [61] для реакции $^{26}\text{Mg} + ^{208}\text{Pb}$, из [62] (темные символы) и [60] (светлые символы) для реакции $^{28}\text{Si} + ^{208}\text{Pb}$. Для реакции $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ показаны сечения захвата, вычисленные с помощью формулы Вонга (116) (штриховая кривая)

скачиванию этой системы в более симметричные конфигурации, и поэтому существует большая вероятность распада (квазиделения) данной конфигурации. Основной вклад в квазиделение вносят продукты с зарядовой (массовой) асимметрией около входного канала [70]. Однако в эксперименте очень

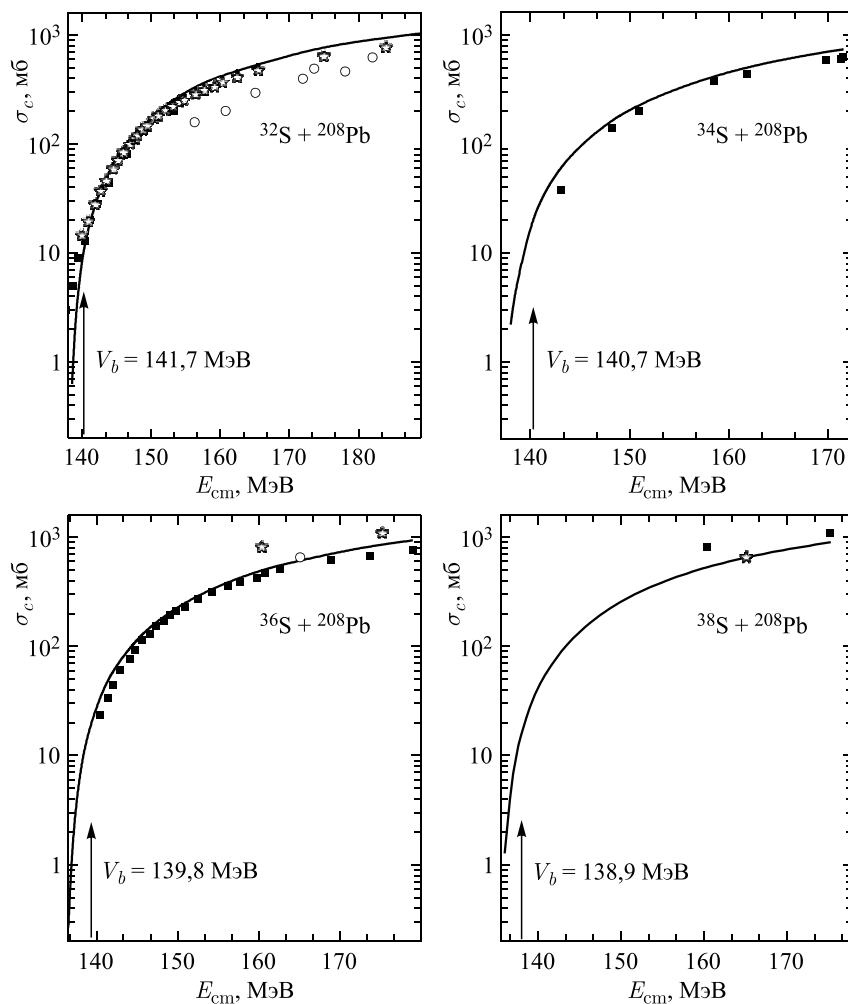


Рис. 31. Рассчитанные сечения захвата (сплошные кривые) для указанных реакций. Экспериментальные данные — из [63] (темные символы), [64] (звездочки) и [65] (кружки) для реакции $^{32}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$, из [64] для реакции $^{34}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$, из [64] (темные символы) и [65] (звездочки и светлые символы) для реакции $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$, из [65] (темные квадраты и звездочки) для реакции $^{38}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$

сложно отделить продукты квазиделения от упругих и глубоконеупругих процессов. Можно предположить, что в работе [61] вклад продуктов квазиделения около входного канала был недооценен. С ростом энергии бомбардировки и, соответственно, энергии возбуждения во входном канале вероятность перехода начальной системы в более симметричную конфигурацию растет и

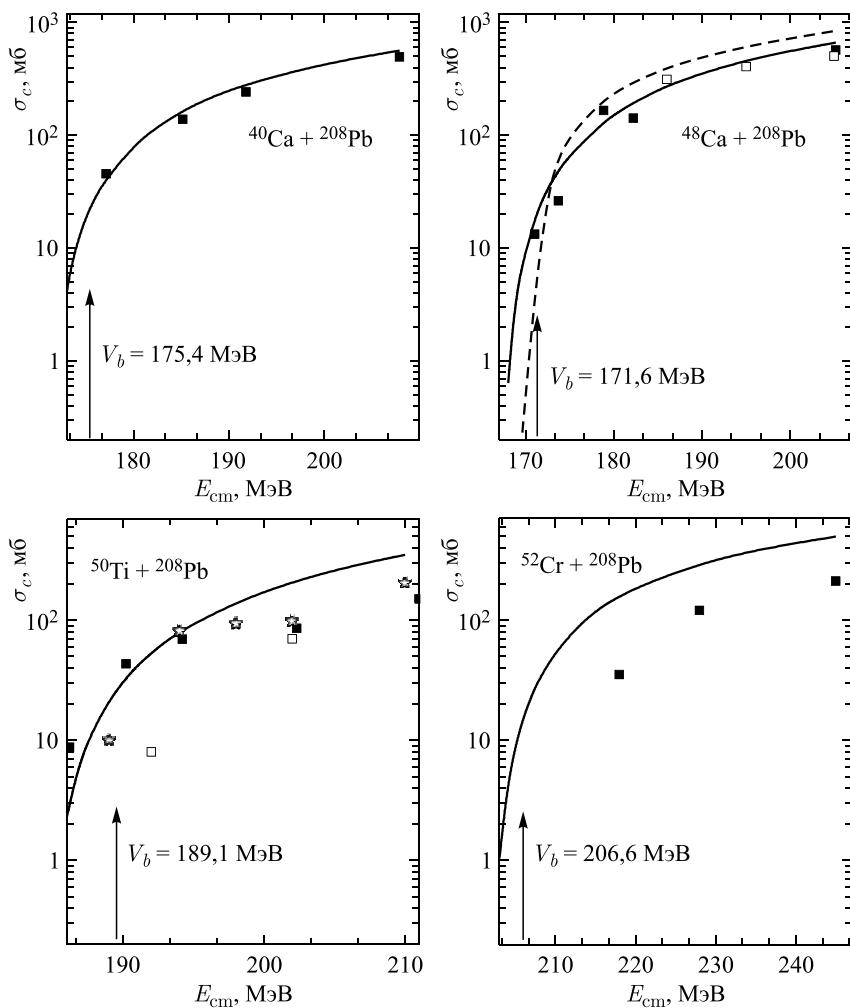


Рис. 32. Рассчитанные сечения захвата (сплошные кривые) для указанных реакций. Экспериментальные данные — из [66] для реакции $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$, из [66] (темные символы) и [67] (светлые символы) для реакции $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$, из [68] (темные символы), [61] (светлые символы) и [69] (звездочки) для реакции $^{50}\text{Ti} + ^{208}\text{Pb}$, из [61] для реакции $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$. Для реакции $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ показаны сечения захвата, вычисленные с помощью формулы Вонга (116) (штриховая кривая)

вклад продуктов квазиделения около входного канала уменьшается (однако остается значительным). Можно видеть, что расхождение между теорией и экспериментом уменьшается с ростом энергии столкновения ядер.

Одним из основных критериев достоверности измеренного сечения захвата является зависимость $\sigma_c E_{cm}/(\pi R_b^2 \hbar \omega_b)$ от $(E_{cm} - V_b)/(\hbar \omega_b)$ [71]. На рис. 33 приведена зависимость экспериментальных и рассчитанных значений этого отношения. Из-за эффекта входного канала появляется разница в абсолютной величине сечения захвата. Как видно из рис. 33, в реакциях с более легкими бомбардирующими ядрами величина $\sigma_c E_{cm}/(\pi R_b^2 \hbar \omega_b)$ больше. Причина этого в том, что в таких реакциях карман ядро-ядерного потенциала взаимодействия глубже и шире. В реакциях с относительно легкими ядрами ^{16}O , ^{19}F , ^{26}Mg , ^{28}Si , $^{32,34,36}\text{S}$ и $^{40,48}\text{Ca}$ экспериментальные точки при данной $(E_{cm} - V_b)/(\hbar \omega_b)$ распределены в достаточно узкой области. Можно предпо-

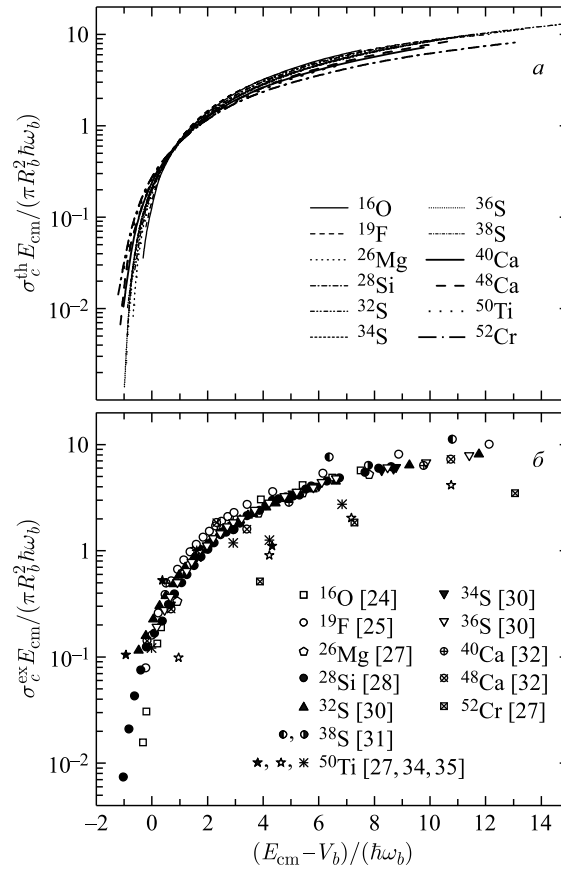


Рис. 33. Зависимость рассчитанных (а) и экспериментальных (б) значений $\sigma_c E_{cm}/(\pi R_b^2 \hbar \omega_b)$ от $(E_{cm} - V_b)/(\hbar \omega_b)$ для реакций с ^{208}Pb -мишенью и указанными налетающими ядрами, где $V_b = V(R = R_b, J = 0)$

ложить, что зависимость $\sigma_c E_{\text{cm}} / (\pi R_b^2 \hbar \omega_b)$ от $(E_{\text{cm}} - V_b) / (\hbar \omega_b)$ универсальна для всех реакций при $E_{\text{cm}} \geq V_b$. В относительно тяжелых системах ^{50}Ti , $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$, где процесс полного слияния сильно подавлен, а квазиделение усилено около входного канала, экспериментальные точки сильно отклоняются от этой узкой области. Как было отмечено выше, это может быть связано с экспериментальной сложностью определения квазиделения около входного канала. Надо отметить, что для реакции $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$ экспериментальное σ_c может быть воспроизведено, если статический кулоновский барьер заменить эффективным динамическим барьером [72]. Такой сдвиг статического барьера называется эффектом «extra-push». Однако экспериментальные данные по холодному слиянию в реакциях с ^{208}Pb - и ^{209}Bi -мишенями указывают на отсутствие этого эффекта во входном канале [73]. Поэтому использование сдвига барьера приведет к сильной недооценке реального значения σ_c .

В рассмотренных реакциях сечение захвата вначале увеличивается с ростом E_{cm} , однако потом уменьшается пропорционально $1/E_{\text{cm}}$. В нашей модели предполагается, что захват происходит для всех значений J (от $J = 0$ до $J = J_{\text{crit}}$), при которых потенциальный карман существует в пределе полного слияния. Когда J_{crit} становится меньше, чем максимальный угловой момент J_{max} при данной E_{cm} , сечение захвата начинает уменьшаться при больших энергиях E_{cm} . Это означает, что существует ограничение на захват из-за эффекта входного канала. При $J \geq J_{\text{crit}}$ сумма центробежных и кулоновских сил компенсирует ядерные силы. При $J < J_{\text{crit}}$ продукты распада около входного канала — в основном продукты квазиделения. Для реакций $^{54}\text{Fe} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$ сечение захвата достигает своего максимального значения при $E_{\text{cm}} \approx 250$ и 260 МэВ соответственно, т.е. при энергиях, не сильно превышающих высоту кулоновского барьера (рис. 34). Также на рисунке продемонстрирована чувствительность положения этого максимума к глубине потенциального кармана. Для реакции $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$ с увеличением глубины потенциального кармана на $0,5$ МэВ абсолютное значение σ_c слегка увеличивается, а положение максимума сдвигается на ~ 10 МэВ в сторону больших энергий. Было бы интересно экспериментально измерить такую зависимость сечения захвата от энергии бомбардировки для реакции $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$. Это позволит извлечь значение глубины потенциального кармана во входном канале. Кроме того, можно также попытаться ответить на вопрос, является ли захват diabатическим или адиабатическим процессом, так как потенциал чувствителен к динамике взаимодействия.

Для реакций ^{16}O , ^{48}Ca , $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$ мы сравнили результаты наших расчетов с сечениями захвата, полученными с помощью формулы Вонга [72]

$$\sigma_c(E_{\text{cm}}) = \frac{\hbar \omega_b R_b^2}{2E_{\text{cm}}} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{2\pi(E_{\text{cm}} - V_b)}{\hbar \omega_b} \right) \right], \quad (116)$$

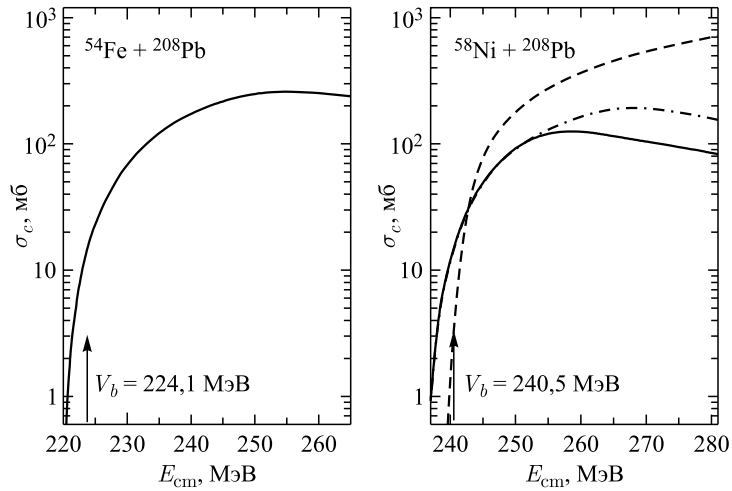


Рис. 34. Рассчитанные сечения захвата (сплошные кривые) в реакциях $^{54}\text{Fe} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$. Для реакции $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$ показаны сечения захвата, вычисленные с помощью формулы Вонга (116) (штриховая кривая). Рассчитанные σ_c в случае увеличения глубины потенциального кармана на 0,5 МэВ (штрихпунктирная кривая)

где ядро-ядерный потенциал взаимодействия аппроксимирован перевернутым осциллятором с частотой $\omega = \omega(R = R_b)$ и высотой барьера $V_b = V(R = R_b, J = 0)$. Надо отметить, что уравнение (116) не предполагает ограничения захвата по угловому моменту. Это может привести к переоценке сечения захвата при больших энергиях (рис. 30, 32 и 34).

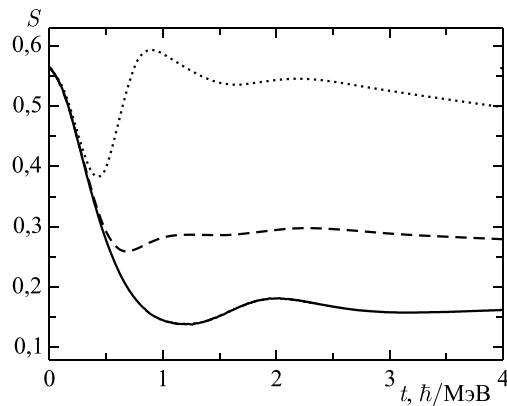


Рис. 35. Линейная энтропия (117) как функция времени при $\Delta E(0) = -2$ МэВ (сплошная кривая), 5 МэВ (штриховая) и 15 МэВ (пунктирная)

На рис. 35 показана зависимость линейной энтропии от времени

$$S(t) = 1 - \text{Tr}(\rho^2(t)) \quad (117)$$

для реакции $^{48}\text{Ca} + 4\ ^{208}\text{Pb}$ при $\Delta E(0) = -2, 5$ и 15 МэВ. При $\Delta E(0) = 5$ МэВ энтропия достигает максимального значения при $t \approx 0,8 \hbar/\text{МэВ}$, что соответствует времени перехода через барьер. Когда пакет достигает потенциальной ямы, энтропия принимает минимальное значение. Это означает, что минимальное и максимальное значения энтропии определяют наиболее стабильное и наиболее нестабильное положения потенциальной энергии системы. Надо заметить, что уменьшение энтропии связано с явлением декогеренции в квантовой системе. Отсюда следует, что значение декогеренции увеличивается с ростом E_{cm} .

4. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ КРАМЕРСА

Прохождение диссипативной системы через потенциальный барьер является интересной квантово-механической проблемой и имеет много приложений, например, в ядерной физике, где вычисляются скорости вероятности слияния или деления. В [2, 14, 31, 33, 50, 52, 55, 74–78] найдено, что скорость распада сильно зависит от связи системы со средой. Можно вычислить скорость распада, решая уравнение для приведенной матрицы плотности $\hat{\rho}$ как функции коллективной координаты q , вдоль которой происходит распад.

Поскольку точное аналитическое решение (21) существует для потенциала U гармонического и перевернутого осцилляторов [9, 10, 15], численные, а также приближенные аналитические методы вычисления скорости распада $\Lambda(t)$ должны быть использованы для более сложных потенциалов. В данном разделе мы изучаем влияние трения и диффузии на значение $\Lambda(t)$. Численные значения Λ для квазистационарных потоков сравниваются с потоками, полученными с помощью аналитических выражений типа формулы Крамерса. Для различных потенциальных барьеров изучены переходные времена τ для достижения квазистационарного режима.

4.1. Вывод обобщенной формулы Крамерса для скорости распада. Решая (21), можно получить зависящую от времени матрицу плотности $\rho(q, t) = \langle q | \hat{\rho}(t) | q \rangle$ в координатном представлении и найти вероятность $P(t)$ проницаемости системы с массовым параметром m через потенциальный барьер при $q = q_b$ и скорость распада $\Lambda(t)$. Скорость вероятности становится квазистационарной ($\Lambda(t) \rightarrow \Lambda$) через некоторое переходное время τ , в течение которого $\Lambda(t)$ достигает 90% своего асимптотического значения. Уравнение (21) можно решить, используя осцилляторный базис [32]. Этот метод позволяет получить решение (21) для любого потенциала.

Интересно сравнить численные значения Λ со значениями, полученными с помощью обобщенной формулы Крамерса. Известная формула Крамерса [79–81] для квазистационарной скорости распада через барьер соответствует диффузионному уравнению Фоккера–Планка, где $\lambda_q = 0$ и $D_{qq} = D_{pq} = 0$. Потенциал около минимума ($q = 0$) и на вершине барьера ($q = q_b$), как предполагается, аппроксимирован осцилляторами $U(q) = m\omega_m^2 q^2/2 - \Delta U$ и $U(q) = -m\omega_b^2 q'^2/2$ соответственно, где ΔU — высота барьера и $q' = q - q_b$. Поскольку λ_q , главным образом, приводит к перенормировке потенциала [15], мы считаем, что $\lambda_q = 0$, и получаем формулу Крамерса для случая $D_{qq} \neq 0$ и $D_{pq} \neq 0$.

Для потенциала $U(q)$, квадратичного по q , например потенциала гармонического или перевернутого осциллятора, можно показать [32], что (21) приводится к следующему уравнению типа Фоккера–Планка для функции Вигнера $W(q, p, t)$ [6, 9, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{dU}{dq} \frac{\partial W}{\partial p} + \lambda_p \frac{\partial}{\partial p}(pW) + \lambda_q \frac{\partial}{\partial q}(qW) + \\ & + D_{qq} \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + D_{pp} \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + 2D_{pq} \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial p}. \end{aligned} \quad (118)$$

Отбрасываемый в уравнении (118) член $\frac{2}{\hbar} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{(\hbar/2)^{2l+1}}{(2l+1)!} \frac{\partial^{2l+1} U(q)}{\partial q^{2l+1}} \times \frac{\partial^{2l+1} W}{\partial p^{2l+1}}$ важен при описании квантового туннелирования через потенциальный барьер. По аналогии со случаем $D_{qq} = 0$ и $D_{pq} = 0$ в [79] мы ищем квазистационарное решение уравнения (118) с $\lambda_q = 0$ на барьере в виде

$$W(q, p) = C_0 F(q, p) \exp[-\alpha p^2 - \beta(q - q_b)^2 + \gamma p(q - q_b)]. \quad (119)$$

Фактор $F(q, p)$, введенный впервые Крамерсом [79], должен учитывать физическую ситуацию, когда система локализована в основном около минимума при $q = 0$ и практически отсутствует в области барьера с $q > q_b$. Поэтому $F(q, p)$ должен приводить к определенной асимметрии в распределении Вигнера. Постоянная C_0 будет определена ниже.

Подставляя (119) в (118) ($\lambda_q = 0$), получаем уравнение для функции F . Чтобы исключить из этого уравнения члены, линейные по F , параметры α , β и γ в (119) должны быть выбраны так, чтобы выполнялось следующее тождество ($\lambda_q = 0$, $q' = q - q_b$):

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{p}{m} (-\gamma p + 2\beta q') + m\omega_b^2 q' (-\gamma q' + 2\alpha p) + \lambda_p (1 - 2\alpha p^2 + \gamma p q') + \\ & + D_{qq} [(-\gamma p + 2\beta q')^2 - 2\beta] + D_{pp} [(-\gamma q' + 2\alpha p)^2 - 2\alpha] + \\ & + 2D_{pq} (-\gamma q' + 2\alpha p)(-\gamma p + 2\beta q') + 2D_{pq} \gamma. \end{aligned} \quad (120)$$

Уравнение (120) приводится к простой системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 \lambda_p - 2\beta D_{qq} - 2\alpha D_{pp} + 2\gamma D_{pq} &= 0, \\
 -\frac{\gamma}{m} - 2\lambda_p \alpha + \gamma^2 D_{qq} + 4\alpha^2 D_{pp} - 4\alpha \gamma D_{pq} &= 0, \\
 -m\omega_b^2 \gamma + 4D_{qq} \beta^2 + D_{pp} \gamma^2 - 4D_{pq} \beta \gamma &= 0, \\
 \frac{2\beta}{m} + 2m\omega_b^2 \alpha + \lambda_p \gamma - 4D_{qq} \beta \gamma - 4D_{pp} \alpha \gamma + 2D_{pq} (4\alpha \beta + \gamma^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{121}$$

Одно из этих четырех уравнений может быть выражено через остальные. Например, используя первое уравнение для упрощения четвертого уравнения, умножая результат на γ и добавляя третье уравнение, умноженное на α , мы получаем второе уравнение. Решение системы уравнений (121) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2D_{pp}} (\lambda_p - 2\beta D_{qq} + 2\gamma D_{pq}), \\
 \beta &= \frac{D_{pq}}{2D_{qq}} \gamma - \frac{1}{2D_{qq}} \sqrt{\gamma^2 D_{pq}^2 + \gamma D_{qq} (m\omega_b^2 - \gamma D_{pp})}, \\
 \gamma &= \frac{\lambda_p^2 m^3 \omega_b^2 D_{qq}}{(D_{pp} - m^2 \omega_b^2 D_{qq})^2 + m^2 \lambda_p^2 D_{pp} D_{qq} + 2m \lambda_p D_{pq} (D_{pp} - m^2 \omega_b^2 D_{qq})}.
 \end{aligned} \tag{122}$$

Эти выражения получены при условии $D_{pp} - m^2 \omega_b^2 D_{qq} + m \lambda_p D_{pq} \geq 0$. Если это условие не выполняется, уравнение для F имеет более сложный вид и результаты, полученные ниже, являются лишь приближениями.

Как и в работе [79], около барьера функция $F = F(\eta)$ зависит только от $\eta = p - aq'$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}
 \left[-a \frac{p}{m} + m\omega_b^2 q' - \lambda_p p - 2a D_{qq} (2\beta q' - \gamma p) + 2D_{pp} (2\alpha p - \gamma q') + 2D_{pq} (2\beta q' - \gamma p) - \right. \\
 \left. - 2a D_{pq} (2\alpha p - \gamma q') \right] \frac{\partial F}{\partial \eta} = [a^2 D_{qq} + D_{pp} - 2a D_{pq}] \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}.
 \end{aligned} \tag{123}$$

В левой части этого уравнения выражение в квадратных скобках может быть представлено как $-h\eta$, где

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\lambda_p}{2} - \frac{A+B}{2} + \left[\left(\frac{\lambda_p}{2} - \frac{A-B}{2} \right)^2 + I \right]^{1/2}, \\
 A &= 4\alpha D_{pp} - 2\gamma D_{pq}, \\
 B &= 4\beta D_{qq} - 2\gamma D_{pq},
 \end{aligned} \tag{124}$$

$$I = [m\omega_b^2 - 2\gamma D_{pp} + 4\beta D_{pq}] \left[\frac{1}{m} - 2\gamma D_{qq} + 4\alpha D_{pq} \right],$$

$$a = \frac{m\omega_b^2 - 2\gamma D_{pp} + 4\beta D_{pq}}{h + B}.$$

Поэтому решение (123) имеет вид

$$F(\eta) = \left(\frac{h}{2\pi g} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(-\frac{hy^2}{2g}\right) dy, \quad (125)$$

где $g = a^2 D_{qq} + D_{pp} - 2aD_{pq}$. Здесь $F(0) = 1/2$ и $F(\infty) = 1$, $F(\eta) \approx 1$ при отрицательных значениях $q' < 0$ и $F(\eta) \approx 0$ при больших положительных значениях $q' > 0$.

Стационарная нормированная функция Вигнера около потенциального минимума может быть представлена формулой для гармонического осциллятора [9, 10, 15]

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma}(\sigma_{qq}p^2 + \sigma_{pp}q^2 - 2\sigma_{pq}pq)\right], \quad (126)$$

где $\sigma = \sigma_{pp}\sigma_{qq} - \sigma_{pq}^2$. Используя выражения $q^2 = \frac{2}{m\omega_m^2}(U(q) + \Delta U)$ и $q = \frac{1}{m\omega_m^2} \frac{dU(q)}{dq}$, получаем

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\Delta U \sigma_{pp}}{m\omega_m^2 \sigma}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma} \left(\sigma_{qq}p^2 + \sigma_{pp} \frac{2U(q)}{m\omega_m^2} - 2\sigma_{pq}p \frac{dU/dq}{m\omega_m^2} \right)\right]. \quad (127)$$

Стационарные дисперсии по координате q и импульсу p для U , аппроксимированного осциллятором около минимума, имеют вид [9, 10, 15]

$$\sigma_{qq} = \frac{1}{m^2\omega_m^2\lambda_p} [D_{pp} + 2m\lambda_p D_{pq} + m^2(\lambda_p^2 + \omega_m^2)D_{qq}],$$

$$\sigma_{pp} = \frac{1}{\lambda_p} [D_{pp} + m^2\omega_m^2 D_{qq}], \quad (128)$$

$$\sigma_{pq} = -mD_{qq}.$$

Затем необходимо шить распределение Вигнера (127) около минимума с распределением (119) около барьера. Здесь мы используем процедуру Крамера [79], устанавливая $F = 1$, что является хорошим приближением для случая $q < q_b$, и предполагаем, что экспоненциальные множители, зависящие

от координаты и импульса, равны при определенном q -значении в интервале $0 < q < q_b$. Это приводит к следующему выражению для C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} \exp \left[-\frac{\Delta U \sigma_{pp}}{m\omega_m^2 \sigma} \right].$$

Вероятность в единицу времени пересечь барьер в направлении положительных q -значений получена с помощью интеграла

$$\Lambda = \int_0^{\infty} dp \frac{p}{m} W(q = q_b, p). \quad (129)$$

В качестве нижней границы данного интеграла можно взять $-\infty$, так как фактор $F(\eta = p)$ сильно уменьшает значение функции Вигнера при отрицательных значениях p . В итоге получаем скорость распада из метастабильного потенциала

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi m \alpha \sqrt{\sigma}} \left(\frac{h}{2g\alpha + h} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\Delta U \sigma_{pp}}{m\omega_m^2 \sigma} \right]. \quad (130)$$

Вместо (119) можно предположить квазистационарное решение (118) на барьере и постоянную C_0 в форме

$$W(q, p) = C_0 F(q, p) \exp \left[-\left(\frac{p^2}{2m} + U \right) / T_{\text{eff}} \right], \quad (131)$$

$$C_0 = \frac{\omega_m}{2\pi T_{\text{eff}}} \exp \left[-\frac{\Delta U}{T_{\text{eff}}} \right],$$

где $U = -m\omega_b^2 q^2/2$, $T_{\text{eff}} = \sigma_{pp}/(2m) + m\omega_m^2 \sigma_{qq}/2$. Подставляя (131) в уравнение Фоккера–Планка (118), мы упрощаем дифференциальное уравнение для F , опуская члены, линейные по F . В этом случае мы не ищем точное решение для $F(p, q)$, предполагая малость вкладов от членов, линейных по F , в дифференциальном уравнении, чтобы иметь его решение в виде (125). Тогда мы получаем выражение для скорости распада (130), в котором значения α , β и γ определены следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2mT_{\text{eff}}}, \quad \beta = \frac{-m\omega_b^2}{2T_{\text{eff}}}, \quad \gamma = 0 \quad (132)$$

и $\sigma = \left(\frac{T_{\text{eff}}}{\omega_m} \right)^2$, $\sigma_{pp} = mT_{\text{eff}}$. В результате сделанных приближений выражение (130) с (132) можно использовать для любого набора диффузионных коэффициентов.

В случае $D_{qq} = 0$ и $D_{qp} \neq 0$ мы получим первый вариант формулы Крамерса:

$$\Lambda^I = \frac{D_{pp}\omega_m}{2\pi\sqrt{D_{pp}(D_{pp} + 2\mu\lambda_p D_{qp})}} \left(\frac{h}{\lambda_p - \frac{2\mu\lambda_p\omega_b^2 D_{qp}}{h(D_{pp} + 2\mu\lambda_p D_{qp})} + h} \right)^{1/2} \times \exp\left[-\frac{\Delta U\mu\lambda_p}{D_{pp} + 2\mu\lambda_p D_{qp}}\right], \quad (133)$$

где $h = -\lambda_p/2 + (\lambda_p^2/4 + \omega_b^2)^{1/2}$ и ω_b — частота перевернутого осциллятора, которым аппроксимирован барьер.

Второй вариант формулы Крамерса имеет вид

$$\Lambda^{II} = \frac{\omega_m}{2\pi} \left(\frac{h}{\frac{D_{pp}}{\mu T_{\text{eff}}} - \frac{2\omega_b^2 D_{qp}(1 - 2D_{qp}/T_{\text{eff}})}{h T_{\text{eff}}} + h} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\Delta U}{T_{\text{eff}}}\right], \quad (134)$$

где $T_{\text{eff}} = (D_{pp} + \mu\lambda_p D_{qp})/(\mu\lambda_p)$ и $h = \lambda_p/2 - D_{pp}/(\mu T_{\text{eff}}) + [(\lambda_p/2 - D_{pp}/(\mu T_{\text{eff}}))^2 + \omega_b^2(1 - 4D_{qp}^2/T_{\text{eff}}^2)]^{1/2}$. При $D_{qp} = 0$ уравнения (133) и (134) можно упростить до известной формулы Крамерса [79] для скорости вероятности распада через потенциальный барьер

$$\Lambda^{\text{Kr}} = \frac{k\omega_m}{2\pi} \exp\left[-\frac{\Delta U}{\mu\omega_m^2\sigma_{qq}}\right], \quad (135)$$

где $k = \sqrt{1 + \frac{\lambda_p^2}{4\omega_b^2} - \lambda_p/(2\omega_b)}$.

Таким образом, (130) обобщает формулу Крамерса включением в рассмотрение всевозможных коэффициентов диффузии. Сравнение значений Λ , вычисленных с помощью (130), (122) и (130), (132) с асимптотическими значениями $\Lambda(t)$, полученными из численных расчетов, позволит нам проверить правильность предположений, сделанных при выводе формулы (130).

В случае очень маленьких λ_p , как и в [79], можно получить аналитическое выражение

$$\Lambda^{\text{W}} = \frac{m\omega_m\lambda_p^2 I_b}{2\pi(D_{pp} + (m\omega_m)^2 D_{qq})} \exp\left[-\frac{m\lambda_p\Delta U}{D_{pp} + (m\omega_m)^2 D_{qq}}\right], \quad (136)$$

которое справедливо при $\lambda_p I_b \ll (D_{pp} + (m\omega_m)^2 D_{qq})/(m\lambda_p)$, т. е. в пределе очень малой вязкости, где $\lambda_p I_b$ — значение потери энергии за один оборот в потенциальной яме. Классический интеграл действия $I_b \approx 2\pi\Delta U/\omega_m$ при энергии около барьера вычислен в приближении гармонического осциллятора.

4.2. Альтернативный метод вывода формулы скорости распада. Используя (118), мы получаем формулы для первых моментов (здесь $m = 1$): $\dot{q} = p, \dot{p} = -U'(q) - \lambda_p p$. В гармонической области барьера сепаратриса L для данной динамики дается в виде $p(q|L) = -(\omega_b/k)q'$ [81]. Движение на барьере нестабильно в направлении, перпендикулярном к L , и устойчиво по отношению к аттрактору M , который дается в виде $p(q|M) = k\omega_b q'$. Поэтому мы вводим новые координаты $\eta = q' + p/\omega_2$ и $\psi = q' - p/\omega_1$ с $\omega_1 = k\omega_b$ и $\omega_2 = \omega_b/k$, чтобы движение на барьере вдоль η было нестабильно, а вдоль ψ — устойчиво. Преобразование от (q', p) к (η, ψ) приводит к диффузионному уравнению ($D_{pq} = 0$ и $\lambda_q = 0$)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\omega_1 \frac{\partial \eta W}{\partial \eta} + \omega_2 \frac{\partial \psi W}{\partial \psi} + D_{\eta\eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + D_{\psi\psi} \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + 2D_{\eta\psi} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \psi}, \quad (137)$$

где $D_{\eta\eta} = D_{qq} + D_{pp}/\omega_2^2$, $D_{\psi\psi} = D_{qq} + D_{pp}/\omega_1^2$ и $D_{\eta\psi} = D_{qq} - D_{pp}/(\omega_1\omega_2)$. Отобразим функцию $W(\eta, \psi, t)$ на $Q(\tilde{\eta}, \tilde{\psi}, t)$ таким образом, чтобы в новом уравнении компонента тензора диффузии по нестабильной координате η стала равной нулю. Введя интегральное преобразование Гаусса [81]

$$Q(\tilde{\eta}, \tilde{\psi}, t) = \left(\frac{K}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \exp(-K(\tilde{\psi} - \psi)^2) W(\tilde{\eta} + k^2(\tilde{\psi} - \psi), \psi, t), \quad (138)$$

где $K = \frac{k^5 \omega_b}{2(D_{pp}k^2 + D_{qq}\omega_b^2)}$, получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\omega_1 \frac{\partial \tilde{\eta} Q}{\partial \tilde{\eta}} + \omega_2 \frac{\partial \tilde{\psi} Q}{\partial \tilde{\psi}} + D_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}} \frac{\partial^2 Q}{\partial \tilde{\psi}^2} + 2D_{\tilde{\eta}\tilde{\psi}} \frac{\partial^2 Q}{\partial \tilde{\eta} \partial \tilde{\psi}}, \quad (139)$$

где $D_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = 0$, $D_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}} = \frac{(k^2 + 1)(D_{pp}k^2 + D_{qq}\omega_b^2)}{k^6\omega_b^2}$ и

$$D_{\tilde{\eta}\tilde{\psi}} = \frac{(k^2 + 1)(D_{qq}\omega_b^2(2k^2 - 1) - D_{pp}k^2)}{2k^4\omega_b^2}.$$

Фазовое пространство $(\tilde{\eta}, \tilde{\psi})$ может быть встроено в трехмерное пространство $(\epsilon, \tilde{\eta}, \tilde{\psi})$ [81]. В этом расширенном пространстве мы определяем функцию $R(\epsilon, \tilde{\eta}, \tilde{\psi}, t)$ следующим образом:

$$Q(\tilde{\eta}, \tilde{\psi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon R(\epsilon, \tilde{\eta}, \tilde{\psi}, t). \quad (140)$$

Введя новые координаты $u = (1/2)(\tilde{\eta} - \epsilon)$, $w = \tilde{\psi} - \epsilon^2/k$ и $E = (1/2)\omega_1\tilde{\eta}\epsilon$, получаем

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -v \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{\partial J}{\partial w}, \quad (141)$$

$$J = -\frac{1}{2}k^2 D_{ww} \frac{\partial R}{\partial u} + \omega_2 \left(wR + \frac{1}{\beta_w} \frac{\partial R}{\partial w} \right) + \frac{\lambda_p}{k^2} \left(u - \frac{v}{\omega_1} \right) \left(R + \frac{1}{\beta_E} \frac{\partial R}{\partial E} \right).$$

Здесь $v = \sqrt{2E + \omega_1^2 u^2}$, $D_{ww} = D_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}$, $\frac{1}{\beta_w} = \frac{k}{\omega_b} D_{ww}$ и $\frac{1}{\beta_E} = -\frac{k^4 \omega_b^2}{\lambda_p} D_{\tilde{\eta}\tilde{\psi}}$.

Равновесное распределение

$$R_E(E, w) = N_E \exp \left(- \left[\frac{\beta_E E + \beta_w w^2}{2} \right] \right) \quad (142)$$

определено из условий $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$ и $J = 0$. Константа нормировки

$$N_E = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\beta_w}{2\pi}} \left(\frac{K}{K + (k\omega_b)^2 / (2T_{\text{eff}})} \right)^{1/2} \frac{\omega_m \exp(-\Delta U / T_{\text{eff}})}{k^2 (k^2 + 1) T_{\text{eff}}}$$

найдена из условия, что распределение $Q_E(\tilde{\eta}, \tilde{\psi})$, возникающее из (142) посредством (140), должно быть идентичным по отношению к $Q_E(\tilde{\eta}, \tilde{\psi})$, полученному из равновесного распределения $P_E(q, p) = \frac{\omega_m}{T_{\text{eff}}} \exp(-[p^2/2 + U(q)]/T_{\text{eff}})$ посредством (138). Анализ наиболее легко сделать в гармонической области барьера. Наконец, скорость распада получается в виде

$$\Lambda' = \int_0^\infty dE \int_0^\infty dw R_E(E, w) = \frac{\tilde{k}\omega_m}{2\pi} \exp \left[-\frac{\Delta U}{T_{\text{eff}}} \right], \quad (143)$$

где

$$\tilde{k} = \frac{D_{pp}k^2 - D_{qq}(m\omega_b)^2(2k^2 - 1)}{\lambda_p m k T_{\text{eff}}} \frac{(m\omega_b k)^{1/2}}{(m\omega_b k^3 + (D_{pp}k^2 + D_{qq}(m\omega_b)^2)/T_{\text{eff}})^{1/2}}.$$

При $D_{qq} = 0$ (143) может быть преобразовано в формулу Крамерса (135) [79, 81] для режима от умеренного к сильному трению. Следуя процедуре работ [81, 82], можно обобщить результат для скорости распада при произвольных режимах затухания:

$$\Lambda'' = \frac{\tilde{k}\omega_m}{2\pi} G(\epsilon_0) \exp \left[-\frac{\Delta U}{T_{\text{eff}}} \right] \quad (144)$$

с $\epsilon_0 = \lambda_p I_b / T_{\text{eff}}$ и

$$G(\epsilon_0) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\ln(1 - \exp[-\epsilon_0(1+y^2)/4])}{1+y^2} \right).$$

При $\epsilon_0 \gg 1$ (144) переходит в (143), когда $D_{qq} \neq 0$, и в (135), когда $D_{qq} = 0$. Если $\epsilon_0 \ll 1$ и $k \approx 1$, (144) приводит к формуле для режима слабого затухания:

$$\Lambda^{W'} = \frac{(D_{pp} - D_{qq}(m\omega_b)^2)\omega_m I_b}{2\pi m(T_{\text{eff}})^2} \frac{(m\omega_b)^{1/2} \exp[-\Delta U/T_{\text{eff}}]}{[m\omega_b + (D_{pp} + D_{qq}(m\omega_b)^2)/T_{\text{eff}}]^{1/2}}. \quad (145)$$

При $D_{qq} = 0$ формула (145) может быть преобразована в формулу Крамерса [79] для режима слабого затухания.

4.3. Результаты и обсуждения. *4.3.1. Расчеты с микроскопическими коэффициентами диффузии.* Для потенциала (66) квазистационарные значения Λ , найденные из решения уравнения (21) с асимптотическими коэффициентами диффузии (63), сравниваются с результатами, полученными с помощью формул (130) и (134). Надо отметить, что формула (134) применима, если выполняется условие $\omega T/V_L < \lambda_p$ [34]. Это условие выполняется при $\hbar\lambda_p > 0,25T$, $\hbar\omega = 1$ МэВ и при $\hbar\lambda_p > 0,75T$, $\hbar\omega = 3$ МэВ. Для больших значений ω величина $V_L - \hbar\omega/2$ относительно мала в рассмотренном потенциале (66). В этом случае предположение о долгоживущем стационарном состоянии в минимуме потенциала становится менее оправданным и наблюдается большее отклонение между аналитическими и численными расчетами (рис. 36). Тем не менее, если значение $\hbar\lambda_p$ равно 1–2 МэВ, данное различие составляет фактор 2, что является приемлемым во многих приложениях, особенно в ядерной физике. Соответствие между численными расчетами, полученными из решения уравнения (21), и расчетами с использованием аналитических формул (133) и (134) указывает на обоснованность применения этих формул в случае $D_{qp} \neq 0$.

4.3.2. Расчеты с феноменологическими коэффициентами диффузии. Для того чтобы изучить роль D_{qq} в диффузионном процессе распада через потенциальный барьер, мы выбираем такое значение D_{qq} , которое удовлетворяет теореме вириала в приближении осцилляторного потенциала около минимума, когда средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии, т.е. $(m\omega_m)^2 \sigma_{qq} = \sigma_{pp}$. Используя это выражение, (128) и $D_{pp}D_{qq} - D_{pq}^2 = c_0(\hbar\lambda_p)^2/16$ (минимальная неопределенность σ при $c_0 = 1$) для коэффициентов диффузии, получаем

$$D_{qq} = \frac{2D_{pp}}{m^2\lambda_p^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \hbar^2\lambda_p^4 m^2 c_0 / (4D_{pp})^2} \right) \quad (146)$$

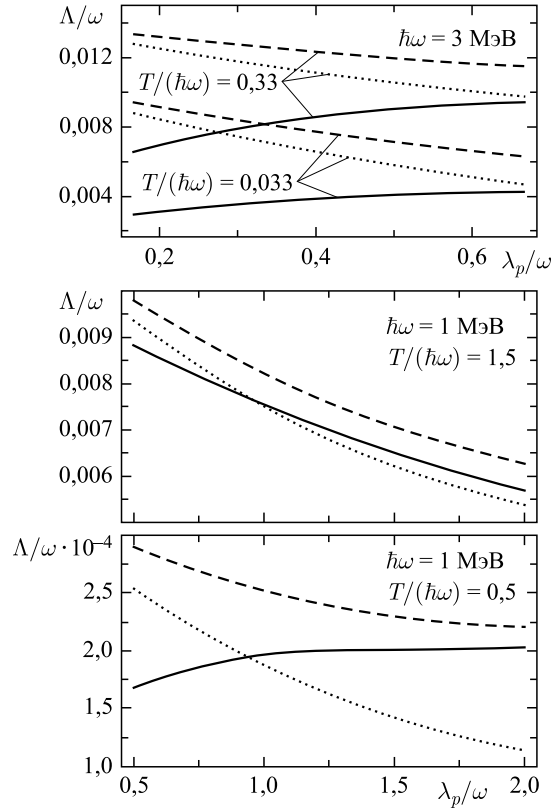


Рис. 36. Квазистационарная скорость потока Λ/ω из левой ямы потенциала (66) как функция от λ_p/ω при $\mu = 50m_0$ ($\hbar\omega = 1$ МэВ) и $\mu = 448m_0$ ($\hbar\omega = 3$ МэВ). Начальный гауссовский пакет расположен слева при указанных значениях температуры $T/(\hbar\omega)$. Результаты вычислений, полученные с помощью (68) и решения (21) с набором коэффициентов диффузии (62) (сплошная кривая), с помощью формул (133) для Λ^I (штриховая) и (134) для Λ^{II} (пунктирная)

при условии $\hbar\lambda_p \leq 4T^*/c_0^{1/2}$. Используя знак «минус» и известное выражение для $D_{pp} = m\lambda_p T^*$ с $T^* = 0,5\hbar\omega_m \coth(\hbar\omega_m/(2T)) \gg \hbar\lambda_p/4$, получаем из (146):

$$D_{pp} = m\lambda_p T^*, \quad D_{qq} = \frac{\hbar^2 \lambda_p c_0}{16mT^*}, \quad D_{pq} = 0. \quad (147)$$

Знак «минус» в (146) взят таким образом, чтобы иметь $D_{qq} \sim 1/T^*$, т.е. «классический» набор коэффициентов диффузии в пределе больших температур:

$$D_{pp} = m\lambda_p T^*, \quad D_{qq} = D_{pq} = 0. \quad (148)$$

Коэффициенты диффузии (146) с $c_0 = 1$ [6, 15, 83, 84] и $c_0 = 4/3$ [85] были получены абсолютно различными методами. Таким образом, из общего выражения (146) можно получить все уже известные частные выражения для D_{qq} . Выражение (146) соответствует режиму слабого затухания при нулевой температуре T . Для ненулевой температуры оно связано с пределами слабого и сильного затуханий.

Используя знак «плюс» в (146), мы получаем другой набор коэффициентов диффузии

$$D_{pp} = m\lambda_p T^*, \quad D_{qq} = \frac{4T^*}{m\lambda_p}, \quad D_{pq} = 0 \quad (149)$$

при условии $T^* \gg \hbar\lambda_p/4$.

Рассмотрим симметричный перевернутый бистабильный потенциал

$$U(q) = \frac{2\Delta U}{q_b^2} q^2 - \frac{\Delta U}{q_b^4} q^4. \quad (150)$$

Данный потенциал может соответствовать потенциальной энергии двойной ядерной системы (ДЯС), если в качестве координаты q взята координата массовой асимметрии: $q = (A_1 - A_2)/(A_1 + A_2)$, где A_1 и A_2 — массовые числа ядер ДЯС. Для численных расчетов мы берем $\Delta U = 8,3$ МэВ и $q_b = 0,6$, массовый параметр $m = 2 \cdot 10^4 m_0$ фм², где m_0 — масса нуклона и начальное гауссовское распределение с центром при различных значениях q_i и со значением начальной дисперсии $\sigma_{qq}(0) = 0,027$. Частоты $\hbar\omega_m = 0,44$ МэВ и $\hbar\omega_b = 0,62$ МэВ соответствуют потенциалу (150) с выбранными параметрами.

Зависимость $\Lambda(t)$ для двух барьеров в правой и левой сторонах потенциала (150) (рис. 37) находится численно методом, описанным в работе [32]. Результаты для $q_i = 0, 0,1$ и $0,3$ представлены на рис. 38. В то время как проницаемость $P(t)$ увеличивается с ростом q_i , квазистационарный предел $\Lambda(t)$ не зависит от q_i для потенциала (150). Однако переходное к квазистационарному режиму время становится немного короче с увеличением q_i . Меньший барьер, чем ΔU для начального пакета при $q_i \neq 0$, является причиной начального резкого увеличения скорости распада. Когда пакет сдвигается к минимуму при $q = 0$, скорость распада (зависит от ΔU) уменьшается до квазистационарного значения, полученного при $q_i = 0$.

Переходное время τ , определенное как время достижения 90 % значения насыщения Λ , в зависимости от λ_p показано на рис. 39. В «квантовом» случае с $D_{qq} \neq 0$ переходное время короче, чем в «классическом» случае с коэффициентами диффузии (65). Рассмотрены режимы для слабого ($\lambda_p < 2\omega_m$) и сильного ($\lambda_p > 2\omega_m$) затуханий. Оценки [86] τ на основе поведения ведущей экспоненциальной функции $\exp[-\Delta U/(m\omega_m^2 \sigma_{qq}(t))]$ зависимости $\Lambda(t)$

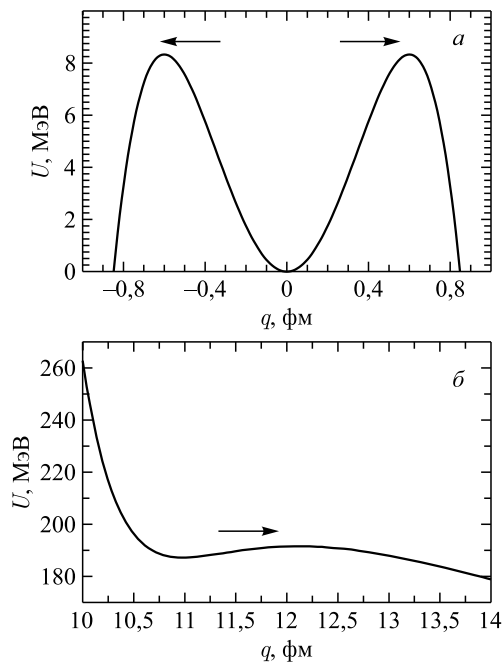


Рис. 37. Потенциалы (150) (а) и (153) (б) как функции q . Направления потоков показаны стрелками

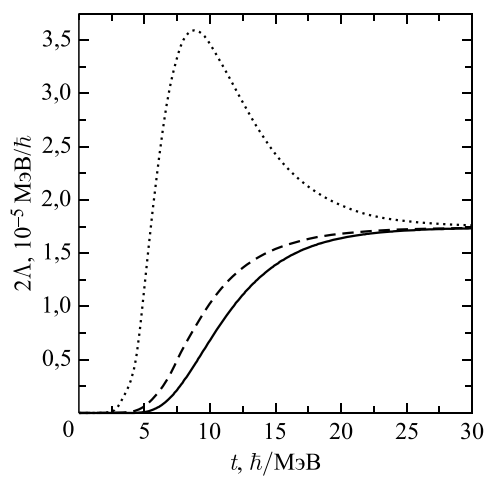


Рис. 38. Зависимость скорости распада 2Λ через два барьера от времени в перевернутом бистабильном потенциале (150). Начальные гауссовские пакеты расположены в потенциальном кармане при $q_i = 0$ (сплошная кривая), $q_i = 0,1$ (штриховая) и $q_i = 0,3$ (пунктирная). Температура $T = 1$ МэВ

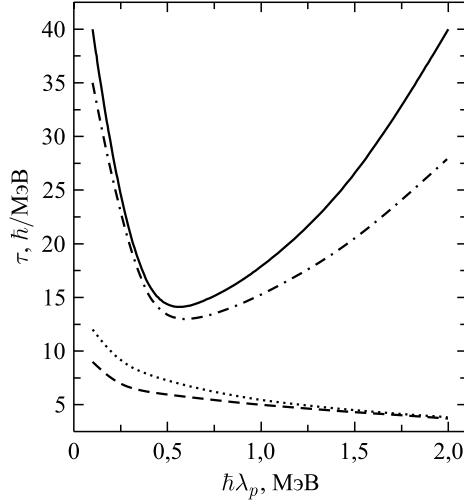


Рис. 39. Переходные времена для достижения квазистационарных скоростей распадов из минимумов потенциалов (150) и (153) как функции λ_p при $T = 1$ МэВ. Представлены результаты вычислений с помощью (68) и решения (21) с набором «квантовых» коэффициентов диффузии (147) для потенциалов (150) (штрихпунктирная) и (153) (штриховая) и «классического» описания с (67) для потенциалов (150) (сплошная) и (153) (пунктирная)

от времени дают в пределе сильного затухания

$$\tau = \frac{\lambda_p}{2\omega_m^2} \ln \left(\frac{10\Delta U}{m\omega_m^2 \sigma_{qq}} \right) \quad (151)$$

и в пределе слабого затухания

$$\tau = \frac{1}{\lambda_p} \ln \left(\frac{10\Delta U}{m\omega_m^2 \sigma_{qq}} \right), \quad (152)$$

где σ_{qq} взято из (128). Для малых значений λ_p переходное время уменьшается с ростом λ_p из-за усиления роли диффузии, которая пропорциональна λ_p . Для больших значений λ_p τ увеличивается с ростом λ_p , потому что действие большой диффузии компенсируется трением. Для потенциала (150) и температуры $T = 1$ МэВ (152) приводит к $\tau = 22 \hbar/\text{МэВ}$ при $\hbar\lambda_p = 0,2$ МэВ и (151) — к $\tau = 23 \hbar/\text{МэВ}$ при $\hbar\lambda_p = 2$ МэВ. Таким образом, (151) и (152) дают разумные оценки переходных времен. Для потенциала (150) квазистационарные значения Λ вычислены с помощью коэффициентов диффузии (65) и (147) и сравниваются на рис. 40 с результатами, полученными с помощью аналитических выражений (135) и (130) с (122) и (132). В «квантовом» случае ($D_{qq} \neq 0$) значение Λ больше, т. е. D_{qq} поддерживает распад метастабильных состояний из-за более быстрого роста дисперсии по q и меньшей скорости диссипации около минимума [31].

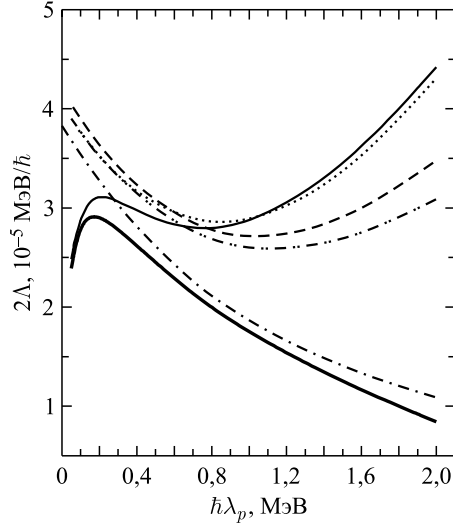


Рис. 40. Квазистационарная скорость распада 2Λ через барьеры в перевернутом бистабильном потенциале (150) как функция λ_p с начальным гауссовским пакетом в потенциальном минимуме и $T = 1$ МэВ. Представлены результаты вычислений с помощью (68) и решения (21) с «квантовым» (147) (тонкая сплошная) и «классическим» (65) (толстая сплошная) наборами коэффициентов диффузии и с (135) для Λ^{Kr} (штрихпунктирная кривая). Для «квантовых» коэффициентов диффузии (147) представлены результаты вычислений с помощью (130) и (122) (пунктирная), (130) и (132) (штриховая), (143) для Λ' (штриховая с двумя точками)

Поскольку роль D_{qq} становится более слабой при больших T , с увеличением температуры значения Λ , вычисленные с коэффициентами диффузии (65) и (147), приближаются друг к другу (рис. 41). Результаты аналитических выражений (135) и (130) с (122) находятся в хорошем согласии с численными расчетами на всем рассмотренном интервале T .

В качестве следующего примера мы рассмотрим прохождение барьера в случае метастабильного потенциала

$$U(q) = d \left[\exp\left(-2\chi \frac{q - q_0}{q_0}\right) - 2 \exp\left(-\chi \frac{q - q_0}{q_0}\right) \right] + \frac{e^2 \zeta}{q}, \quad (153)$$

где первая часть (потенциал Морса) соответствует ядерному взаимодействию между двумя ядрами, а вторая часть — кулоновскому взаимодействию ядер (рис. 37, б). Для численных расчетов возьмем $d = 47,8$ МэВ, $\chi = 11,56$, $q_0 = 10,68$ фм и $\zeta = 1760$. При выбранном метастабильном потенциале с $\Delta U = 3,5$ МэВ, $\hbar\omega_m = 3,9$ МэВ и $\hbar\omega_b = 2,25$ МэВ система занимает нижайшее гауссово состояние с центром при $q_i = q_0$ и дисперсией

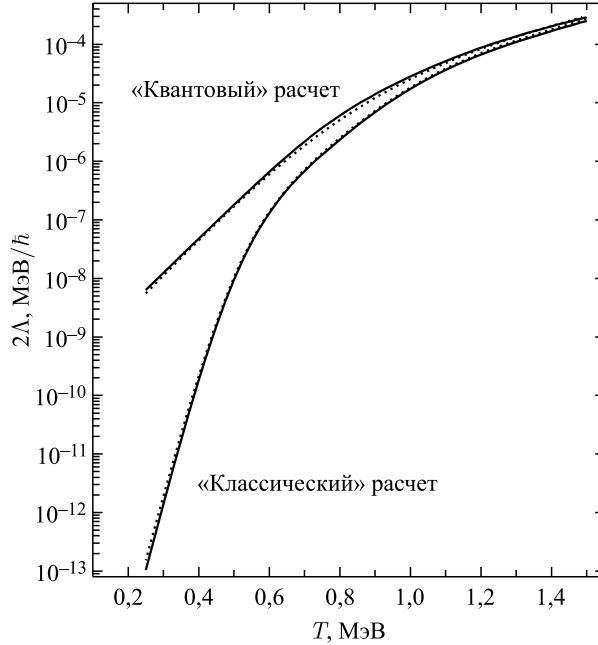


Рис. 41. Квазистационарная скорость распада 2Λ через барьеры перевернутого бистабильного потенциала (150) как функция температуры для начального гауссовского пакета в потенциальном минимуме и $\hbar\lambda_p = 1$ МэВ. Представлены результаты вычислений с помощью (68) и решения (21) с «квантовым» (147) (верхняя сплошная) и «классическим» (65) (нижняя сплошная) наборами коэффициентов диффузии и с (135) для Λ^{Kr} (нижняя пунктирная). Для «квантовых» коэффициентов диффузии (147) представлены результаты вычислений с помощью (130) и (122) (верхняя пунктирная)

$\sigma_{qq}(0) = 0,25$ фм². Движение в этом потенциале близко к режиму слабого затухания для рассмотренных λ_p , и значение τ уменьшается с ростом λ_p , как и следует из (152). Роль D_{qq} в динамике системы остается такой же (рис. 38 и 42), как и в потенциале (150). При $\hbar\lambda_p > 2,5$ МэВ квазистационарная скорость распада начинает уменьшаться с ростом трения как в «квантовом», так и в «классическом» описаниях.

Потенциал (153) имеет относительно малый барьер ΔU , и условие $\omega_m T / \Delta U < \lambda_p$, при котором (130) справедливо, выполняется при $\hbar\lambda_p > 1,1$ МэВ. Предположение о долгоживущем стационарном состоянии в минимуме потенциала становится менее оправданным. Поэтому по сравнению с описанием потенциала (150) мы находим большие отклонения Λ между аналитическими и численными результатами (см. рис. 42). Однако при $\hbar\lambda_p$ между 0,5 и 4 МэВ отклонение меньше, чем фактор 2, что приемлемо для многих приложений, особенно в ядерной физике. В то время как (130)

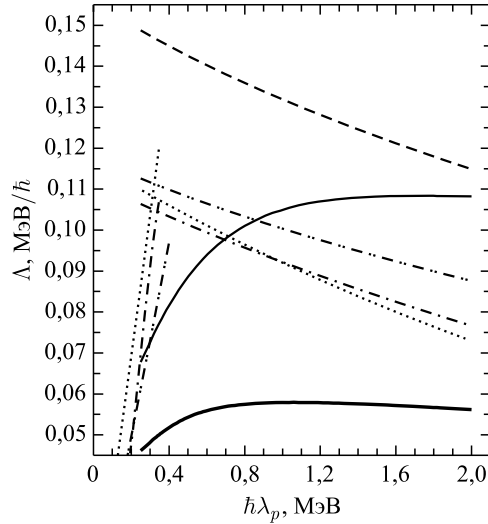


Рис. 42. То же, что и на рис. 40, но для квазистационарной скорости распада Λ из метастабильного потенциала (153). Слева представлены результаты вычислений из (136) для Λ^W с (147) (пунктирная кривая), (65) (штрихпунктирная) и (145) (штриховая с двумя точками) для малых λ_p

с (132) приводит к большим значениям Λ , (130) с (122) дает меньшие Λ в вычислениях с «квантовыми» коэффициентами диффузии (147). Поскольку $\hbar\omega_m T/\Delta U = 1,1$ МэВ при $T = 1$ МэВ, значения Λ , полученные с (136), подходят для большего интервала малых значений λ_p (рис. 42). Результаты, полученные с (143), находятся между результатами, полученными с (130) и (132), (130) и (122). В рассмотренных выше примерах квазистационарная скорость распада при «квантовом» описании с (147) на фактор 4 больше, чем Λ при «классическом» описании с (65). Если при «квантовом» описании мы используем коэффициенты диффузии [6, 9, 10, 15, 32]

$$D_{pp} = \frac{m\lambda_p T^*}{2}, \quad D_{qq} = \frac{\lambda_p T^*}{2m\omega_m^2}, \quad D_{pq} = 0, \quad (154)$$

то значение Λ в потенциале (150) может быть приблизительно на три порядка величины больше, чем Λ при «классическом» случае с коэффициентами диффузии (65). Это видно из сравнения рис. 40 и 43. Поскольку при довольно больших температурах эта огромная разница не проявляется в рассматриваемых приложениях, коэффициенты диффузии (147) кажутся более физическими. Для потенциала (150) D_{pp} в (154) в два раза меньше, чем в (147), но D_{qq} приблизительно в 50 раз больше в (154). Для меньшего ΔU и большего ω_m , как в случае потенциала (153), использование (154) приводит к

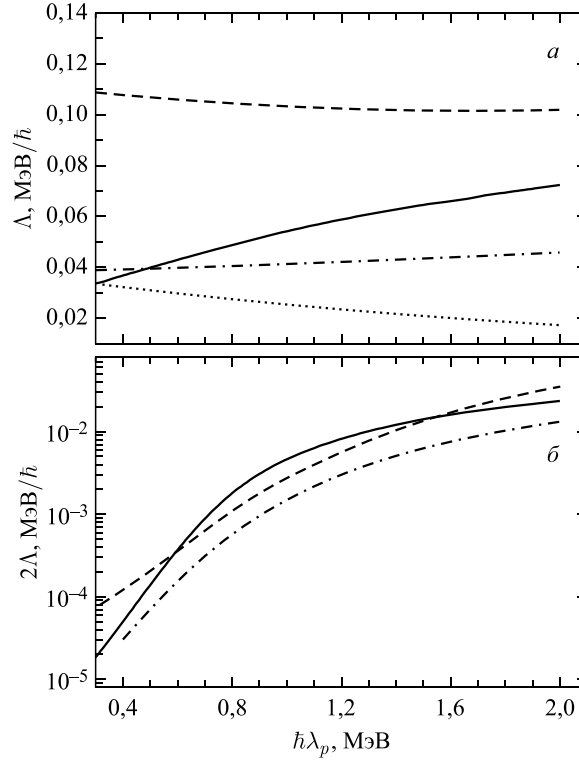


Рис. 43. Квазистационарная скорость распада Δ из минимума метастабильного потенциала (153) (а) и скорость распада 2Δ через барьеры в перевернутом бистабильном потенциале (150) (б) как функция λ_p для начального гауссовского пакета в потенциальном минимуме при $T = 1$ МэВ. Результаты вычислений с помощью (68) и решения (21) с «квантовым» набором коэффициентов диффузии (154) (сплошная кривая), с помощью (130) и (122) (пунктирная), (130) и (132) (штриховая), (143) для Δ' (штрихпунктирная)

результатам, похожим на те, что получены при помощи (147). Действительно, для потенциала (153) в (154) D_{pp} в два раза меньше, а D_{qq} приблизительно в два раза больше, чем в (147).

С коэффициентами диффузии (154) выражение (130) можно использовать с (122), если $\omega_b < \omega_m$. Это не является случаем выбранных параметров потенциала (150). Поэтому на рис. 43 численные результаты для перевернутого бистабильного потенциала сравниваются с результатами, полученными с помощью (130) и (132). Видно, что согласие в пределах фактора 3.

Используя (132) и (122) в (130), мы получаем вполне хорошее согласие с численными результатами Δ для метастабильного потенциала (153), когда

$\omega_b < \omega_m$. Использование (122) в (130) приводит к лучшим результатам при больших значениях λ_p . Поэтому в случае больших скоростей распада, т.е. в случае маленьких барьеров, больших значениях ω_m и T , приближения, сделанные для вывода (131) и (132), более подходят для режима сильного затухания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках микроскопического подхода приведен вывод системы нелинейных уравнений Ланжевена в пределе общей связи между коллективной и внутренней (бозонной или фермионной) подсистемами. Эти уравнения движения для коллективной подсистемы удовлетворяют квантовым флуктуационно-диссипационным соотношениям и соотношению неопределенности. Исходя из немарковских уравнений Ланжевена разработана новая методика получения транспортных коэффициентов, зависящих явно от времени. Предсказанный степенной закон распада корреляционных функций осциллятора в пределе низких температур и больших времен может быть предметом экспериментального изучения. Полученные аналитические формулы могут использоваться для описания флуктуационно-диссипационной динамики ядерных процессов со сложными потенциалами. Развитый подход полезен при описании времен жизни метастабильных систем, переходных процессов и декогерентности в квантовых системах.

С помощью точного численного решения уравнения (21) для приведенной матрицы плотности мы показали, что зависимости коэффициентов диффузии и трения от времени слабо влияют на скорость распада из потенциальной ямы. Поскольку коэффициенты трения и диффузии были получены самосогласованным образом, положительность матрицы плотности обеспечивается в любой момент времени. Коэффициент диффузии D_{qp} приводит к уменьшению скорости распада. Поскольку использованное значение D_{pp} больше, чем его «классический» аналог, то полученная скорость распада близка к результату, полученному с использованием «классического» набора коэффициентов диффузии. В случае слабого затухания или малых температур квазистационарная скорость распада может увеличиться с ростом трения. Это объясняется усилением роли диффузии по сравнению с трением в процессе распада.

Впервые получены аналитические выражения, которые обобщают формулу Крамерса для скорости распада из метастабильного квантового состояния квантовой системы. Найдено, что с учетом квантового набора коэффициентов диффузии скорость распада из метастабильного состояния больше, чем в классическом описании. Согласие между значениями скорости распада, полученными с помощью аналитических формул и численных расчетов, зависит от характеристик рассматриваемой системы. Согласие лучше в случае сильного затухания. Однако для произвольного режима затухания отклоне-

ния не больше, чем в случае расчета с классической формулой Крамерса. Поэтому аналитические формулы могут использоваться в широком диапазоне значений параметров потенциала и коэффициентов диффузии.

Получено аналитическое выражение для пропагатора матрицы плотности общего квадратичного коллективного гамильтониана, связанного линейно по координате и импульсу с одночастичными степенями свободы. Показано, что для времен, представляющих интерес при столкновении тяжелых ионов вблизи кулоновского барьера, матрица плотности практически диагональная, что оправдывает использование полуклассических методов. Зависимость декогеренции от времени кардинально зависит от выбора набора коэффициентов диффузии и трения. С квантовыми коэффициентами диффузии, сохраняющими неотрицательность матрицы плотности в любой момент времени, декогеренция увеличивается медленнее, чем в классическом случае, что приводит к большей проницаемости потенциального барьера в квантовом рассмотрении. Вычисления показывают, что диссипативные эффекты играют сложную роль в процессе туннелирования. Даны конкретные примеры, когда диссипация способствует проникновению через барьер.

Формализм приведенной матрицы плотности был впервые нами применен для описания процесса захвата налетающего ядра ядром-мишенью. Для сечений захвата в реакциях ^{16}O , ^{19}F , ^{26}Mg , ^{28}Si , $^{32,34,36,38}\text{S}$, $^{40,48}\text{Ca}$, $^{50}\text{Ti} + ^{208}\text{Pb}$ получено хорошее согласие между теоретическими расчетами и имеющимися экспериментальными данными. Это дает основание для дальнейшего использования предложенного метода расчета сечения захвата. Для реакции $^{52}\text{Cr} + ^{208}\text{Pb}$ с малой (большой) вероятностью полного слияния (квазиделения) рассчитанное значение σ_c сильно отклоняется от экспериментальных данных. По нашему мнению, причиной такого отклонения являются не недостатки нашей модели, а то, что эта система может распадаться в канале квазиделения из конфигураций вблизи входного канала, что не было учтено в эксперименте. Отметим также, что продукты распада около входного канала — это, в основном, продукты квазиделения, если $J \leq J_{\text{crit}}$. Когда максимальное значение углового момента равно самой большой J -волне, при которой еще возможен захват, сечение захвата достигает своего максимального значения. Энергия столкновения, соответствующая максимуму сечения захвата, уменьшается с ростом кулоновского отталкивания ($Z_1 \times Z_2$) во входном канале. Ожидается, что в реакции $^{58}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$ максимум сечения захвата находится примерно на 15–25 МэВ выше кулоновского барьера. Экспериментальное подтверждение этого эффекта помогло бы определиться между адиабатическим и диабатическим режимами взаимодействия ядер и определить глубину потенциального кармана. Для тяжелых систем при $E_{\text{cm}} \geq V_b$ зависимость $\sigma_c E_{\text{cm}} / (\pi R_b^2 \hbar \omega_b)$ от $(E_{\text{cm}} - V_b) / (\hbar \omega_b)$ имеет универсальную природу. Используя эту зависимость и рассчитывая R_b , V_b , и $\hbar \omega_b$, можно предсказать зависимость σ_c от E_{cm} .

Приложение

Явные выражения для диссипативных ядер и случайных сил в уравнении (5), полученные в [16], записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 K_{GV}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} [\{G'_{\nu,p}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \sin(\omega_{\nu}[t - \tau]) - \\
 &\quad - \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau])], \\
 K_{VG}(t, \tau) &= - \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} [\{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) + \\
 &\quad + \{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \sin(\omega_{\nu}[t - \tau])], \\
 K_{VV}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} [\{V'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+ + \{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \times \\
 &\quad \times \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) + (\{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ - \\
 &\quad - \{G'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+) \sin(\omega_{\nu}[t - \tau])], \\
 K_{GG}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau])
 \end{aligned} \tag{155}$$

и

$$\begin{aligned}
 F_q(t) &= \sum_{\nu} F_q^{\nu}(t) = i \sum_{\nu} G'_{\nu,p}(t) [f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t)], \\
 F_p(t) &= \sum_{\nu} F_p^{\nu}(t) = - \sum_{\nu} V'_{\nu,q}(t) [f_{\nu}^{+}(t) + f_{\nu}(t)] - i \sum_{\nu} G'_{\nu,q}(t) [f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t)].
 \end{aligned} \tag{156}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н. Избранные труды: В 3 т. Киев: Наук. думка, 1971.
2. Caldeira A. O., Leggett A. J. Path Integral Approach to Quantum Brownian Motion // *Physica A*. 1983. V. 121. P. 587; Quantum Tunnelling in a Dissipative System // *Ann. Phys.* 1983. V. 149. P. 374; Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 46. P. 211; Comment on "Probabilities for Quantum Tunneling through a Barrier with Linear Passive Dissipation" // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1571.
3. van Kampen N. G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: North-Holland, 1981.
4. Grabert H., Schramm P., Ingold G.-L. Quantum Brownian Motion: The Functional Integral Approach // *Phys. Rep.* 1988. V. 168. P. 115; Talkner P. The Failure of the Quantum Regression Hypothesis // *Ann. Phys. (N. Y.)*. 1986. V. 167. P. 390.

5. *Gardiner C. W.* Quantum Noise. Berlin: Springer, 1991.
6. *Dodonov V. V., Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Quantum Nonstationary Oscillator: Models and Applications // *J. Rus. Laser Res.* 1995. V. 16. P. 1;
Додонов В. В., Манько В. И. Матрица плотности и функции Вигнера квазиклассических квантовых систем // *Тр. ФИАН.* 1986. Т. 167. С. 7.
7. *Lindblad G.* On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups // *Commun. Math. Phys.* 1976. V. 48 P. 119; *Brownian Motion of a Quantum Harmonic Oscillator* // *Rep. Math. Phys.* 1976. V. 10. P. 393.
8. *Dekker H.* Classical and Quantum Mechanics of the Damped Harmonic Oscillator // *Phys. Rep.* 1981. V. 80. P. 1.
9. *Isar A. et al.* Open Quantum Systems // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1994. V. 3. P. 635.
10. *Sandulescu A., Scutaru H.* Open Quantum Systems and the Damping of Collective Modes in Deep Inelastic Collisions // *Ann. Phys. (N. Y.).* 1987. V. 173. P. 277.
11. *Carmichael H. J.* An Open System Approach to Quantum Optics. Berlin: Springer, 1993.
12. *Klimontovich Yu. L.* Statistical Theory of Open Systems. Kluwer Acad. Publ., 1995.
13. *Zubarev D., Morozov V., Röpke G.* Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. Berlin: Akademie Verlag, 1997.
14. *Weiss U.* Quantum Dissipative Systems. Singapore: World Sci., 1999.
15. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* Friction and Diffusion Coefficients in Coordinate in Nonequilibrium Nuclear Processes // *Nucl. Phys. A.* 1999. V. 645. P. 376.
16. *Kanokov Z. et al.* Non-Markovian Dynamics of Quantum Systems. I. Formalism and Transport Coefficients // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. P. 016121;
Palchikov Yu. V. et al. Non-Markovian Dynamics of Quantum Systems. II. Decay Rate, Capture, and Pure States // *Ibid.* P. 016122;
Kalandarov Sh. A. et al. Transport Coefficients of a Quantum System Interacting with a Squeezed Heat Bath // *Phys. Rev. E.* 2006. V. 74. P. 011118;
Kalandarov Sh. A. et al. Influence of External Magnetic Field on Dynamics of Open Quantum Systems // *Phys. Rev. E.* 2007. V. 75. P. 031115.
17. *Sargsyan V. V. et al.* Coordinate-Dependent Diffusion Coefficients: Decay Rate in Open Quantum Systems // *Phys. Rev. A.* 2007. V. 75. P. 062115;
Sargsyan V. V. et al. Fission Rate and Transient Time with a Quantum Master Equation // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 76. P. 064604;
Sargsyan V. V. et al. Capture Process in Nuclear Reactions with a Quantum Master Equation // *Phys. Rev. C.* 2009. V. 80. P. 034606;
Sargsyan V. V. et al. Quantum Statistical Effects in Nuclear Reactions, Fission and Open Quantum Systems // *Phys. Part. Nucl.* 2010. V. 41. P. 175.
18. *Sargsyan V. V. et al.* Peculiarities of Sub-Barrier Fusion with Quantum Diffusion Approach // *Eur. Phys. J. A.* 2010. V. 45. P. 125;
Sargsyan V. V. et al. Sub-Barrier Capture with Quantum Diffusion Approach: Actinide-Based Reactions // *Eur. Phys. J. A.* 2011. V. 47. P. 38;
Kuzyakin R. A. et al. Peculiarities of Parabolic-Barrier Penetrability and Thermal Decay Rate with the Quantum Diffusion Approach // *Phys. Rev. A.* 2011. V. 83. P. 062117;

- Kuzyakin R. A. et al.* Probability of Passing through a Parabolic Barrier and Thermal Decay Rate: Case of Linear Coupling Both in Momentum and in Coordinate // *Ibid.* P. 032117;
- Kuzyakin R. A. et al.* Quantum Diffusion Description of the Sub-Barrier Capture Process in Heavy Ion Reactions // *Phys. At. Nucl.* 2009. V. 75. P. 439;
- Kuzyakin R. A. et al.* Isotopic Trends of Capture Cross Section and Mean-Square Angular Momentum of the Captured System // *Phys. Rev. C.* 2012. V. 85. P. 034612;
- Kuzyakin R. A. et al.* Total and Partial Capture Cross Sections in Reactions with Deformed Nuclei at Energies near and below Coulomb Barrier // *Phys. At. Nucl.* 2013. V. 76. P. 716.
19. *Sargsyan V. V. et al.* Effects of Nuclear Deformation and Neutron Transfer in Capture Processes, and Fusion Hindrance at Deep Sub-Barrier Energies // *Phys. Rev. C.* 2011. V. 84. P. 064614;
- Sargsyan V. V. et al.* Role of Neutron Transfer in Capture Processes at Sub-Barrier Energies // *Phys. Rev. C.* 2012. V. 85. P. 024616;
- Sargsyan V. V. et al.* Deformation Effect in the Sub-Barrier Capture Process // *Ibid.* P. 037602;
- Sargsyan V. V. et al.* Quasifission at Extreme Sub-Barrier Energies // *Eur. Phys. J. A.* 2012. V. 48. P. 188;
- Sargsyan V. V. et al.* Sub-Barrier Capture Reactions with $^{16,18}\text{O}$ and $^{40,48}\text{Ca}$ Beams // *Eur. Phys. J. A.* 2013. V. 49. P. 54;
- Sargsyan V. V. et al.* Production of Exotic Isotopes in Complete Fusion Reactions with Radioactive Beams // *Phys. Rev. C.* 2013. V. 88. P. 054609;
- Sargsyan V. V. et al.* Neutron-Pair Transfer in Sub-Barrier Capture Process // *Ibid.* P. 064601;
- Ogloblin A. A. et al.* Role of Neutron Transfer in Asymmetric Fusion Reactions at Sub-Barrier Energies // *Eur. Phys. J. A.* 2014. V. 50. P. 157;
- Scamps G. et al.* Analysis of the Dependence of the Few-Neutron Transfer Probability on the Q Value Magnitudes // *Phys. Rev. C.* 2015. V. 91. P. 024601;
- Sargsyan V. V. et al.* Examination of the Different Roles of Neutron Transfer in the Sub-Barrier Fusion Reactions $^{32}\text{S} + ^{94,96}\text{Zr}$ and $^{40}\text{Ca} + ^{94,96}\text{Zr}$ // *Ibid.* P. 014613.
20. *Адамян Г. Г., Антоненко Н. В., Зубов А. С.* Двойные ядерные системы в реакциях полного слияния // *ЭЧАЯ.* 2014. Т. 45. С. 1531;
- Волков В. В.* Процесс полного слияния атомных ядер. Слияние ядер в рамках концепции двойной ядерной системы // *ЭЧАЯ.* 2004. Т. 35. С. 797;
- Зубов А. С., Адамян Г. Г., Антоненко Н. В.* Использование статистических методов при анализе реакций с тяжелыми ионами в рамках модели двойной ядерной системы // *ЭЧАЯ.* 2009. Т. 40. С. 1603;
- Каландаров Ш. А., Адамян Г. Г., Антоненко Н. В.* Эмиссия тяжелых кластеров в ядерных реакциях при низких энергиях столкновения // *ЭЧАЯ.* 2012. Т. 43. С. 1590;
- Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* Clustering Effects within the Dinuclear Model // *Lect. Notes Phys.* 2012. V. 848. P. 165.
21. *Fröbrich P.* Fusion and Capture of Heavy Ions above the Barrier: Analysis of Experimental Data with the Surface Friction Model // *Phys. Rep.* 1984. V. 116. P. 337.

22. *Адеев Г. Д. и др.* Диффузионная модель формирования распределений осколков деления // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 1229;
Адеев Г. Д. Влияние динамических характеристик деления на формирование зарядового распределения осколков // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 1572.
23. *Гончар И. И.* Ланжевеновская флуктуационно-диссипативная динамика деления возбужденных атомных ядер // ЭЧАЯ. 1995. Т. 23. С. 932.
24. *Адеев Г. Д. и др.* Многомерный стохастический подход к динамике деления возбужденных ядер // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36. С. 731.
25. *Adamian G. G. et al.* The Influence of the Shell Effects on Dynamics of Deep-Inelastic Collisions of Heavy Ions // Phys. Part. Nucl. 1994. V. 25. P. 583.
26. *Volkov V. V.* Deep Inelastic Transfer Reactions — the New Type of Reactions between Complex Nuclei // Phys. Rep. 1978. V. 44. P. 93;
Nuclear Reactions of Deep-Inelastic Transfers. M.: Energoizdat, 1982.
27. *Schröder W. U., Huizenga J. R.* Damped Nuclear Reactions // Treatise on Heavy Ion Science / Ed. D. A. Bromley. New York: Plenum Press, 1984. V. 2. P. 115.
28. *Volkov V. V.* Production of Nuclei Far from Stability // Treatise on Heavy Ion Science / Ed. D. A. Bromley. New York: Plenum Press, 1989. V. 8. P. 255.
29. *Ньютон Дж. О.* Деление ядер под действием тяжелых ионов // ЭЧАЯ. 1990. Т. 21. С. 821;
Иткис М. Г., Русанов А. Я. Деление нагретых ядер в реакциях с тяжелыми ионами: статистические и динамические аспекты // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 389.
30. *Беляев С. Т., Зелевинский В. Г.* Нильс Бор и физика атомного ядра // УФН. 1985. Т. 147. С. 210.
31. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* Tunneling with Dissipation in Open Quantum Systems // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 482.
32. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* Diffusion Coefficients in Coordinate in Density Matrix Description of Non-Equilibrium Quantum Processes // Phys. Lett. A. 1999. V. 260. P. 39.
33. *Palchikov Yu. V. et al.* Effect of Transport Coefficients on the Time Dependence of a Density Matrix // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V. 33. P. 4265.
34. *Palchikov Yu. V. et al.* Generalization of Kramers Formula for Open Quantum Systems // Physica A. 2002. V. 316. P. 297.
35. *Саргсян В. В. и др.* Квантовомеханическое описание начальной стадии реакции слияния // ЯФ. 2009. Т. 72. С. 459.
36. *Зелевинский В. Г.* Некоторые вопросы динамики взаимодействия тяжелых ионов // XII Зимняя шк. ЛИЯФ. Л., 1977. С. 53.
37. *Джолос Р. В., Иванова С. П., Иванов В. В.* Начальная стадия взаимодействия тяжелых ионов и механизм диссипации кинетической энергии // ЯФ. 1984. Т. 40. С. 117;
Ivanova S. P., Jolos R. V. Current and Density Algebra Approach to Low-Energy Heavy-Ion Collisions // Nucl. Phys. A. 1991. V. 530. P. 232.
38. *Lindenberg K., West B.* Statistical Properties of Quantum Systems: The Linear Oscillator // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 568.
39. *Саргсян В. В. и др.* Квантовые немарковские уравнения Ланжевена и транспортные коэффициенты // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 2071.

40. Адамян Г. Г. и др. Квантовые немарковские стохастические уравнения // ТМФ. 2005. Т. 145. С. 87.
41. Саргсян В. В. и др. Квантовые немарковские уравнения Ланжевена и транспортные коэффициенты для перевернутого осциллятора // ТМФ. 2008. Т. 156. С. 425.
42. Sargsyan V. V. et al. Quantum Non-Markovian Langevin Formalism for Heavy Ion Reactions near the Coulomb Barrier // Phys. Rev. C. 2008. V. 77. P. 024607.
43. Hofmann H., Kiderlen D. A Self-Consistent Treatment of Damped Motion for Stable and Unstable Collective Modes // Intern. J. Mod. Phys. E. 1998. V. 7. P. 243.
44. Додонов В. В., Манько В. И. Универсальные инварианты квантовых систем и обобщенные соотношения неопределенностей. Теоретико-групповые методы в физике / Отв. ред. И. М. Макаров. М.: Наука, 1983. 11 с.
45. Antonenko N. V. et al. Application of the Lindblad Axiomatic Approach to Non-Equilibrium Nuclear Processes // J. Phys. G. 1994. V. 20. P. 1447.
46. Adelman S. A. Fokker–Planck Equations for Simple Non-Markovian Systems // J. Chem. Phys. 1976. V. 64. P. 124.
47. Karrlein R., Grabert H. Exact Time Evolution and Master Equations for the Damped Harmonic Oscillator // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 153.
48. Papadopoulos G. J. Time-Dependent Quantum Tunneling via Crossover Processes // J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 935.
49. Dodonov V. V., Nikonov D. E. Application of Feynman Propagators to the Motion of One-Dimensional Wave Packets // J. Sov. Laser Res. 1991. V. 12. P. 461.
50. Baskoutas S., Jannussis A. Quantum Tunneling Effect for the Inverted Caldirola–Kanai Hamiltonian // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25. P. L1299.
51. Hofmann H. A Quantal Transport Theory for Nuclear Collective Motion: The Merits of a Locally Harmonic Approximation // Phys. Rep. 1997. V. 284. P. 137.
52. Harris E. G. Quantum Tunneling in Dissipative Systems // Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 995.
53. Gisin N. Microscopic Derivation of a Class of Non-Linear Dissipative Schrödinger-Like Equations // Physica A. 1980. V. 111. P. 364.
54. Ao P., Thouless D. J. Tunneling of a Quantized Vortex: Roles of Pinning and Dissipation // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 132.
55. Razavy M., Pimpale A. Quantum Tunneling: A General Study in Multi-Dimensional Potential Barriers with and without Dissipative Coupling // Phys. Rep. 1988. V. 168. P. 305;
Razavy M. Heisenberg’s Equations of Motion for Dissipative Tunneling // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 6668.
56. Adamian G. G. et al. Effective Nucleus–Nucleus Potential for Calculation of Potential Energy of a Dinuclear System // Intern. J. Mod. Phys. E. 1996. V. 5. P. 191.
57. Washiyama K., Lacroix D., Ayik S. One-Body Energy Dissipation in Fusion Reactions from Mean-Field Theory // Phys. Rev. C. 2009. V. 79. P. 024609;
Ayik S., Washiyama K., Lacroix D. Fluctuation and Dissipation Dynamics in Fusion Reactions from a Stochastic Mean-Field Approach // Phys. Rev. C. 2009. V. 79. P. 054606.
58. Morton C. R. et al. Coupled-Channels Analysis of the $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ Fusion Barrier Distribution // Phys. Rev. C. 1999. V. 60. P. 044608.

59. *Hinde D. J. et al.* Limiting Angular Momentum for Statistical Model Description of Fission // *Phys. Rev. C.* 1999. V. 60. P. 054602.
60. *Back B. B. et al.* Angular Distributions in Heavy-Ion-Induced Fission // *Phys. Rev. C.* 1985. V. 32. P. 195.
61. *Bock R. et al.* Dynamics of the Fusion Process // *Nucl. Phys. A.* 1982. V. 388. P. 334.
62. *Hinde D. J. et al.* Competition between Fusion-Fission and Quasi-Fission in the Reaction $^{28}\text{Si} + ^{208}\text{Pb}$ // *Nucl. Phys. A.* 1995. V. 592. P. 271.
63. *Dasgupta M., Hinde D. J.* Importance of Entrance Channel Dynamics on Heavy Element Formation // *Nucl. Phys. A.* 2004. V. 734. P. 148.
64. *Hinde D. J. et al.* Isotopic Dependence of Fusion Barrier Energies in Reactions Forming Heavy Elements // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 75. P. 054603.
65. *Loveland W. et al.* Fusion Enhancement in the $^{38}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ Reaction // *Phys. Rev. C.* 2006. V. 74. P. 044607.
66. *Pacheco A. J. et al.* Capture Reactions in the $^{40,48}\text{Ca} + ^{197}\text{Au}$ and $^{40,48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ Systems // *Phys. Rev. C.* 1992. V. 45. P. 2861.
67. *Toke J. et al.* Quasi-Fission — the Mass-Drift Mode in Heavy-Ion Reactions // *Nucl. Phys. A.* 1985. V. 440. P. 327.
68. *Naik R. S. et al.* Measurement of the Fusion Probability P_{CN} for the Reaction of ^{50}Ti with ^{208}Pb // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 76. P. 054604.
69. *Clerc H.-G. et al.* Fusion-Fission and Neutron-Evaporation-Residue Cross-Sections in ^{40}Ar - and ^{50}Ti -Induced Fusion Reactions // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 419. P. 571.
70. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* Characteristics of Quasifission Products within the Dinuclear System Model // *Phys. Rev. C.* 2003. V. 68. P. 034601.
71. *Canto L. F. et al.* Disentangling Static and Dynamic Effects of Low Breakup Threshold in Fusion Reactions // *J. Phys. G.* 2009. V. 36. P. 015109;
Canto L. F. et al. Dynamic Effects of Breakup on Fusion Reactions of Weakly Bound Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 2009. V. 821. P. 51.
72. *Fröbrich P., Lipperheide R.* Theory of Nuclear Reactions. Oxford: Clarendon, 1996.
73. *Hofmann S., Münzenberg G.* The Discovery of the Heaviest Elements // *Rev. Mod. Phys.* 2000. V. 72. P. 733.
74. *Fujikawa K. et al.* Canonical Formulation of Quantum Tunneling with Dissipation // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68. P. 1093.
75. *Ford G. W., Lewis J. T., O'Connell R. F.* Quantum Tunneling in a Blackbody Radiation Field // *Phys. Lett. A.* 1991. V. 158. P. 367.
76. *Widom A., Clark T. D.* Probabilities for Quantum Tunneling through a Barrier with Linear Passive Dissipation // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 63;
Caldeira A. O., Leggett A. J. Comment on “Probabilities for Quantum Tunneling through a Barrier with Linear Passive Dissipation” // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1571;
Widom A., Clark T. D. Quantum Electrodynamical Tunneling in a Model Ferroelectric Capacitor with Linear Passive Dissipation // *Phys. Rev. B.* 1984. V. 30. P. 1205.
77. *Bruinsma R., Bak P.* Quantum Tunneling, Dissipation, and Fluctuations // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 420.
78. *Strunz W. T.* Path Integral, Semiclassical and Stochastic Propagators for Markovian Open Quantum Systems // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1977. V. 30. P. 4053.

-
79. *Kramers H.A.* Brownian Motion in a Field of Force and the Diffusion Model of Chemical Reactions // *Physica*. 1940. V. VII. P. 284.
 80. *Hänggi P., Talkner P., Borkovec M.* Reaction-Rate Theory: Fifty Years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* 1990. V. 62. P. 251.
 81. *Dekker H., van den Brink A.M.* Low-Dimensional Turnover Theory of Thermal Activation // *Phys. Rev. E*. 1994. V. 49. P. 2559;
van den Brink A.M., Dekker H. Reaction Rate Theory: Weak- to Strong-Friction Turnover in Kramers' Fokker-Planck Model // *Physica A*. 1997. V. 237. P. 515.
 82. *Melnikov V.I., Meshkov S.V.* Theory of Activated Rate Processes: Exact Solution of the Kramers Problem // *J. Chem. Phys.* 1986. V. 85. P. 1018.
 83. *Rajagopal A.K.* Action Principle for Nonequilibrium Statistical Dynamics Based on the Lindblad Density Matrix Evolution // *Phys. Lett. A*. 1997. V. 228. P. 66.
 84. *Gao S.* Dissipative Quantum Dynamics with a Lindblad Functional // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 3101.
 85. *Diosi L.* On High-Temperature Markovian Equation for Quantum Brownian Motion // *Europhys. Lett.* 1993. V. 22. P. 1.
 86. *Grange P.* Effects of Transients on Particle Emission Prior to Fission in a Transport Description of the Fission Process // *Nucl. Phys. A*. 1984. V. 428. P. 37c;
Grange P., Jun-Qing L., Weidenmuller H.A. Induced Nuclear Fission Viewed as a Diffusion Process: Transients // *Phys. Rev. C*. 1983. V. 27. P. 2063.