*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2016. Т. 47. ВЫП. 4*

# НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ В РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ НАМБУ–ИОНА-ЛАЗИНИО

*М. К. Волков* [*], *А. Б. Арбузов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна



[*] E-mail: volkov@theor.jinr.ru

*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2016. Т. 47. ВЫП. 4*

# НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ В РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ НАМБУ–ИОНА-ЛАЗИНИО

*М. К. Волков* *, *А. Б. Арбузов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В рамках расширенной модели Намбу–Иона-Лазинио описаны процессы рождения мезонов на встречных электрон-позитронных пучках при низких энергиях. Показано, что в этих процессах важную роль играют промежуточные векторные мезоны как в основном, так и в первом радиально-возбужденном состояниях. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с существующими экспериментальными данными. Также даны теоретические предсказания для ряда процессов, которые могут быть проверены экспериментально в ближайшем будущем.

In the framework of the extended Nambu–Jona-Lasinio model, low-energy processes of meson production in electron–positron collisions are described. It is shown that in these processes intermediate vector mesons, both in the ground and in the first radial-excited states, play an important role. Our results are in satisfactory agreement with the existing experimental data. A set of theoretical predictions, which can be tested experimentally in the nearest future, is given.

PACS: 12.39.Fe; 13.66.Bc; 13.35.Dx; 14.40.Be

*Посвящается памяти нашего товарища и соавтора профессора Эдуарда Алексеевича Кураева*

## ВВЕДЕНИЕ

При описании процессов взаимодействия адронов при энергии ниже значения 2 ГэВ, к сожалению, невозможно использовать стандартную теорию возмущений КХД. Поэтому здесь используются различные феноменологические модели, как правило, основанные на киральной симметрии сильных

*E-mail: volkov@theor.jinr.ru

взаимодействий. Одной из наиболее известных и успешных моделей такого типа является киральная кварковая модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [1–5]. В этой модели получено хорошее описание спектра масс четырех нонетов (скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных) мезонов, а также их сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия при низких энергиях. В частности, удалось получить удовлетворительное описание почти всех основных распадов этих мезонов.

Однако для описания целого ряда процессов при значениях энергии до 2 ГэВ необходимо учитывать промежуточные мезоны не только в основном, но и в радиально-возбужденных состояниях. Особо важную роль здесь играют первые радиально-возбужденные состояния мезонов. Для описания возбужденных состояний мезонов не удается ограничиться локальным приближением модели НИЛ. Поэтому вводится нелокальная форма взаимодействия с помощью простейшего формфактора полиномиального типа по импульсу кварка. В отличие от многих других феноменологических моделей, используемых для описания низкоэнергетической физики сильных взаимодействий, наш вариант расширенной модели НИЛ содержит минимальное количество произвольных параметров.

В рамках расширенной модели НИЛ удается описать спектр масс четырех названных выше нонетов мезонов как в основном, так и в первом радиально-возбужденном состояниях, распады с участием радиально-возбужденных мезонов. В данной работе основное внимание будет уделено описанию процессов рождения мезонов на встречных электрон-позитронных пучках. В этих процессах важную роль играет учет промежуточных мезонов как в основном, так и в первом радиально-возбужденном состояниях. Теоретическое описание этих процессов в настоящее время важно ввиду проведения ряда экспериментов на ускорителях промежуточных энергий, таких как ВЭПП-2000 (Новосибирск), BEPC-II (Пекин), Belle (KEK, Япония), BaBar (SLAC, США), DAFNE (Фраскати) и др.

## 1. ЛАГРАНЖИАН КВАРК-МЕЗОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

**1.1. Формфакторы для первых радиально-возбужденных состояний мезонов.** Для учета радиально-возбужденных состояний мезонов необходимо рассмотреть расширенную нелокальную версию модели НИЛ [6–10]. Для описания первых радиально-возбужденных состояний достаточно ограничиться простейшим видом формфактора в виде полинома второй степени по поперечному импульсу кварка. В импульсном пространстве он имеет вид

$$\begin{gathered} F_{l,a}(k_\perp) \equiv c_{l,a} f_a(k_\perp), \quad l = \sigma, \varphi, V, A, \quad a = 1, \ldots, 9, \\ f_a(k_\perp) = 1 + d_a |k_\perp|^2, \quad k_\perp = k - \frac{kP}{P^2} P, \end{gathered} \tag{1}$$

где $k$ — относительный импульс кварков; $P$ — импульс мезона. Индекс $l$ показывает сорт мезона (скалярный, псевдоскалярный, векторный или аксиально-векторный), индекс $a$ соответствеует члену мезонного нонета. В системе покоя мезона $|k_\perp|^2 = \mathbf{k}^2$. Параметр $c_{l,a}$ естественным образом объединяется с константой четырехкваркового взаимодействия и влияет только на значения масс мезонов [9]. Взаимодействие мезонов с кварками определяется формфактором $f_a(k_\perp)$. Параметр наклона $d_a$ однозначно определяется требованием равенства нулю вкладов возбужденных состояний в значения кваркового конденсата и масс составляющих кварков. Это соответствует условию, что кварковая петля с одной вершиной с одним формфактором должна равняться нулю:

$$I_1^f = -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f_a(k_\perp)}{m_q^2 - k^2} \Theta(\Lambda_3^2 - \mathbf{k}^2) = 0, \tag{2}$$

где $N_c = 3$ — число цветов; $\Lambda_3 = 1{,}03$ ГэВ — универсальный параметр ультрафиолетового обрезания по импульсу кварков в петлевых интегралах. В этой работе мы ограничимся использованием только двух значений параметра наклона $d_a$, соответствующих участию в процессе либо только легких $u$- и $d$-кварков, либо только $s$-кварков. Соответствующие формфакторы будем обозначать далее $f_u(k_\perp)$ и $f_s(k_\perp)$. Значения масс составляющих легких кварков зафиксированы в модели: $m_u = m_d = 280$ МэВ и $m_s = 405$ МэВ. Соответствующие значения параметров наклона формфакторов равны $d_u = -1{,}78$ ГэВ$^{-2}$ для легких кварков и $d_s = -1{,}73$ ГэВ$^{-2}$ для $s$-кварков.

Рассмотрим случай $U(3) \times U(3)$ версии расширенной модели НИЛ. После стандартной процедуры бозонизации четырехкваркового взаимодействия (детали см. в обзоре [9]) получается следующий лагранжиан:

$$\begin{aligned}
L_(\bar{q}, q; \sigma, \varphi, V, A) = &-\sum_{a,b=1}^{9} \frac{1}{2}\left(\left(M_{\sigma_1}^{ab}\right)^2 \sigma_1^a \sigma_1^b + \left(M_{\varphi_1}^{ab}\right)^2 \varphi_1^a \varphi_1^b\right) + \\
&+\sum_{a=1}^{9}\left[-\frac{\left(M_{V_1}^a\right)^2}{2}\left((V_1^{a,\mu})^2 + (A_1^{a,\mu})^2\right) + \frac{\left(M_{\sigma_2}^a\right)^2}{2}(\sigma_2^a)^2 + \frac{\left(M_{\varphi_2}^a\right)^2}{2}(\varphi_2^a)^2 -\right. \\
&\left. -\frac{\left(M_{V_2}^a\right)^2}{2}\left(V_2^{a,\mu}\right)^2 - \frac{\left(M_{A_2}^a\right)^2}{2}\left(A_2^{a,\mu}\right)^2\right] + \\
&+\bar{q}\left[k_\mu\gamma_\mu - m + \sum_{a=1}^{9}\tau^a\left(\sigma_1^a + \varphi_1^a + V_{1,\mu}^a + A_{1,\mu}^a + \sigma_2^a f_a(k_\perp) + \right.\right. \\
&\left.\left. + \varphi_2^a f_a(k_\perp) + V_{2,\mu}^a f_a \gamma^\mu + A_{2,\mu}^a f_a \gamma^5\gamma^\mu\right)\right] q,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma_i^a$, $\varphi_i^a$, $V_{i,\mu}^a$ и $A_{i,\mu}^a$ — нонеты ($a = 1, \ldots, 9$) скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов соотвественно. Индекс $i$ обозначает основное ($i = 1$) и первое радиально-возбужденное ($i = 2$) состояния. Здесь $m = \mathrm{diag}\,(m_u, m_d, m_s)$ — диагональная матрица масс составляющих кварков, которые возникли после спонтанного нарушения киральной симметрии. Соответственно, $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$. Массы $M_i$ являются массами бозонов без учета вкладов кварковых петель. Матрицы $\tau^a$ в интервале $a = 1, \ldots, 7$ совпадают со стандартными матрицами Гелл-Манна $\lambda_{1,\ldots,7}$. В то же время

$$\begin{aligned} &\tau_8 = (\lambda_0 + \lambda_8)/\sqrt{3} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 0), \\ &\tau_9 = (-\lambda_0 + \sqrt{2}\lambda_8)/\sqrt{3} = \mathrm{diag}\,(0, 0, -\sqrt{2}). \end{aligned} \tag{4}$$

**1.2. Определение свободного лагранжиана физических полей.** Процедуру получения свободного лагранжиана для физических полей покажем на примере $\rho^0$-мезонов (детали см. в работах [7, 9]). В однопетлевом приближении по кварковым петлям для свободного лагранжиана векторных полей получаем

$$\begin{aligned} L^{(2)}(\rho^0) = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu\right)\left[\rho_1^\mu\rho_1^\nu + 2R_\rho\rho_1^\mu\rho_2^\nu + \rho_2^\mu\rho_2^\nu\right] + \\ + \frac{M_{\rho_1}^2}{2}(\rho_1^\mu)^2 + \frac{M_{\rho_2}^2}{2}(\rho_2^\mu)^2, \\ R_\rho = \frac{I_2^{(1)}(m_u)}{\sqrt{I_2^{(0)}(m_u)I_2^{(2)}(m_u)}} \approx 0{,}545, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho_{1,2}^\mu = V_{1,2}^{3,\mu}$ — нефизические поля нейтральных $\rho$-мезонов. Петлевые кварковые интегралы определяются общей формулой

$$I_n^{(l)}(m) = -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^l(k_\perp^2)}{(k^2 - m^2 + i0)^n} \Theta(\Lambda_3^2 - \mathbf{k}^2), \quad l = 0, 1, 2. \tag{6}$$

Приведем используемые ниже значения интегралов $I_2$ с различным числом формфакторов:

$$\begin{aligned} &I_2^{(0)}(m_u) \approx 0{,}0398, \quad I_2^{(1)}(m_u) \approx 0{,}0135, \quad I_2^{(2)}(m_u) \approx 0{,}0154, \\ &I_2^{(0)}(m_s) \approx 0{,}0278, \quad I_2^{(1)}(m_s) \approx 0{,}0084, \quad I_2^{(2)}(m_s) \approx 0{,}090. \end{aligned} \tag{7}$$

Учет кварковых петель привел к перенормировке масс бозонов:

$$M_{\rho_1}^2 = \frac{g_{\rho_1}^2}{4}\left(M_{V_1}^3\right)^2, \qquad M_{\rho_2}^2 = \frac{g_{\rho_2}^2}{4}\left(M_{V_2}^3\right)^2. \tag{8}$$

Константы $g_{\rho_1} = \sqrt{3}/\sqrt{2I_2^{(0)}(m_u)}$ и $g_{\rho_2} = \sqrt{3}/\sqrt{2I_2^{(2)}(m_u)}$ являются константами перенормировки векторных полей.

Диагонализация лагранжиана (5) достигается преобразованием к физическим полям $\rho$ и $\rho' \equiv \rho(1450)$ в основном и первом радиально-возбужденном состояниях соответственно:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\sin(\beta+\beta_0)\rho - \cos(\beta+\beta_0)\rho'}{\sin(2\beta_0)}, \\ \rho_2 &= \frac{\sin(\beta-\beta_0)\rho - \cos(\beta-\beta_0)\rho'}{\sin(2\beta_0)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Обратим внимание, что данные преобразования пионных полей носят неунитарный характер, поскольку помимо поворота они содержат и сжатие, связанное с перенормировкой. Углы смешивания находятся из соотношений

$$\begin{aligned} \sin\beta_0 &= \sqrt{\frac{1+R_\rho}{2}} \Rightarrow \beta_0 \approx 61{,}5^\circ, \\ \mathrm{tg}\,(2\beta-\pi) &= \sqrt{\frac{1}{R_\rho^2}-1}\left[\frac{M_{\rho_1}^2 - M_{\rho_2}^2}{M_{\rho_1}^2 + M_{\rho_2}^2}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Массы нефизических $\rho$-мезонов $M_{\rho_1}$ и $M_{\rho_2}$ связаны с массами физических $\rho$-мезонов следующим соотношением:

$$M_{1,2}^2 = \frac{1-R_\rho^2}{2}\left[M_\rho^2 + M_{\rho'}^2(-,+)\sqrt{\left(M_\rho^2+M_{\rho'}^2\right)^2 - \frac{4M_\rho^2 M_{\rho'}^2}{1-R_\rho^2}}\right]. \tag{11}$$

Используя современные экспериментальные данные для масс $\rho(770)$ и $\rho' = \rho(1450)$, получаем $\beta \approx 81{,}8^\circ$.

После диагонализации лагранжиана (5) получаем стандартный вид свободного лагранжиана для физических полей:

$$L^{(2)}(\rho,\rho') = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu\right)[\rho^\mu\rho^\nu + \rho'^\mu\rho'^\nu] + \frac{M_\rho^2}{2}(\rho^\mu)^2 + \frac{M_{\rho'}^2}{2}(\rho'^\mu)^2. \tag{12}$$

**1.3. Кварк-мезонный лагранжиан для физических полей.** После проведения подобных преобразований для псевдоскалярных и оставшихся векторных полей получаем следующий лагранжиан кварк-мезонного взаимодействия:

$$\begin{aligned} L(\mathrm{meson}, q) = \bar{q}(p')\Bigg[&A_\pi\gamma_5\sum_{a=1}^{3}\tau^a\pi^a(k) - A_{\pi'}\gamma_5\sum_{a=1}^{3}\tau^a(\pi')^a(k) + \\ &+ A_\rho\sum_{a=1}^{3}\tau^a\hat{\rho}^a(k) + A_\omega\tau^8\hat{\omega}(k) + A_\phi\tau^9\hat{\phi}(k) - A_{\rho'}\sum_{a=1}^{3}\tau^a(\hat{\rho}')^a(k) - \\ &- A_{\omega'}\tau^8\hat{\omega}'(k) - A_{\phi'}\tau^9\hat{\phi}'(k)\Bigg]q(p), \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
A_\pi &= g_{\pi_1}\frac{\sin(\alpha+\alpha_0)}{\sin(2\alpha_0)} + g_{\pi_2} f(k_\perp^2)\frac{\sin(\alpha-\alpha_0)}{\sin(2\alpha_0)},\\
A_{\pi'} &= g_{\pi_1}\frac{\cos(\alpha+\alpha_0)}{\sin(2\alpha_0)} + g_{\pi_2} f(k_\perp^2)\frac{\cos(\alpha-\alpha_0)}{\sin(2\alpha_0)},\\
A_\rho &= A_\omega = \frac{g_{\rho_1}}{2}\frac{\sin(\beta^u+\beta_0^u)}{\sin(2\beta_0^u)} + \frac{g_{\rho_2}}{2} f(k_\perp^2)\frac{\sin(\beta^u-\beta_0^u)}{\sin(2\beta_0^u)},\\
A_{\rho'} &= A_{\omega'} = \frac{g_{\rho_1}}{2}\frac{\cos(\beta^u+\beta_0^u)}{\sin(2\beta_0^u)} + \frac{g_{\rho_2}}{2} f(k_\perp^2)\frac{\cos(\beta^u-\beta_0^u)}{\sin(2\beta_0^u)},\\
A_\phi &= \frac{g_{\phi_1}}{2}\frac{\sin(\beta^s+\beta_0^s)}{\sin(2\beta_0^s)} + \frac{g_{\phi_2}}{2} f(k_\perp^2)\frac{\sin(\beta^s-\beta_0^s)}{\sin(2\beta_0^s)},\\
A_{\phi'} &= \frac{g_{\phi_1}}{2}\frac{\cos(\beta^s+\beta_0^s)}{\sin(2\beta_0^s)} + \frac{g_{\phi_2}}{2} f(k_\perp^2)\frac{\cos(\beta^s-\beta_0^s)}{\sin(2\beta_0^s)},\\
& k = p'-p, \quad \hat{V} \equiv V^\mu \gamma_\mu, \quad \beta^u = \beta, \quad \beta_0^u = \beta_0.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Углы смешивания возбужденных и невозбужденных пионов $\alpha_0 \approx 59{,}12^\circ$ и $\alpha \approx 59{,}48^\circ$ получены в работах [7, 8]. Соответствующие углы для $\phi$-мезонов равны $\beta_0^s \approx 57{,}13^\circ$ и $\beta^s \approx 68{,}4^\circ$. Константы $g_{\phi_1} = \sqrt{3}/\sqrt{2I_2^{(0)}(m_s)}$ и $g_{\phi_2} = \sqrt{3}/\sqrt{2I_2^{(2)}(m_s)}$ вычисляются аналогично константам взаимодействия $\rho$-мезонов, только с заменой $m_u$ на $m_s$ и, соответственно, параметра наклона формфактора $d_u$ на $d_s$. Константы $g_{\pi_1} = 1/\sqrt{4ZI_2^{(0)}(m_u)}$ и $g_{\pi_2} = 1/\sqrt{4I_2^{(2)}(m_u)}$ являются константами перенормировки пионных полей. Константа $Z$ возникла после учета переходов $\pi - a_1$, что приводит к дополнительной перенормировке псевдоскалярных мезонов [3]

$$
Z = 1 - \frac{6m_u^2}{M_{a_1}^2}, \tag{15}
$$

где $M_{a_1} = 1230$ МэВ — масса аксиально-векторного $a_1$-мезона.

В лагранжиан (13) могут быть включены странные $K$-мезоны и изоскалярные $\eta$-мезоны. В этой работе $K$-мезоны мы рассматривать не будем. А введение физических псевдоскалярных изоскалярных полей требует учета смешивания как минимум четырех различных состояний: $\eta(550)$, $\eta'(958)$, $\eta(1295)$ и $\eta(1475)$, которые обозначаются ниже как $\eta$, $\eta'$, $\hat{\eta}$ и $\hat{\eta}'$ соответственно. Последние два рассматриваются как первые радиально-возбужденные состояния $\eta$- и $\eta'$-мезонов. Это смешивание осуществляет диагонализацию физических состояний $\eta$-мезонов подобно тому, как сделано выше для $\rho$-мезонов. Соответствующая матрица смешивания получена в работе [11] (таблица). Эта матрица позволяет описать взаимодействия физических $\eta$-мезонов с кварками через известные в данной модели взаимодействия нефизических

**Коэффициенты матрицы смешивания для $\eta$-мезонов**

| $b^{\varphi}_{\eta}$ | $\eta$ | $\hat{\eta}$ | $\eta'$ | $\hat{\eta}'$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1^8$ | 0,71 | 0,62 | –0,32 | 0,56 |
| $\varphi_2^8$ | 0,11 | –0,87 | –0,48 | –0,54 |
| $\varphi_1^9$ | 0,62 | 0,19 | 0,56 | –0,67 |
| $\varphi_2^9$ | 0,06 | –0,66 | 0,30 | 0,82 |

мезонов $(\varphi^{8,9}_{1,2})$:

$$L_{\text{int}}(\eta, q) = \bar{q}(p')\left(i\gamma_5 \sum_{j=8,9} \tau^j \sum_{\tilde{\eta}=\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} A^j_{\tilde{\eta}} \tilde{\eta}(k)\right) q(p),$$
$$A^j_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'} = g_{j,1} b^{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}_{\varphi_1^j} + g_{j,2} b^{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}_{\varphi_2^j} f_j(k_\perp^2), \tag{16}$$

где $g_{8,1} = g_{\pi_1}$, $g_{8,2} = g_{\pi_2}$. Константы $g_{9,1}$ и $g_{9,2}$ определяются так же, как и $g_{\pi_1}$ и $g_{\pi_2}$ с заменами $m_u$ на $m_s$ и формфактора $f_u$ на $f_s$. Коэффициенты $b^{\varphi^j_{1,2}}_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}$ являются элементами матрицы смешивания из таблицы. Например, взаимодействие мезона $\eta(550)$ с кварками имеет вид

$$L_{\text{int}}(\eta(550), q) = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) i\gamma_5 \left[\tau^8 \left(g_{\pi_1} b_\eta^{\varphi_1^8} + g_{\pi_2} b_\eta^{\varphi_2^8} f_u(k_\perp^2)\right) + \right.$$
$$\left. + \tau^8 \left(g_{\phi_1} b_\eta^{\varphi_1^9} + g_{\phi_2} b_\eta^{\varphi_2^9} f_s(k_\perp^2)\right)\right] \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \tag{17}$$

## 2. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ НА ВСТРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПУЧКАХ

**2.1. Процесс $e^+e^- \to \pi^0(\pi^{0'})\gamma$.** В этом разделе мы рассмотрим процессы аннигиляции $e^+e^-$ в пары $\pi^0\gamma$ или $\pi^0(1300)\gamma$ при значениях энергии в системе центра масс до 2 ГэВ, следуя работе [12]. В этих реакциях заметную роль играют промежуточные векторные мезоны в основном состоянии $\rho^0$, $\omega$, $\phi$, а также возбужденные мезоны $\rho'(1450)$ и $\omega'(1420)$. Вклад промежуточного возбужденного мезона $\phi'(1680)$ не будет рассмотрен из-за того, что он подавлен фазовым объемом и малой вероятностью перехода в состояния из легких $u$- и $d$-кварков. Рассматриваемые процессы подавлены дополнительным фактором $\alpha \approx 1/137$ относительно процессов аннигиляции с рождением только адронов. Однако сечение процесса $e^+ + e^- \to \pi^0 + \gamma$ измерено с довольно высокой точностью в эксперименте [13–15] при значениях энергии до 1 ГэВ. Современные эксперименты на коллайдерах ВЭПП-2000 (Новосибирск) и BES-III (Пекин) накапливают значительный объем данных по различным каналам аннигиляции, включая и случаи рождения радиально-возбужденного мезона $\pi'(1300)$.

Процесс $e^+ + e^- \to \pi^0 + \gamma$ описывается диаграммами Фейнмана (рис. 1–3). Соответствующая амплитуда имеет вид

$$T^\lambda = \bar{e}\gamma_\mu e \varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} \frac{p_\pi^\alpha p_\gamma^\beta m_u}{s} \left\{ B_\gamma + B_{\rho+\omega+\phi} + B_{\rho'+\omega'} \right\}, \tag{18}$$

где $s = (p_1(e^+) + p_2(e^-))^2$. Вклад амплитуды с фотонным обменом (рис. 1) пропорционален интегралу по треугольной кварковой петле:

$$B_\gamma = 2V_{\gamma^*\pi^0\gamma}(s), \qquad V_{\gamma^*\pi^0\gamma} = g_{\pi_1} I_0^{(3)}(m_u). \tag{19}$$

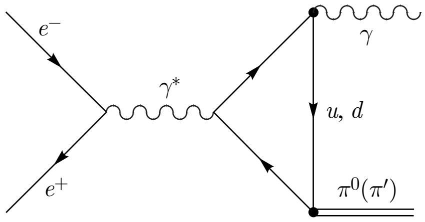


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана с рождением $\pi^0\gamma$ через промежуточный фотон

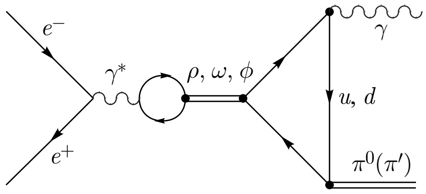


Рис. 2. Диаграмма Фейнмана с рождением $\pi^0\gamma$ через промежуточные $\rho^0$-, $\omega$- и $\phi$-мезоны

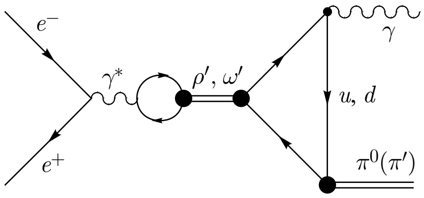


Рис. 3. Диаграмма Фейнмана с рождением $\pi^0\gamma$ через возбужденные промежуточные $\rho'$- и $\omega'$-мезоны

Нетрудно видеть, что в лагранжиане (13) компонента основного состояния пиона, содержащая формфактор, умножается на синус разности углов $\alpha - \alpha_0 \approx 0{,}36^\circ$. Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать этой компонентой.

Сумма вкладов основных состояний промежуточных векторных мезонов $\rho$, $\omega$ и $\phi$ (рис. 2) имеет вид

$$B_{\rho+\omega+\phi} = \\ = \left\{ \frac{\gamma_\rho s}{s - M_\rho^2 + iM_\rho\Gamma_\rho} + \frac{\gamma_\omega s}{s - M_\omega^2 + iM_\omega\Gamma_\omega} + \frac{\gamma_\phi s\sqrt{2}\sin\theta_{\omega\phi}}{s - M_\phi^2 + iM_\phi\Gamma_\phi} \right\} V_{\rho\pi^0\gamma}(s), \tag{20}$$

где учтены переходы $\gamma \to \rho(\omega, \phi)$ через кварковую петлю, дающие множители

$$\begin{aligned} \gamma_\rho = \gamma_\omega &= \frac{1}{g_{\rho_1}} \left\{ \frac{\sin(\beta^u + \beta_0^u)}{\sin(2\beta_0^u)} + R_\rho \frac{\sin(\beta^u - \beta_0^u)}{\sin(2\beta_0^u)} \right\}, \\ \gamma_\phi &= \frac{1}{g_{\phi_1}} \left\{ \frac{\sin(\beta^s + \beta_0^s)}{\sin(2\beta_0^s)} + R_\phi \frac{\sin(\beta^s - \beta_0^s)}{\sin(2\beta_0^s)} \right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что для случая $\omega$-мезона относительный фактор $1/3$ в переходе $\gamma \to \omega$ (по сравнению со случаем $\rho$-мезона) сокращается с фактором 3 в вершине $\omega\pi^0\gamma$. В вершине треугольника с $\phi$-мезоном использована лишь компонента этого мезона, содержащая легкие $u$- и $d$-кварки, что описано фактором $\sin\theta_{\omega\phi}$ за счет смешивания $\phi - \omega$, $\theta_{\omega\phi} \approx -3^\circ$ [16].

Вклады возбужденных состояний промежуточных мезонов рассчитываются аналогично:

$$B_{\rho'+\omega'} = \left( -\frac{\cos(\beta + \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} - R_\rho \frac{\cos(\beta - \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} \right) \frac{1}{g_{\rho_1}} \times \\ \times \left\{ \frac{s}{s - M_{\rho'}^2 + iM_{\rho'}\Gamma_{\rho'}} + \frac{s}{s - M_{\omega'}^2 + iM_{\omega'}\Gamma_{\omega'}} \right\} V_{\rho'\pi^0\gamma}(s). \tag{22}$$

Мы проверили то, что учет зависимости ширин мезонов от энергии для данного процесса не дает заметного изменения результатов. В численных расчетах мы использавали значения из обзора [17]: $\Gamma_\rho = 146{,}2$ МэВ, $\Gamma_\omega = 8{,}49$ МэВ, $\Gamma_{\rho'} = 400$ МэВ и $\Gamma_{\omega'} = 215$ МэВ.

Вершины определяются треугольными кварковыми петлевыми диаграммами аномального типа:

$$\begin{aligned} V_{\rho\pi^0\gamma} &= g_{\pi_1} \left( \frac{\sin(\beta + \beta_0) g_{\rho_1} I_0^{(3)}(m_u)}{\sin(2\beta_0)} + \frac{\sin(\beta - \beta_0) g_{\rho_2} I_1^{(3)}(m_u)}{\sin(2\beta_0)} \right), \\ V_{\rho'\pi^0\gamma} &= -g_{\pi_1} \left( \frac{\cos(\beta + \beta_0) g_{\rho_1} I_0^{(3)}(m_u)}{\sin(2\beta_0)} + \frac{\cos(\beta - \beta_0) g_{\rho_2} I_1^{(3)}(m_u)}{\sin(2\beta_0)} \right). \end{aligned}$$

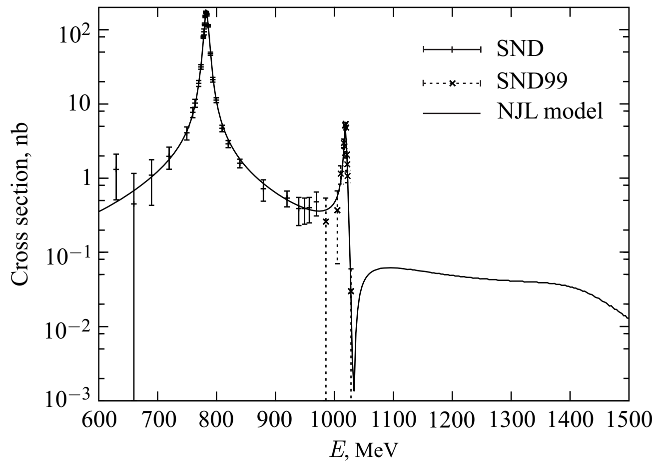


Рис. 4. Сравнение экспериментальных результатов и предсказаний модели НИЛ для зависимости сечения процесса $e^+e^- \to \pi^0\gamma$ от энергии

Теперь мы можем оценить полное сечение рассматриваемого процесса:

$$\begin{gathered}\sigma^{e^+e^-\to\pi\gamma}(s) = \frac{\alpha^3}{24\pi^2 s^3 f_\pi^2}\lambda^{3/2}(s,0,M_\pi^2)\frac{1}{g_{\pi_1}^2}|B_\gamma + B_{\rho+\omega+\phi} + B_{\rho'+\omega'}|^2,\\ \lambda(s,0,M_\pi^2) = (s-M_\pi^2)^2.\end{gathered} \tag{23}$$

На рис. 4 показаны экспериментальные данные коллаборации СНД (SND) [14, 18] и теоретические предсказания в рамках обсуждаемой модели. Видно, что теоретические предсказания находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. В частности, мы получили значения для сечений в области пиков $\omega$- и $\phi$-резонансов

$$\begin{aligned}\sigma^{e^+e^-\to\pi\gamma}({m_\omega}^2) &= 177 \text{ нб},\\ \sigma^{e^+e^-\to\pi\gamma}({m_\phi}^2) &= 5{,}5 \text{ нб},\end{aligned} \tag{24}$$

находящиеся в удовлетворительном согласии с данными СНД [14, 18].

Аналогичные выражения для амплитуд, описывающих рождение пары $\pi'(1300)\gamma$, даны в работе [12]. Отличие от случая рождения $\pi\gamma$ заключается в том, что при вычислении треугольных кварковых вершин становится необходимым учитывать раздвоение (для учета членов с формфакторами) как векторной вершины, так и вершины с $\pi'(1300)$. Соответствующие теоретические предсказания для зависимости сечения этого процесса от энергии приведены на рис. 5, они могут быть проверены в современных экспериментах на $e^+e^-$-коллайдерах ВЭПП-2000 (Новосибирск) и BEPC-II (Пекин).

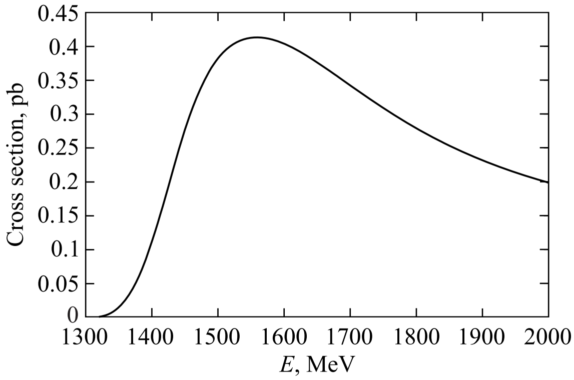


Рис. 5. Предсказания расширенной модели НИЛ для зависимости сечения процесса $e^+e^- \to \pi'\gamma$ от энергии

**2.2. Процесс $e^+e^- \to \pi^0\omega$.** Процесс аннигиляции $e^+e^-$ в пару $\pi^0\omega$ с последующим распадом $\omega \to \pi^0\gamma$ изучался при значениях энергии до 2 ГэВ в ряде экспериментов: DM2 [19], ND [13], SND [20] и CMD-2 [21]. Для теоретического описания этого процесса использовался целый ряд феноменологических моделей, как правило, основанных на принципах киральной симметрии и векторной доминантности. В работе [21] использовалась обобщенная модель векторной доминантности с учетом вкладов промежуточных векторных мезонов $\rho(770)$, $\rho'(1450)$ и $\rho''(1700)$. При этом использовались произвольные свободные параметры, которые фитировались по экспериментальным данным этого же процесса. Ранее процесс распада $\rho' \to \omega\pi$ рассматривался в релятивистской обобщенной кварковой модели [22] и в нерелятивистской кварковой модели [23]. В работе [24] описывается изучение процесса $e^+e^- \to \omega\pi^0$ при значениях энергии, близких к значениям резонанса $\phi$-мезона, а также представлены экспериментальные данные коллаборации KLOE [25]. Здесь мы не будем уделять специальное внимание точке энергии, связанной с резонансом $\phi$-мезона, и пренебрежем его вкладом в области значений энергии выше значений массы $m_\phi$ (и ниже 2 ГэВ). Важно отметить, что в работах [21, 26, 27] на различных моделях показано, что вклад второго радиально-возбужденного состояния $\rho''(1700)$ в обсуждаемый процесс незначителен. В расширенной модели НИЛ данный процесс описан в работах [28, 29]. В отличие от указанных выше работ нам не требовалось использовать какие-либо дополнительные параметры.

В отличие от описанного выше процесса $e^+e^- \to \pi\gamma$ здесь в качестве промежуточных мезонов (наряду с фотоном) будут участвовать только $\rho^0(770)$ и $\rho'(1450)$. Соответствующая амплитуда имеет вид

$$T = \bar{e}\gamma_\mu e \frac{1}{s} \epsilon^{\mu\lambda\nu\eta} p^\nu_\omega p^\eta_\pi \{T_\gamma + T_\rho + T_{\rho'}\} \varepsilon_\lambda(\omega), \tag{25}$$

где $s = (p_1(e^+) + p_2(e^-))^2 \equiv q^2$. Вычисления амплитуды полностью аналогичны проведенным в п. 2.1, отличие будет в выражении для треугольной вершины, описывающей рождение пары $\pi\omega$ вместо $\pi\gamma$. В частности, вершина перехода $\rho \to \pi\omega$ в расширенной модели НИЛ принимает вид

$$V_{\rho\omega\pi} = g_{\pi_1}\left[g_{\rho_1}\left(\frac{\sin(\beta+\beta_0)}{\sin(2\beta_0)}\right)^2 I_3(m_u) + \frac{g_{\rho_2}^2}{g_{\rho_1}}\left(\frac{\sin(\beta-\beta_0)}{\sin(2\beta_0)}\right)^2 I_3^{ff}(m_u) + 2g_{\rho_2}\frac{\sin(\beta+\beta_0)}{\sin(2\beta_0)}\frac{\sin(\beta-\beta_0)}{\sin(2\beta_0)} I_3^{f}(m_u)\right]. \quad (26)$$

Большее количество членов в данной вершине связано с учетом членов с формфакторами и в вершине $\rho$-мезона, и в вершине $\omega$-мезона. Детальное описание остальных вершин можно найти в статье [29]. Полученные амплитуды позволяют получить предсказание для зависимости сечения рассматриваемого процесса от энергии (рис. 6). Видно, что полученные предсказания находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Особенно хорошее согласие получается при значениях энергии до 1,4 ГэВ. При более высоких значениях энергии для более точного описания следует учитывать вклады от радиально-возбужденных состояний промежуточных векторных мезонов более высокого порядка.

Аналогичные вычисления в рамках расширенной модели НИЛ были проведены для процесса $e^+ + e^- \to \pi^0 + \rho^0$ в работе [31].

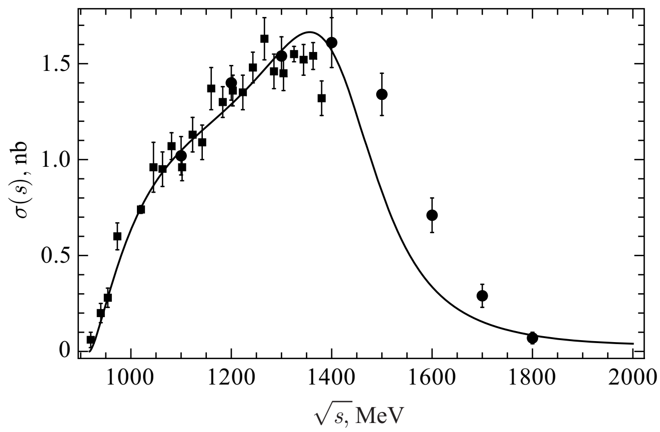


Рис. 6. Сравнение экспериментальных данных SND-2 (квадраты [20] и кружки [30]) для процесса $e^+e^- \to \pi\omega$ с предсказаниями расширенной модели НИЛ (сплошная кривая)

**2.3. Процессы $e^+e^- \to \eta(\eta', \eta(1295), \eta(1475))\gamma$.** Процесс электрон-позитронной аннигиляции в пару $\eta\gamma$ изучался экспериментально на коллайдере ВЭПП-2М (Новосибирск) [32]. Аналогичные процессы с рождением $\eta'$ и первых радиально-возбужденных состояний $\eta$-мезонов будут исследоваться на модернизированном коллайдере ВЭПП-2000. В расширенной модели НИЛ данный процесс описан в работе [33].

Структура амплитуд процессов с рождением пар $\eta_i\gamma$ очень близка к приведенной в п. 2.1. В ней мы учитываем вклады промежуточного фотона, $\rho$-, $\omega$- и $\phi$-мезонов как в основном, так и в первом радиально-возбужденном состояниях. Здесь особенно важными становятся вклады промежуточных $\phi$- и $\phi'$-мезонов, поскольку $\eta$-мезоны содержат как $u$-, $d$-, так и $s$-кварковые структуры. Амплитуда имеет вид

$$T^\lambda = \bar{e}\gamma^\mu e \frac{p_\eta^\alpha p_\gamma^\beta}{s}\{T_\gamma + T_{\rho+\omega} + T_\phi + T_{\rho'+\omega'} + T_{\phi'}\}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}, \tag{27}$$

где вклады различных промежуточных состояний описываются выражениями

$$\begin{aligned}
T_\gamma &= \frac{2}{3}\left(5\frac{16}{3}\pi^2 m_u V_{\gamma u} + \sqrt{2}\frac{16}{3}\pi^2 m_s V_{\gamma s}\right),\\
T_{\rho+\omega} &= \left(\frac{3s}{m_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho} + \frac{1}{3}\frac{s}{m_\omega^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\omega}\right)\frac{C_{\gamma\rho}}{g_{\rho_1}}\left(\frac{16}{3}\pi^2 m_u V_\rho\right),\\
T_\phi &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{s}{m_\phi^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\phi}\frac{C_{\gamma\phi}}{g_{\phi_1}}\left(\frac{16}{3}\pi^2 m_s V_\phi\right),\\
T_{\rho'+\omega'} &= \left(\frac{3s}{m_{\rho'}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\rho'}(s)} + \frac{1}{3}\frac{s}{m_{\omega'}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\omega'}}\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{C_{\gamma\rho'}}{g_{\rho_1}}\left(\frac{16}{3}\pi^2 m_u V_{\rho'}\right)e^{i\pi},\\
T_{\phi'} &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{s}{m_{\phi'}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\phi'}}\frac{C_{\gamma\phi'}}{g_{\phi_1}}\left(\frac{16}{3}\pi^2 m_s V_{\phi'}\right),
\end{aligned} \tag{28}$$

где коэффициенты $C_{\gamma V}$ обозначают константы перехода виртуального фотона в векторный мезон:

$$\begin{aligned}
C_{\gamma V} &= \frac{\sin(\beta^q + \beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} + R_V\frac{\sin(\beta^q - \beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)},\\
C_{\gamma V'} &= -\left(\frac{\cos(\beta^q + \beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} + R_V\frac{\cos(\beta^q - \beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)}\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Значения для вершин берем в приближении малых импульсов:

$$V_{\gamma q}^{\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} = \sum_{i=1,2} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,i}} g_{q_i} I_3(m_q), \tag{30}$$

$$\begin{aligned} V_{V_q}^{\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} = &\frac{\sin(\beta^q+\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,1}} g_{V_1} g_{q_1} I_3(m_q) + \\ &+ \frac{\sin(\beta^q-\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,1}} g_{V_2} g_{q_1} I_3^f(m_q) + \\ &+ \frac{\sin(\beta^q+\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,2}} g_{V_1} g_{q_2} I_3^f(m_q) + \\ &\qquad + \frac{\sin(\beta^q-\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,2}} g_{V_2} g_{q_2} I_3^{f^2}(m_q), \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} -V_{V_q'}^{\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} = &\frac{\cos(\beta^q+\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,1}} g_{V_1} g_{q_1} I_3(m_q) + \\ &+ \frac{\cos(\beta^q-\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,1}} g_{V_2} g_{q_1} I_3^f(m_q) + \\ &+ \frac{\cos(\beta^q+\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,2}} g_{V_1} g_{q_2} I_3^f(m_q) + \\ &\qquad + \frac{\cos(\beta^q-\beta_0^q)}{\sin(2\beta_0^q)} b_{\eta,\hat{\eta},\eta',\hat{\eta}'}^{\varphi_{q,2}} g_{V_2} g_{q_2} I_3^{f^2}(m_q). \end{aligned} \tag{32}$$

Зависимость ширины $\rho'$-мезона от энергии можно учесть, используя формулу

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho'}(s) = &\Theta(2m_\pi - \sqrt{s})\Gamma_{\rho'\to 2\pi} + \\ &+ \Theta(\sqrt{s}-2m_\pi)\left(\Gamma_{\rho'\to 2\pi} + \Gamma_{\rho'\to\omega\pi}\frac{\sqrt{s}-2m_\pi}{m_\omega - m_\pi}\right)\Theta(m_\omega + m_\pi - \sqrt{s}) + \\ &\quad + \Theta(m_{\rho'} - \sqrt{s})\Theta(\sqrt{s} - m_\omega - m_\pi)\Bigg(\Gamma_{\rho'\to 2\pi} + \Gamma_{\rho'\to\omega\pi} + \\ &+ (\Gamma_{\rho'} - \Gamma_{\rho'\to 2\pi} - \Gamma_{\rho'\to\omega\pi})\frac{\sqrt{s}-m_\omega-m_\pi}{m_{\rho'}-m_\omega-m_\pi}\Bigg) + \Theta(\sqrt{s}-m_{\rho'})\Gamma_{\rho'}, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\Gamma_{\rho'\to 2\pi} = 22$ МэВ и $\Gamma_{\rho'\to\omega\pi} = 75$ МэВ получены в работе [8], а $\Gamma_{\rho'} = 400$ МэВ — полная ширина этого мезона. Для ширин возбужденных $\omega'$- и $\phi'$-мезонов мы используем значения их полных ширин. Это оправдано тем, что их вклады невелики по сравнению с вкладом $\rho'$-мезона. Отметим, что вклад $\phi'$-мезона заметен только при значениях энергии $\sqrt{s} > 1{,}5$ ГэВ.

Формула для полного сечения рассматриваемого процесса имеет вид

$$\sigma(s) = \frac{\alpha}{24\pi^2 s^3}\lambda^{3/2}(s,m,0)|T|^2, \tag{34}$$

где $\lambda(a,b,c) = (a-b-c)^2 - 4bc$, $m = m_\eta, m_{\eta'}, m_{\hat{\eta}}, m_{\hat{\eta}'}$. Результаты численных расчетов приведены на рис. 7–10. На рис. 7 приведено сравнение с экспериментальными данными [32], на графиках (см. рис. 8–10) представлены предсказания расширенной модели НИЛ. По графикам видно, что учет возбужденных состояний очень важен в области значений выше 1 ГэВ. Наши предсказания могут использоваться при определении физической программы дальнейших экспериментальных исследований на современных электрон-позитронных коллайдерах.

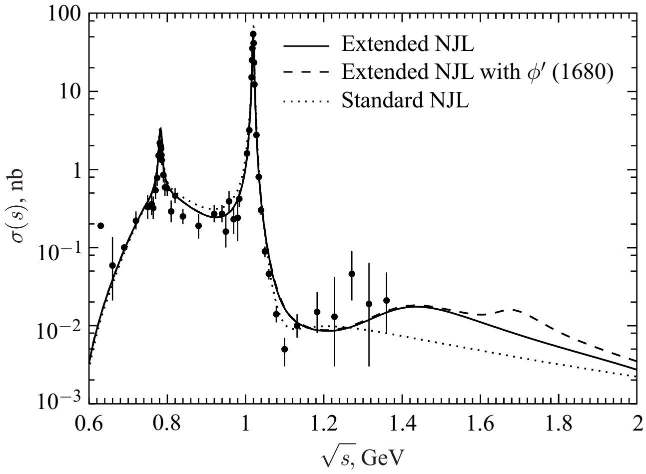


Рис. 7. Сравнение предсказаний модели НИЛ с данными эксперимента [32] для процесса $e^+e^- \to \eta\gamma$

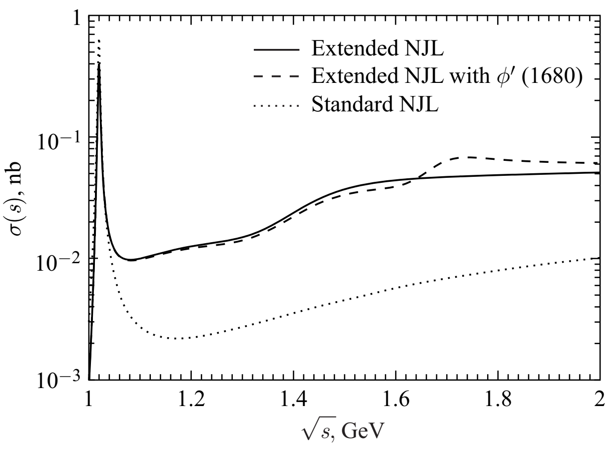


Рис. 8. Предсказания для зависимости сечения процесса $e^+e^- \to \eta'\gamma$ от энергии

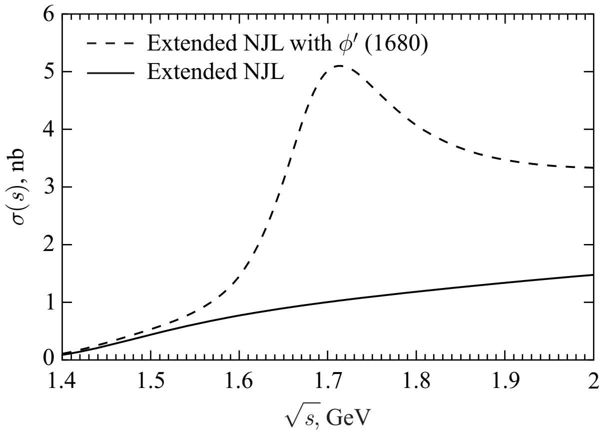


Рис. 9. Предсказания для зависимости сечения процесса $e^+e^- \to \eta(1295)\gamma$ от энергии

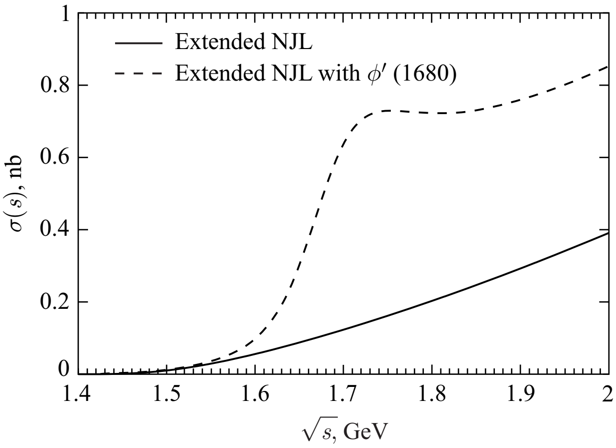


Рис. 10. Предсказания для зависимости сечения процесса $e^+e^- \to \eta\,(1475)\,\gamma$ от энергии

**2.4. Процесс $e^+e^- \to \pi^+\pi^-(\pi\pi')$.** Процесс аннигиляции $e^+e^-$ в пару заряженных пионов тщательно изучался как экспериментально [34] (см. также ссылки в этой работе), так и теоретически [35–40]. Однако в большинство теоретических работ приходилось вводить дополнительные произвольные параметры для удовлетворительного описания высокоточных экспериментальных данных. В то же время в расширенной модели НИЛ такое описание может быть получено без введения каких-либо дополнительных произвольных параметров. Это позволяет не только описывать существующие экспериментальные данные, но и делать теоретические предсказания для процесса рождения пары заряженных $\pi$- и $\pi'(1300)$-мезонов.

Для описания этого процесса при значениях энергии ниже 1 ГэВ достаточно использовать стандартную модель НИЛ с учетом промежуточных состояний фотона, $\rho$- и $\omega$-мезонов в основных состояниях. Однако при более высоких значениях энергии заметную роль начинает играть промежуточное состояние $\rho'(1450)$. В рамках расширеной модели НИЛ учет вкладов первых радиально-возбужденных состояний мезонов для этого процесса был сделан в работе [41].

Амплитуда процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ описывается диаграммами, приведенными на рис. 11 и 12, и имеет вид

$$T = \bar{e}\gamma_\mu e \frac{4\pi\alpha}{s}\left(B_\gamma + B_\rho + B_\omega + B_{\rho'}\right) f_{a_1}(s)(p^\mu_{\pi^+} - p^\mu_{\pi^-}), \tag{35}$$

где $\alpha \approx 1/137$, $s = (p_{e^+} + p_{e^-})^2$, а $f_{a_1}(s)$ описывает рождение пионов через промежуточные $a_1$-мезоны:

$$f_{a_1}(p^2) = \frac{1}{Z} + \left(1 - \frac{1}{Z}\right) + \left(\frac{p^2 - m_\pi^2}{(g_\rho F_\pi)^2}\right)(1 - Z) = 1 + \left(\frac{p^2 - m_\pi^2}{(g_\rho F_\pi)^2}\right)(1 - Z), \tag{36}$$

где $Z$ — описанный выше перенормировочный множитель, учитывающий переходы $\pi - a_1$. Первое слагаемое описывает рождение двух пионов не-

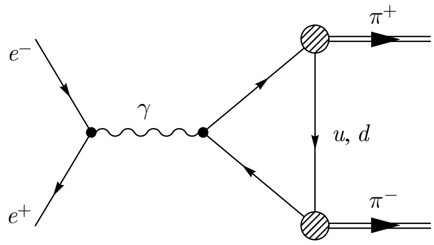


Рис. 11. Контактная диаграмма, описывающая рождение двух пионов промежуточным фотоном

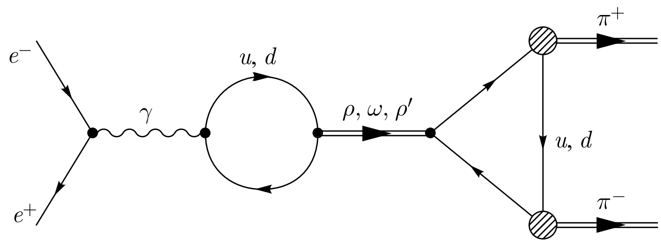


Рис. 12. Процесс $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ с учетом промежуточных векторных мезонов

посредственно из кварковой треугольной петли, второе слагаемое соответствует ситуации, когда один из пионов рождается через промежуточный мезон $a_1(1260)$, и третье — когда оба пиона рождаются через промежуточные $a_1$-мезоны.

Вклад диаграммы с обменом фотоном нормирован на единицу: $B_\gamma = 1$. С учетом переходов $\gamma$–$\rho$ величина $B_\rho$ имеет вид

$$B_\rho = \frac{C_{\gamma\rho} C_{\rho\pi\pi}}{g_\rho} \frac{s}{m_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)}, \tag{37}$$

$$C_{\gamma\rho} = \left( \frac{\sin(\beta + \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} + R_\rho \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} \right). \tag{38}$$

Вершина $\rho\pi\pi$ пропорциональна коэффициенту

$$C_{\rho\pi\pi} = \left( \frac{\sin(\beta + \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} g_{\rho_1} + \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} \frac{I_2^f}{I_2} g_{\rho_2} \right). \tag{39}$$

Для вклада промежуточного $\omega$-мезона мы получаем

$$B_\omega = \frac{C(s) C_{\rho\pi\pi} C_{\gamma\rho}}{3 g_\rho^2} \frac{s}{m_\omega^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\omega(s)}\,, \tag{40}$$

где функция $C(s) = C_1(s) + C_2(s)$ описывает переход $\omega$-мезона в $\rho$-мезон с последующим его распадом на два пиона. Функция $C_1(s)$ учитывает прямой переход в $\rho$-мезон за счет разности масс $u$- и $d$-кварков:

$$C_1(s) = \frac{g_\rho^3 m_\omega^2}{3(m_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s))} \frac{3}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{m_d}{m_u}\right)^2. \tag{41}$$

$C_2$ описывает вклад периода $\omega \to \gamma \to \rho$:

$$C_2(s) = -\frac{4\pi\alpha\, s}{3 g_\rho (m_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s))}\,. \tag{42}$$

Последняя часть амплитуды с промежуточным $\rho'$-мезоном аналогична вкладу основного состояния $\rho$-мезона:

$$B_{\rho'} = \mathrm{e}^{i\pi} \frac{C_{\gamma\rho'} C_{\rho'\pi\pi}}{g_\rho} \frac{s}{m_{\rho'}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\rho'}(s)}, \tag{43}$$

$$C_{\gamma\rho'} = -\left( \frac{\cos(\beta + \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} + R_\rho \frac{\cos(\beta - \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} \right),$$

$$C_{\rho'\pi\pi} = -\left( \frac{\cos(\beta + \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} g_{\rho_1} + \frac{\cos(\beta - \beta_0)}{\sin(2\beta_0)} \frac{I_2^f}{I_2} g_{\rho_2} \right) = 1{,}68.$$

К сожалению, используемая нами модель не дает возможности определить относительную фазу амплитуд с промежуточными $\rho$-мезонами в основном и возбужденном состояниях. Ориентируясь на экспериментальные данные, мы выбрали разность фаз, равную $\mathrm{e}^{i\pi}$. Учет зависимости ширины $\Gamma_{\rho'}$ от энергии можно сделать, используя формулу из работы [12].

Для полного сечения мы получаем

$$\sigma(s) = \frac{\alpha^2\pi}{12s} f_{a_1}^2(s) \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{3/2} |B_\gamma + B_\rho + B_\omega + B_{\rho'}|^2 . \tag{44}$$

На рис. 13 видно хорошее согласие наших результатов с экспериментальными данными [34] для процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ при значениях энергии до 1 ГэВ.

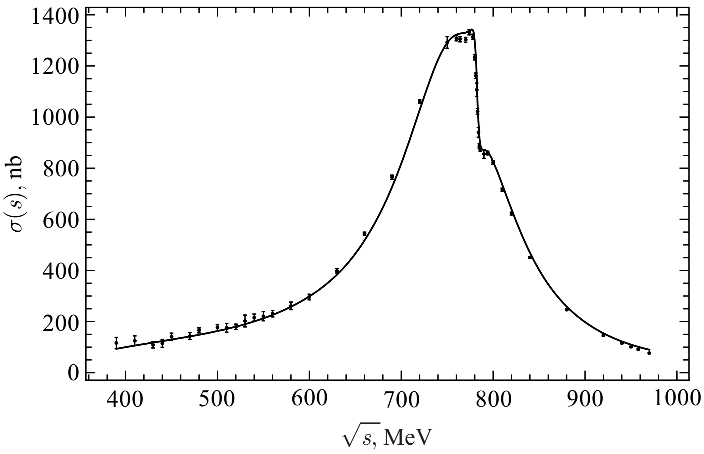


Рис. 13. Сравнение предсказаний модели НИЛ с экспериментальными данными [34] для сечения процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$

При рассмотрении процесса $e^+e^- \to \pi\pi'$ можно пренебречь вкладом диаграмм с промежуточным $\omega$-мезоном. Сечение строится аналогично случаю рождения пары $\pi^+\pi^-$ и имеет вид

$$\sigma(s) = \frac{\alpha^2\pi}{12s^2} \Lambda^{3/2}(s, m_{\pi'}^2, m_\pi^2) \left| B_\gamma^{\pi\pi'} + B_\rho^{\pi\pi'} + B_{\rho'}^{\pi\pi'} \right|^2 . \tag{45}$$

В отличие от предыдущего процесса здесь необходимо учитывать вклад компоненты с формфактором и в вершине с исходящим $\pi'(1300)$-мезоном. Результаты для зависимости сечения процесса $e^+e^- \to \pi\pi'$ от энергии приведены на рис. 14. Наши результаты для данного процесса являются качественными, поскольку вклад промежуточного состояния второго радиально-возбужденного состояния $\rho(1700)$ не учтен.

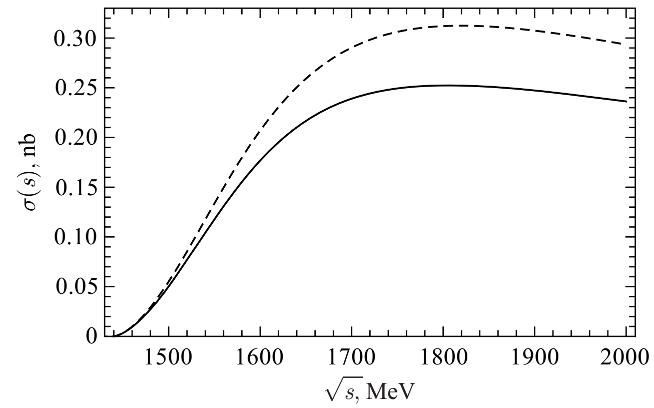


Рис. 14. Предсказания расширенной модели НИЛ для сечения процесса $e^+e^- \to \pi\pi'$. Сплошная линия — полное сечение, штриховая — только вклад $\rho'(1450)$

**2.5. Процесс $e^+e^- \to \eta(\eta')2\pi$.** В заключение рассмотрим процессы

$$e^+ + e^- \to \eta(\eta') + \pi^+ + \pi^-,$$

которые также идут через промежуточные $\rho$- и $\rho'$-мезоны. Эти процессы изучались экспериментально на целом ряде установок: DM1 [42], DM2 [43], ND [13, 44], CMD-2 [45] и BaBar [46]. С теоретической точки зрения они также обсуждались с использованием различных феноменологических моделей [45, 47, 48]. Здесь мы приведем вычисления этих процессов в рамках расширенной модели НИЛ [49] и проведем сравнение с экспериментальными данными и результатами, полученными в указанных выше теоретических работах.

Полная амплитуда рассматриваемого процесса имеет вид

$$T = -\frac{4\pi\alpha}{q^2}\bar{e}\gamma^\mu e\mathcal{H}_\mu, \tag{46}$$

где $q = p_{e^+} + p_{e^-}$ в системе центра масс. Адронная часть амплитуды содержит вклады промежуточных фотона и векторных $\rho$- и $\rho'$-мезонов (здесь $\boldsymbol{\eta} = \eta, \eta'$):

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_\mu = V_\mu\left(T_\gamma(q^2, s) + \sum_{V=\rho,\rho'} T_V(q^2, s)\right), \\ V_\mu = p^\alpha_{\boldsymbol{\eta}} p^\beta_{\pi^+} p^\gamma_{\pi^-}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}.\end{gathered} \tag{47}$$

Соответствующие фейнмановские диаграммы представлены на рис. 15 и 16,

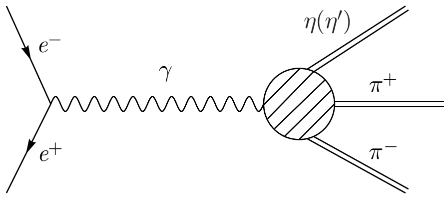


Рис. 15. Фейнмановская диаграмма с промежуточным фотоном. Заштрихованный кружок обозначает сумму двух поддиаграмм (см. рис. 17, 18)

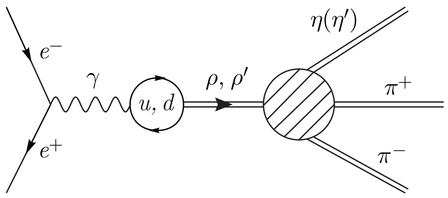


Рис. 16. Фейнмановская диаграмма с промежуточными векторными мезонами $\rho(770)$ и $\rho(1450)$

их вклады равны

$$
\begin{aligned}
T_\gamma(q^2, s) &= \sum_{i=1}^{2} g_{\pi_i} \chi^i_{\boldsymbol{\eta}} \left( T_\square^{(i-1)}(s) + T_\triangle^{(i-1)}(s) \right), \\
T_V(q^2, s) &= \frac{(C_{\gamma V}/g_{V_1}) q^2}{m_V^2 - q^2 - i\sqrt{q^2}\Gamma_V(q^2)} \times \\
&\qquad \times \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{\pi_i} \chi^i_{\boldsymbol{\eta}} g_{V_j} \chi^j_V \left( T_\square^{(i+j-2)}(s) + T_\triangle^{(i+j-2)}(s) \right).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Для упрощения формул мы ввели обозначения для часто встречающихся комбинаций углов смешивания:

$$
\begin{aligned}
\chi_\pi &= \frac{1}{\sin(2\alpha_0)} \begin{pmatrix} \sin(\alpha+\alpha_0) \\ \sin(\alpha-\alpha_0) \end{pmatrix}, \\
\chi_\eta &= \begin{pmatrix} 0{,}71 \\ 0{,}11 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\eta'} = \begin{pmatrix} -0{,}32 \\ -0{,}48 \end{pmatrix}, \\
\chi_\rho &= \frac{1}{\sin(2\beta_0)} \begin{pmatrix} \sin(\beta+\beta_0) \\ \sin(\beta-\beta_0) \end{pmatrix}, \\
\chi_{\rho'} &= -\frac{1}{\sin(2\beta_0)} \begin{pmatrix} \cos(\beta+\beta_0) \\ \cos(\beta-\beta_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Вершины $\gamma\boldsymbol{\eta}\pi\pi$ и $V\boldsymbol{\eta}\pi\pi$ содержат сумму двух вкладов:

$$T_{\Box}^{(n)}(s) = -24F_\pi g_\pi^3 I_4^{(n)},$$

$$T_{\triangle}^{(n)}(s) = 16F_\pi g_\pi \sum_{V=\rho,\rho'} \frac{g_{V\to\pi\pi}}{m_V^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_V(s)} \sum_{i=1}^{2} g_{\rho_i}\chi_V^i I_3^{(n+i-1)} \approx \tag{50}$$

$$\approx 16F_\pi g_\pi \frac{g_{\rho\to\pi\pi}}{m_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)} \sum_{i=1}^{2} g_{\rho_i}\chi_\rho^i I_3^{(n+i-1)}.$$

Вклад $T_{\Box}^{(n)}(s)$ соответствует так называемой кварковой диаграмме типа бокс аномального типа (рис. 17). Вклад $T_{\triangle}^{(n)}(s)$ происходит из учета двух треугольных кварковых петель, соединенных виртуальным векторным мезоном (рис. 18). Мы пренебрегли вкладом промежуточного мезона $\rho(1450)$ в $T_{\triangle}^{(n)}(s)$, поскольку он сильно подавлен по отношению ко вкладу $\rho(770)$ за счет кинематики и малой парциальной ширины распада $\rho(1450) \to 2\pi$ (см. [8]).

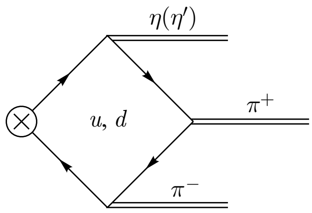


Рис. 17. Вершинная поддиаграмма $V\boldsymbol{\eta}\pi\pi$ с кварковой петлей типа бокс

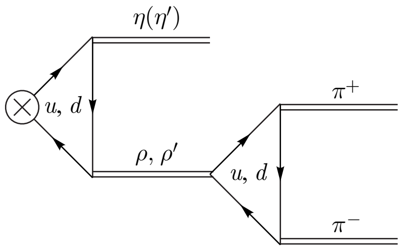


Рис. 18. Вершинная поддиаграмма $V\boldsymbol{\eta}\pi\pi$ с двумя треугольными кварковыми петлями

Поскольку $g_{\pi_1}\chi_\pi^1 \gg g_{\pi_2}\chi_\pi^2 \approx 0$, мы пренебрегаем вкладами, содержащими формфактор в пионных вершинах, подобно тому, как это делалось в вычислениях других процессов:

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} g_{\pi_j}\chi_\pi^j T_{\text{non-}\pi}^{(k)} I_{n+k}^{(k+ij-i)}\Bigg|_{g_{\pi_2}\chi_\pi^2\to 0} = g_{\pi_1}^n T_{\text{non-}\pi}^{(k)} I_{n+k}^{(k)}. \tag{51}$$

Вторая треугольная диаграмма (см. рис. 18) рассчитана в рамках расширенной модели НИЛ в работе [8]:

$$g_{V\to\pi\pi} \approx g_{\rho_1}\chi_V^1 + g_{\rho_2}\chi_V^2\frac{I_2^{(1)}}{I_2^{(0)}}. \tag{52}$$

Переход фотона в векторные мезоны ($\rho$, $\rho'$) описывается множителем

$$C_{\gamma V} = \chi_V^1 + \chi_V^2\frac{I_2^{(1)}}{\sqrt{I_2^{(0)}I_2^{(2)}}}. \tag{53}$$

Здесь мы используем фиксированное значение для ширины основного состояния $\rho(770)$, равное $\Gamma_\rho = 147{,}8$ МэВ и зависящее от энергии [41] для $\rho(1450)$:

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_\rho, \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho'}(s) = {} & \Theta(2m_\pi - \sqrt{s})\Gamma_{\rho'\to 2\pi} + \\ & + \Theta(\sqrt{s} - 2m_\pi)\left(\Gamma_{\rho'\to 2\pi} + \Gamma_{\rho'\to\omega\pi}\frac{\sqrt{s} - 2m_\pi}{m_\omega - m_\pi}\right)\Theta(m_\omega + m_\pi - \sqrt{s}) + \\ & + \Theta(m_{\rho'} - \sqrt{s})\Theta(\sqrt{s} - m_\omega - m_\pi)\biggl(\Gamma_{\rho'\to 2\pi} + \Gamma_{\rho'\to\omega\pi} + \\ & + (\Gamma_{\rho'} - \Gamma_{\rho'\to 2\pi} - \Gamma_{\rho'\to\omega\pi})\frac{\sqrt{s} - m_\omega - m_\pi}{m_{\rho'} - m_\omega - m_\pi}\biggr) + \\ & + \Theta(\sqrt{s} - m_{\rho'})\Gamma_{\rho'}(m_{\rho'}^2),\end{aligned} \tag{55}$$

где полная ширина распада на массовой поверхности $\Gamma_{\rho'}(m_{\rho'}^2) = 400$ МэВ [17]. Величины $\Gamma(\rho' \to 2\pi) = 22$ МэВ и $\Gamma(\rho' \to \omega\pi^0) = 75$ МэВ рассчитаны в работе [8].

Полное сечение процесса принимает вид

$$\sigma(q^2) = \frac{\alpha^2}{192\pi q^6}\int\limits_{s_-}^{s_+} ds\int\limits_{t_-}^{t_+} dt|T(q,s,t)|^2\,, \tag{56}$$

где $s = (p_{\boldsymbol{\eta}} + p_{\pi^+})^2$, $t = (p_{\boldsymbol{\eta}} + p_{\pi^-})^2$ и пределы интегрирования определены как

$$\begin{gathered}t_\mp = \frac{1}{4s}\left([q^2 + m_{\boldsymbol{\eta}}^2 - 2m_\pi^2]^2 - [\lambda^{1/2}(q^2, s, m_\pi^2) \pm \lambda^{1/2}(m_{\boldsymbol{\eta}}^2, m_\pi^2, s)]^2\right), \\ s_- = (m_{\boldsymbol{\eta}} + m_\pi)^2, \qquad s_+ = (\sqrt{q^2} - m_\pi)^2, \\ \lambda(a,b,c) = (a - b - c)^2 - 4bc.\end{gathered} \tag{57}$$

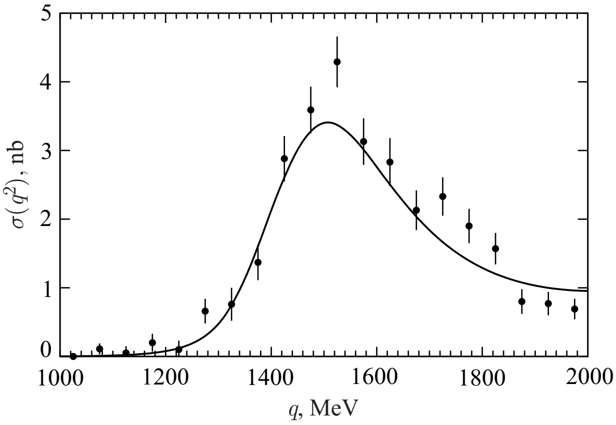


Рис. 19. Сравнение предсказаний расширенной модели НИЛ с экспериментальными результатами коллаборации BaBar [46] для процесса $e^+e^- \to \eta 2\pi$

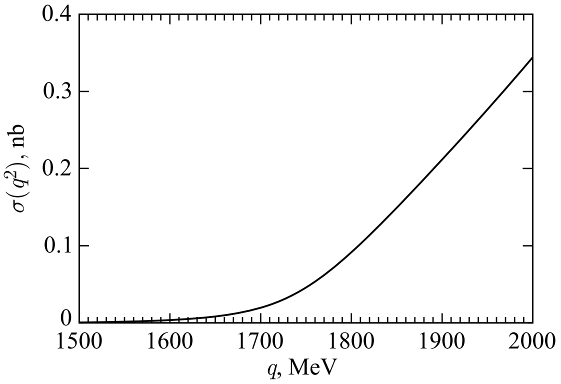


Рис. 20. Предсказания расширенной модели НИЛ для сечения процесса $e^+e^- \to \eta' 2\pi$

Численные результаты для зависимости величины сечения от энергии приведены на рис. 19 и 20.

Полученные результаты показывают, что расширенная модель НИЛ позволяет описывать зависимость полного сечения процесса $e^+e^- \to \eta 2\pi$ в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными при значениях энергии до 2 ГэВ. Это позволяет рассчитывать на разумность полученных нами предсказаний для процесса $e^+e^- \to \eta' 2\pi$ в этой же области энергии.

Одна из первых попыток теоретической интерпретации экспериментальных данных для процесса $e^+e^- \to \eta 2\pi$ представлена в работе [45]. В ней использована обобщенная модель векторной доминантности с учетом промежуточных мезонов $\rho(770)$, $\rho(1450)$ и $\rho(1700)$. Отметим, что при этом вводилось несколько дополнительных произвольных параметров, которые фитировались по экспериментальным данным. Кроме того, принималась во внимание только структура с двумя треугольными диаграммами. Важно также отметить, что результаты фитирования данных указали на численную незначительность вклада второго радиально-возбужденного состояния $\rho(1700)$.

В работе [47] использовалась резонансная киральная теория. Эта модель также содержит большое количество произвольных свободных параметров. Однако в данной работе не был учтен вклад промежуточного состояния мезона $\rho(1450)$, который, очевидно, играет существенную роль в обсуждаемой области энергии. Позднее в работе [48] в рамках той же модели были учтены промежуточные состояния мезонов $\rho(770)$, $\rho(1450)$ и $\rho(1700)$ с использованием дополнительных произвольных параметров. В этой работе также было показано, что вклад $\rho(1700)$ незначителен.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в данной работе примеры описания процессов рождения мезонов на встречных электрон-позитронных пучках показывают, что расширенная модель Намбу–Иона-Лазинио позволяет не только удовлетворительно описать известные экспериментальные данные без введения каких-либо дополнительных параметров, но и сделать ряд предсказаний для будущих экспериментов. Тем самым используемая нами модель выгодно отличается от многих прочих феноменологических моделей, предложенных другими авторами. В области энергии от 1 до 2 ГэВ модель НИЛ не может претендовать на особо высокую точность, однако она дает достаточно хорошее описание широкого класса физических процессов с участием мезонов.

Расширенная модель НИЛ также позволяет описать основные полулептонные моды распадов $\tau$-лептонов. Подчеркнем, что и здесь можно обойтись без введения дополнительных произвольных параметров. Механизм построения амплитуд этих распадов очень близок к тому, что использовался при вычислении сечений описанных выше процессов электрон-позитронной аннигиляции. Роль промежуточных фотонов в распадах $\tau$-лептонов будут играть $W^{\pm}$-бозоны, которые могут порождать заряженные промежуточные векторные мезоны как в основном, так и в первом радиально-возбужденном состояниях. Важно отметить, что поскольку масса $\tau$-лептона равна 1777 МэВ, то роль более высоких радиально-возбужденных промежуточных состояний здесь весьма незначительна. Поэтому следует ожидать, что расширенная модель НИЛ, учитывающая именно основные и первые радиально-возбужденные состояния мезонов, должна давать вполне удовлетворительные теоретические предсказания для основных полулептонных мод распадов $\tau$-лептонов. Действительно, это подтверждается рядом вычислений парциальных ширин и дифференциальных распределений для мод распадов со следующими конечными состояниями:

1) $\tau \to \nu_\tau \pi$, $\nu_\tau \pi(1300)$ [50];
2) $\tau \to \nu_\tau \rho$, $\nu_\tau \rho(1450)$ [51];
3) $\tau \to \nu_\tau K^*(892)$, $\nu_\tau K^*(1410)$ [51];
4) $\tau \to \nu_\tau \pi\pi$, $\nu_\tau \pi\pi(1300)$ [52];
5) $\tau \to \nu_\tau \eta\pi$, $\nu_\tau \eta'\pi$ [53];
6) $\tau \to \nu_\tau \omega\pi$ [29];
7) $\tau \to \nu_\tau f_1\pi$ [54];
8) $\tau \to \nu_\tau \eta\pi\pi$, $\nu_\tau \eta'\pi\pi$ [49].

В более ранних работах в рамках стандартной модели НИЛ также описаны распады $\tau \to 3\pi\nu_\tau$ [55] и $\tau \to \pi\gamma\nu_\tau$ [56]. В дальнейшем мы собираемся описать ряд распадов $\tau$-лептонов с рождением странных мезонов с использованием расширенной модели НИЛ.

В настоящее время процессы с участием $\tau$-лептонов активно изучаются как на электрон-позитронных, так и на адронных ускорителях, включая Большой адронный коллайдер. Поэтому теоретическое изучение различных мод распадов $\tau$-лептонов является актуальной задачей современной физики частиц.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность соавторам работ, по которым написан данный обзор.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ebert D., Volkov M. K.* Composite Meson Model with Vector Dominance Based on $U(2)$ Invariant Four Quark Interactions // Z. Phys. C. 1983. V. 16. P. 205.
2. *Volkov M. K.* Meson Lagrangians in a Superconductor Quark Model // Ann. Phys. 1984. V. 157. P. 282.
3. *Волков М. К.* Низкоэнергетическая физика мезонов в кварковой модели сверхпроводящего типа // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17, вып. 3. С. 433–471 (Sov. J. Part. Nucl. 1986. V. 17. P. 186).
4. *Ebert D., Reinhardt H.* Effective Chiral Hadron Lagrangian with Anomalies and Skyrme Terms from Quark Flavor Dynamics // Nucl. Phys. B. 1986. V. 271. P. 188.
5. *Klevansky S. P.* The Nambu–Jona-Lasinio Model of Quantum Chromodynamics // Rev. Mod. Phys. 1992. V. 64. P. 649.
6. *Volkov M. K., Weiss C.* A Chiral Lagrangian for Excited Pions // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 221–229.
7. *Волков М. К.* Псевдоскалярные и векторные возбужденные мезоны в киральной $U(3)\times U(3)$ модели // ЯФ. 1997. Т. 60, вып. 11. С. 2094–2103 (*Volkov M. K.* Excited Pseudoscalar and Vector Mesons in the $U(3) \times U(3)$ Chiral Model // Phys. At. Nucl. 1997. V. 60. P. 1920–1929).

8. *Volkov M. K., Ebert D., Nagy M.* Excited Pions, Rho and Omega Mesons and Their Decays in a Chiral $SU(2) \times SU(2)$ Lagrangian // Intern. J. Mod. Phys. A. 1998. V. 13. P. 5443.
9. *Волков М. К., Юдичев В. Л.* Радиально-возбужденные скалярные, псевдоскалярные и векторные нонеты мезонов в киральной кварковой модели // ЭЧАЯ. 2000. Т. 31, вып. 3. С. 576–633 (Phys. Part. Nucl. 2000. V. 31. P. 282).
10. *Волков М. К., Раджабов А. Е.* Модель Намбу–Иона-Лазинио и ее развитие // УФН. 2006. Т. 176. С. 569–580 (Phys. Usp. 2006. V. 49. P. 551).
11. *Волков М. К., Юдичев В. Л.* Радиальные возбуждения скалярных и $\eta$- и $\eta'$-мезонов в киральной кварковой модели // ЯФ. 2000. Т. 63. С. 1924 (*Volkov M. K., Yudichev V. L.* Radial Excitations of Scalar and Eta, Eta-prime Mesons in a Chiral Quark Model // Phys. At. Nucl. 2000. V. 63. P. 1835).
12. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Volkov M. K.* Processes $e^+e^- \to \pi^0(\pi^{0\prime})\gamma$ in the NJL Model // Eur. Phys. J. A. 2011. V. 47. P. 103.
13. *Dolinsky S. I. et al.* Summary of Experiments with the Neutral Detector at the $e^+e^-$ Storage Ring VEPP-2M // Phys. Rep. 1991. V. 202. P. 99.
14. *Achasov N. N., Kozhevnikov A. A.* Decays of Phi Meson Suppressed by OZI and $G$ Parity. Role of Mixing and of Direct Transitions // Intern. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. P. 4825.
15. *Achasov M. N. et al.* Experimental Study of the $e^+e^- \to \pi^0\gamma$ Process in the Energy Region $s^{1/2} = 0.60$–0.97 GeV // Phys. Lett. B. 2003. V. 559. P. 171.
16. *Gronau M., Rosner J. L.* $\omega{-}\phi$ Mixing and Weak Annihilation in $D(s)$ Decays // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 074006.
17. *Olive K. A. et al. (Particle Data Group Collab.).* Review of Particle Physics // Chin. Phys. C. 2014. V. 38. P. 090001.
18. *Achasov M. N. et al.* Experimental Study of the Processes $e^+e^- \to \phi \to \eta\gamma$, $\pi^0\gamma$ at VEPP-2M // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 12. P. 25.
19. *Bisello D. et al. (DM2 Collab.).* $e^+e^-$ Annihilation into Multi-hadrons in the 1350-MeV–2400-MeV Energy Range // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1991. V. 21. P. 111.
20. *Achasov M. N. et al.* The Process $e^+e^- \to \omega\pi^0 \to \pi^0\pi^0\gamma$ up to 1.4-GeV // Phys. Lett. B. 2000. V. 486. P. 29.
21. *Akhmetshin R. R. et al. (CMD-2 Collab.).* Study of the Process $e^+e^- \to \omega\pi^0 \to \pi^0\pi^0\gamma$ in c.m. Energy Range 920–1380 MeV at CMD-2 // Phys. Lett. B. 2003. V. 562. P. 173.
22. *Gerasimov S. B., Govorkov A. B.* Radial Excitations of $\rho^-$ and $\pi$ Mesons and Their Strong Decays // Z. Phys. C. 1982. V. 13. P. 43.
23. *Close F. E., Donnachie A., Kalashnikova Yu. S.* Radiative Decays of Excited Vector Mesons // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 092003.
24. *Li G., Zhang Y. J., Zhao Q.* Study of Isospin Violating $\phi$ Excitation in $e^+e^- \to \omega\pi^0$ // J. Phys. G. 2009. V. 36. P. 085008.
25. *Ambrosino F. et al. (KLOE Collab.).* Study of the Process $e^+e^- \to \omega\pi^0$ in the $\phi$-Meson Mass Region with the KLOE Detector // Phys. Lett. B. 2008. V. 669. P. 223–228.
26. *Edwards K. W. et al. (CLEO Collab.).* Resonant Structure of $\tau \to 3\pi\pi^0\nu/\tau$ and $\tau \to \omega\pi\nu/\tau$ Decays // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 072003.
27. *Kittimanapun K. et al.* Investigation of Reaction Electron–Positron to $\omega$ and $\pi$ Mesons in Quark Model // Phys. Rev. C. 2009. V. 79. P. 025201.

28. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Volkov M. K.* Production of $\omega\pi^0$ Pair in Electron–Positron Annihilation // Phys. Rev. C. 2011. V. 83. P. 048201.
29. *Volkov M. K., Arbuzov A. B., Kostunin D. G.* The Decay $\tau \to \pi\omega\nu$ in the Extended NJL Model // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. P. 057301.
30. *Achasov M. N. et al.* A Scenario for High Accuracy $\tau$ Mass Measurement at BEPC-II // Chin. Phys. C. 2012. V. 36. P. 573.
31. *Ахмедов А. И., Кураев Э. А., Волков М. К.* Рождение $\pi^0\rho^0$-пары в электрон-позитронной аннигиляции в модели Намбу–Йона-Лазинио // Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, № 6–7. С. 756 (Phys. Part. Nucl. Lett. 2012. V. 9. P. 461).
32. *Achasov M. N. et al.* Study of the $e^+e^- \to \eta\gamma$ Process with SND Detector at the VEPP-2M $e^+e^-$ Collider // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 014016.
33. *Ahmadov A. I., Kostunin D. G., Volkov M. K.* Processes of $e^+e^- \to [\eta, \eta', \eta(1295), \eta(1475)]\gamma$ in the Extended Nambu–Jona-Lasinio Model // Phys. Rev. C. 2013. V. 87. P. 045203; Erratum // Phys. Rev. C. 2014. V. 89. P. 039901.
34. *Achasov M. N. et al.* Study of the Process $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ in the Energy Region $400 < s^{1/2} < 1000$ MeV // ЖЭТФ. 2005. Т. 101. С. 1201 (J. Exp. Theor. Phys. 2005. V. 101. P. 1053).
35. *Gounaris G. J., Sakurai J. J.* Finite Width Corrections to the Vector Meson Dominance Prediction for $\rho \to e^+e^-$ // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 21. P. 244.
36. *Kuhn J. H., Santamaria A.* $\tau$ Decays to Pions // Z. Phys. C. 1990. V. 48. P. 445.
37. *O'Connell H. B. et al.* $\rho$–$\omega$ Mixing, Vector Meson Dominance and the Pion Form-Factor // Prog. Part. Nucl. Phys. 1997. V. 39. P. 201.
38. *Dominguez C. A. et al.* Pion Form-Factor in the Kroll–Lee–Zumino Model // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 095002.
39. *Jegerlehner F., Szafron R.* $\rho^0$–$\gamma$ Mixing in the Neutral Channel Pion Form Factor $F_\pi^e$ and Its Role in Comparing $e^+e^-$ with $\tau$ Spectral Functions // Eur. Phys. J. C. 2011. V. 71. P. 1632.
40. *Achasov N. N., Kozhevnikov A. A.* Electromagnetic Form Factor of Pion in the Field Theory Inspired Approach // Phys. Rev. D. 2011. V. 83. P. 113005; Erratum // Phys. Rev. D. 2012. V. 85. P. 019901.
41. *Volkov M. K., Kostunin D. G.* The Processes $e^+e^- \to \pi\pi(\pi')$ in the Extended NJL Model // Phys. Rev. C. 2012. V. 86. P. 025202.
42. *Cordier A. et al. (DM1 Collab.).* Cross-Section of the Reaction $e^+e^- \to \pi^+\pi^-\pi^0$ For Center-of-Mass Energies from 750 to 1100-MeV // Nucl. Phys. B. 1980. V. 172. P. 13.
43. *Antonelli A. et al. (DM2 Collab.).* Measurement of the Reaction $e^+e^- \to \eta\pi^+\pi^-$ in the Center-of-Mass Energy Interval 1350 to 2400 MeV // Phys. Lett. B. 1988. V. 212. P. 133.
44. *Druzhinin V. P. et al. (ND Collab.).* Investigation of the Reaction $e^+e^- \to \eta\pi^+\pi^-$ in the Energy Range up to 1.4 GeV // Phys. Lett. B. 1986. V. 174. P. 115.
45. *Akhmetshin R. R. et al. (CMD-2 Collab.).* Study of the Process $e^+e^- \to \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-\pi^0$ with CMD-2 Detector // Phys. Lett. B. 2000. V. 489. P. 125.
46. *Aubert B. et al. (BaBar Collab.).* The $e^+e^- \to 2(\pi^+\pi^-)\pi^0$, $2(\pi^+\pi^-)\eta$, $K^+K^-\pi^+\pi^-\pi^0$ and $K^+K^-\pi^+\pi^-\eta$ Cross Sections Measured with Initial-State Radiation // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 092005; Erratum // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 119902.

47. *Dumm D. G., Roig P.* Resonance Chiral Lagrangian Analysis of $\tau^- \to \eta^{(\prime)}\pi^-\pi^0\nu_\tau$ Decays // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. P. 076009.
48. *Dai L. Y., Portoles J., Shekhovtsova O.* Three Pseudoscalar Meson Production in $e^+e^-$ Annihilation // Phys. Rev. D. 2013. V. 88. P. 056001.
49. *Volkov M. K., Arbuzov A. B., Kostunin D. G.* The $e^+e^- \to \eta(\eta')2\pi$ Process in the Extended Nambu–Jona-Lasinio Model // Phys. Rev. C. 2014. V. 89. P. 015202.
50. *Ahmadov A. I., Volkov M. K.* The Decays $\tau \to (\pi, \pi')\nu_\tau$ in the Nambu–Jona-Lasinio Model // Part. Nucl., Lett. 2015. V. 12, No. 6(197). P. 1153–1163.
51. *Ahmadov A. I., Kalinovsky Yu. L., Volkov M. K.* Decays of $\tau \to \rho(770)(\rho'(1450))\nu_\tau$ and $\tau \to K^*(892)(K^{*\prime}(1410))\nu_\tau$ in the Extended Nambu–Jona-Lasinio Model // Intern. J. Mod. Phys. A. 2015. V. 30, No. 26. P. 1550161.
52. *Volkov M. K., Kostunin D. G.* $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ Decay in the Extended NJL Model // Part. Nucl., Lett. 2013. V. 10, No. 1(178). P. 18–23.
53. *Volkov M. K., Kostunin D. G.* The Decays $\rho^- \to \eta\pi^-$ and $\tau^- \to \eta(\eta')\pi^-\nu$ in the NJL Model // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. P. 013005.
54. *Vishneva A. V., Volkov M. K., Kostunin D. G.* The Decay $\tau \to f_1\pi\nu_\tau$ in the Nambu–Jona-Lasinio Model // Eur. Phys. J. A. 2014. V. 50. P. 137.
55. *Ivanov Yu. P., Osipov A. A., Volkov M. K.* The Decay $\tau \to 3\pi\nu_\tau$ and Characteristics of $A1$ Meson // Z. Phys. C. 1991. V. 49. P. 563–568.
56. *Ivanov Yu. P., Osipov A. A., Volkov M. K.* Radiative Decay $\tau \to \nu_\tau\pi\gamma$ // Phys. Lett. B. 1990. V. 242. P. 498–502.