

ВЕДУЩЕЕ И СЛЕДУЮЩЕЕ ЗА ВЕДУЩИМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*А. Б. Арбузов **

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	877
ВЕДУЩЕЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	887
Формализм структурных функций электрона	887
Функции расщепления высших порядков в ВЛП	896
Решение уравнений эволюции КЭД	897
Численные оценки и обсуждение результатов	901
СЛЕДУЮЩЕЕ ЗА ВЕДУЩИМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	903
Следующие за ведущими поправки первого порядка	903
Следующие за ведущими поправки высших порядков.	910
КЭД-ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССАМ НА УСКОРИТЕЛЯХ	928
Баба-рассеяние на малые углы	928
Электрон-позитронная аннигиляция и баба-рассеяние на большие углы	955
Метод радиационного возвращения	979
Метод определения бегущей $\alpha(Q^2)$	1002
Обратное тормозное излучение в процессе Дрелла–Яна	1005
ПРЕЦИЗИОННОЕ ОПИСАНИЕ СПЕКТРА РАСПАДА МЮОНА	1012
Распад мюона на борновском уровне	1013
Полная поправка первого порядка	1015
Ведущие логарифмические поправки к распаду мюона	1021
Следующие за ведущими поправки второго порядка	1032
Радиационный распад мюона	1043

*E-mail: arbuзов@theor.jinr.ru

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1047
Приложение 1. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ КОНВОЛЮЦИИ	1048
Приложение 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИЛОГАРИФМОВ	1059
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1062

ВЕДУЩЕЕ И СЛЕДУЮЩЕЕ ЗА ВЕДУЩИМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А. Б. Арбузов *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Описываются методы нахождения КЭД радиационных поправок в ведущем и следующем за ведущим логарифмических приближениях. Представлены аналитические решения уравнений эволюции КЭД для структурных функций электрона. Рассмотрен ряд примеров применения этих методов к построению высокоточного описания процессов на ускорителях высоких энергий. Подробно разобран случай вычисления поправок высших порядков к спектру распада мюона. Обсуждается использование разработанных подходов для обоснования методов радиационного возвращения и прямого измерения бегущей постоянной КЭД.

Methods for calculation of QED radiation corrections in the leading and following the leading logarithmic approximations are described. Analytical solutions of the QED evolution equations for the electron structure functions are presented. A number of application of the described methods to construction of high-precision description of processes on high energy accelerators are considered. Calculations of higher-order corrections to muon decay spectrum are given in detail. The developed approaches are used to justify the methods radiation return and direct measurement of the QED running constant.

PACS: 12.20.-m; 12.38.Bx

ВВЕДЕНИЕ

Физика высоких энергий сегодня переживает критическое время. Мы наблюдаем потрясающий успех Стандартной модели (СМ) физики элементарных частиц [1–3] в описании наблюдательных и экспериментальных данных. Открытие в 2012 г. бозона Хигса явилось очередным свидетельством предсказательной силы данной модели. С другой стороны, есть много аргументов в пользу того, что СМ не является фундаментальной теорией. Действительно,

*E-mail: arbuзов@theor.jinr.ru

она содержит довольно много параметров, и пока не удалось вывести ее уравнения из каких-либо фундаментальных физических принципов. Кроме того, в рамках Стандартной модели не удается описать так называемые темную материю и темную энергию, а также асимметрию между веществом и антивеществом во Вселенной. Также следует отметить, что описание явления смешивания нейтрино в рамках СМ выглядит довольно искусственным, хотя пока не вступило в серьезные противоречия с экспериментальными данными. Таким образом, СМ успешно описывает физические явления в доступной нам для изучения на Земле области энергий. Но практически нет сомнений, что данная модель является эффективной, т. е. это низкоэнергетическое приближение более общей фундаментальной теории. Можно сказать, что основная задача физики элементарных частиц сегодня — поиск границ применимости Стандартной модели, за которыми в дальнейшем можно искать новые физические явления. Есть весомые основания надеяться, что мы близки к определению этих границ. Несмотря на то, что практически все наблюдаемые на ускорителях высоких энергий явления находятся в хорошем согласии с предсказаниями СМ [4], множество косвенных факторов указывают на близость масштаба энергий, при которых должны проявиться новые физические феномены.

Поиск таких феноменов активно проводится в экспериментах на существующих и будущих ускорителях частиц, таких как Большой адронный коллайдер (LHC) и планируемые адронные [5], линейные и циркулярные электрон-позитронные коллайдеры [6–8]. С другой стороны, обнаружение новых частиц и взаимодействий возможно только в ходе детального сравнения результатов опыта с теоретическими предсказаниями, полученными в рамках Стандартной модели. Все возрастающая точность экспериментальных измерений всевозможных наблюдаемых величин в современной физике высоких энергий требует адекватного увеличения точности теоретического описания соответствующих физических явлений. В данном обзоре обсуждаются некоторые методы повышения точности теоретических предсказаний.

В случае физики высоких энергий обычно применяется метод пертурбативного разложения по константе связи и уточнение предсказаний достигается за счет учета членов этого разложения все более высоких порядков. В частности, в квантовой электродинамике (КЭД) применяется разложение по степеням постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$, которое мы будем записывать в виде

$$d\sigma = d\sigma^{\text{Born}} + d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma^{(3)} + \mathcal{O}(\alpha^4), \quad (\text{B.1})$$

где $d\sigma^{\text{Born}}$ представляет борновское дифференциальное сечение в низшем порядке теории возмущений для заданного процесса, а $d\sigma^{(1,2,3)}$ являются вкладом в сечение поправок первого, второго и третьего порядков теории

возмущений соответственно. С каждым шагом разложения задача становится все более и более сложной с технической точки зрения. Аналогичные разложения по константе связи сильных взаимодействий строятся и в пертурбативной квантовой хромодинамике (КХД), и в секторе электрослабых взаимодействий СМ.

В обзоре под радиационными поправками мы будем понимать вклады процессов взаимодействия частиц, имеющих в рамках теории возмущений более высокую степень константы связи α и неотличимых в эксперименте (хотя бы в какой-то части фазового пространства 4-импульсов конечных частиц) от основного исследуемого процесса. Следует отметить, что в некоторых случаях разделение радиационных поправок и фоновых процессов, также неотличимых (обычно частично) от основного процесса, становится условным и требует специального уточнения в каждой конкретной экспериментальной ситуации.

Развитие методов вычислений радиационных поправок высших порядков и совершенствование соответствующих компьютерных алгоритмов позволили за последние годы существенно продвинуться в точности описания ряда процессов, изучаемых экспериментально. В частности, относительно недавно завершена программа расчетов вкладов виртуальных поправок второго порядка [9–15] к процессу баба-рассеяния (электрон-позитронного рассеяния [16]). Однако для многих процессов полное аналитическое решение подобной задачи еще не выполнено в силу серьезных технических трудностей, возникающих в первую очередь при наличии в рассматриваемом процессе нескольких энергетических масштабов, что характерно, например, для процессов электрослабых взаимодействий.

С другой стороны, в некоторых случаях оказывается достаточным учесть только численно наиболее значимые вклады высших порядков. На практике известны также попытки ограничиться теми из них, которые проще найти с технической точки зрения. В частности, пользуются популярностью методы учета тех поправок, которые можно просуммировать во всех порядках, например суммирование геометрической прогрессии вкладов в поляризацию вакуума и экспоненцирование вкладов излучения мягких фотонов [17]. Однако такие частичные суммы вкладов высших порядков далеко не всегда позволяют учесть численно действительно наиболее важные члены и избежать существенного отклонения от истинного значения оцениваемой величины. Более того, процедуры пересуммирования не всегда адекватны экспериментальным условиям. Например, в экспериментальном анализе упругого рассеяния электрона на протоне коллаборацией A1 [18] экспоненциация вклада однопетлевой радиационной поправки привела к значимой систематической ошибке [19].

В КЭД при высоких энергиях более последовательными и систематическими являются методы, позволяющие находить все члены, усиленные степе-

ными так называемого большого логарифма,

$$L \equiv \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \quad \Lambda \gg m, \quad (\text{B.2})$$

где m — масса легкого заряженного фермиона, участвующего в рассматриваемом процессе, а Λ — характерный масштаб энергии данного процесса. Условие малости массы по сравнению с масштабом энергии характерно для экспериментов физики высоких энергий. Оно обеспечивает собственно численную значимость членов пертурбативного разложения, содержащих такие логарифмы в виде множителей. При учете этих вкладов следует различать двойное логарифмическое приближение (ДЛП, или DLA), когда сечение (или амплитуда) процесса представимо в виде

$$d\sigma^{\text{DLA}} = \sum_{k=0}^{\infty} [c_k \alpha^k L^{2k} + \mathcal{O}(\alpha^k L^{2k-1})], \quad (\text{B.3})$$

ведущее логарифмическое приближение (ВЛП, или LLA), если

$$d\sigma^{\text{LLA}} = \sum_{k=0}^{\infty} [c_k \alpha^k L^k + \mathcal{O}(\alpha^k L^{k-1})]_{k \geq 1}, \quad (\text{B.4})$$

и следующее за ведущим логарифмическое приближение (СВЛП, или NLLA), в котором по сравнению с ВЛП явно учтены члены следующего порядка разложения по степени большого логарифма:

$$d\sigma^{\text{NLLA}} = \sum_{k=0}^{\infty} [c_k \alpha^k L^k + d_k \alpha^k L^{k-1} + \mathcal{O}(\alpha^k L^{k-2})]_{k \geq 2}. \quad (\text{B.5})$$

Большой логарифм (B.2) можно рассматривать как *массовую сингулярность*. Действительно, он становится бесконечно большим при стремлении массы фермиона к нулю. В каждой конкретной задаче полезно проводить анализ выполнения условий теоремы Киношита–Ли–Науэнберга [20, 21]. Если они выполнены, то ответ для сечения (или ширины распада) исследуемого процесса должен быть полностью свободен от массовых сингулярностей*. Точнее, последние могут присутствовать в отдельных вкладах, но должны сократиться в полной сумме. Данная теорема позволяет строить правила сумм, отражающие такие сокращения, некоторые из них будут обсуждаться ниже. Однако в большинстве реалистических экспериментальных ситуаций мы стараемся исследовать эксклюзивные каналы взаимодействия частиц, что приводит к нарушению условий теоремы и, соответственно, к присутствию в окончательных ответах членов, усиленных большими логарифмами.

*Массовые сингулярности, возникающие при учете бегущей константы связи, не сокращаются.

Отметим важное различие между радиационными поправками в КЭД и в КХД. За счет принципиальной разницы в степени инклюзивности КЭД- и КХД-наблюдаемых, обусловленной в первую очередь явлением конфайнмента в сильных взаимодействиях, слагаемые в пертурбативных КХД-поправках, содержащие сингулярность по массе легких кварков, практически никогда явно не присутствуют в итоговых формулах. А в КЭД именно эти слагаемые обычно обеспечивают основную часть радиационных поправок.

Одним из важнейших инструментов современной теоретической физики является подход ренормализационной группы. Он базируется на таком фундаментальном принципе физики, как масштабная инвариантность. В квантовой теории поля этот подход начали обсуждать со времени пионерских работ Штюкельберга (E. Stueckelberg) и Петермана (A. Peterman) [22], Гелл-Мана (M. Gell-Mann) и Лоу (F. E. Low) [23]. Строгая же формулировка с анализом групповых свойств была сделана Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым в статьях [24–27] и книге [28]. Обзор современного состояния этого подхода и его приложений можно найти в [29].

Уравнения ренормализационной группы, описывающие вклады радиационных поправок, усиленных коэффициентами, содержащими логарифм масштаба факторизации, были выведены В. Н. Грибовым и Л. Н. Липатовым сначала в ведущем логарифмическом приближении для общего случая калибровочных теорий и затем для квантовой хромодинамики (КХД), где получили название уравнений Грибова–Липатова–Алтарелли–Паризи–Докшицера (ГЛАПД, или ДГЛАП) [30–34]. Разложение вычисляемых амплитуд ведется в данном случае не только по степеням константы связи КХД, но и по степеням логарифма масштаба факторизации. Уравнения ГЛАПД успешно применялись для описания целого ряда процессов с сильными взаимодействиями при высоких энергиях, в частности при исследовании глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах и процессов Дрелла–Яна [35, 36] в адронных столкновениях. Проведение аналитических вычислений радиационных поправок в первом порядке теории возмущений КХД позволило расширить уравнения ГЛАПД для учета следующих за ведущими (next-to-leading order, NLO) членов [37–40]. Для отдельных величин, изучаемых в КХД, найдены поправки и в более высоких порядках таких разложений, т. е. NNLO, NNNLO и т. д. Важно отметить, что помимо собственно вычислений во всех возможных более высоких порядках со временем развивался и более глубоко осознался и общий метод ренормализационной группы в применении к пертурбативным калибровочным теориям [41].

С практической точки зрения процедура выделения вкладов, усиленных большими логарифмами, связана с возможностью выделить кинематическую область и часть амплитуды процесса, ответственных за возникновение этих логарифмов. При этом используется метод факторизации, когда вероятностное распределение представляется в виде произведения вероятностей подро-

цессов. Обычно в квантовой физике факторизация вероятностей подпроцессов возникает, когда наличие какого-либо малого (или большого) параметра в выбранной схеме вычислений позволяет подавить вклады квантовой интерференции амплитуд.

В обзоре рассказывается о развитии и применении метода ренормализационной группы к описанию ведущих и следующих за ведущими логарифмических квантово-электродинамических поправок к процессам взаимодействия элементарных частиц. Основное внимание уделяется задачам, актуальным для физических программ современных экспериментов в физике высоких энергий.

Учет ведущих логарифмических КЭД-поправок с помощью метода структурных функций электрона [42, 43] в настоящее время хорошо известен и является одним из наиболее востребованных и широко применяемых подходов к оценке эффектов КЭД радиационных поправок в физике высоких энергий. В обзоре описывается развитие этого метода с целью систематического учета ведущих логарифмических поправок высших порядков и их сшивки с результатами прямых пертурбативных расчетов следующих за ведущими членов.

Метод структурных функций в следующем за ведущим логарифмическом приближении КЭД был впервые применен в 1988 г. в работе [44], посвященной вычислению поправок к начальному состоянию электрон-позитронной аннигиляции (в виртуальный фотон с последующим образованием лептонов или адронов). Эта публикация оказалась исключительно важной и востребованной при анализе данных экспериментов на LEP1 и LEP2, поскольку там впервые была найдена полная КЭД-поправка второго порядка, $\mathcal{O}(\alpha^2)$, за счет излучения в начальном состоянии в названном процессе. В одном из разделов этой статьи было также продемонстрировано, что ведущая и следующая за ведущей логарифмические части полной поправки, т.е. вклады порядков $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$ и $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$, могут быть воспроизведены методом структурных функций электрона в следующем за ведущим логарифмическом приближении, построенном по аналогии с КХД. Однако в течение последующих 15 лет этот метод в КЭД более не применялся вплоть до 2002 г., когда вышла работа [45]. Причины столь большого перерыва следующие. Во-первых, на фоне основного результата работы [44] развитие нового метода, который мог бы быть применен к целому классу задач, осталось просто незамеченным. Во-вторых, в работе 1988 г. авторы имели дело с инклюзивными поправками, тогда как для описания реалистических экспериментальных ситуаций необходимо дальнейшее развитие этого метода, которое будет обсуждаться ниже. С другой стороны, многие сложные задачи даже в инклюзивной постановке, над решением которых трудились целые группы исследователей, могли бы быть решены намного раньше и с меньшими затратами усилий, если бы был применен метод ренормализационной группы. Например, вычисление вирту-

альных поправок второго порядка к процессу баба-рассеяния, в первую очередь двухпетлевых бокс-диаграмм, существенно осложнялось присутствием в задаче нескольких энергетических масштабов, включая массу электрона. Тогда как аналогичные вычисления в КХД с безмассовыми партонами были уже давно известны. В работе [46] рассчитаны двухпетлевые диаграммы для процесса баба-рассеяния с *безмассовыми* электронами. Ясно, что при этом были потеряны слагаемые, усиленные степенями большого логарифма и потому наиболее важные с количественной точки зрения. Позднее в работах [9, 10] А. Пенину удалось получить полный результат для виртуальных поправок с учетом массы электрона. И лишь недавно в [11] было явно продемонстрировано, что результат [10] воспроизводится путем добавления к [46] предсказаний, полученных с помощью обсуждаемого в обзоре метода расчета СВЛП КЭД-поправок.

Задача высокоточного теоретического описания процесса баба-рассеяния на малые углы была очень актуальна для физической программы коллайдеров LEP1 и LEP2. Этот процесс использовался там для экспериментального определения светимости и, таким образом, служил как нормировочный практически* для всех наблюдаемых. Потому точность всех результатов прецизионных проверок стандартной модели на LEP зависит от теоретической неопределенности в описании баба-рассеяния. Тот же процесс рассеяния на малые углы планируется в качестве нормировочного для будущих линейных и циркулярных e^+e^- -коллайдеров [6–8], где мы надеемся достичь еще большей экспериментальной точности его измерения. Соответственно, и точность теоретического описания должна вырасти.

Вообще говоря, точность теоретических предсказаний должна быть по крайней мере в несколько раз лучше, чем суммарная экспериментальная ошибка (для одной и той же наблюдаемой). Действительно, если теоретическая δ_{theor} и экспериментальная δ_{exp} ошибки одинаковы, то результирующая неопределенность анализа экспериментальных данных будет

$$\delta_{\text{tot}} = \sqrt{\delta_{\text{theor}}^2 + \delta_{\text{exp}}^2} \approx 1,4\delta_{\text{exp}}^2, \quad (\text{B.6})$$

т. е. из-за недостаточно высокой точности теоретических предсказаний мы существенно теряем в результирующей точности. Например, если в экспериментальной точности доминирует статистическая погрешность, то наличие теоретической ошибки той же величины приводит к эффективной потере половины данных. Для больших современных экспериментов в области физики высоких энергий такие потери крайне нежелательны.

Процесс баба-рассеяния на большие углы используется для мониторинга светимости на абсолютном большинстве электрон-позитронных коллайдеров

*Формально измеряемые на LEP асимметрии не зависят от светимости.

с энергиями пучков порядка нескольких гигаэлектронвольт. Потому и для этого случая необходимы как можно более точные теоретические предсказания. Кроме того, поскольку процесс e^+e^- -рассеяния имеет большое сечение, удобен для экспериментального наблюдения и может быть описан с высокой точностью теоретически, то он используется для поиска новых физических явлений. Действительно, многие модели (например модели супергравитации с дополнительными размерностями пространства) предсказывают дополнительные к стандартным вклады типа 4-фермионных взаимодействий. Путем сравнения экспериментальных данных LEP с теоретическими предсказаниями для процесса баба-рассеяния на большие углы были получены ограничения на параметры нескольких моделей, выходящих за рамки СМ.

Помимо того, что развитие методов расчетов радиационных поправок и их применение существенно для конкретных задач в области феноменологии элементарных частиц, на их основе можно, оказывается, предлагать новые подходы к исследованиям. Примером тому служит предложенный в работе [47] *метод радиационного возвращения*, который уже сейчас широко используется при анализе данных многих электрон-позитронных коллайдеров. Собственно явление радиационного возвращения на резонанс наблюдалось в электрон-позитронных столкновениях, давно и подробно обсуждалось в литературе (см., например, [48, 49]). Это явление состоит в том, что в процессе электрон-позитронной аннигиляции с суммарной энергией пучков, превышающей массу некоторого узкого резонанса, например ρ -мезона, излучение жесткого фотона из начального состояния приводит к эффективному уменьшению энергии до резонансной. Причем в сечении такого радиационного процесса помимо малого фактора $\alpha/\pi \approx 1/400$, связанного с выходом в следующий порядок теории возмущений по сравнению с борновским, появляются и усиливающие факторы: большой логарифм L и отношение массы резонанса к его ширине, $M_{\text{res}}/\Gamma_{\text{res}}$. С развитием экспериментальной техники выросли светимости ускорителей и повысилась точность детектирования энергии и импульса тормозных фотонов. Это позволило использовать обсуждаемое явление и развить метод радиационного возвращения. Для этого потребовалось создать прецизионное описание ряда процессов с тормозным излучением из начального состояния с учетом радиационных поправок. Причем за счет точности описания и высокой светимости оказалось возможным применять этот метод не только для резонансных, но вообще для всех возможных состояний, лежащих ниже по энергии*. Это позволяет, не меняя энергии работающего ускорителя, существенно расширить область доступных изучению значений кинематических переменных исследуемых процессов.

*Для очень узких резонансных состояний метод работает, но в предварительных оценках надо учитывать то, что набираемая статистика пропорциональна ширине резонанса.

В глубоконеупругом рассеянии тормозное излучение налетающим лептоном из начального состояния также приводит к радиационному возвращению по энергии и расширению доступной в эксперименте области кинематических переменных. Идея использования этого явления при обработке экспериментальных данных коллайдера HERA в DESY (Гамбург) была предложена в 1991 г. в работе [50]. Со временем точность эксперимента заметно повысилась и встал вопрос об учете следующих за ведущими радиационных поправок. Ниже в обзоре обсуждаются расчеты полного вклада КЭД-поправок в СВЛП к процессу глубоконеупругого рассеяния электрона на нуклоне с излучением фотона на малый угол по отношению к оси пучка электронов.

Методы, обсуждаемые в обзоре, также использовались в некоторых приложениях компьютерной системы SANC [51–54], развиваемой с целью обеспечения теоретической поддержки экспериментов на коллайдерах высоких энергий. В частности, метод учета СВЛП был использован для согласованного описания КЭД и КХД радиационных поправок к начальному состоянию процессов типа Дрелла–Яна [55–59] в заряженном и нейтральном токах. А ведущие логарифмические поправки высших порядков учитывались для конечного состояния этого процесса. Разработанный метод расчета КЭД-поправок в СВЛП далее применялся и другими авторами, например для уточнения описания глубоконеупругого рассеяния [60].

Метод сшивки полного результата для поправок первого порядка с ведущими логарифмическими поправками высших порядков был применен в монте-карло-генераторе событий MCGPJ [61], который непосредственно использовался для анализа данных экспериментов, проводившихся на ВЭПП-2М (Новосибирск) [62, 63].

Одной из наиболее объемных задач, обсуждаемых в обзоре, является создание прецизионного теоретического описания спектра распада мюона на основании развиваемых нами методов. Со времени открытия мюона экспериментальные и теоретические исследования его свойств стали играть роль одного из краеугольных камней всего здания физики элементарных частиц. Проводимые высокоточные измерения свойств мюона позволяют проверять предсказания теоретических моделей, накладывать ограничения на значения параметров моделей, выходящих за рамки СМ, и дают возможность искать проявления новой физики [64, 65]. Доступность пучков мюонов большой интенсивности и прецизионность современного экспериментального оборудования приводят к необходимости создания адекватных по точности теоретических предсказаний. Информация о структуре слабых взаимодействий извлекается из экспериментов по наблюдению дифференциальных распределений продуктов распада мюона по импульсам и энергиям. Сопоставление получаемых таким образом данных с предсказаниями Стандартной модели позволяет накладывать серьезные ограничения на параметры моделей *новой физики*.

Как отмечено выше, основной темой обзора является применение подхода ренормализационной группы [22–24], основанного на фундаментальном физическом принципе масштабной инвариантности законов физики. Помимо этого при проведении теоретических построений и последующем их применении к анализу феноменологии взаимодействий частиц использовались стандартные хорошо известные методы квантовой теории поля. Важно отметить, что, в частности, проводится адаптация к случаю квантовой электродинамики методов, ранее разработанных для решения задач квантовой хромодинамики.

Разработка нового подхода, позволяющего расширить применение метода ренормализационной группы КЭД на случай следующих за ведущими логарифмических поправок, открывает важное направление теоретических исследований. Значимость последнего обуславливается запросами современных экспериментов, для которых высокоточные теоретические предсказания абсолютно необходимы. Решаемые с помощью обсуждаемых в обзоре методов задачи актуальны и значимы для современных экспериментов физики высоких энергий, проводимых как на ускорителях высоких энергий (HERA, LEP, LHC, Tevatron, ILC, FCCee, CEPC), так и при более низких энергиях, в частности на электрон-позитронных коллайдерах с энергиями порядка нескольких гигаэлектронвольт, включая, например, проектируемую в ИЯФ СО РАН (г. Новосибирск) Супер-чарм-тау фабрику [66]. Обсуждаемые методы уже нашли применение при моделировании, анализе данных и погрешностей соответствующих экспериментов. Например, созданный на основе разработанных методов монте-карло-генератор событий разных процессов [61] использован при анализе данных коллаборации КМД-2 [62, 63], полученных на коллайдере ВЭПП-2М в ИЯФ СО РАН (г. Новосибирск). В настоящее время этот генератор используется для анализа данных, получаемых на коллайдере ВЭПП-2000. Также методы, изначально развитые для задач физики высоких энергий, оказались востребованы и для прецизионного описания спектра распада мюона. Последний процесс является одним из базовых *классических* процессов для физики элементарных частиц.

Обзор состоит из введения, четырех разделов, заключения и двух приложений. В разд. 1 представлены методы учета ведущих логарифмических поправок в КЭД. Основное внимание уделяется поправкам высших порядков теории возмущений. Уравнения эволюции КЭД для несинглетных функций в ВЛП решаются вплоть до порядка $\mathcal{O}(\alpha^5)$.

В разд. 2 излагается систематический подход к вычислению следующих за ведущими логарифмических квантово-электродинамических поправок. Обсуждаются методы работы в СВЛП в первом порядке теории возмущений и получение на этой основе поправок порядка $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ для инклюзивных и эксклюзивных процессов. Особое внимание уделяется вопросу согласования результатов, полученных в ВЛП и СВЛП, что необходимо для избежания двойного счета и оптимального выбора масштаба факторизации.

Разд. 3 посвящен приложению разработанных методов к вычислению радиационных поправок к конкретным процессам взаимодействия элементарных частиц на коллайдерах высоких энергий. Рассмотрены электрон-позитронная аннигиляция [67–71], баба-рассеяние [72–87], процессы с детектированием тормозного излучения [88–90] и обратное тормозное излучение в процессе Дрелла–Яна [58].

В разд. 4 решается задача создания прецизионного теоретического описания спектра распада мюона [45, 91–95]. В заключении приводится обсуждение представленных методов и перспектив их дальнейшего применения. Приложения 1 и 2 содержат таблицу интегралов конволюции и сведения об основных свойствах полилогарифмов соответственно.

1. ВЕДУЩЕЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

1.1. Формализм структурных функций электрона. В работе Э. А. Кураева и В. С. Фадиной [42] метод ренормализационной группы был впервые применен для нахождения ведущих логарифмических поправок КЭД к процессам электрон-позитронной аннигиляции при высоких энергиях. Авторами было показано, что ведущие логарифмические вклады, усиленные логарифмом отношения энергии сталкивающихся пучков в системе центра масс к массе электрона, могут быть просуммированы и представлены в виде факторов, названных *структурными функциями электрона*. При этом проведена параллель с аналогичными вычислениями, делавшимися в КХД для процессов типа Дрелла–Яна с помощью уравнений ДГЛАП. Интересно, что партонная картина [96, 97] взаимодействий была приложена к случаю аннигиляции электрона и позитрона, которые в отличие от адронов не являются, по современным представлениям, связанными состояниями. Возможность применения этого формализма к описанию процессов распада мюона и (легких) мезонов впервые была обоснована в работе Э. А. Кураева [98]. Ранее ведущие логарифмические КЭД-поправки также находились и для некоторых других процессов, например для лептонной линии в глубоконеупругом рассеянии нейтрино на нуклоне в заряженном токе [99]. КЭД-поправки к глубоконеупругому рассеянию заряженных лептонов на нуклонах в разных кинематических переменных были использованы также в компьютерной программе НЕСТОР [100] (в ней, в частности, применены поправки в ВЛП из [101, 102]), которая интенсивно применялась при анализе данных на коллайдере HERA.

В КХД уравнения эволюции ДГЛАП для функции плотности распределения партона i в адроне h имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} f_{ih}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ji} \left(\frac{x}{z} \right) f_{jh}(z, Q^2). \quad (1.1)$$

Ядра этих уравнений (функции расщепления) P_{ji} определяют скорость изменения вероятности распределения партонов типа i за счет испускания партонов типа j .

Эти ядра раскладываются в ряд по степеням α_s . Ведущие (нулевые по степени α_s) члены этих рядов легко находятся по теории возмущений [103]. Q^2 здесь является масштабом факторизации. Обычно он выбирается равным квадрату характерной энергии жесткого подпроцесса, т. е. квадрату энергии в системе центра масс s для процессов аннигиляции или квадрату переданного импульса t для процессов рассеяния. Степень произвола и зависимость от выбора масштаба факторизации будет обсуждаться ниже.

На этом уровне уже легко проследить аналогию с функциями, используемыми в КЭД в методах эквивалентных фотонов и электронов [104]. В отличие от КЭД в неабелевой КХД в нулевом порядке присутствуют еще аналогичные члены ядер, соответствующие испусканию глюона глюоном (трехглюонной вершине взаимодействий). Начальные условия для уравнений эволюции определяются как значения партонных плотностей $f_{ih}(x, Q^2)$ в некоторой исходной точке Q_0^2 . Уравнения ДГЛАП позволяют суммировать члены, усиленные в каждом порядке теории возмущений степенями больших логарифмов. В КХД эти логарифмы называют *коллинеарными*, поскольку основной вклад они получают от области интегрирования при малых относительных углах между импульсами партонов. Уравнения эволюции ДГЛАП являются примером применения ренормализационной группы для нахождения вкладов коллинеарных сингулярностей при осуществлении факторизации этих вкладов, т. е. выполнении условий *теоремы факторизации* [105, 106]. В КХД рассмотрению этих условий посвящен огромный объем литературы. Нашей задачей является последовательное построение аналогичного подхода для случая квантовой электродинамики с учетом особенностей этой теории и задач, актуальных для современных экспериментов.

Проведем аналогию между классическим описанием КХД факторизации в процессе Дрелла–Яна [35, 36] и описанием больших логарифмических поправок к процессу электрон-позитронной аннигиляции. Аналогом сталкивающихся адронов на e^+e^- -коллайдерах у нас выступают электроны и позитроны с конечной массой m_e . В случае КЭД мы вводим в рассмотрение три типа партонов: фотон и безмассовые электрон и позитрон*. Так же, как и в случае процесса Дрелла–Яна, нас интересуют поправки к начальному состоянию. В рассматриваемом примере задачей является учет всех больших логарифмов, связанных с излучением реальных и виртуальных фотонов и электрон-позитронных пар.

*Другие заряженные лептоны, т. е. мюоны, тау-лептоны и кварки (адроны), также включаются в рассмотрение при необходимости.

Действуя по аналогии с процедурой факторизации КХД-поправок к процессу Дрелла–Яна, мы представляем КЭД-поправки к полному сечению аннигиляции в адроны в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LLA}}^{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}}(s) = & \int_{x_1^{\min}}^1 dx_1 \int_{x_2^{\min}}^1 dx_2 \Theta \left(x_1 + x_2 - 2 + \frac{\Delta E}{E} \right) \times \\ & \times \sum_{a,b=e^+,e^-, \gamma} \mathcal{D}_{ae^-}(x_1, s) \mathcal{D}_{be^+}(x_2, s) \sigma_0^{ab \rightarrow \text{hadrons}}(sx_1x_2), \quad (1.2) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем возможным сочетаниям партонов, которые могут проаннигилировать в адроны в подпроцессе $ab \rightarrow \text{hadrons}$ с сечением $\sigma_0^{ab \rightarrow \text{hadrons}}(sx_1x_2)$, рассчитанным без учета радиационных поправок к начальному состоянию. Величина $\Delta E/E$ определяет максимальную долю суммарной энергии сталкивающихся частиц, потерянную на излучение из начального состояния. Функции партонных распределений $\mathcal{D}_{ae^-}(x_1, s)$ и $\mathcal{D}_{be^+}(x_2, s)$ описывают плотности распределения безмассовых партонов типов a и b в начальных массивных электроне и позитроне соответственно. Доли энергии партонов, $x_{1,2}$, вводятся полностью аналогично описанию кварковых и глюонных распределений в адронах, т. е. $x_{1,2}$ задают доли энергии партонов по отношению к полной энергии излучившей их частицы. Нижние пределы интегрирования по долям энергии партонов x_1^{\min} и x_2^{\min} определяются экспериментальными условиями детектирования конечной системы адронов и, возможно, ограничениями на излучение дополнительных фотонов и e^+e^- -пар. Сразу отметим, что эти ограничения могут быть правильно учтены формулой (1.2) только в том случае, когда они зависят от долей энергии, но не затрагивают угловое распределение излученных частиц.

Функции распределения партонов в электроне удовлетворяют уравнениям эволюции для КЭД, которые могут быть получены и из уравнений ДГЛАП (1.1). В ведущем порядке мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ee}(x, s) = & \delta(1-x) + \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{ee}(y, t) P_{ee} \left(\frac{x}{y} \right) + \right. \\ & \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{\gamma e}(y, t) P_{e\gamma} \left(\frac{x}{y} \right) \right], \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{\bar{e}\bar{e}}(x, s) = \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{\bar{e}\bar{e}}(y, t) P_{\bar{e}\bar{e}} \left(\frac{x}{y} \right) + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{\gamma \bar{e}}(y, t) P_{\bar{e}\gamma} \left(\frac{x}{y} \right) \right], \quad (1.4)$$

$$\mathcal{D}_{\gamma e}(x, s) = -\frac{2}{3} \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} + \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{ee}(y, t) P_{\gamma e} \left(\frac{x}{y} \right) + \right. \\ \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{\bar{e}e}(y, t) P_{\gamma \bar{e}} \left(\frac{x}{y} \right) \right], \quad \alpha(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{t}{m^2}}, \quad (1.5)$$

где t — квадрат переданного импульса. Бегущая константа связи $\alpha(t)$ определена только с учетом ведущего вклада, усиленного логарифмом массы электрона*. Величина

$$\frac{\alpha(t)}{2\pi} P_{BA} \left(\frac{x}{y} \right) \frac{dx dt}{yt}$$

задает вероятность превращения партона типа A с долей энергии y в партон типа B с долей энергии в интервале от x до $x + dx$, а квадрат импульса лежит в интервале от t до $t + dt$. Ядра этих интегральных уравнений в ВЛП имеют вид

$$P_{ee}(z) = P_{\bar{e}\bar{e}}(z) \equiv P^{(1)}(z) = \left[\frac{1+z^2}{1-z} \right]_+, \\ P_{e\gamma}(z) = P_{\bar{e}\gamma}(z) = z^2 + (1-z)^2, \\ P_{\gamma e}(z) = P_{\gamma \bar{e}}(z) = \frac{1}{z}(1 + (1-z)^2). \quad (1.6)$$

Плюс-прескрипция, использованная в определении функции расщепления $P_{ee}(z)$, регуляризует полюс этой функции при $z \rightarrow 1$ и задает правило интегрирования произведения этой функции на любую другую несингулярную в этой точке функцию. Подробнее эта прескрипция обсуждается в приложении 1. Отметим, что с точки зрения физики вблизи точки $z = 1$ мы имеем дело с инфракрасной расходимостью за счет мягкого тормозного излучения. Регуляризация этой расходимости в КЭД делается на основании теоремы Блоха–Нордсика. Чаще всего при решении задач, рассматриваемых в обзоре, мы будем пользоваться следующим представлением функций расщепления, регуляризованных с помощью плюс-прескрипции:

$$[P(z)]_+ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [P_{\Theta}(z) \Theta(1-z-\Delta) + \delta(1-z)P_{\Delta}]. \quad (1.7)$$

В частности, для функции расщепления, описывающей переход электрона в электрон, имеем

$$P_{\Theta}^{(1)}(z) = \frac{1+z^2}{1-z}, \quad P_{\Delta}^{(1)} = \frac{3}{2} + 2 \ln \Delta. \quad (1.8)$$

*В практических приложениях другие вклады в эволюцию электродинамической константы связи будут учитываться там, где это необходимо.

Меллиновские моменты ядра $P^{(1)}(z)$ можно представить через суммы:

$$C_n = \int_0^1 z^n P^{(1)}(z) dz = \int_0^1 \frac{1+z^2}{1-z} (z^n - 1) dz = \\ = \frac{3}{2} - 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \quad (1.9)$$

Принято различать так называемые синглетную и несинглетную части структурной функции электрона \mathcal{D}_{ee} :

$$\mathcal{D}_{ee} = \mathcal{D}^S + \mathcal{D}^{\text{NS}}, \quad \mathcal{D}^S = \mathcal{D}_{\bar{e}e}. \quad (1.10)$$

Несинглетная часть \mathcal{D}^{NS} соответствует вкладам диаграмм Фейнмана, в которых электронная линия не прерывается (вплоть до блока жесткого подпроцесса), а функция \mathcal{D}^S — диаграммам, в которых входящая электронная линия прерывается, т. е. электрон, пришедший к блоку жесткого подпроцесса, образован виртуальным фотоном, излученным начальной частицей. Отметим, что интерференция синглетных и несинглетных диаграмм не дает вклада в ВЛП.

Несинглетная функция удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}^{\text{NS}}(x, s) = \delta(x-1) + \int_{m^2}^s \frac{\alpha(t)}{2\pi} \frac{dt}{t} \int_x^1 \frac{dz}{z} P^{(1)}(z) \mathcal{D}^{\text{NS}}\left(\frac{x}{z}, t\right). \quad (1.11)$$

Разложение синглетной структурной функции электрона в ВЛП начинается с выражения вида

$$\mathcal{D}^S(x, s) = \frac{1}{8x} \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2 \left[\frac{4}{3}(1-x^3) + x(1-x) + 2x(1+x) \ln x \right] + \\ + \mathcal{O}(\alpha^2 L, \alpha^3 L^3). \quad (1.12)$$

Рассмотрим основные свойства структурных функций. Для начала пренебрежем зависимостью постоянной связи от масштаба факторизации. Это приближение позволяет найти чисто фотонные вклады в структурную функцию электрона, в верхнем индексе которой мы ставим « γ ». Решая уравнение (1.11) методом итераций, получаем

$$\mathcal{D}^{\text{NS},\gamma}(x, \beta) = \delta(1-x) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\beta}{4}\right)^k P^{(k)}(x),$$

$$P^{(2)}(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P^{(1)}(y) P^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right), \quad (1.13)$$

$$P^{(k)}(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P^{(k-1)}(y) P^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right), \quad \beta = \frac{2\alpha}{\pi}(L-1).$$

Обратим внимание на то, что в выражении для β берется $(L-1)$, т. е. делается эффективный сдвиг масштаба факторизации. Этот выбор традиционен для ВЛП в КЭД. Причины этого заключаются в стремлении сразу учесть часть следующих за ведущими слагаемых. Подробнее мы это обсудим ниже.

Явная форма функции $P^{(2)}(x)$ в форме, заданной (1.7):

$$P_{\Delta}^{(2)}(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [P_{\Delta}^{(2)} \delta(1-x) + P_{\Theta}^{(2)}(x) \Theta(1-x-\Delta)],$$

$$P_{\Delta}^{(2)} = 4 \ln^2 \Delta + 6 \ln \Delta + \frac{9}{4} - \frac{\pi^2}{3}, \quad (1.14)$$

$$P_{\Theta}^{(2)}(x) = \frac{1+x^2}{1-x} [4 \ln(1-x) - 2 \ln x + 3] + (1+x) \ln x - 2(1-x).$$

Несинглетные структурные функции электрона \mathcal{D}^{NS} имеют свойства

$$\int_0^1 \mathcal{D}^{\text{NS}}(x, \beta) dx = 1, \quad (1.15)$$

$$\int_0^1 P^{(k)}(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.16)$$

$$\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}^{\text{NS}, \gamma}(y, \beta_1) \mathcal{D}^{\text{NS}, \gamma}\left(\frac{x}{y}, \beta_2\right) = \mathcal{D}^{\text{NS}, \gamma}(x, \beta_1 + \beta_2). \quad (1.17)$$

Можно заметить, что результат для сечения (1.5) имеет смысл и для случая $\Delta E \sim E$. Если же $\Delta E \ll E$, то условия $x_1 + x_2 > 2 - \Delta E/E$ и $x_1 x_2 > 1 - \Delta E/E$ эквивалентны. Когда отношение $\Delta E/E$ мало по сравнению с единицей, вклад синглетной функции \mathcal{D}^S становится пренебрежимо мал.

Для плавно меняющихся функций, таких как $\sigma(s)/|1 - \Pi(s)|^2$, имеем

$$\sigma_{RC}(s) = \frac{\sigma_0(s)}{|1 - \Pi(s)|^2} R\left(1 - \frac{\Delta E}{E}, s\right), \tag{1.18}$$

$$R(x, s) = \int_x^1 dx_1 \int_{x/x_1}^1 dx_2 \mathcal{D}^{\text{NS}, \gamma}(x_1, s) \mathcal{D}^{\text{NS}, \gamma}(x_2, s).$$

Функция $R(z, s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(z, s) = 1 + \int_{m^2}^s \frac{\alpha(t) dt}{\pi t} \int_z^1 dy P^{(1)}(y) R\left(\frac{z}{y}, t\right). \tag{1.19}$$

Чтобы решить это уравнение, можно применить преобразование Меллина и определить моменты:

$$R_n(s) = \int_0^1 dx x^{n-1} R(x, s). \tag{1.20}$$

Тогда в терминах моментов получаем

$$R_n(s) = \frac{1}{n} + C_n \int_{m^2}^s \frac{dt}{t} \frac{\alpha(t)}{\pi} R_n(t), \tag{1.21}$$

где C_n — моменты ядра уравнения, определенные в (1.9). Обратное преобразование Меллина дает

$$R(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{dn}{n} x^{-n} \exp\left\{C_n \int_{m^2}^s \frac{dt}{t} \frac{\alpha(t)}{\pi}\right\}. \tag{1.22}$$

Для случая $1 - x + \Delta E/E \ll 1$ важны только большие значения n , и можно найти аналитическое выражение. Отметим, что метод ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) в данном случае неприменим. Используя асимптотические выражения для C_n при больших n ,

$$C_n \approx \frac{3}{2} - 2C - 2 \ln n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера, получаем

$$R(x, s) = e^{(3/2-2C)\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dn}{n} n^{-2\xi} e^{-n \ln x},$$

$$\xi = \int_{m^2}^s \frac{dt}{t} \frac{\alpha(t)}{\pi} = -3 \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} L \right).$$

Окончательно выражение для R принимает вид

$$R \left(1 - \frac{\Delta E}{E}, s \right) = \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^\xi e^{3/4\xi} \frac{e^{-C\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \left(1 + O \left(\frac{\Delta E}{E} \right) \right). \quad (1.23)$$

Разложение по параметру $\alpha L/\pi$ дает

$$R \left(1 - \frac{\Delta E}{E}, s \right) \approx 1 + \frac{2\alpha L}{\pi} \left(\ln \frac{\Delta E}{E} + \frac{3}{4} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha L}{\pi} \right)^2 \left[2 \ln^2 \frac{\Delta E}{E} + \frac{10}{3} \ln \frac{\Delta E}{E} + \frac{11}{8} - \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (1.24)$$

Этот результат можно сравнить с тем, что был получен в работе [107]:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} L \right)^{6 \ln \Delta E/E - 9/2} \approx 1 + \frac{2\alpha L}{\pi} \left(\ln \frac{\Delta E}{E} + \frac{3}{4} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha L}{\pi} \right)^2 \left[2 \ln^2 \frac{\Delta E}{E} + \frac{10}{3} \ln \frac{\Delta E}{E} + \frac{11}{8} \right]. \quad (1.25)$$

Разница по отношению к нашему результату составляет $-(\pi^2/3)$. Причиной этого является то, что в работе [107] подход ренормализационной группы был применен к анализу не амплитуды, а полного сечения, имеющего массовые сингулярности. Явные вычисления позволяют нам учесть важную часть следующих за ведущими вкладов, заметив, что в реальности параметром разложения служит величина

$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi} (L - 1). \quad (1.26)$$

Действительно, при проведении расчетов, например, вклада тормозного излучения можно обратить внимание на то, что большие логарифмы возникают при интегрировании по углу в квадрате матричного элемента слагаемых типа $(p_1 p_2)/[(p_1 k)(p_2 k)]$, где $p_{1,2}$ — 4-импульсы излучающих частиц, а k — фотона. При этом всегда возникают еще слагаемые вида $m_{1,2}^2/(p_{1,2} k)^2$, которые как раз и сдвигают большой логарифм на единицу.

Для учета следующих за ведущими вкладов широко применяется подход K -фактора, который может быть вставлен в виде множителя в подынтегральное выражение как для сечений процессов типа Дрелла–Яна (1.5):

$$K = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right). \quad (1.27)$$

Тогда окончательный результат получаем в виде (ниже для простоты $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^{\text{NS}}$)

$$\sigma_{RC}(s) = \int_{x_1^{\min}}^1 dx_1 \int_{x_2^{\min}}^1 dx_2 \mathcal{D}^{\text{NS}}(x_1, s) \mathcal{D}^{\text{NS}}(x_2, s) \frac{\sigma_0(sx_1x_2)}{|1 - \Pi(sx_1x_2)|^2} K, \quad (1.28)$$

где $\mathcal{D}^{\text{NS}} = \mathcal{D}^{\text{NS},\gamma} + \mathcal{D}^{\text{NS},\text{pair}}$, если экспериментальные условия позволяют одинаково трактовать фотонные поправки и эффекты за счет излучения пар. В противном случае вклад пар рассматривается отдельно особым образом*. Выражения для структурных функций в ВЛП можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\gamma(x, s) = & \frac{1}{2}\beta(1-x)^{\beta/2-1} \left[1 + \frac{3}{8}\beta - \frac{1}{48}\beta^2 \left(\frac{1}{3}L + \pi^2 - \frac{47}{8} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{4}\beta(1+x) + \frac{1}{32}\beta^2 \left[4(1+x) \ln \frac{1}{1-x} + \right. \\ & \left. + \frac{1+3x^2}{1-x} \ln \frac{1}{x} - 5 - x \right] + O(\beta^3), \quad (1.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\pm(x, s) = & \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{12(1-x)} \left(1 - x - \frac{2m}{E} \right)^{\beta/2} \left(L + 2 \ln(1-x) - \frac{5}{3} \right)^2 \times \right. \\ & \times \left[1 + x^2 + \frac{1}{6}\beta \left(L + 2 \ln(1-x) - \frac{5}{3} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{4}L^2 \left[\frac{2}{3} \frac{1-x^3}{x} + \frac{1}{2}(1-x) + (1+x) \ln \frac{1}{x} \right] \right\} \Theta \left(1 - x - \frac{2m}{E} \right). \quad (1.30) \end{aligned}$$

Тогда поправленное сечение процесса может быть записано в виде однократного интеграла путем введения новой переменной $x = 1 - x_1x_2$ и интегрирования по второй оставшейся независимой переменной. Таким образом

*На практике вкладами за счет излучения пар чаще всего просто пренебрегают.

мы получаем

$$\sigma_{RC}(s) = \int_0^{x^{\max}} dx F(x, s) \frac{\sigma_0(s(1-x))}{|1 - \Pi(s(1-x))|^2}, \quad F = F^\gamma + F^\pm, \quad (1.31)$$

где x^{\max} определяется экспериментальным ограничением $s(1 - x^{\max}) > s_{\text{threshold}} = 4m_\pi^2$. Функции F^γ и F^\pm имеют вид

$$F^\gamma(x, s) = \beta x^{\beta-1} \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{24}\beta^2 \left(\frac{1}{3}L + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] - \beta \left(1 - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{8}\beta^2 \left[4(2-x) \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{x}(1+3(1-x)^2) \ln \frac{1}{1-x} - 6 + x \right], \quad (1.32)$$

$$F^\pm(x, s) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{6x} \left(x - \frac{2m}{E} \right)^\beta \times \left[(2 - 2x + x^2) \left(L + 2 \ln x - \frac{5}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}\beta \left(L + 2 \ln x - \frac{5}{3} \right)^3 \right] + \frac{1}{2}L^2 \left[\frac{2}{3} \frac{1 - (1-x)^3}{1-x} + (2-x) \ln(1-x) + \frac{1}{2}x \right] \right\} \Theta \left(x - \frac{2m}{E} \right).$$

Дополнительные детали касательно применения метода структурных функций в КЭД могут быть найдены в работах [43, 108, 109, 114] и процитированной там литературе.

1.2. Функции расщепления высших порядков в ВПП. Постоянно возрастающая точность экспериментальных исследований обуславливает необходимость учета поправок высших порядков. Рассмотрим здесь вывод [110] несинглетных функций расщепления КЭД высших порядков в ведущем логарифмическом приближении и обсудим свойства этих функций.

Альтернативный вывод несинглетных структурных функций в четвертом и пятом порядках теории возмущений был сделан в работе [111], где они были получены с использованием так называемой *ad hoc* процедуры экспоненцирования [112, 113].

КХД-уравнение эволюции (1.1) может быть переписано для случая несинглетной структурной функции электрона в виде

$$\mathcal{D}_{ee}^{\text{NS}}(z, Q^2) = \delta(1-z) + \int_{m^2}^{Q^2} \frac{\alpha(q^2)}{2\pi} \frac{dq^2}{q^2} \int_z^1 \frac{dx}{x} P^{(1)}(x) \mathcal{D}_{ee}^{\text{NS}} \left(\frac{z}{x}, q^2 \right). \quad (1.33)$$

При рассмотрении вклада поляризации вакуума в эволюцию электронных структурных функций мы здесь ограничимся учетом лишь вкладов электронных петель, см. (1.5). Полезно также отметить, что вклад только одной электронной петли (с учетом пересуммирования) порождает ведущие логарифмические члены, тогда как двухпетлевые (и выше) вклады могут проявиться только в следующих за ведущим порядках разложения по степеням большого логарифма. Учет бегущей константы связи может быть проинтерпретирован как один из вкладов виртуальных пар в несинглетном канале. В КЭД обычно принято разделять вклады чисто фотонных поправок и вклады за счет излучения пар. Это обусловлено отмечавшейся во введении большей степенью эксклюзивности условий регистрации заряженных лептонов и фотонов по сравнению с адронными струями. Тем не менее мы начнем с рассмотрения общего уравнения эволюции и только потом выделим часть решения, соответствующую вкладу e^+e^- -пар*. Синглетный канал рождения пар в функции \mathcal{D}^S подробно рассматривался в работах [42, 43, 114].

1.3. Решение уравнений эволюции КЭД. В пертурбативной КЭД уравнения эволюции могут быть решены до любого порядка теории возмущений путем итераций. Причем по сравнению с КХД начальные условия задаются выбором той или иной схемы нормировки на заряд (и массу) электрона, намного более хорошо известные, чем кварк-партоновые распределения. В качестве начального приближения для несинглетной функции уместно выбрать дираковскую δ -функцию, $\delta(1 - z)$, соответствующую предположению о том, что электрон останется электроном, не потеряв при этом энергии, с вероятностью 100 %. Первая итерация после подстановки δ -функции в правую часть уравнения (1.11) дает

$$\mathcal{D}^{\text{NS}}(z, Q^2) = \delta(1 - z) + \frac{\beta}{4} P^{(1)}(z) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (1.34)$$

На следующем шаге итерационной процедуры нам нужно вычислить интеграл конволюции двух обобщенных функций $P^{(1)} \otimes P^{(1)}$, далее появятся аналогичные свертки более высоких порядков (1.13).

Продвигаясь таким образом, мы получаем решение уравнения эволюции для несинглетной функции вплоть до пятого порядка включительно:

$$\mathcal{D}^{\text{NS}}(z, Q^2) = \mathcal{D}_\gamma^{\text{NS}}(z, Q^2) + \mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{NS}}(z, Q^2), \quad (1.35)$$

$$\mathcal{D}_\gamma^{\text{NS}}(z, Q^2) = \delta(1 - z) + \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta}{4}\right)^n P^{(n)}(z) + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (1.36)$$

*Учет рождения пар более тяжелых лептонов в ВЛП также возможен.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{NS}}(z, Q^2) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{4}\right)^2 P^{(1)}(z) + \left(\frac{\beta}{4}\right)^3 \left[\frac{1}{3} P^{(2)}(z) + \frac{4}{27} P^{(1)}(z) \right] + \\
&+ \left(\frac{\beta}{4}\right)^4 \left[\frac{1}{6} P^{(3)}(z) + \frac{11}{54} P^{(2)}(z) + \frac{2}{27} P^{(1)}(z) \right] + \\
&+ \left(\frac{\beta}{4}\right)^5 \left[\frac{1}{18} P^{(4)}(z) + \frac{7}{54} P^{(3)}(z) + \frac{10}{81} P^{(2)}(z) + \frac{16}{405} P^{(1)}(z) \right] + \mathcal{O}(\alpha^6).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Индексом γ помечена чисто фотонная часть структурной функции. Вторая часть описывает поправки за счет e^+e^- -пар и, начиная с третьего порядка, с возможностью также и фотонного излучения. Дополнительные детали о поправках высших порядков за счет излучения пар можно найти в работах [68, 115].

Для несинглетной структурной функции электрона нормировочное условие (1.15) имеет простой вероятностный смысл: сумма вероятностей всех процессов излучения из электрона равна 1. Другими словами, в несинглетном канале электрон мог излучать фотоны, электроны и позитроны, но при этом он остался электроном с меньшей, возможно, энергией.

Обратимся снова к рассмотрению свойств функций расщепления. Используя представление (1.7), мы можем записать интеграл от произведения двух обобщенных функций в виде (1.7), где

$$P_{\Theta}^{(n+1)}(z) = P_{\Theta}^{(1)}(z)P_{\Delta}^{(n)} + P_{\Delta}^{(1)}P_{\Theta}^{(n)}(z) + \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} \frac{dx}{x} P_{\Theta}^{(1)}(x)P_{\Theta}^{(n)}\left(\frac{z}{x}\right), \tag{1.38}$$

а Δ -часть функции расщепления всегда может быть получена из условий (1.15), (1.16):

$$P_{\Delta}^{(n+1)} = - \int_0^{1-\Delta} dz P_{\Theta}^{(n+1)}(z). \tag{1.39}$$

Вместо такого представления можно использовать, как обсуждалось в [43], и известное решение уравнений КЭД в пределе мягкого излучения [30]:

$$\mathcal{D}_{\gamma}^{\text{NS}}(z, Q^2)|_{z \rightarrow 1} = \frac{\beta}{2} \frac{(1-z)^{\beta/2-1}}{\Gamma(1+\beta/2)} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \left(\frac{3}{4} - C \right) \right\}, \tag{1.40}$$

где C — постоянная Эйлера, $C \approx 0,57721566$ (она еще часто называется постоянной Эйлера–Маскерони и обозначается γ). Тогда для получения Δ -части функции расщепления в требуемом порядке можем проинтегриро-

вать уравнение (1.40) в диапазоне $1 - \Delta < z < 1$ и затем разложить в ряд по α :

$$\int_{1-\Delta}^1 dz \mathcal{D}_\gamma^{\text{NS}}(z, Q^2) = \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \ln \Delta + \frac{3\beta}{8} \right\} \frac{\exp(-C\beta/2)}{\Gamma(1 + \beta/2)}. \quad (1.41)$$

Для разложения в ряд Γ -функции используется формула (П2.9), приведенная в приложении 2. Мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-C\beta/2)}{\Gamma(1 + \beta/2)} = & 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 \zeta(2) + \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{2} \right)^3 \zeta(3) + \frac{1}{16} \left(\frac{\beta}{2} \right)^4 \zeta(4) + \\ & + \frac{1}{5} \left(\frac{\beta}{2} \right)^5 \zeta(5) - \frac{1}{6} \left(\frac{\beta}{2} \right)^5 \zeta(2)\zeta(3) + \mathcal{O}(\beta^6). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Функции расщепления второго (1.14) и третьего порядков хорошо известны [43] и активно применяются при решении разнообразных задач. Для полноты изложения приведем здесь и явное выражение для

$$\begin{aligned} P_\Theta^{(3)}(z) = & 24 \frac{1+z^2}{1-z} \left(\frac{1}{2} \ln^2(1-z) + \frac{3}{4} \ln(1-z) - \frac{1}{2} \ln z \ln(1-z) + \frac{1}{12} \ln^2 z - \right. \\ & \left. - \frac{3}{8} \ln z + \frac{9}{32} - \frac{1}{2} \zeta(2) \right) + 6(1+z) \ln z \ln(1-z) - 12(1-z) \ln(1-z) + \\ & + \frac{3}{2} (5-3z) \ln z - 3(1-z) - \frac{3}{2} (1+z) \ln^2 z + 6(1+z) \text{Li}_2(1-z), \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$P_\Delta^{(3)} = 8 \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^3 - 24 \zeta(2) \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right) + 16 \zeta(3). \quad (1.44)$$

Определения ζ -функции Римана и дилогарифмов даны в приложении 2.

Путем конволюции (1.13), (1.38) находим

$$\begin{aligned} P_\Theta^{(4)}(z) = & 144 \left\{ \frac{1+z^2}{1-z} \left[\frac{2}{9} \ln^3(1-z) + \frac{1}{2} \ln^2(1-z) + \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{3} \zeta(2) \right) \ln(1-z) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} \ln^2(1-z) \ln z + \frac{1}{9} \ln(1-z) \ln^2 z - \frac{1}{2} \ln(1-z) \ln z - \frac{\ln^3 z}{108} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\ln^2 z}{12} + \left(\frac{\zeta(2)}{3} - \frac{3}{16} \right) \ln z - \frac{1}{9} \ln z \text{Li}_2(1-z) - \frac{2}{9} \text{S}_{1,2}(1-z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{32} - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{4}{9} \zeta(3) \right] - \frac{1-z}{3} \ln^2(1-z) - \frac{1-z}{6} \ln(1-z) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+z}{6} \ln^2(1-z) \ln z - \frac{1+z}{12} \ln(1-z) \ln^2 z + \frac{5-3z}{12} \ln(1-z) \ln z + \\
& + \frac{7(1+z)}{864} \ln^3 z + \frac{5z-11}{144} \ln^2 z + \left(\frac{43-5z}{288} - \frac{1+z}{6} \zeta(2) \right) \ln z + \\
& + \frac{1+z}{3} \ln(1-z) \operatorname{Li}_2(1-z) - \frac{1+z}{3} \operatorname{Li}_3(1-z) + \frac{1+z}{6} S_{1,2}(1-z) + \\
& + \frac{1+z}{12} \operatorname{Li}_2(1-z) - \frac{11(1-z)}{144} + \frac{1-z}{3} \zeta(2) \Big\}, \quad (1.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\Delta}^{(4)} = 16 \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^4 - 96 \zeta(2) \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^2 + \\
+ 128 \zeta(3) \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right) + 24 \zeta(4). \quad (1.46)
\end{aligned}$$

На следующем шаге получаем функцию расщепления пятого порядка:

$$\begin{aligned}
P_{\Theta}^{(5)}(z) = 720 \Big\{ & \frac{1+z^2}{1-z} \left[\frac{1}{9} \ln^4(1-z) + \frac{1}{3} \ln^3(1-z) + \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{3} \zeta(2) \right) \ln^2(1-z) + \right. \\
& + \left(\frac{3}{16} - \zeta(2) + \frac{8}{9} \zeta(3) \right) \ln(1-z) - \frac{2}{9} \ln z \ln^3(1-z) + \left(\frac{1}{9} \ln^2 z - \frac{1}{2} \ln z \right) \ln^2(1-z) + \\
& + \left(-\frac{1}{54} \ln^3 z + \frac{1}{6} \ln^2 z - \left(\frac{2}{9} \operatorname{Li}_2(1-z) + \frac{3}{8} - \frac{2}{3} \zeta(2) \right) \ln z - \frac{4}{9} S_{1,2}(1-z) \right) \times \\
& \times \ln(1-z) + \frac{1}{1080} \ln^4 z - \frac{1}{72} \ln^3 z + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9} \zeta(2) + \frac{1}{18} \operatorname{Li}_2(1-z) \right) \ln^2 z + \\
& + \left(-\frac{3}{32} + \frac{1}{2} \zeta(2) - \frac{4}{9} \zeta(3) + \frac{1}{9} S_{1,2}(1-z) - \frac{1}{6} \operatorname{Li}_2(1-z) + \frac{2}{9} \operatorname{Li}_3(1-z) \right) \ln z + \\
& \left. + \frac{1}{9} (\operatorname{Li}_2(1-z))^2 - \frac{1}{3} S_{1,2}(1-z) + \frac{9}{256} - \frac{3}{8} \zeta(2) + \frac{2}{3} \zeta(3) + \frac{1}{6} \zeta(4) \right\} + \\
& + \left(\frac{(1+z)}{9} \ln z - \frac{2(1-z)}{9} \right) \ln^3(1-z) + \left(-\frac{(1+z)}{12} \ln^2 z + \frac{5-3z}{12} \ln z + \right. \\
& + \frac{(1+z)}{3} \operatorname{Li}_2(1-z) - \frac{1-z}{6} \Big) \ln^2(1-z) + \left(\frac{7(1+z)}{432} \ln^3 z + \frac{5z-11}{72} \ln^2 z + \right. \\
& + \frac{43-5z}{144} \ln z - \frac{(1+z)}{3} \zeta(2) \ln z + \frac{(1+z)}{6} \operatorname{Li}_2(1-z) + \frac{(1+z)}{3} S_{1,2}(1-z) - \\
& - \frac{2(1+z)}{3} \operatorname{Li}_3(1-z) + \frac{2(1-z)}{3} \zeta(2) - \frac{11(1-z)}{72} \Big) \ln(1-z) - \frac{(1+z)}{1152} \ln^4 z + \\
& \left. + \frac{23-9z}{1728} \ln^3 z + \left(\frac{(1+z)}{12} \zeta(2) - \frac{33+5z}{576} - \frac{5(1+z)}{144} \operatorname{Li}_2(1-z) \right) \ln^2 z + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{(1-z)}{9} \text{Li}_2(1-z) - \frac{(1+z)}{8} S_{1,2}(1-z) + \frac{49-39z}{576} + \frac{2(1+z)}{9} \zeta(3) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{5-3z}{12} \zeta(2) \right) \ln z + \left(\frac{19(1+z)}{144} - \frac{(1+z)}{3} \zeta(2) \right) \text{Li}_2(1-z) + \\
 & \quad + \frac{11-5z}{36} S_{1,2}(1-z) - \frac{(1+z)}{6} \text{Li}_3(1-z) + \frac{2(1+z)}{3} \text{Li}_4(1-z) - \\
 & \quad - \frac{(1+z)}{3} S_{2,2}(1-z) - \frac{5(1+z)}{72} S_{1,3}(1-z) - \\
 & \quad \left. - \frac{5(1-z)}{288} + \frac{(1-z)}{6} \zeta(2) - \frac{4(1-z)}{9} \zeta(3) \right\}, \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\Delta}^{(5)} = & 32 \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^5 - 320 \zeta(2) \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^3 + 640 \zeta(3) \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^2 + \\
 & + 240 \zeta(4) \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right) + 768 \zeta(5) - 640 \zeta(2) \zeta(3). \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

1.4. Численные оценки и обсуждение результатов. Проверено, что выражения, полученные для функций расщепления в четвертом и пятом порядках, удовлетворяют условию (1.16). Таким образом, мы видим согласие между результатом итерационной процедуры нахождения $P_{\Delta}^{(n)}$ и разложением известного экспоненцированного решения для этой величины. Кроме того, наш результат совпадает с экспоненцированным решением, найденным в работе [111]. Таким образом, мы воспроизвели ранее полученный результат, но другим методом. Сведение одного из этих результатов к другому на практике требует нетривиальных выкладок, связанных с разложением функций в ряды с удержанием многих порядков. В каких-то случаях более удобна найденная нами форма представления функций расщепления высших порядков, а в каких-то — найденная ранее. Преимущество нашего результата заключается в том, что можно проводить пертурбативные вычисления последовательно, четко отслеживая порядок по α , тогда как экспоненцированные выражения пересуммируют определенные вклады высших порядков, не позволяя выделять, например, только члены $\sim \alpha^2$. Как видно из табл. 1, численная разница между результатами, получаемыми с помощью наших выражений и экспоненцированных, очень мала.

Важно отметить, что представленные результаты позволяют количественно судить о значимости экспоненциации по сравнению с расчетами в том или ином фиксированном порядке по α , тем более, что в реалистической ситуации помимо ведущих логарифмических поправок надо еще учесть и следующие за ними. А вклад последних чаще всего оказывается гораздо важнее эффектов очень высоких порядков, которые добавляются путем экспоненцирования.

Таблица 1. Значения интеграла $I(x)$ в различных приближениях

x	$\mathcal{O}(\alpha)$	$\mathcal{O}(\alpha^2)$	$\mathcal{O}(\alpha^3)$	$\mathcal{O}(\alpha^4)$	$\mathcal{O}(\alpha^5)$	Экспонен.
0,01	0,99972722	0,99970278	0,99970216	0,99970216	0,99970216	0,99970216
0,1	0,99713067	0,99696386	0,99696237	0,99696241	0,99696241	0,99696241
0,5	0,97933805	0,97871205	0,97873132	0,97873149	0,97873148	0,97873148
0,9	0,91043156	0,91243286	0,91253629	0,91252777	0,91252803	0,91252802
0,99	0,79019566	0,80982514	0,80884689	0,80886291	0,80886436	0,80886422
0,999	0,66569598	0,71915664	0,71380222	0,71416672	0,71415030	0,71415065

Таблица 2. Интегралы функций расщепления $J^{(n)}(x)$ и $P_{\Delta}^{(n)}$

x	$\mathcal{O}(\alpha)$	$\mathcal{O}(\alpha^2)$	$\mathcal{O}(\alpha^3)$	$\mathcal{O}(\alpha^4)$	$\mathcal{O}(\alpha^5)$
	$J^{(n)}(x)$				
0,01	-0,0101	-0,0664	-0,1854	-0,1409	0,5232
0,1	-0,1057	-0,4529	-0,4487	1,6579	2,7010
0,5	-0,7613	-1,6997	5,7829	7,5130	-99,1465
0,9	-3,3002	5,4338	31,0395	-376,7425	2102,5492
0,99	-7,7303	53,2969	-293,5939	708,7696	11810,0253
0,999	-12,3175	145,1533	-1606,9698	16122,5016	-133803,0981
Δ	$P_{\Delta}^{(n)}$				
0,001	-12,3155	145,0921	-1605,5843	16095,0956	-133303,9430

В табл. 1 даются значения интеграла

$$I(x) = \int_x^1 dz \mathcal{D}_{\gamma}^{\text{NS}}(z, Q^2) \quad (1.49)$$

от чисто фотонной части несинглетной структурной функции электрона в различных приближениях для $Q^2 = 10^4 \text{ ГэВ}^2$, $L \approx 24,37$. Числа в последнем столбце получены путем использования экспоненцированной формулы (11) из работы [111]. В табл. 2 представлены соответствующие значения интегралов для самих функций расщепления:

$$J^{(n)}(x) = \int_x^1 dz P^{(n)}(z). \quad (1.50)$$

В последней строке табл. 2 приводятся также значения соответствующих Δ -частей. Отметим, что на практике для осуществления предела $\Delta \rightarrow 0$ и исключения таким образом зависимости от значения этого параметра в интегралах $I(x)$ и $J^{(n)}(x)$ мы использовали $\Delta = 10^{-10}$.

2. СЛЕДУЮЩЕЕ ЗА ВЕДУЩИМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

2.1. Следующие за ведущими поправки первого порядка. В этом пункте будут рассмотрены методы вычисления следующих за ведущими радиационных поправок первого и более высоких порядков.

Учет радиационных поправок КЭД первого порядка теории возмущений является одним из базовых элементов для построения теоретического описания процессов взаимодействия частиц, изучаемых в физике высоких энергий. В литературе известны аналитические результаты практически для всех возможных процессов стандартной модели и многих ее расширений, например минимального суперсимметричного. Тем не менее при постановке каждого нового эксперимента опять требуется проведение тщательного анализа эффектов, связанных с радиационными поправками, с учетом конкретных экспериментальных условий. Более того, зачастую приходится и проводить новые вычисления, поскольку в ранее полученных результатах могли использоваться какие-либо специфические условия. Кроме того, за время, прошедшее с первых работ Ю. Швингера и Р. Фейнмана по вычислению однопетлевых поправок, появились новые методы, позволяющие быстрее получать требуемый результат. В частности, современные методы аналитических вычислений однопетлевых поправок предполагают интенсивное использование компьютерной техники с привлечением библиотек, содержащих ранее полученные результаты, например, для однопетлевых интегралов и перенормировок. В п. 2.1.1 мы рассмотрим эти методы на примере вычисления поправок к процессу тормозного излучения мюоном (или электроном) при рассеянии на тяжелом ядре.

2.1.1. Тормозное излучение мюоном при рассеянии на ядре. Тормозное излучение заряженным лептоном при рассеянии на ядре изучалось и теоретически, и экспериментально в течение многих лет. Одной из причин, по которой этому процессу уделяется большое внимание, является тот факт, что он служит одним из источников потери энергии лептоном при движении в веществе, а знание этих потерь важно для многих практических приложений. Вообще говоря, этот процесс является одним из *классических* для физики частиц, он обсуждается во многих учебниках (см., например, [116, 117]). Более того, в книге А. И. Ахизера и В. Б. Берестецкого [116] обсуждаются и однопетлевые радиационные поправки к этому процессу и дается для них аналитическое выражение, полученное в 1958 г. в работе [118].

Отметим, что аналогичный процесс — тормозное излучение заряженным пионом — используется для определения величины поляризуемости пиона [119–121]. В современном эксперименте COMPASS [122, 123], который проводится в ЦЕРН, процесс тормозного излучения мюоном используется как нормировочный, а также для оценки систематических погрешностей измерений адронных процессов. Поэтому требуются высокоточные теоретичес-

кие предсказания для дифференциального сечения этого процесса. Для этого надо учесть ряд эффектов за рамками древесного борновского приближения. В частности, требуется рассчитать вклады 1) многократного обмена фотонами с ядром (это особенно важно при больших зарядах ядра Z), 2) электромагнитных упругих и неупругих формфакторов ядра, 3) эффекта экранирования ядра окружающими его электронами, 4) неупругих взаимодействий налетающей частицы с электронами атома (см. работу [124] и ссылки в ней). Кроме того, мы должны учесть эффект поляризации вакуума в пропагаторе виртуального фотона и по крайней мере однопетлевые радиационные поправки к лептонному тензору. Описанию вычислений последних и посвящен этот пункт.

Относительно недавняя работа [125] представляет полные результаты аналитических вычислений однопетлевых КЭД-поправок к виртуальному комптоновскому рассеянию ($ep \rightarrow ep\gamma$). Тормозное излучение лептоном может быть рассмотрено как частный случай общей задачи, и результаты [125] для комптоновского тензора могли бы быть применены и в нашем случае. Однако на практике оказалось, что требуется специальный учет особенностей кинематики процесса тормозного излучения при высокой энергии налетающего лептона. В частности, надо аккуратно и последовательно учитывать зависимость от массы лептона, поскольку типичные значения переданного импульса как раз около нее. Наличие в задаче энергетических параметров (массы лептона и его энергии), существенно различающихся по величине, приводит к необходимости решения проблемы обеспечения стабильности численных расчетов. Учет зависимости от массы лептона делает аналитические выражения для однопетлевых поправок весьма длинными и громоздкими. Более того, необходимость учета конкретных экспериментальных условий требует использования формул для дифференциального сечения, которые обычно являются более длинными по сравнению с выражениями для полных сечений. А интегрирование по фазовому объему конечных частиц проводится численно.

В борновском приближении дифференциальный спектр по энергии жесткого фотона в реакции

$$l(p_1) + A(P) \rightarrow l(p_2) + \gamma(k) + A(P') \quad (2.1)$$

имеет следующий хорошо известный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\omega} = & \frac{Z^2\alpha^3}{2\pi} \int_{-1}^1 dc_1 \int_{-1}^1 dc_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{\omega}{Q^4} \left(\frac{|\mathbf{p}_2|^2}{\chi_2^2} (4E_1^2 - Q^2) s_2^2 + \right. \\ & + \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{\chi_1^2} (4E_2^2 - Q^2) s_1^2 + 2 \frac{\omega^2}{\chi_1 \chi_2} (|\mathbf{p}_1|^2 s_1^2 + |\mathbf{p}_2|^2 s_2^2) - \\ & \left. - 2 \frac{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|}{\chi_1 \chi_2} (2E_1^2 + 2E_2^2 - Q^2) s_1 s_2 \cos \varphi \right), \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $\omega = k^0$ — это энергия излученного фотона; φ — азимутальный угол вылета рассеянного лептона; Z — заряд ядра; m — масса лептона; $E_{1(2)}$ и $p_{1(2)}$ — энергии и 4-импульсы налетающего (рассеянного) лептона;

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \cos(\widehat{\mathbf{kp}}_{1,2}), & s_{1,2} &= \sin(\widehat{\mathbf{kp}}_{1,2}), \\ \chi_{1,2} &= kp_{1,2}, & Q^2 &= -(p_1 - p_2 - k)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее предполагается, что масса лептона мала по сравнению с массой ядра, а энергия наоборот велика:

$$m \ll M_A, \quad E_1 \gg m, \quad E_2 \gg m, \quad \omega \gg m. \quad (2.4)$$

Перепишем борновское сечение (2.2) через формфакторы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\omega} &= \frac{Z^2\alpha^3}{2\pi} \int_{-1}^1 dc_1 \int_{-1}^1 dc_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{\omega}{Q^4} \frac{1}{2e^4} \left(\mathcal{F}_\delta^{(0)}(q_s, t_s, u_s) - \right. \\ &- \mathcal{F}_{11}^{(0)}(q_s, t_s, u_s) E_2^2 - \mathcal{F}_{22}^{(0)}(q_s, t_s, u_s) E_1^2 + \mathcal{F}_{12}^{(0)}(q_s, t_s, u_s) E_2 E_1 + \\ &\left. + \mathcal{F}_{21}^{(0)}(q_s, t_s, u_s) E_1 E_2 \right), \quad (2.5) \\ q_s &= 2\chi_2 - 2\chi_1 + Q^2, \quad t_s = 2\chi_1 - m^2, \quad u_s = -2\chi_2 - m^2, \end{aligned}$$

где e — заряд электрона. Обозначения в выражении выше приближены к тем, которые применяются в полуавтоматической системе аналитических и численных вычислений SANC [51]. Эта система, используя библиотеку разнообразных формфакторов, позволяет очень быстро получать необходимые выражения и на борновском, и на однопетлевом уровнях.

Рассматривая дифференциальное распределение по углу рассеяния, можно заметить, что оно имеет пик в кинематической области, где

$$\widehat{\mathbf{kp}}_{1,2} \sim \widehat{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \sim \frac{m}{E_1}. \quad (2.6)$$

Для случая рассеяния мюонов высокой энергии ($E_1 \sim 100$ ГэВ), который сейчас рассматривается, эти углы становятся малыми. Более того, необходимо аккуратно учитывать зависимость от массы лептона, поскольку в этой области $m^2 \sim \chi_{1,2}$. С другой стороны, мы можем спокойно пренебречь слагаемыми, содержащими малый фактор m^2/E_1^2 . Что касается переданного импульса, то в отличие от случая резерфордского рассеяния он ограничен снизу пороговым значением

$$Q_{\min} \equiv \sqrt{Q_{\min}^2} = \frac{m^2\omega}{2E_1E_2}. \quad (2.7)$$

В ультрарелятивистском борновском приближении после интегрирования по фазовому пространству можно получить простую формулу для спектра излученных фотонов

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{4Z^2\alpha^3}{m_\mu^2\omega E_1^2} \left(E_1^2 + E_2^2 - \frac{2}{3} E_1 E_2 \right), \quad \omega = E_1 - E_2. \quad (2.8)$$

В следующем порядке теории возмущений КЭД мы отдельно вычисляем три вклада: 1) виртуальные (петлевые) поправки; 2) поправки за счет излучения дополнительного мягкого фотона; 3) и поправки за счет излучения жесткого фотона (двойного тормозного излучения).

2.1.2. Виртуальные однопетлевые поправки. На рис. 1 показаны некоторые представители однопетлевых диаграмм Фейнмана, описывающих поправки к лептонному блоку. Аналитические выражения для лептонного тензора с однопетлевыми поправками могут быть найдены в работе [126]. Однако для обеспечения согласованности расчетов разных вкладов и контроля численной стабильности оказалось полезно пересчитать вклад виртуальных поправок с помощью компьютерной системы SANC [51]. Система выдала результаты в виде формфакторов, выраженных через стандартные однопетлевые мастер-интегралы (функции Пассарино–Вельтмана), содержащиеся в библиотеке SANC. При этом можно по необходимости включать или отбрасывать (где это не приводит к расходимостям) зависимость от массы лептона. Инфракрасная расходимость в наших вычислениях регуляризовалась вспомогательным малым параметром — фиктивной массой фотона λ . Таким образом, виртуальные поправки были получены в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{virt}}}{d\omega} = & \frac{Z^2\alpha^3}{2\pi} \int_{-1}^1 dc_1 \int_{-1}^1 dc_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{\omega}{Q^4} \frac{1}{16\pi^2 e^4} \left(\mathcal{F}_\delta^{(1)}(q_s, t_s, u_s) - \right. \\ & - \mathcal{F}_{11}^{(1)}(q_s, t_s, u_s) E_2^2 - \mathcal{F}_{22}^{(1)}(q_s, t_s, u_s) E_1^2 + \mathcal{F}_{12}^{(1)}(q_s, t_s, u_s) E_2 E_1 + \\ & \left. + \mathcal{F}_{21}^{(1)}(q_s, t_s, u_s) E_1 E_2 \right). \quad (2.9) \end{aligned}$$

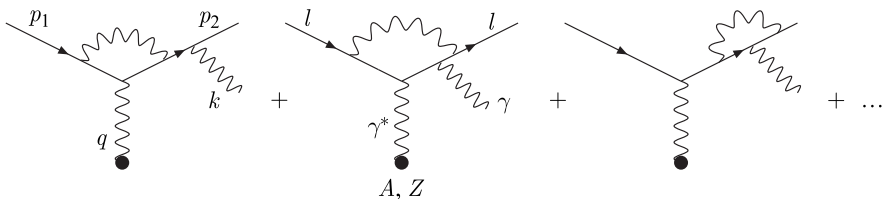


Рис. 1. Представители диаграмм Фейнмана для виртуальных поправок

Здесь использована система обозначений системы SANC для аргументов и нормировочных факторов. Соответствующие детали могут быть найдены в работе [127].

2.1.3. Излучение дополнительного мягкого фотона. Используя метод разделения фазового пространства (phase space slicing method), мы определяем вклад излучения дополнительного мягкого фотона как происходящий от излучения фотона с энергией, ограниченной некоторой величиной $\bar{\omega}$, которую выбираем малой по сравнению с энергией пучка. Очевидно, что такое разделение не лоренц-инвариантно. Мы проводим его в лабораторной системе отсчета, в которой ядро покоится. Стандартная техника вычислений вкладов мягкого тормозного излучения дает нам соответствующую поправку, факторизованную при борновском сечении:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{soft}}}{d\omega} &= \delta^{\text{soft}} \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\omega}, \quad \delta^{\text{soft}} = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \left(I_{11} + I_{12} - 2I_{12} \right), \\ I_{11} &= 4\pi \left[\ln \frac{2\bar{\omega}}{\lambda} + \frac{1}{2\beta_1} \ln \left(\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} \right) \right], \\ I_{22} &= 4\pi \left[\ln \frac{2\bar{\omega}}{\lambda} + \frac{1}{2\beta_2} \ln \left(\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2} \right) \right], \\ I_{12} &= \frac{2\pi}{1-m^2/(a_{12}p_1p_2)} \left[2 \ln \frac{2\bar{\omega}}{\lambda} \ln a_{12} + \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} \right) - \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{a_{12}E_1}{v_{12}}(1+\beta_1) \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{E_2}{v_{12}}(1+\beta_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{a_{12}E_1}{v_{12}}(1-\beta_1) \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{E_2}{v_{12}}(1-\beta_2) \right) \right], \quad (2.10) \\ \beta_{1,2} &= \frac{|\mathbf{p}_{1,2}|}{E_{1,2}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E_{1,2}^2}}, \quad a_{12} = \frac{p_1p_2}{m^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m^4}{(p_1p_2)^2}} \right), \\ v_{12} &= \frac{a_{12}p_1p_2 - m^2}{a_{12}E_1 - E_2}, \quad p_1p_2 = \frac{1}{2}Q^2 + \chi_2 - \chi_1 + m^2. \end{aligned}$$

Инфракрасная расходимость во вкладе мягких фотонов регуляризована тем же вспомогательным параметром λ , который использовался во вкладе виртуальных поправок. Одной из важных проверок вычислений служит отсутствие зависимости от величины этого параметра в сумме двух этих вкладов.

2.1.4. Излучение дополнительного жесткого фотона. Здесь мы стартуем с полностью дифференциального выражения для квадрата матричного элемента. Некоторые представители диаграмм Фейнмана для процесса двойного

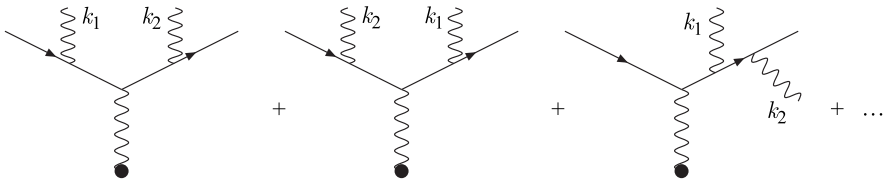


Рис. 2. Часть диаграмм Фейнмана, описывающих двойное тормозное излучение

тормозного излучения показаны на рис. 2. Оба фотона удобно рассматривать полностью единообразно, поскольку только после наложения экспериментальных условий можно будет узнать, который из них *первичный* (по которому собственно и определяется событие тормозного излучения), а который *вторичный* (дающий поправку). В частности, мы накладываем симметричное единообразное условие на энергии обоих фотонов: $\omega_{1,2} > \bar{\omega}$ (опять в лабораторной системе). Квантово-механический фактор тождественности фотонов, $1/2!$, конечно учитывается при записи соответствующего сечения. Сокращение зависимости от вспомогательного параметра $\bar{\omega}$ в сумме вкладов дополнительных мягкого и жесткого тормозных излучений проверяется численно. Многомерное интегрирование по фазовому объему вклада двойного тормозного излучения проводится численно с применением адаптивного монте-карло-интегратора, построенного на основании алгоритма Вегас (Vegas) [128]. Отметим, что интенсивное использование многократного численного интегрирования при решении задач о нахождении радиационных поправок стало возможным благодаря развитию и доступности компьютерной техники. Заметим, что еще лет 20 назад при решении аналогичных задач намного большая часть интегрирований производилась аналитически. При этом далеко не всегда при аналитическом интегрировании удавалось адекватно учесть экспериментальные условия.

2.1.5. Численные результаты и обсуждение. Суммируя рассмотренные выше вклады, получаем сечение процесса с учетом однопетлевых поправок в виде

$$\frac{d\sigma^{\text{corr}}}{d\omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\omega} + \frac{d\sigma^{\text{virt}}}{d\omega} + \frac{d\sigma^{\text{soft}}}{d\omega} + \frac{d\sigma^{\text{hard}}}{d\omega}. \quad (2.11)$$

В табл. 3 показаны численные результаты для отдельных вкладов, полученные при следующих условиях (типичных для эксперимента COMPASS):

$$\begin{aligned} E_1 = 190 \text{ ГэВ}, \quad Z = 82, \quad Q_{\text{max}}^2 = 0,0075 \text{ ГэВ}^2, \\ \bar{\omega} = 0,001 \text{ ГэВ}, \quad M_{\text{max}} = 3,75 m_\mu, \quad P_{\text{min}}^\perp = 0,045 \text{ ГэВ}, \\ m_l = m_\mu = 0,10566 \text{ ГэВ}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таблица 3. Вклады однопетлевых поправок в дифференциальное сечение (в пб/ГэВ) в зависимости от доли энергии фотона

ω/E_1	Born	Virtual	Soft ₁	Hard ₁	$\delta_1, \%$	Soft ₂	Hard ₂	$\delta_2, \%$
0,3	15677(1)	76,8(4)	-260,1(1)	226,9(3)	+0,28	-307,0(1)	273,7(3)	+0,28
0,5	10836(1)	77,9(2)	-319,0(1)	280,0(3)	+0,36	-377,4(1)	338,1(3)	+0,36
0,7	7337,7(1)	76,9(2)	-363,3(1)	297,1(2)	+0,15	-430,9(1)	364,8(2)	+0,15
0,9	1267,4(1)	20,5(1)	-111,1(2)	65,9(1)	-1,95	-132,4(2)	87,2(1)	-1,95

где M_{\max} — максимальное разрешенное значение инвариантной массы пары мюон–фотон в конечном состоянии; P_{\min}^{\perp} — минимальный допустимый поперечный импульс рассеянного мюона; Z — заряд ядра свинца (Pb). Для простоты при расчетах было наложено обрезание на энергию второго жесткого фотона: $\omega_2 < \omega_1$. В табл. 3 индексами 1 и 2 обозначены результаты, полученные при выборе $\bar{\omega} = 10^{-3}$ и $\bar{\omega} = 10^{-4}$ соответственно. Относительные поправки $\delta_{1,2}$ рассчитаны по формуле

$$\delta_{1,2} = \frac{d\sigma^{\text{virt}}/d\omega + d\sigma_{1,2}^{\text{soft}}/d\omega + d\sigma_{1,2}^{\text{hard}}/d\omega}{d\sigma^{\text{Born}}/d\omega} \cdot 100\%. \quad (2.13)$$

Для учета реальной ситуации эксперимента COMPASS, касающейся пространственного разрешения и порогов разрешения по энергии, дополнительно к условиям (2.12) для событий с двумя жесткими фотонами мы наложили следующие требования:

- 1) $\max(\omega_1, \omega_2) \geq \omega_{\text{th}}$, т.е. по крайней мере один из фотонов должен иметь энергию, превышающую пороговое значение ω_{th} ;
- 2) если оба фотона имеют энергии больше пороговой и угол между их импульсами превышает $\theta_{\gamma\gamma}$, то такое событие отбрасывается;
- 3) если же угол меньше, чем $\theta_{\gamma\gamma}$, то в качестве регистрируемой (реконструированной) энергии излучения берется сумма энергий двух фотонов: $\omega = \omega_1 + \omega_2$;
- 4) если энергия одного из фотонов меньше пороговой, то в качестве реконструированной энергии излучения берется также сумма: $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Величины соответствующих параметров взяты из условий эксперимента COMPASS:

$$\omega_{\text{th}} = 7 \text{ ГэВ}, \quad \theta_{\gamma\gamma} = 3 \text{ мрад}. \quad (2.14)$$

Оказалось, что для реалистических условий величина радиационной поправки не превышает 1%. Это является следствием того, что поправка пропорциональна малой величине $\alpha/(2\pi)$ и не имеет никаких усиливающих факторов. В частности, можно заметить, что отсутствие больших логарифмов (с аргументом в виде отношения энергии лептона к его массе)

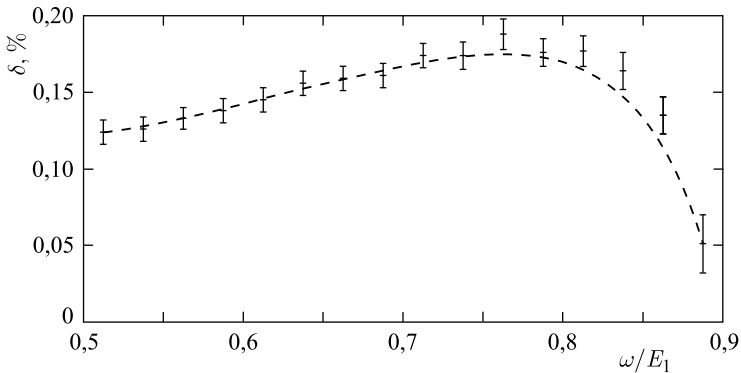


Рис. 3. Относительные вклады однопетлевых поправок для реалистических условий в зависимости от доли энергии фотона

соответствует выполнению условий теоремы Киношity–Ли–Науэнберга. Действительно, вклады порядка $\mathcal{O}(\alpha \ln(E_1^2/m_\mu^2))$ появляются в промежуточных вычислениях, но сокращаются в сумме из-за деструктивной интерференции излучения из начального и конечного состояний. Как видно из табл. 3, в конце спектра по энергии фотона ($\omega \rightarrow E_1$), где фазовый объем для излучения второго реального фотона стремится к 0, мы имеем отрицательные поправки, которые ведут себя как $\alpha \ln((E_1 - \omega)/E_1)$. Однако это довольно резкое поведение радиационных поправок эффективно сглаживается (рис. 3) при наложении дополнительных условий регистрации событий (2.14). Аналогичное исследование было проведено в работе [129], где подобное поведение однопетлевых радиационных поправок к процессу тормозного излучения заряженным пионом было получено в рамках скалярной электродинамики.

2.2. Следующие за ведущими поправки высших порядков. Выше рассмотрен пример применения метода вычисления следующих за ведущими поправок первого порядка. Этот метод является одной из современных модификаций хорошо известных в литературе подходов к вычислению однопетлевых радиационных поправок. Так как наша задача — дальнейшее повышение точности теоретических предсказаний, следующим шагом естественным образом становится постановка вопроса о нахождении СВЛП поправок более высоких порядков по α .

2.2.1. Факторизация в следующем за ведущим порядке КЭД. Как было показано в разд. 1, ведущие логарифмические КЭД-поправки к процессам при высоких энергиях можно описать с помощью подхода ренормализационной группы, используя факторизацию подпроцессов. Встает вопрос, можно ли распространить этот метод на случай вычисления следующих за ведущими поправок? Действительно, полной факторизации вкладов порядка $\mathcal{O}(\alpha^n L n - 1)$

относительно борновского сечения ожидать нельзя. Это хорошо видно на примере нефакторизованных нелогарифмических поправок первого порядка, рассмотренных выше. Во втором порядке по α мы видим уже дополнительные источники следующих за ведущими логарифмических поправок, перепутывание которых с имевшимися в первом порядке потенциально могло бы разрушить всю аналогию с ВЛП. Однако собственно применимость подхода ренормализационной группы не зависит от порядка теории возмущений ни по степеням α , ни по степеням L . Действительно, продолжая проводить аналогию с пертурбативной КХД, мы можем представить структурную функцию электрона (для частицы в начальном состоянии реакции) и его функцию фрагментации (для конечного состояния) в СВЛП в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ee}^{\text{str, frg}}(z) = & \delta(1-z) + \frac{\alpha}{2\pi} d_1(z, \mu_0, m_e) + \frac{\alpha}{2\pi} LP^{(1)}(z) + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} L^2 P^{(1)} \otimes P^{(1)}(z) + LP^{(1)} \otimes d_1(z, \mu_0, m_e) + \right. \\ & \left. + LP_{ee}^{\text{(NLO, } \gamma\text{) str, frg}}(z) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0, \alpha^3), \quad L \equiv \ln \frac{M^2}{\mu_0^2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где верхние индексы str и frg указывают на структурную или фрагментационную функцию соответственно. В КЭД разница между $\mathcal{D}_{ee}^{\text{str}}(z)$ и $\mathcal{D}_{ee}^{\text{frg}}(z)$ возникает только в членах следующего за ведущим порядка $P^{\text{(NLO, } \gamma\text{)}}$. Приведенная формула содержит лишь чисто фотонные вклады. Эффекты за счет e^+e^- -пар в тех же порядках теории возмущений будут обсуждаться в п. 4.4 на примере решения конкретной задачи о нахождении поправок к спектру распада мюона в СВЛП.

Мы будем пользоваться модифицированной минимальной схемой вычитаний $\overline{\text{MS}}$ [130], которая наиболее часто применяется в КХД. Шкала факторизации M будет выбираться для каждого процесса в отдельности. В качестве шкалы перенормировок μ_0 в КЭД удобно выбрать массу электрона m_e . Функция $d_1(z, \mu_0, m_e)$ определяется выбором схемы вычитаний и является следующим за ведущим вкладом в начальные условия уравнений эволюции:

$$d_1(z, \mu_0, m_e) = \left[\frac{1+z^2}{1-z} \left(\ln \frac{\mu_0^2}{m_e^2} - 2 \ln(1-z) - 1 \right) \right]_+. \quad (2.16)$$

Следующий за ведущим член функции расщепления $P_{ee}^{\text{(NLO, } \gamma\text{)}}$ находится путем рассмотрения фейнмановских диаграмм относительного порядка $\mathcal{O}(\alpha^2)$ с двумя дополнительными фотонами (реальными или виртуальными). Эта функция может быть найдена из соответствующих СВЛП КХД-функций [131]. Редукция к случаю КЭД осуществляется не только заменой α_s на α , но и анализом цветовых факторов. С другой стороны, имея вычисления порядка

$\mathcal{O}(\alpha^2 L)$, проведенные прямо в КЭД для какого-либо процесса (см., например, [79]), мы можем выделить искомую функцию, сопоставив факторизованную мастер-формулу и полученный прямым счетом ответ. В результате находим

$$P_{ee}^{(\text{NLO}, \gamma)^{\text{frg}}}(z) = \delta(1-z) \left(\frac{3}{8} - 3\zeta(2) + 6\zeta(3) \right) + \frac{1+z^2}{1-z} \left(2 \ln z \ln(1-z) - 2 \ln^2 z - 2 \text{Li}_2(1-z) \right) + \frac{1}{2}(1+z) \ln^2 z + 2z \ln z - 3z + 2, \quad (2.17)$$

$$P_{ee}^{(\text{NLO}, \gamma)^{\text{str}}}(z) = \delta(1-z) \left(\frac{3}{8} - 3\zeta(2) + 6\zeta(3) \right) + \frac{1+z^2}{1-z} \left(-2 \ln z \ln(1-z) + \ln^2 z + 2 \text{Li}_2(1-z) \right) - \frac{1}{2}(1+z) \ln^2 z + 2 \ln z + 3 - 2z.$$

Отметим, что части структурной и фрагментационной функций, пропорциональные δ -функции, совпадают, а несовпадающие слагаемые несингулярны при $z \rightarrow 1$. Между собой эти две функции связаны соотношением Грибова–Липатова [31]

$$P_{ee}^{(\text{NLO}, \gamma)^{\text{frg}}}(z) = -z P_{ee}^{(\text{NLO}, \gamma)^{\text{str}}}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (2.18)$$

Рассмотрим для примера мастер-формулу [70], описывающую несинглетный вклад в сечение баба-рассеяния в подходе структурных функций электрона:

$$d\sigma = \int_{\bar{z}_1}^1 dz_1 \int_{\bar{z}_2}^1 dz_2 \mathcal{D}_{ee}^{\text{str}}(z_1) \mathcal{D}_{ee}^{\text{str}}(z_2) \left(d\sigma^{\text{Born}}(z_1, z_2) + d\bar{\sigma}^{(1)}(z_1, z_2) \right) \times \\ \times \int_{\bar{y}_1}^1 \frac{dy_1}{Y_1} \int_{\bar{y}_2}^1 \frac{dy_2}{Y_2} \mathcal{D}_{ee}^{\text{frg}}\left(\frac{y_1}{Y_1}\right) \mathcal{D}_{ee}^{\text{frg}}\left(\frac{y_2}{Y_2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0), \quad (2.19)$$

где $d\bar{\sigma}^{(1)}$ — это вклад порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ в сечение безмассового ($m_e = 0$) процесса баба-рассеяния, рассчитанный в $\overline{\text{MS}}$ -схеме вычитания массовых сингулярностей. Доли энергии (по отношению к энергии исходных пучков в системе центра их масс), входящих в жесткий подпроцесс электрона и позитрона, заданы как $z_{1,2}$, а выходящих — как $Y_{1,2}$.

2.2.2. Виртуальные и мягкие фотонные поправки $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$. Мастер-формула (2.19) в следующем за ведущим приближении показывает, что все КЭД-поправки порядка $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ могут быть найдены, если известны формулы для сечения заданного процесса в борновском приближении и для радиационных поправок первого порядка к нему. Однако прямое применение (2.19) даст

нам только инклюзивное по фотонному излучению значение для искомой поправки, тогда как в реальных случаях часто требуется наложить определенные ограничения на энергию и углы вылета испускаемых фотонов.

Рассмотрим вывод $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ радиационных поправок за счет виртуальных и мягких фотонов на примере процесса баба-рассеяния, который подробно описан в работе [72]. Будет показано, что метод приводит к результату, согласующемуся с формулами, получаемыми другими более трудоемкими методами для случая баба-рассеяния на малые [79, 86] и на большие углы [9, 10, 46]. Достоинством обсуждаемого в обзоре подхода является его универсальность, что позволяет согласованно и единообразно учитывать вклады порядка $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ не только от мягких и виртуальных поправок, но и от жесткого тормозного излучения. В КХД сингулярные члены виртуальной поправки второго порядка могут быть выделены с помощью предложенного С. Катани (S. Catani) метода [132], который также опирается на свойства факторизации и ренормализационную группу.

Начнем с полного выражения для хорошо известной поправки первого порядка [46, 70, 133], представленного в виде суммы вкладов виртуальных (V), мягких (S) и жестких (H) фотонов:

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma^V + d\sigma^S + d\sigma^H. \quad (2.20)$$

Как обычно, вклады от излучения реальных фотонов разделены на мягкую и жесткую части введением малого параметра Δ ($\Delta \ll 1$), определяющего максимальную энергию мягкого фотона $E_\gamma^S \leq \Delta E_{\text{beam}}$ в системе центра масс сталкивающихся пучков.

Разложение, аналогичное (2.20), можно сделать и во втором порядке теории возмущений по α :

$$d\sigma^{(2)} = d\sigma^{VV} + d\sigma^{SV} + d\sigma^{SS} + d\sigma^{VH} + d\sigma^{SH} + d\sigma^{HH}, \quad (2.21)$$

где верхние индексы имеют тот же смысл, что и в (2.20), так что, например, « VH » обозначает вклад излучения одного виртуального и одного жесткого фотонов.

Ограничимся для начала случаем только фотонных поправок, отбросив вклады, связанные с образованием реальных и виртуальных пар. Последние могут быть учтены аналогично и будут рассмотрены в других разделах. Кроме того, вклады пар обычно в несколько раз уступают по величине фотонным поправкам [68, 80, 134].

Поправки второго порядка мы раскладываем в ряд по степеням большого логарифма. В отдельных вкладах встречаются слагаемые порядков $\mathcal{O}(\alpha^2 L^{4,3,2,1,0})$, однако члены с четвертой и третьей степенями L сокращаются в сумме вкладов виртуальных и мягких фотонов.

Используя факторизационные свойства мягкого тормозного излучения [17], мы можем сразу выписать вклады SS и SV [75]:

$$d\sigma^{SS} = \frac{1}{2!}(\delta^S)^2 d\sigma^{\text{Born}}, \quad d\sigma^{SV} = \delta^S \delta^V d\sigma^{\text{Born}}, \quad (2.22)$$

где $\delta^{S,V} = d\sigma^{S,V}/d\sigma^{\text{Born}}$ — относительные вклады поправок мягких и виртуальных фотонов в первом порядке по α :

$$d\sigma^V = d\sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 4 \ln \frac{m_e}{\lambda} \left(1 - L_s + \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \right) - L_s^2 + \right. \\ \left. + 2L_s \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) - \ln^2(x) + \ln^2(1-x) + 3L_s - 4 + f(x) \right\}, \quad (2.23)$$

$$d\sigma^S = d\sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 4 \ln \left(\frac{m_e \Delta}{\lambda} \right) \left(L_s - 1 + \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \right) + L_s^2 + \right. \\ \left. + 2L_s \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) + \ln^2(x) - \ln^2(1-x) - \frac{2\pi^2}{3} + \right. \\ \left. + 2 \text{Li}_2(1-x) - 2 \text{Li}_2(x) \right\}, \quad (2.24)$$

$$\frac{d\sigma^{\text{Born}}}{dc} = \frac{\alpha^2}{4s} \left(\frac{3+c^2}{1-c} \right)^2, \quad L_s \equiv \ln \frac{s}{m_e^2}.$$

Отметим, что во вкладе двойного мягкого тормозного излучения, $d\sigma^{SS}$, мы положили ограничение на энергии каждого из мягких фотонов по отдельности. Как известно, в отличие от вкладов мягких поправок (2.22) вклады виртуальных фотонов не факторизуются так просто при борновском сечении. Сейчас нашей задачей является восстановление ведущих и следующих за ведущими логарифмических виртуальных поправок второго порядка по α .

Структурные и фрагментационные функции широко используются в КХД, где они применяются в первую очередь для учета непертурбативных вкладов. С другой стороны, при больших значениях масштаба факторизации пертурбативная КХД позволяет предсказать эволюцию этих структурных функций. Как обсуждалось выше, возможна адаптация факторизационного подхода КХД к КЭД [42–45, 110]. При этом уже становится возможным в рамках пертурбативной КЭД полностью рассчитать поведение используемых функций.

Рассмотрим сейчас только фотонные поправки, опустив вклады реальных и виртуальных пар. В этом случае мы имеем дело с фотонной частью несинглетной структурной (фрагментационной) функции. Эти функции описывают плотность вероятности найти безмассовый (массивный) электрон с долей энергии z в данном массивном (безмассовом) электроны. В следующем за ведущим приближении мы берем функции (2.15). Отметим, что нами

используется модифицированная минимальная схема вычитаний \overline{MS} . Шкала факторизации выбрана равной M , а шкала перенормировки, μ_0 , будет приравнена к m_e .

В СВЛП функции расщепления $P_{ee}^{(NLO,\gamma)}$ даны выше в (2.17). Отметим, что у этих функций расщепления части, пропорциональные δ -функции, совпадают, а оставшиеся части не сингулярны при $z \rightarrow 1$. Поэтому, интересуясь только вкладом виртуальных и мягких фотонов, мы можем не обращать внимание на разницу функций и вообще опустить индексы str и fgr .

Мастер-формула, описывающая радиационные поправки к баба-рассеянию в ВЛП и СВЛП, имеет вид (2.19). Поскольку мы сейчас интересуемся поправками за счет виртуальных и мягких фотонов, то нижние пределы всех четырех интегралов одинаковы и равны $1 - \Delta$. При их вычислении мы сначала выполним конволюцию (свертку) всех четырех структурных функций, входящих в (2.19), между собой:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\otimes 4}(z) &= \left(\delta(1-z) + \frac{\alpha}{2\pi} d_1(z) + \frac{\alpha}{2\pi} LP^{(1)}(z) \right)^{\otimes 4} = \\ &= \delta(1-z) + 4 \frac{\alpha}{2\pi} (d_1(z) + LP^{(1)}(z)) + 4 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 (2L^2(P^{(1)}(z))^{\otimes 2} + \\ &\quad + 4L d_1(z) \otimes P^{(1)}(z) + LP^{(NLO)}(z)) + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0, \alpha^3), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где использовано краткое обозначение операции кратной конволюции: $(A)^{\otimes n} \equiv \underbrace{A \otimes A \otimes A \cdots A}_n$. Если $z = 1 - \Delta$ и $\Delta \ll 1$, то структурные функции

дают плотность вероятности того, что мы потеряем в сумме за счет излучения мягких реальных фотонов энергию, равную ΔE_{beam} , где E_{beam} — энергия каждой из сталкивающихся частиц в системе центра масс.

Зафиксируем теперь шкалу факторизации, выбрав $M = \sqrt{s}$, и определим *большой логарифм*:

$$L_s \equiv \ln \frac{s}{m_e^2}, \quad s = 4E_{\text{beam}}^2. \quad (2.26)$$

Ниже будут обсуждаться и другие возможности выбора этой шкалы.

Конволюция определенных выше функций с борновским партонным сечением дает соответствующую часть поправленного сечения (с ограниченной сверху потерей энергии на излучение):

$$\begin{aligned} \int_{1-\Delta}^1 \mathcal{D}^{\otimes 4}(z) d\sigma^{\text{Born}}(z) dz &= d\sigma^{\text{Born}} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left[4L_s \left(2 \ln \Delta + \frac{3}{2} \right) + \mathcal{O}(L_s^0) \right] + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \left[8L_s^2 (P^{(1)})_{\Delta}^{\otimes 2} + 16L_s (P^0 \otimes d_1)_{\Delta} + 4L_s P_{\Delta}^{(NLO)} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2 L_s^0, \alpha^3) \right\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где использован индекс Δ для обозначения так называемых Δ -частей соответствующих функций.

Конволюция с $d\bar{\sigma}^{(1)}$ более сложная, так как является нетривиальной функцией переменной z . Задача упрощается, если мы интересуемся только членами, усиленными факторами, содержащими большой логарифм. Тогда нам нужно только найти следующий вклад:

$$4\frac{\alpha}{2\pi}L_s \int_{1-\Delta}^1 dz \left[P^{(1)} \otimes d\bar{\sigma}^{(1)} \right] (z). \quad (2.28)$$

Используя технику работы с сингулярными функциями, описанную выше, мы можем преобразовать рассматриваемый вклад к виду

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_{1-\Delta}^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{z} L_s P^{(1)} \left(\frac{y}{z} \right) d\bar{\sigma}^{(1)}(z) = \frac{2\alpha}{\pi} d\bar{\sigma}_{\Delta}^{(1)} L_s P_{\Delta}^{(1)} + \frac{2\alpha}{\pi} L_s \delta(\bar{\sigma}^{(1)}), \quad (2.29)$$

где

$$d\bar{\sigma}_{\Delta}^{(1)} = \int_{1-\Delta}^1 d\bar{\sigma}^{(1)}(z) dz = d\sigma^V + d\sigma^S - d\sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{2\pi} 4L_s P_{\Delta}^{(1)}, \quad (2.30)$$

$$\delta(\bar{\sigma}^{(1)}) = \int_{1-\Delta}^1 d\bar{\sigma}^{(1)}(z) 2 \ln \left(1 - \frac{1-z}{\Delta} \right) dz.$$

Отметим, что последнее слагаемое в подынтегральной функции несингулярно при $z \rightarrow 1$. Поэтому часть функции $d\bar{\sigma}^{(1)}$, происходящая за счет виртуальных поправок, не дает вклада в результат интегрирования. При этом мы можем положить верхний предел интегрирования по z , равным $1 - \Delta_1$, $\Delta_1 \ll \Delta \ll 1$. Таким образом, в $d\bar{\sigma}^{(1)}$ требуется рассмотреть только вклад мягкого тормозного излучения:

$$\frac{d\bar{\sigma}^{(1,S)}(z)}{dz} = d\sigma^{\text{Born}} \left\{ -\frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{d|\mathbf{k}|}{dz} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^2}} \left[\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 dc \left(\frac{p_{e+}}{p_{e+}k} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{p_e}{p_e k} + \frac{p'_e}{p'_e k} - \frac{p'_{e+}}{p'_{e+} k} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{2\pi} 4 \left[d_1(z) + L_s P^{(1)}(z) \right] \right\}, \quad (2.31)$$

где $1-z = |\mathbf{k}|/E_{\text{beam}}$; λ — фиктивная масса фотона, $\lambda \ll m_e$; p_e (p_{e+}) — импульс начального электрона (позитрона), p'_e , p'_{e+} и k суть импульсы конечных электрона, позитрона и фотона. Используя стандартную технику вычисления

вклада излучения мягких фотонов, получаем

$$\begin{aligned} \delta \frac{d\bar{\sigma}^{(1)}}{d\sigma^{\text{Born}}} &= \frac{1}{d\sigma^{\text{Born}}} \int_{1-\Delta}^{1-\Delta_1} dz \frac{d\bar{\sigma}^{(1,S)}(z)}{dz} 2 \ln \left(1 - \frac{1-z}{\Delta} \right) = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_{1-\Delta_1}^{1-\Delta} \frac{dz}{1-z} \left[8 \ln(1-z) + 4 \ln \frac{1-c}{2} - 4 \ln \frac{1+c}{2} \right] \ln \left(1 - \frac{1-z}{\Delta} \right) = \\ &= 4 \frac{\alpha}{2\pi} \left[-4\zeta(2) \ln \frac{1-c}{1+c} + 8 \left(\zeta(3) - \zeta(2) \ln \Delta \right) \right], \quad (2.32) \end{aligned}$$

где c — это косинус угла вылета электрона, $c = \cos(\widehat{\mathbf{p}_e \mathbf{p}'_e})$.

Суммируя вклады в (2.29) и затем добавляя (2.22), (2.27) и (2.29), получаем ведущие и следующие за ведущими вклады второго порядка в сечение квазиупругого баба-рассеяния, в котором полная потеря энергии за счет излучения фотонов ограничена сверху величиной ΔE_{beam} . Полезно рассмотреть также случай, когда энергии каждого их излучаемых фотонов ограничиваются независимо. Переход от случая суммарного ограничения к независимому рассматривался нами в работе [75]. Применение полученного там результата дает

$$\begin{aligned} d\sigma^{VV} + d\sigma^{SV} + d\sigma^{SS} &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 d\sigma^{\text{Born}} \left\{ L_s^2 \left[32 \ln^2 \Delta + 48 \ln \Delta + 18 \right] + \right. \\ &+ L_s \left[64 \left(\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) - 1 \right) \ln^2 \Delta + 16 \left(2 \text{Li}_2(1-x) - 2 \text{Li}_2(x) + 3 \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) + \right. \right. \\ &+ f(x) - 7 - \frac{2}{3} \pi^2 \left. \right) \ln \Delta + 24 \text{Li}_2(1-x) - 24 \text{Li}_2(x) + 12f(x) + 24\zeta(3) - \\ &\left. \left. - \frac{93}{2} - 10\pi^2 \right] + 4\delta_0^{(2)} + \mathcal{O} \left(\frac{m_e^2}{s} \right) \right\}, \quad x \equiv \frac{1-c}{2}. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Функция $f(x)$, входящая в выражение для однопетлевых поправок, дана в (2.23). В формулу, выведенную выше, помимо слагаемых, содержащих большие логарифмы, можно включить и следующие за следующими за ведущими поправки $\delta_0^{(2)}$, впервые полученные в работе [10].

Таким образом, нам удалось показать, что вклад виртуальных и мягких фотонов второго порядка в следующем за ведущим приближении может быть получен с использованием известных результатов для поправок первого порядка с помощью метода ренормализационной группы. Ранее этот вклад вычислялся в литературе другими более громоздкими и менее универсальными методами. Проведенные для случая баба-рассеяния выкладки могут быть повторены и для любого другого процесса (если, конечно, для него также применима теорема факторизации). Более того, излучение реальных жестких фо-

тонов также может быть рассмотрено в описанной схеме, как будет показано ниже.

Полезно сравнить численные значения вкладов ведущих, следующих за ведущими и следующих за следующими за ведущими поправок при различном выборе масштаба факторизации: $M = \sqrt{s}$, который использовался в работах [10, 46], и $M = \sqrt{-t}$, предлагаемый нами [79]. Имея полный результат (2.33), легко поменять шкалу факторизации, не меняя полной суммы. При этом происходит просто перераспределение численных значений между тремя обсуждаемыми вкладами. С этой целью мы используем соотношение

$$t = -s \frac{(1-c)}{2} = -xs, \quad L_s = L_t - \ln x, \quad L_t \equiv \ln \frac{-t}{m_e^2}. \quad (2.34)$$

На рис. 4–8 показана величина суммарного вклада мягких и виртуальных фотонных поправок в различных приближениях по степеням большого логарифма. Величины поправок даны в единицах тысячных долей от борнов-

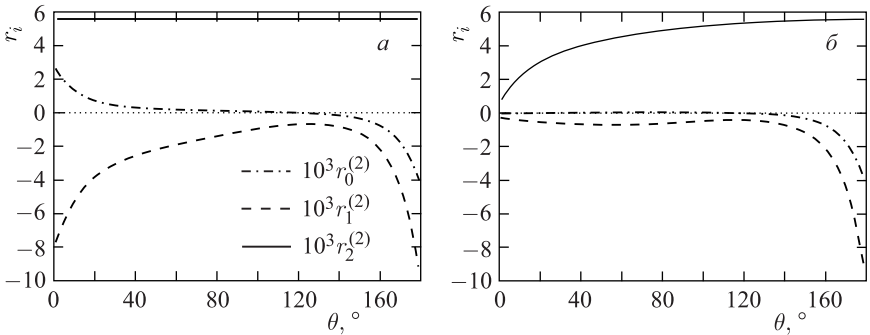


Рис. 4. Вклад мягких и виртуальных фотонных поправок второго порядка в зависимости от угла для $\Delta = 1$, $\sqrt{s} = 1$ ГэВ; $M = \sqrt{s}$ (а) и $M = \sqrt{-t}$ (б)

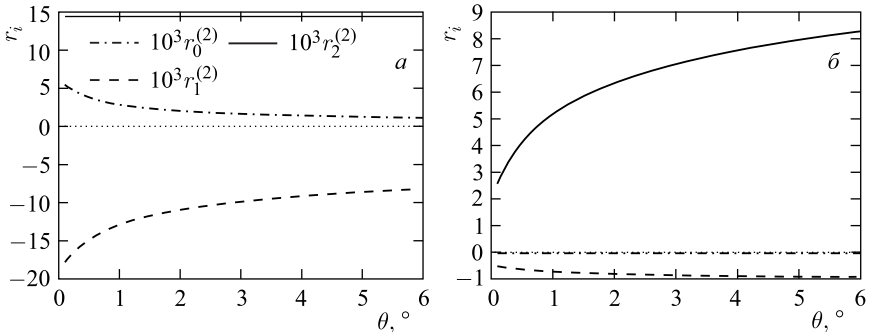


Рис. 5. Вклад мягких и виртуальных фотонных поправок второго порядка в зависимости от угла для $\Delta = 1$, $\sqrt{s} = 100$ ГэВ; $M = \sqrt{s}$ (а) и $M = \sqrt{-t}$ (б)

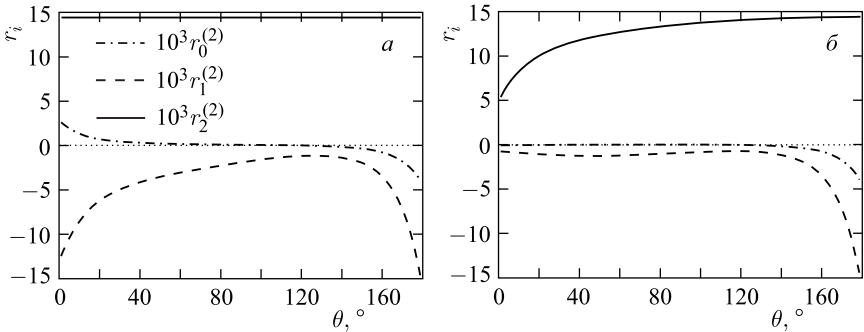


Рис. 6. Вклад мягких и виртуальных фотонных поправок второго порядка в зависимости от угла для $\Delta = 1$, $\sqrt{s} = 100$ ГэВ; $M = \sqrt{s}$ (а) и $M = \sqrt{-t}$ (б)

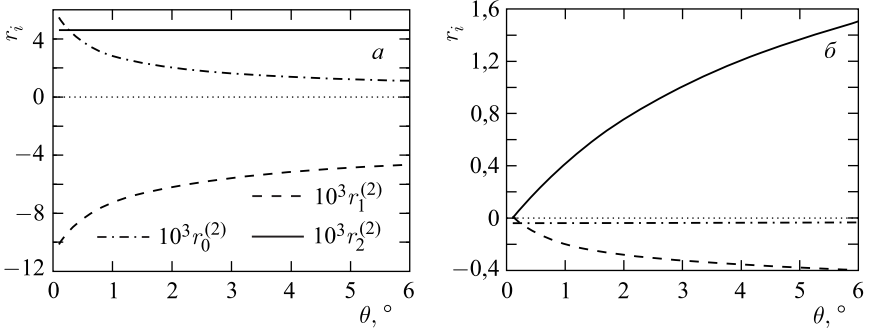


Рис. 7. Вклад мягких и виртуальных фотонных поправок второго порядка в зависимости от угла для $\Delta = 1$, $\sqrt{s} = 500$ ГэВ; $M = \sqrt{s}$ (а) и $M = \sqrt{-t}$ (б)

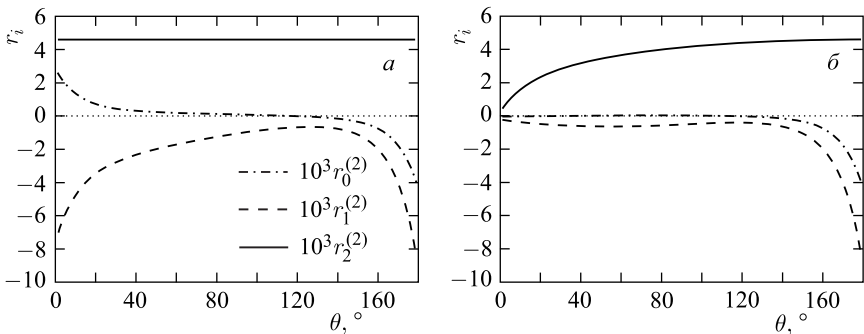


Рис. 8. Вклад мягких и виртуальных фотонных поправок второго порядка в зависимости от угла для $\Delta = 1$, $\sqrt{s} = 500$ ГэВ; $M = \sqrt{s}$ (а) и $M = \sqrt{-t}$ (б)

ского сечения, $10^{-3} d\sigma^{\text{Born}}$. В частности, графики величин $r_2^{(2)}$, $r_1^{(2)}$ и $r_0^{(2)}$ показывают поведение ведущих $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$, следующих за ведущими $\mathcal{O}(\alpha^2 L^1)$ и следующих за следующими за ведущими относительных вкладов в сечение соответственно. Для исключения зависимости суммы виртуальных и мягких поправок от параметра, задающего максимальную энергию мягкого фотона ΔE_{beam} , мы формально кладем $\Delta = 1$. При этом все логарифмы $\ln^n(\Delta)$ зануляются. В любом случае зависимость от этого параметра исчезла бы после добавления вклада излучения жестких фотонов. Конечно, формальное условие $\Delta = 1$ не позволяет нам придать физический смысл величине суммы виртуальных и мягких поправок, но сравнение вкладов разных логарифмических приближений в этой сумме становится возможным. В частности, этот прием позволяет делать выводы о возможной величине нерасчитанных вкладов жесткого излучения (опыт показывает, что последние имеют тот же порядок величины).

Рис. 4 показывает значения обсуждаемых поправок для условий электрон-позитронных коллайдеров с энергиями порядка нескольких гигаэлектрон-вольт (ВЭПП-2М, BEPS и т. д.).

Рис. 5 и 6 иллюстрируют угловое распределение поправок для случаев баба-рассеяния в условиях LEP/SLC на малые и большие углы соответственно. Для энергий порядка $\sqrt{s} = 200$ ГэВ (характерных для LEP2) величина и распределение поправок практически такие же.

Рис. 7 и 8 дают нам представление о том, как изменится величина рассматриваемых поправок при переходе от энергий LEP к энергиям будущего линейного коллайдера.

Глядя на кривые, представляющие вклады, усиленные разными степенями большого логарифма L , можно сделать качественный вывод об оптимальном выборе шкалы факторизации. Ясно видно, что в случае $M = \sqrt{-t}$ величина нелогарифмических поправок не превышает $1 \cdot 10^{-2} \%$ всюду, кроме области очень больших углов рассеяния ($\theta \gtrsim 160^\circ$). А последняя область требует специального исследования. Отметим, что численные результаты, полученные с использованием точных формул, оказались в согласии с оценками масштаба величины этих поправок, сделанными нами в [79].

В то же время видно, что для достижения уровня точности в $1 \cdot 10^{-2} \%$ необходимо учесть полные вклады следующих за следующими за ведущими логарифмических поправок второго порядка ($\mathcal{O}(\alpha^2 L^0)$), включая эффекты за счет излучения реальных и виртуальных фотонов и пар.

Суммирование выведенных здесь вкладов в порядке $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ с соответствующими вкладами за счет излучения жестких фотонов [74, 135] и за счет виртуальных и реальных e^+e^- -пар дает полную поправку к баба-рассеянию в СВЛП-приближении во втором порядке по α . Введенное разделение вкладов поправок согласно особенностям их кинематики удобно для использования полученных аналитических результатов при создании монте-карло-

генераторов событий. В частности, эти поправки внедряются в генераторы LABSMC [87] и SAMBNA [73] для случаев рассеяния на большие и малые углы соответственно.

2.2.3. Радиационные факторы в СВЛП. Одним из вкладов в КЭД радиационные поправки является жесткое тормозное излучение начальными или конечными заряженными частицами (и соответствующая интерференция). Хорошо известно, что тормозное излучение быстрых частиц не изотропно, а имеет ярко выраженный максимум вдоль направления импульса излучающей частицы. На деле распределение при малых углах вылета фотона относительно излучающей частицы, $\theta_\gamma \ll 1$, определяется поведением знаменателей вида $(1 - \beta \cos \theta_\gamma)$, полюсы которых регуляризованы релятивистской скоростью заряженной частицы $\beta = \sqrt{1 - m^2/E^2} \lesssim 1$. Интегрирование дифференциального распределения по углу θ_γ приводит к появлению больших логарифмов $L = \ln(E^2/m^2)$. Причем логарифмически усиленные вклады факторизуются при сечении (или ширине распада) безрадиационного процесса. Явление такой факторизации однократного жесткого тормозного излучения широко использовалось и применялось (см., например, [104]).

В этом пункте мы обсудим факторизационные свойства жесткого тормозного излучения в высших порядках теории возмущений. Для этого будут использованы описанные выше методы, позволяющие учесть ведущие и следующие за ведущими логарифмические вклады в порядках $O(\alpha^2 L^{2,1})$.

Рассмотрим для начала однократное тормозное излучение, сопровождающее какой-либо процесс взаимодействия частиц при высоких энергиях. Выделим наиболее важные кинематические области, соответствующие малоугловому тормозному излучению фотона. Эти области определим с помощью введения узких конусов вокруг направлений движения заряженных частиц в начальном и конечном состояниях реакции. Вершины этих конусов находятся в точке взаимодействия. Вспомогательный малый параметр θ_0 определяет максимальный угол излучения по отношению к направлению движения заряженной частицы. Он должен удовлетворять условиям

$$\frac{m_e}{\sqrt{s}} \ll \theta_0 \ll 1. \quad (2.35)$$

Таким образом, мы выделяем области коллинеарного излучения как часть полного фазового пространства.

С использованием метода квазиреальных электронов [136] квадрат матричного элемента \mathcal{M} (просуммированный по поляризационным состояниям) процесса однократного жесткого тормозного излучения может быть выражен через квадрат матричного элемента соответствующего безрадиационного про-

цесса со *сдвинутыми* аргументами (см. (4) в [136]):

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}(p_1, k, p'_1, \mathcal{X})|^2 &= 4\pi\alpha \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x(1-x)} \frac{1}{kp_1} - \frac{m^2}{(kp_1)^2} \right] \times \\ &\quad \times \sum |\mathcal{M}_0(p_1 - k, p'_1, \mathcal{X})|^2, \\ \sum |\mathcal{M}(p_1, p'_1, k, \mathcal{X})|^2 &= 4\pi\alpha \left[\frac{y^2 + Y^2}{\omega Y} \frac{\epsilon}{kp'_1} - \frac{m^2}{(kp'_1)^2} \right] \times \\ &\quad \times \sum |\mathcal{M}_0(p_1, p'_1 + k, \mathcal{X})|^2, \quad (2.36) \\ x &= \frac{\omega}{\epsilon}, \quad p_1^0 = \epsilon, \quad y = \frac{p_1^{\prime 0}}{\epsilon}, \quad Y = x + y, \end{aligned}$$

где \mathcal{X} обозначает набор импульсов всех прочих неизлучающих частиц в данном процессе. Интегрирование по фазовому объему фотона внутри узкого конуса, окружающего направление движения породившей его частицы, дает следующие факторы:

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha}{16\pi^2} \int \frac{d^3k}{\omega} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x(1-x)} \frac{1}{kp_1} - \frac{m^2}{(kp_1)^2} \right] &= \\ = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz_1}{z_1} \left[P_{\Theta}^{(1)}(z_1) \left(L - 1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4} \right) + 1 - z_1 \right], \quad z_1 = 1 - x, \\ \frac{4\alpha}{16\pi^2} \int \frac{d^3k}{\omega} \left[\frac{y^2 + Y^2}{xY} \frac{1}{kp'_1} - \frac{m^2}{(kp'_1)^2} \right] &= \\ = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz_3}{z_3} \left[P_{\Theta}^{(1)}(z_3) \left(L - 1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4} + 2 \ln z_3 \right) + 1 - z_3 \right], \quad (2.37) \\ z_3 &= 1 - \frac{\omega}{p_1^{\prime 0} + \omega} = 1 - \frac{x}{Y}. \end{aligned}$$

Отметим, что члены, пропорциональные $(L - 1)$, содержат функцию расщепления $P^{(1)}(z)$.

Легко понять, что, как и в других рассмотренных здесь случаях, факторизация коллинеарного тормозного излучения связана с разделением масштабов расстояний, характерных для подпроцессов. Действительно, мы намеренно рассматриваем ситуацию, в которой характерный масштаб расстояний подпроцесса тормозного излучения, определяемый обратной величиной поперечного импульса фотона, велик по сравнению с масштабом основного жесткого (коротковолнового) подпроцесса. Другими словами, мы предполагаем, что экспериментальные условия регистрации частиц позволяют пренебречь эффектами, связанными с малым поперечным импульсом излученного фотона. Технически для выделения соответствующей кинематической области

мы требуем, чтобы угол вылета фотона относительно излучившей его частицы был мал: $\theta_\gamma \ll 1$. Отметим, что при таких ограничениях интерференция амплитуд, описывающих излучение разными частицами, подавлена (по крайней мере квадратом малого угла). Таким образом, сечение (или ширина распада) процесса с жестким тормозным излучением может быть представлено в виде конволюции радиационного фактора R и сечения безрадиационного процесса $d\hat{\sigma}$ (например для процесса типа $2 \rightarrow 2$):

$$\begin{aligned} d\sigma[a(p_1) + b(p_2) \rightarrow c(q_1) + d(q_2) + \gamma(k \sim (1-z)p_1)] &= \\ &= d\hat{\sigma}[a(zp_1) + b(p_2) \rightarrow c(q_1) + d(q_2)] \otimes R_H^{\text{ISR}}(z), \\ d\sigma[a(p_1) + b(p_2) \rightarrow c(q_1) + d(q_2) + \gamma(k \sim (1-z)q_1)] &= \\ &= d\hat{\sigma}[a(p_1) + b(p_2) \rightarrow c(q_1) + d(q_2)] R_H^{\text{FSR}}(z), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $z = E'/E$ — доля энергии частицы, E и E' суть энергии заряженной частицы до и после излучения фотона соответственно. В случае излучения из конечного состояния (final state radiation, FSR) мы имеем энергию, равную zq_1^0 , и сечение в виде прямого произведения двух факторов. Для излучения из начального состояния (initial state radiation, ISR) мы рассчитываем сечение жесткого подпроцесса в системе центра масс частиц $a(zp_1)$ и $b(p_2)$ и затем делаем релятивистское преобразование в лабораторную систему. При этом необходимо учитывать и якобианы соответствующих замен переменных.

Радиационные факторы, описывающие излучение одного жесткого фотона заряженной частицей внутри конуса с угловым раствором $2\theta_0$, имеют вид

$$\begin{aligned} R_H^{\text{ISR}}(z) &= \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1+z^2}{1-z} \left(\ln \frac{E^2}{m^2} - 1 + l_0 \right) + 1 - z + \mathcal{O} \left(\frac{m^2}{E^2}, \theta_0^2 \right) \right], \\ R_H^{\text{FSR}}(z) &= \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1+z^2}{1-z} \left(\ln \frac{E^2}{m^2} - 1 + l_0 + 2 \ln z \right) + 1 - z + \mathcal{O} \left(\frac{m^2}{E^2}, \theta_0^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Считается, что масса частицы, m , мала по сравнению с энергией и членами, содержащими фактор m^2/E^2 , можно пренебречь. Угол вылета фотона по отношению к направлению импульса излучившей его частицы ограничен условием*

$$\theta_\gamma < \theta_0, \quad \frac{m}{E} \ll \theta_0 \ll 1, \quad l_0 = \ln \frac{\theta_0^2}{4}. \quad (2.40)$$

Требуется, чтобы величина энергии фотона превышала определенный порог, $E_\gamma > \Delta E$. Параметры θ_0 и Δ или могут быть связаны с конкретными экспериментальными условиями (разрешением детекторов по углу и энергии),

*Если необходимо, то условие $m/E \ll \theta_0$ можно снять, восстановив отброшенные члены, пропорциональные m^2/E^2 .

или могут считаться вспомогательными величинами. В последнем случае зависимость от них должна исчезать после суммирования вкладов коллинеарных и неколлинеарных жестких фотонов с вкладом мягкого излучения. Радиационные факторы порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ являются универсальными и описывают излучение коллинеарных жестких фотонов в самых разных процессах взаимодействий частиц при высоких энергиях (см., например, [70]).

В работе [135] мы рассмотрели излучение двух жестких фотонов в процессе баба-рассеяния. В частности, там специально выделялся процесс двойного тормозного излучения в узких конусах вдоль направлений движения начальных и конечных заряженных частиц. При этом были получены выражения для соответствующих радиационных факторов в дважды дифференциальной форме (по долям энергий обоих фотонов). Чтобы получить радиационный фактор, зависящий от суммарной доли энергии обоих фотонов, нам нужно проинтегрировать по доле энергии один из них, держа сумму фиксированной. Нижним пределом интегрирования берем введенный выше параметр, разделяющий жесткое и мягкое излучения, т. е. мы требуем, чтобы энергия каждого фотона превышала ΔE . Для случая излучения из начального состояния получаем

$$R_{HH}^{\text{ISR}}(z) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \left\{ (L+2l_0) \left(\frac{1+z^2}{1-z} (2\ln(1-z) - 2\ln\Delta - \ln z) + \frac{1+z}{2} \ln z - 1 + z \right) + \frac{1+z^2}{1-z} (\ln^2 z + 2\ln z - 4\ln(1-z) + 4\ln\Delta) + (1-z)(2\ln(1-z) - 2\ln\Delta - \ln z + 3) + \frac{1+z}{2} \ln^2 z \right\}, \quad (2.41)$$

где z так же, как и в (2.39), является долей энергии заряженной частицы после излучения фотонов.

Соответствующий радиационный фактор для случая излучения двух фотонов из конечного состояния может быть получен из выражения (2.41) путем адаптированного для КЭД преобразования Грибова–Липатова [31]:

$$R_{HH}^{\text{FSR}}(z) = -z R_{HH}^{\text{ISR}}\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{\ln\Delta \rightarrow \ln\Delta - \ln z; l_0 \rightarrow l_0 + 2\ln z} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \left\{ (L+2l_0) \left[\frac{1+z^2}{1-z} (2\ln(1-z) - 2\ln\Delta + \ln z) + \frac{1+z}{2} \ln z - 1 + z \right] + \frac{1+z^2}{1-z} (5\ln^2 z - 2\ln z - 4\ln(1-z) + 4\ln\Delta + 8\ln z (\ln(1-z) - \ln\Delta)) + (1-z)(2\ln(1-z) - 2\ln\Delta - 3\ln z + 3) + \frac{3(1+z)}{2} \ln^2 z \right\}. \quad (2.42)$$

Отметим, что замены, дополнительные по отношению к обычным преобразованиям Грибова–Липатова, были сделаны для $\ln\Delta$ и l_0 . Они следуют из

кросс-соотношений между двумя каналами при заданных обрезаниях на угол и энергию излученных фотонов.

Выше даны формулы для радиационных факторов в первом порядке теории возмущений. Теперь рассмотрим процесс излучения одного жесткого фотона, сопровождаемый однопетлевой виртуальной поправкой или излучением мягкого фотона. Что касается излучения мягкого фотона, его вклад факторизуется. Вообще говоря, взаимная факторизация факторов, описывающих излучение жесткого коллинеарного и мягкого фотонов, нетривиальна, поскольку оба подпроцесса происходят на сравнимых масштабах расстояний — оба являются длинноволновыми относительно коротковолнового безрадиационного жесткого подпроцесса. В частности, нет возможности установить иерархию амплитуд в отношении того, какой подпроцесс (жесткое коллинеарное или мягкое излучение) происходит *сначала*. Однако прямые вычисления показывают, что факторизация действительно имеет место:

$$d\sigma_{HS} = R_H \otimes \delta_S d\sigma^{(0)}, \quad \delta_S = \frac{d\sigma_S^{(1)}}{d\sigma^{(0)}}, \quad (2.43)$$

где δ_S есть фактор, описывающий мягкое тормозное излучение в данном процессе, рассчитанный стандартным образом [137]. Эта величина содержит инфракрасную расходимость (регуляризованную тем или иным способом), которая сокращается при добавлении соответствующего вклада виртуальных поправок. А $d\sigma^{(0)}$ — борновское безрадиационное сечение.

Наша цель в настоящее время — найти радиационный фактор $R_{H(S+V)}^{\text{ISR}}(z)$, в котором приняты во внимание и однопетлевые виртуальные поправки, и вклад мягкого излучения. Для нахождения этого радиационного фактора мы используем полный результат для поправки в следующем за ведущим логарифмическом приближении, который для любого заданного процесса может быть найден описанными выше методами на основе ренормализационной группы. Рассмотрим для конкретности процесс баббарассеяния. Мастер-формула для его сечения в СВЛП может быть представлена в виде (2.19). Для решения задачи о поиске радиационного фактора в этих функциях можно взять только несинглетную фотонную часть*. Масштаб μ_0 удобно выбрать равным массе электрона, это традиционный выбор в КЭД. В качестве масштаба факторизации выберем энергию излучающей частицы E . Напомним, что используется модифицированная схема минимального вычитания $\overline{\text{MS}}$. Зависимость окончательного результата от выбора схемы вычитаний и значений масштабов присутствует в неконтролируемых членах в порядках более высоких, чем $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$.

* Отметим, что радиационные факторы в СВЛП, описывающие излучение легких пар, выведены в работе [80].

Среди всех вкладов в мастер-формуле выделим те, которые в порядках $\mathcal{O}(\alpha^2 L^n)$ ($n > 0$) соответствуют излучению как минимум одного жесткого фотона. По кинематике они могут быть разделены на 4 части:

$$\delta_H^{(2)\text{NLO}} = \delta_{HH(\text{coll})}^{(2)} + \delta_{HH(\text{s-coll})}^{(2)} + \delta_{(S+V)H(\text{n-coll})}^{(2)} + \delta_{(S+V)H(\text{coll})}^{(2)}, \quad (2.44)$$

где $\delta_{HH(\text{coll})}^{(2)}$ соответствует вкладу излучения двух коллинеарных жестких фотонов, рассмотренному в предыдущем пункте. Вклад кинематики, в которой один из фотонов излучен на большой угол ($\theta_\gamma > \theta_0$), а второй — коллинеарно, обозначен $\delta_{HH(\text{s-coll})}^{(2)}$, где s-coll означает полуколлинеарную (semicollinear) кинематику. Вклад $\delta_{(S+V)H(\text{n-coll})}^{(2)}$ соответствует излучению одного жесткого неколлинеарного фотона ($\theta_\gamma > \theta_0$), сопровождаемому виртуальными однопетлевыми поправками. Отметим, что поскольку излучение жесткого фотона на большой угол не приводит к появлению больших логарифмов, то в $\delta_{(S+V)H(\text{n-coll})}^{(2)}$ можно удерживать только члены, пропорциональные ведущим логарифмическим слагаемым из однопетлевых виртуальных и мягких поправок. Последний вклад в (2.44) является именно тем, который мы ищем. Он происходит за счет излучения одного жесткого коллинеарного фотона, сопровождаемого однопетлевой виртуальной и мягкой поправкой.

С другой стороны, эта же величина может быть найдена из мастер-формулы (2.19):

$$\begin{aligned} \delta_H^{(2)\text{NLO}} = & \frac{\alpha}{2\pi} LP_\Theta^{(1)} \otimes d\bar{\sigma}_\Theta^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} LP_\Delta^{(1)} \otimes d\bar{\sigma}_\Delta^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} \left(LP_\Theta^{(1)} + d_\Theta^{(1)} \right) \otimes d\bar{\sigma}_\Delta^{(1)} + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{L^2}{2} P^{(1)} \otimes P^{(1)} + LP^{(1)} \otimes d^{(1)} + LP^{(\text{NLO},\gamma)\text{str}} \right)_\Theta \otimes d\sigma^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где для краткости опущены аргументы функций расщепления. Величина $d\bar{\sigma}_\Theta^{(1)}$ обозначает вклад излучения одного жесткого фотона, а $d\bar{\sigma}_\Delta^{(1)}$ — вклад суммы виртуальных и мягких поправок, рассчитанных в $\overline{\text{MS}}$ -схеме с безмассовыми электронами. Нижние индексы Θ и Δ обозначают вклады, связанные с жестким и мягким (в сумме с виртуальным) излучением соответственно. Отметим, что опять мы удерживали только члены, усиленные степенями большого логарифма.

Сравнивая выражения (2.44) и (2.45), получаем

$$\begin{aligned} \delta_{(S+V)H(\text{coll})}^{(2)} = & R_{H(S+V)}^{\text{ISR}}(z) \otimes d\hat{\sigma}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} LP^{(1)} \otimes d\bar{\sigma}_\Theta^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} LP_\Theta^{(1)} \otimes d\bar{\sigma}_\Delta^{(1)} + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{L^2}{2} P^{(1)} \otimes P^{(1)} + LP^{(1)} \otimes d^{(1)} + LP^{(\text{NLO},\gamma)\text{str}} \right)_\Theta \otimes d\sigma^{(0)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\alpha}{2\pi} R_{\Theta}^{(0)} \otimes d\sigma_{\Theta}^{(1)} \Big|_{\theta_{\gamma} \geq \theta_0} - \frac{\alpha}{2\pi} LP_{\Delta}^{(1)} \otimes d\sigma_{\Theta}^{(1)} \Big|_{\theta_{\gamma} \geq \theta_0} - \\
 & - \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 R_{HH}^{\text{ISR}} \otimes d\sigma^{(0)}. \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

В $\overline{\text{MS}}$ -схеме имеем следующие соотношения:

$$d\bar{\sigma}_{\Delta}^{(1)} = d\sigma_S^{(1)} + d\sigma_V^{(1)} - \frac{\alpha}{2\pi} (LP_{\Delta}^{(1)} + d_{\Delta}^{(1)}) d\sigma^{(0)}, \quad (2.47)$$

$$d\bar{\sigma}_{\Theta}^{(1)} = d\sigma_{\Theta}^{(1)} - \frac{\alpha}{2\pi} (LP_{\Theta}^{(1)} + d_{\Theta}^{(1)}) \otimes d\sigma^{(0)}. \quad (2.48)$$

Суммируя в (2.46) члены, пропорциональные $\sigma_{\Theta}^{(1)}$, с помощью (2.48) получаем

$$\frac{\alpha}{2\pi} LP_{\Theta}^{(1)} \otimes d\sigma_{\Theta}^{(1)} \Big|_{\theta_{\gamma} < \theta_0} = \frac{\alpha}{2\pi} LP_{\Theta}^{(1)} \otimes \frac{\alpha}{2\pi} R_H^{\text{ISR}} \otimes d\sigma^{(0)}. \quad (2.49)$$

После подстановок (2.47) и (2.49) в (2.46) получаем искомую величину, выраженную уже через известные объекты:

$$\begin{aligned}
 R_{H(S+V)}^{\text{ISR}}(z) \otimes d\hat{\sigma}(z) &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 LP^{(1)} \otimes R_H^{\text{ISR}} \otimes d\sigma^{(0)} - \\
 & - \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 LP^{(1)} \otimes (LP_{\Theta}^{(1)} + d_{\Theta}^{(1)}) \otimes d\sigma^{(0)} - \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 R_{HH}^{\text{ISR}} \otimes d\sigma^{(0)} + \\
 & + \frac{\alpha}{2\pi} LP_{\Theta}^{(1)} \otimes \left(d\sigma_S^{(1)} + d\sigma_V^{(1)} - \frac{\alpha}{2\pi} (LP_{\Delta}^{(1)} + d_{\Delta}^{(1)}) d\sigma^{(0)} \right) + \\
 & + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{L^2}{2} P^{(1)} \otimes P^{(1)} + LP^{(1)} \otimes d^{(1)} + LP^{(\text{NLO}, \gamma) \text{str}} \right)_{\Theta} \otimes d\sigma^{(0)}.
 \end{aligned}$$

С помощью таблицы интегралов конволюции, данной в приложении 1, получаем окончательный ответ для радиационного фактора в начальном состоянии:

$$\begin{aligned}
 R_{H(S+V)}^{\text{ISR}}(z) \otimes d\hat{\sigma}(z) &= \delta_{(S+V)}^{(1)} R_H^{\text{ISR}}(z) \otimes d\sigma^{(0)}(z) + \\
 & + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 L \left[2 \frac{1+z^2}{1-z} (\text{Li}_2(1-z) - \ln(1-z) \ln z) - \right. \\
 & \left. - (1+z) \ln^2 z + (1-z) \ln z + z \right] \otimes d\sigma^{(0)}(z), \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

$$\delta_{(S+V)}^{(1)} = \frac{d\sigma_S^{(1)} + d\sigma_V^{(1)}}{d\sigma^{(0)}}.$$

Радиационный фактор для конечного состояния находится опять с помощью преобразования Грибова–Липатова. Для него находим

$$R_{H(S+V)}^{\text{FSR}}(z)d\hat{\sigma} = \delta_{(S+V)}^{(1)} R_H^{\text{FSR}}(z) d\sigma^{(0)} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \left[\frac{1+z^2}{1-z} (-2 \text{Li}_2(1-z) - 3 \ln^2 z + 2 \ln(1-z) \ln z) + (1+z) \ln^2 z - (1-z) \ln z - 1 \right] d\sigma^{(0)}. \quad (2.51)$$

Таким образом, мы получили явные выражения для радиационных факторов (2.41), (2.42), (2.50) и (2.51), которые описывают излучение жестких фотонов во втором порядке теории возмущений в следующем за ведущим логарифмическом приближении. Эти факторы являются универсальными, т. е. они применимы для описания тормозного излучения в широком классе процессов при высоких энергиях. Условие применимости найденных факторов состоит в возможности факторизовать коллинеарное излучение как длинноволновой подпроцесс относительно жесткого коротковолнового подпроцесса основной реакции. Полученные факторы удобны как для аналитических вычислений, так и для использования в компьютерных программах, включая монте-карло-генераторы, например LABSMC [87], SAMBNA [73] и MCGPJ [61]. Полученные формулы могут быть также использованы при решении специфических задач с применением метода радиационного возвращения, который будет описан ниже в п. 3.3.

3. КЭД-ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССАМ НА УСКОРИТЕЛЯХ

В этом разделе будут рассмотрены некоторые приложения представленных выше методов к построению высокоточного описания процессов взаимодействия элементарных частиц на современных ускорителях высоких энергий.

3.1. Баба-рассеяние на малые углы. Прецизионная проверка стандартной модели являлась основной целью физических исследований, проводившихся на ускорителе LEP в ЦЕРН (Женева). Исследование различных каналов электрон-позитронной аннигиляции на LEP дало возможность извлечь и уточнить значения основных параметров электрослабой теории и КХД. Но изучение канала электрон-позитронного рассеяния (баба-рассеяния [16]) было существенно для прецизионной проверки и уточнения всей совокупности параметров Стандартной модели при анализе данных коллайдеров LEP и SLC. Действительно, светимость \mathcal{L} большинства электрон-позитронных коллайдеров, включая LEP, определяется путем сравнения экспериментальных данных для сечения баба-рассеяния с соответствующими теоретическими предсказаниями. Таким образом, процесс e^+e^- -рассеяния служит в качестве нормиро-

вочного практически для всех наблюдаемых физических величин*. Поэтому необходимо как можно более точное теоретическое описание этого процесса. Актуальность увеличения точности теоретического описания баба-рассеяния в настоящее время повышается в связи с планами строительства новых линейных и циркулярных электрон-позитронных (ILC, FCC-ee, CEPC, Super Charm-Tau Factory) коллайдеров [6–8, 66], где данный процесс также будет применяться для мониторинга светимости.

В условиях всех основных детекторов на LEP для определения светимости использовался процесс баба-рассеяния на малые углы, под которыми стояли детекторы электронов. Наличие этих специализированных детекторов позволило достичь экспериментальной точности измерения сечения этого процесса на уровне [140]

$$\left| \frac{\delta\sigma}{\sigma} \right| < 0,001. \quad (3.1)$$

Однако при анализе данных необходимо учитывать не только экспериментальные ошибки, но и теоретические неопределенности. Как обсуждалось во введении, погрешность теоретического описания желательно иметь раза в три меньше, чем соответствующая экспериментальная ошибка. Тогда теоретическая неопределенность, входящая в погрешность измеряемой светимости, не будет заметно сказываться на точности извлечения параметров Стандартной модели из данных эксперимента, например на точности измерения числа безмассовых нейтрино N_ν [141]. Таким образом, требуется понизить уровень теоретической неопределенности в описании баба-рассеяния на малые углы до уровня по крайней мере 0,03 %. Это вызов для теории. В этом пункте рассмотрим следующие за ведущими поправки к баба-рассеянию $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ на малые углы в порядке $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$, что позволит продвинуть точность теоретического описания этого процесса до уровня порядка 0,1 %. На будущих e^+e^- -коллайдерах планируется достичь экспериментальной погрешности измерения сечения данного процесса порядка 10^{-4} , что еще более повышает требования к точности соответствующих теоретических предсказаний [142].

Будем считать, что обе заряженные частицы в конечном состоянии, т. е. электрон и позитрон, детектируются в заданном угловом диапазоне. Для определенности суммарную энергию начальных частиц в системе их центра масс берем $2\epsilon = \sqrt{s} = 90\text{--}200$ ГэВ, а угловой диапазон детектора $\theta \simeq 10\text{--}150$ мрад, что соответствует типичным условиям на коллайдерах LEP1 и LEP2. Кон-

* Асимметрии, например измеряемая вперед–назад асимметрия A_{FB} , явным образом не содержат нормировки на светимость. Но при глобальном анализе параметров СМ зависимость от \mathcal{L} проникает в теоретические предсказания для этой величины.

кретно возьмем следующие условия на углы вылетающих заряженных частиц:

$$\theta_1 < \theta_- = \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1} \equiv \theta < \theta_3, \quad \theta_2 < \theta_+ = \widehat{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2} < \theta_4, \quad 0,01 \lesssim \theta_i \lesssim 0,1 \text{ рад}, \quad (3.2)$$

где \mathbf{p}_1 и \mathbf{q}_1 (\mathbf{p}_2 и \mathbf{q}_2) есть импульсы начального и конечного электронов (позитронов) в системе центра масс.

Радиационные поправки к рассматриваемому процессу складываются из ряда эффектов за счет виртуальных петлевых диаграмм и излучения дополнительных реальных фотонов или e^+e^- -пар. В случае излучения дополнительных реальных частиц мы будем интегрировать по их фазовому объему, налагая необходимые ограничения исходя из экспериментальных условий. При этом ставится задача нахождения аналитических формул, которые в дальнейшем можно использовать в процессах анализа экспериментальных данных и оценок теоретических неопределенностей.

Обсудим сначала особенности углового распределения дифференциального сечения баба-рассеяния. В области, определенной условиями (3.2), основной вклад в сечение процесса дает амплитуда рассеяния с обменом фотонами в t -канале. Хорошо известно, что эта амплитуда приводит к сингулярному поведению сечения вида $d\sigma/d\theta^2 \sim \theta^{-4}$. В наблюдаемом сечении расходимость отсутствует, поскольку углы детектирования ограничены снизу.

Оценим следующий за наиболее сингулярным член разложения дифференциального сечения. Он имеет относительный порядок малости θ^2 . Если

$$\frac{d\sigma}{d\theta^2} \sim \theta^{-4}(1 + c_1\theta^2), \quad (3.3)$$

то после интегрирования по θ^2 в диапазоне (3.2) получим

$$\int_{\theta_{\min}^2}^{\theta_{\max}^2} \frac{d\sigma}{d\theta^2} d\theta^2 \sim \theta_{\min}^{-2} \left(1 + c_1 \theta_{\min}^2 \ln \frac{\theta_{\max}^2}{\theta_{\min}^2} \right), \quad (3.4)$$

где c_1 — какой-то постоянный коэффициент. Видно, что для $\theta_{\min} = 50$ мрад и $\theta_{\max} = 150$ мрад (мы берем случай, когда поправка порядка θ^2 максимальна) относительный вклад членов, подавленных множителем θ^2 , составляет порядка $5 \cdot 10^{-3} c_1$. Следовательно, такие слагаемые в сечении баба-рассеяния на малые углы следует удерживать только в борновском порядке по α , где c_1 не мал. В более высоких порядках теории возмущений по α коэффициент c_1 содержит дополнительные степени фактора α/π и, следовательно, приводит к численной малости соответствующих слагаемых. Последние мы будем систематически отбрасывать. Это позволит упростить вычисления и даст возможность получать относительно короткие аналитические выражения для поправок высших порядков без заметной потери точности. Таким образом, при

расчете радиационных поправок мы будем учитывать только диаграммы в канале рассеяния [143, 144], пренебрегая вкладами аннигиляции всюду, кроме случая резонансного образования Z -бозона. Более того, как будет показано ниже при обсуждении обобщенного эйконального представления, можно учитывать только однофотонный обмен в t -канале.

Имея целью достижение точности, определенной в (3.1), и принимая во внимание, что минимальный квадрат переданного импульса $Q^2 = 2\epsilon^2(1 - \cos\theta)$ в изучаемой области углов рассеяния (3.2) имеет порядок 1 ГэВ^2 , мы можем пренебрегать в радиационных поправках вкладами, содержащими малый множитель m^2/Q^2 , где m — масса электрона.

3.1.1. Борновское сечение и однопетлевые поправки. Борновское сечение процесса баба-рассеяния, определенное в рамках Стандартной модели, хорошо известно [145–147]:

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8s} \{4B_1 + (1-c)^2 B_2 + (1+c)^2 B_3\}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{s}{t}\right)^2 |1 + (g_v^2 - g_a^2)\xi|^2, & B_2 &= |1 + (g_v^2 - g_a^2)\chi|^2, \\ B_3 &= \frac{1}{2} \left|1 + \frac{s}{t} + (g_v + g_a)^2 \left(\frac{s}{t}\xi + \chi\right)\right|^2 + \frac{1}{2} \left|1 + \frac{s}{t} + (g_v - g_a)^2 \left(\frac{s}{t}\xi + \chi\right)\right|^2, \\ \chi &= \frac{\Lambda s}{s - m_z^2 + iM_Z\Gamma_Z}, & \xi &= \frac{\Lambda t}{t - M_Z^2}, \\ \Lambda &= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} = (\sin 2\theta_w)^{-2}, & g_a &= -\frac{1}{2}, & g_v &= -\frac{1}{2}(1 - 4\sin^2\theta_w), \\ s &= (p_1 + p_2)^2 = 4\epsilon^2, & t &= -Q^2 = (p_1 - q_1)^2 = -\frac{1}{2}s(1 - c), \\ & & c &= \cos\theta, & \theta &= \widehat{\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1}. \end{aligned}$$

Здесь θ_w — угол электрослабого смешивания. В пределе малых углов рассеяния ($c = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24 + \dots$) разложение формулы (3.5) приводит к

$$\frac{d\sigma^B}{\theta d\theta} = \frac{8\pi\alpha^2}{\epsilon^2\theta^4} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{9}{40}\theta^4 + \delta_{\text{weak}}\right), \quad (3.6)$$

где $\epsilon = \sqrt{s}/2$ — энергия начального электрона (и позитрона), а вклад слабых взаимодействий δ_{weak} за счет обмена Z -бозоном (и его интерференции с амплитудами обмена фотоном) имеет вид

$$\delta_{\text{weak}} = 2g_v^2\xi - \frac{\theta^2}{4}(g_v^2 + g_a^2) \text{Re}\chi + \frac{\theta^4}{32}(g_v^4 + g_a^4 + 6g_v^2g_a^2)|\chi|^2. \quad (3.7)$$

Из (3.7) можно увидеть, что вклад c_1^w слабой поправки δ_{weak} в коэффициент c_1 , введенный в (3.3),

$$c_1^w \lesssim 2g_v^2 + \frac{(g_v^2 + g_a^2) M_Z}{4 \Gamma_Z} + \theta_{\text{max}}^2 \frac{(g_v^4 + g_a^4 + 6g_v^2 g_a^2) M_Z^2}{32 \Gamma_Z^2} \simeq 1. \quad (3.8)$$

Вклад амплитуд с аннигиляцией через виртуальный Z -бозон не превышает 0,3% для типичных значений энергии и углов. Радиационные поправки к вкладу $Z\gamma$ интерференции были рассмотрены в работах [148–154]. Они не малы по сравнению с требуемой точностью и должны учитываться при анализе экспериментальных данных. Мы этот вклад здесь обсуждать не будем. В случае *чистой* электродинамики радиационные поправки к сечению бабарассеяния были рассчитаны много лет назад в [155–157]. Учитывая вклад излучения мягкого фотона с энергией меньше, чем некоторое небольшое пороговое значение $\Delta\varepsilon$, сечение в первом (после борновского) порядке теории возмущений $d\sigma_{\text{QED}}^{(1)}$ можно представить в виде

$$\frac{d\sigma_{\text{QED}}^{(1)}}{dc} = \frac{d\sigma_{\text{QED}}^B}{dc} (1 + \delta_V + \delta_S), \quad (3.9)$$

где $d\sigma_{\text{QED}}^B$ — борновское сечение, полученное в рамках *чистой* электродинамики (оно равно $d\sigma^B$ при $g_a = g_v = 0$) и

$$\begin{aligned} \delta_V + \delta_S = & 2\frac{\alpha}{\pi} \left[2 \left(1 - \ln \frac{4\varepsilon^2}{m^2} + 2 \ln \left(\text{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \right) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} + \int_{\cos^2(\theta/2)}^{\sin^2(\theta/2)} \frac{dx}{x} \ln(1-x) - \right. \\ & - \frac{23}{9} + \frac{11}{6} \ln \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \left. \right] + \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(3+c^2)^2} \left[\frac{\pi^2}{3} (2c^4 - 3c^3 - 15c) + \right. \\ & + 2(2c^4 - 3c^3 + 9c^2 + 3c + 21) \ln^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) - \\ & - 4(c^4 + c^2 - 2c) \ln^2 \cos \frac{\theta}{2} - 4(c^3 + 4c^2 + 5c + 6) \ln^2 \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + \frac{2}{3} (11c^3 + 33c^2 + 21c + 111) \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + 2(c^3 - 3c^2 + 7c - 5) \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) + \\ & \left. + 2(c^3 + 3c^2 + 3c + 9) \delta_t - 2(c^3 + 3c)(1-c) \delta_s \right]. \end{aligned}$$

Величины δ_t (δ_s) определяются эффектом поляризации вакуума в фотонном пропагаторе через функции $\Pi(t)$ ($\Pi(s)$):

$$\Pi(t) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\delta_t + \frac{1}{3}L - \frac{5}{9} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 L, \quad (3.10)$$

в которых

$$L = \ln \frac{Q^2}{m^2}, \quad Q^2 = -t = 2\varepsilon^2(1-c), \quad (3.11)$$

где взята только ведущая часть двухпетлевой поправки. В рамках Стандартной модели $\delta_{t,s}$ содержат вклады мюонов, тау-лептонов, W -бозонов и адронов:

$$\delta_t = \delta_t^\mu + \delta_t^\tau + \delta_t^W + \delta_t^H, \quad \delta_s = \delta_t (Q^2 \rightarrow -s). \quad (3.12)$$

Первые три вклада рассчитываются по теории возмущений и могут быть выписаны явно:

$$\begin{aligned} \delta_t^\mu &= \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{m_\mu^2} - \frac{5}{9}, \\ \delta_t^\tau &= \frac{1}{2} v_\tau \left(1 - \frac{1}{3} v_\tau^2 \right) \ln \frac{v_\tau + 1}{v_\tau - 1} + \frac{1}{3} v_\tau^2 - \frac{8}{9}, \quad v_\tau = \sqrt{1 + \frac{4m_\tau^2}{Q^2}}, \\ \delta_t^W &= \frac{1}{4} v_W (v_W^2 - 4) \ln \frac{v_W + 1}{v_W - 1} - \frac{1}{2} v_W^2 + \frac{11}{6}, \quad v_W = \sqrt{1 + \frac{4M_W^2}{Q^2}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Вклад адронов в поляризацию вакуума пока не может быть рассчитан теоретически*. Вместо этого он находится из экспериментально измеряемого сечения электрон-позитронной аннигиляции в адроны** (см. детали в обзоре [158]):

$$\delta_t^H = \frac{Q^2}{4\pi\alpha^2} P \int_{m_\pi^2}^{+\infty} \frac{\sigma^{e^+e^- \rightarrow h}(s)}{s + Q^2} ds. \quad (3.14)$$

Для получения приводимых ниже численных оценок использовалась параметризация поляризации вакуума из работы [159].

В пределе рассеяния на малые углы можно представить (3.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{QED}}^{(1)}}{dc} &= \frac{d\sigma_{\text{QED}}^B}{dc} (1 - \Pi(t))^{-2} (1 + \delta), \\ \delta &= 2\frac{\alpha}{\pi} \left[2(1-L) \ln \frac{1}{\Delta} + \frac{3}{2}L - 2 \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^2 \Delta_\theta + \frac{\alpha}{\pi} \theta^2 \ln \Delta, \\ \Delta_\theta &= \frac{3}{16}l^2 + \frac{7}{12}l - \frac{19}{18} + \frac{1}{4}(\delta_t - \delta_s), \\ \Delta &= \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}, \quad l = \ln \frac{Q^2}{s} \simeq \ln \frac{\theta^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

* Имеющиеся в литературе результаты по расчетам этой функции на решетке неточны.

** Данные по адронным распадам тау-лептона могут быть использованы аналогично.

Такое представление дает возможность явным образом проверить, что члены относительного порядка θ^2 дают малый вклад. Учитывая, что большие вклады, содержащие логарифм вспомогательного параметра Δ , исчезнут, когда будет прибавлен вклад жесткого тормозного излучения, мы можем снова проверить, что члены, подавленные множителем θ^2 , могут быть отброшены. Что мы и будем делать далее при расчетах радиационных поправок, связанных, в частности, с аннигиляционными амплитудами и многократным обменом фотонами в канале рассеяния. В последнем случае работает так называемое обобщенное эйкональное приближение для амплитуд рассеяния на малые углы. Конкретно для случая упругого рассеяния при $s \gg Q^2 \gg m^2$ имеем [143, 160, 161]

$$A(s, t) = A_0(s, t) F_1^2(t) (1 - \Pi(t))^{-1} e^{i\varphi(t)} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{\alpha}{\pi} \frac{Q^2}{s} \right) \right], \quad (3.16)$$

где $A_0(s, t)$ — борновская амплитуда; $F_1(t)$ — формфактор Дирака; $\varphi(t) = -\alpha \ln(Q^2/\lambda^2)$ — кулоновская фаза и λ — вспомогательный малый параметр, выполняющий роль массы фотона. Эйкональное представление нарушается на трехпетлевом уровне, но соответствующий вклад ($\sim \alpha^3$) в наблюдаемое сечение очень мал и может быть отброшен в нашем случае. Таким образом, мы считаем эйкональное представление верным в рамках требуемой точности.

Введем теперь безразмерную величину $\Sigma = Q_1^2 \sigma_{\text{exp}} / (4\pi\alpha^2)$ с $Q_1^2 = \varepsilon^2 \theta_1^2$, где σ_{exp} есть сечение процесса баба-рассеяния, проинтегрированное по фазовому объему, соответствующему типичным экспериментальным условиям с ограничениями на энергии и углы вылетающих электрона и позитрона*:

$$\Sigma = \frac{Q_1^2}{4\pi\alpha^2} \int dx_1 \int dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \int d^2 \mathbf{q}_1^\perp \Theta_1^c \int d^2 \mathbf{q}_2^\perp \Theta_2^c \times \\ \times \frac{d\sigma^{e^+ e^- \rightarrow e^+(\mathbf{q}_2^\perp, x_2) e^-(\mathbf{q}_1^\perp, x_1) + X}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp}, \quad (3.17)$$

где $x_{1,2}$, $\mathbf{q}_{1,2}^\perp$ — доли энергий и поперечные компоненты импульсов электрона и позитрона в конечном состоянии; $s x_c$ — параметр, задающий экспериментальное обрезание на квадрат инвариантной массы пары, тэта-функции Θ_i^c накладывают необходимые ограничения на углы (3.2):

$$\Theta_1^c = \Theta \left(\theta_3 - \frac{|\mathbf{q}_1^\perp|}{x_1 \varepsilon} \right) \Theta \left(\frac{|\mathbf{q}_1^\perp|}{x_1 \varepsilon} - \theta_1 \right), \\ \Theta_2^c = \Theta \left(\theta_4 - \frac{|\mathbf{q}_2^\perp|}{x_2 \varepsilon} \right) \Theta \left(\frac{|\mathbf{q}_2^\perp|}{x_2 \varepsilon} - \theta_2 \right). \quad (3.18)$$

* На деле эта величина соответствует условиям идеализированного детектора. Для полного учета реалистических условий следует проводить численное разыгрывание событий по методу Монте-Карло.

В случае симметричного детектора вперед–назад (далее мы ограничимся только этим случаем) имеем

$$\theta_2 = \theta_1, \quad \theta_4 = \theta_3, \quad \rho = \frac{\theta_3}{\theta_1} > 1. \quad (3.19)$$

Представим величину Σ в виде суммы нескольких вкладов:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_0 + \Sigma^\gamma + \Sigma^{2\gamma} + \Sigma^{e^+e^-} + \Sigma^{3\gamma} + \Sigma^{e^+e^-\gamma} = \\ &= \Sigma_{00}(1 + \delta_0 + \delta^\gamma + \delta^{2\gamma} + \delta^{e^+e^-} + \delta^{3\gamma} + \delta^{e^+e^-\gamma}), \quad (3.20) \\ \Sigma_{00} &= 1 - \rho^{-2}, \end{aligned}$$

где Σ_0 соответствует борновскому вкладу; Σ^γ — вкладу излучения одного реального или виртуального фотона и т.д. Численные значения относительных вкладов δ^i в зависимости от величины обрезания x_c будут даны ниже в табл. 4. Интегрируя выражение (3.6) и проводя стандартное пересуммирование петлевых вкладов в поляризацию вакуума, получаем

$$\Sigma_0 = \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta^2}{\theta^4} (1 - \Pi(t))^{-2} + \Sigma_W + \Sigma_\theta, \quad (3.21)$$

где Σ_W дает поправку за счет слабых взаимодействий:

$$\Sigma_W = \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta^2}{\theta^4} \delta_{\text{weak}}. \quad (3.22)$$

Величина Σ_θ происходит из разложения борновского сечения по степеням θ^2 :

$$\Sigma_\theta = \theta_1^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left(-\frac{1}{2} + z\theta_1^2 \frac{9}{40} \right). \quad (3.23)$$

Остальные вклады в Σ из (3.20) будут выведены и рассмотрены ниже.

Рассмотрим теперь вклад однократного тормозного излучения. При вычислении вклада в сечение за счет излучения одного жесткого фотона мы стартуем с соответствующего дифференциального сечения, записанного через доли энергии $x_{1,2}$ и поперечные импульсы $\mathbf{q}_{1,2}^\perp$ конечных частиц:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_B^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma}}{dx_1 d^2\mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2\mathbf{q}_2^\perp} &= \frac{2\alpha^3}{\pi^2} \left\{ \frac{R(x_1; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{q}_2^\perp) \delta(1-x_2)}{(\mathbf{q}_2^\perp)^4 (1 - \Pi(-(\mathbf{q}_2^\perp)^2))^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R(x_2; \mathbf{q}_2^\perp, \mathbf{q}_1^\perp) \delta(1-x_1)}{(\mathbf{q}_1^\perp)^4 (1 - \Pi(-(\mathbf{q}_1^\perp)^2))^2} \right\} (1 + \mathcal{O}(\theta^2)), \quad (3.24) \end{aligned}$$

где

$$R(x; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{q}_2^\perp) = \frac{1+x^2}{1-x} \left[\frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2(1-x)^2}{d_1 d_2} - \frac{2m^2(1-x)^2 x}{1+x^2} \frac{(d_1-d_2)^2}{d_1^2 d_2^2} \right], \tag{3.25}$$

$$d_1 = m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2, \quad d_2 = m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - x\mathbf{q}_2^\perp)^2.$$

Отметим, что в пропагаторе виртуального фотона в t -канале опять использовано пересуммирование вклада поляризации вакуума.

Простое интегрирование по азимутальному углу дает вклад однократного жесткого тормозного излучения Σ^H в виде

$$\Sigma^H = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} F(x, D_1, D_3; D_2, D_4), \tag{3.26}$$

$$F = \int_{D_1}^{D_3} dz_1 \int_{D_2}^{D_4} \frac{dz_2}{z_2} (1 - \Pi(-z_2 Q_1^2))^{-2} \left\{ \frac{1-x}{z_1 - xz_2} (a_1^{-1/2} - xa_2^{-1/2}) - \frac{4x\sigma^2}{1+x^2} [a_1^{-3/2} + x^2 a_2^{-3/2}] \right\},$$

где

$$a_1 = (z_1 - z_2)^2 + 4z_2\sigma^2, \tag{3.27}$$

$$a_2 = (z_1 - x^2 z_2)^2 + 4x^2 z_2\sigma^2,$$

$$\sigma^2 = \frac{m^2(1-x)^2}{Q_1^2}.$$

Пределы интегрирования в (3.26) для симметричного случая таковы:

$$D_1 = x^2, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = x^2 \rho^2, \quad D_4 = \rho^2. \tag{3.28}$$

Из (3.26)–(3.28) можно получить

$$\Sigma^H = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \times$$

$$\times \{ [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] (L - 1) + k(x, z) \}, \tag{3.29}$$

$$k(x, z) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] +$$

$$+ L_1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z) L_2 + \Theta(z - x^2 \rho^2) L_3,$$

где $L = \ln(zQ_1^2/m^2)$ и

$$\begin{aligned} L_1 &= \ln \left| \frac{x^2(z-1)(\rho^2-z)}{(x-z)(x\rho^2-z)} \right|, \\ L_2 &= \ln \left| \frac{(z-x^2)(x^2\rho^2-z)}{x^2(x-z)(x\rho^2-z)} \right|, \\ L_3 &= \ln \left| \frac{(z-x^2)(x\rho^2-z)}{(x-z)(x^2\rho^2-z)} \right|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В (3.29) видно, что Σ^H содержит вспомогательный параметр Δ . Зависимость от него пропадет, как это и должно, в сумме $\Sigma^\gamma = \Sigma^H + \Sigma^{V+S}$, где Σ^{V+S} есть вклад виртуальных и мягких фотонов в первом порядке, который может быть получен из выражения (3.29):

$$\begin{aligned} \Sigma^\gamma &= \frac{\alpha}{\pi} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left\{ (L-1)P^{(0)}(x) \times \right. \\ &\quad \left. \times [1 + \Theta(x^2\rho^2 - z)] + \frac{1+x^2}{1-x} k(x, z) - \delta(1-x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где мы явно выделили несинглетную функцию расщепления при слагаемом, содержащем большой логарифм L .

3.1.2. Поправки второго порядка. Систематическое получение поправок к сечению баба-рассеяния в порядке $\mathcal{O}(\alpha^2)$ — довольно трудоемкая задача. Она была решена лишь недавно усилиями нескольких групп. Однако если стоит вопрос о выводе лишь ведущих и следующих за ведущими поправок в этом порядке, то возможно получить аналитические искомые выражения, используя обсуждаемый в обзоре аппарат. Кроме того, мы сейчас вправе использовать малость углов рассеяния, что существенно сокращает объем вычислений. В частности, известно, что s -канальные амплитуды рассматриваемого процесса в двухпетлевом порядке имеют так называемое дважды логарифмическое усиление [162], но эти амплитуды в нашем случае не важны, поскольку они подавлены четвертой степенью малости по углу рассеяния (помимо фактора α^2/π^2):

$$(\Sigma^{\gamma\gamma})_{\text{annih}} \sim (\Sigma^{e^+e^-})_{\text{annih}} \sim \theta^4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L^4. \quad (3.32)$$

Вклад интерференции амплитуд в каналах рассеяния и аннигиляции может быть оценен как

$$(\Sigma^{\gamma\gamma})_{\text{interf}} \sim (\Sigma^{e^+e^-})_{\text{interf}} \sim \theta^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \ln^4\left(\frac{Q^2}{s}\right). \quad (3.33)$$

Этот вклад мы также отбрасываем, но он будет учтен при выводе оценки теоретической неопределенности результата. Отметим отсутствие в интерференции слагаемых, усиленных большим логарифмом.

Рассмотрим сначала вклад двухпетлевых виртуальных поправок $d\sigma_{VV}^{(2)}$ к упругому рассеянию. Используя представление (3.16) и разложение по петлям дираковского формфактора

$$F_1 = 1 + \frac{\alpha}{\pi} F_1^{(1)} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 F_1^{(2)}, \quad (3.34)$$

получаем

$$\frac{d\sigma_{VV}^{(2)}}{dc} = \frac{d\sigma_0}{dc} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} \left[6(F_1^{(1)})^2 + 4F_1^{(2)} \right]. \quad (3.35)$$

Однопетлевой вклад в формфактор хорошо известен:

$$F_1^{(1)} = (L - 1) \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4}L - \frac{1}{4}L^2 - 1 + \frac{1}{2}\zeta_2. \quad (3.36)$$

А соответствующая двухпетлевая поправка может быть выделена из результатов работ [163, 164]. Ее можно представить в виде

$$F_1^{(2)} = F_1^{\gamma\gamma} + F_1^{e^+e^-}, \quad (3.37)$$

где слагаемое $F_1^{e^+e^-}$ происходит из треугольной вершинной диаграммы с однопетлевой вставкой в фотонный пропагатор, т. е. за счет поляризации вакуума e^+e^- -парой:

$$F_1^{e^+e^-} = -\frac{1}{36}L^3 + \frac{19}{72}L^2 - \left(\frac{265}{216} + \frac{1}{6}\zeta_2\right)L + \mathcal{O}(1), \quad (3.38)$$

$$F_1^{\gamma\gamma} = \frac{1}{32}L^4 - \frac{3}{16}L^3 + \left(\frac{17}{32} - \frac{1}{8}\zeta_2\right)L^2 + \left(-\frac{21}{32} - \frac{3}{8}\zeta_2 + \frac{3}{2}\zeta_3\right)L + \frac{1}{2}(L-1)^2 \ln^2 \frac{m}{\lambda} + (L-1) \left[-\frac{1}{4}L^2 + \frac{3}{4}L - 1 + \frac{1}{2}\zeta_2\right] \ln \frac{\lambda}{m} + \mathcal{O}(1), \quad (3.39)$$

$$\zeta_2 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta_3 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,202.$$

Зависимость от фиктивной массы фотона, входящая в выражения (3.36)–(3.39), сокращается в полной сумме $d\sigma^{(2)}/dc$ поправок за счет излучения виртуальных и мягких фотонов во втором порядке теории возмущений $d\sigma_{VV}^{(2)}/dc$ (см. (3.35)), $d\sigma_{SS}^{(2)}/dc$ и $d\sigma_{SV}^{(2)}/dc$.

Сечение $d\sigma_{SS}^{(2)}/dc$, описывающее вклад за счет излучения двух мягких фотонов, энергия каждого из которых не превышает $\Delta\varepsilon = \varepsilon\Delta$ ($\Delta \ll 1$), имеет вид

$$d\sigma_{SS}^{(2)} = d\sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} 8 \left[(L - 1) \ln \frac{m\Delta}{\lambda} + \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}\zeta_2 \right]^2. \quad (3.40)$$

Виртуальная петлевая поправка к сечению процесса излучения одного мягкого фотона записывается в факторизованной форме:

$$d\sigma_{SV}^{(2)} = d\sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} 16F_1^{(1)} \left[(L - 1) \ln \frac{m\Delta}{\lambda} + \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}\zeta_2 \right]. \quad (3.41)$$

Общий вклад этих слагаемых в Σ , за исключением части, происходящей из поляризации вакуума в вершинной диаграмме ($F_1^{e^+e^-}$), содержит не более чем вторую степень большого логарифма L :

$$\Sigma_{S+V}^{\gamma\gamma} = \Sigma_{VV} + \Sigma_{VS} + \Sigma_{SS} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} R_{S+V}^{\gamma\gamma}. \quad (3.42)$$

Удобно разбить величину $R_{S+V}^{\gamma\gamma}$ следующим образом:

$$R_{S+V}^{\gamma\gamma} = r_{S+V}^{\gamma\gamma} + r_{S+V\gamma\gamma} + r_{S+V\gamma}^{\gamma},$$

$$r_{S+V}^{\gamma\gamma} = r_{S+V\gamma\gamma} = L^2 \left(2 \ln^2 \Delta + 3 \ln \Delta + \frac{9}{8} \right) + L \left(-4 \ln^2 \Delta - 7 \ln \Delta + 3\zeta_3 - \frac{3}{2}\zeta_2 - \frac{45}{16} \right), \quad (3.43)$$

$$r_{S+V\gamma}^{\gamma} = 4 \left[(L - 1) \ln \Delta + \frac{3}{4}L - 1 \right]^2.$$

Вклад в Σ , происходящий от $F_1^{e^+e^-}$, содержит член, пропорциональный L^3 , который сокращается после добавления следующего выражения, описывающего излучение мягкой e^+e^- -пары:

$$d\sigma_S^{e^+e^-} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 d\sigma_0 (1 - \Pi(t))^{-2} R_S^{e^+e^-} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 d\sigma_0 (1 - \Pi(t))^{-2} \times \left[\frac{1}{9}(L + 2 \ln \Delta)^3 - \frac{5}{9}(L + 2 \ln \Delta)^2 + \left(\frac{56}{27} - \frac{2}{3}\zeta_2 \right) (L + 2 \ln \Delta) + \mathcal{O}(1) \right].$$

Таким образом, суммарный вклад виртуальных и мягких e^+e^- -пар в Σ имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma_{S+V}^{e^+e^-} &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} R_{S+V}^{e^+e^-}, \\ R_{S+V}^{e^+e^-} &= R_S^{e^+e^-} + 4F_1^{e^+e^-} = L^2 \left(\frac{2}{3} \ln \Delta + \frac{1}{2} \right) + \\ &+ L \left(-\frac{17}{6} + \frac{4}{3} \ln^2 \Delta - \frac{20}{9} \ln \Delta - \frac{4}{3} \zeta_2 \right) + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (3.44)$$

В выражениях (3.43), (3.44) величина $\Delta = \delta\varepsilon/\varepsilon$ является максимальной энергией, уносимой мягкой парой; предполагается, что $2m \ll \delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Здесь мы приняли во внимание только вклад электрон-позитронных пар. Численное значение этого вклада не превышает по порядку величины 0,5%. Грубая оценка вклада мюонных пар говорит о том, что он меньше 0,05%, поскольку $\ln(Q^2/m^2) \sim 3 \ln(Q^2/m_\mu^2)$. Вклады адронных (в первую очередь пионных) и тау-лептонных пар должны быть еще меньше. Более подробно они обсуждались в работе [68]. Таким образом, для получения теоретической точности порядка 0,1% мы ограничиваемся учетом e^+e^- -пар в следующем за ведущим логарифмическом приближении.

При выводе поправок за счет виртуальных и мягких фотонов, сопровождающих однократное жесткое тормозное излучение, рассмотрим два случая. В первом оба вида излучения порождаются одним и тем же фермионом, во втором — разными. В следующей формуле верхний индекс показывает излучение из электронной линии, а нижний — из позитронной:

$$d\sigma|_{H(S+V)} = d\sigma^{H(S+V)} + d\sigma_{H(S+V)} + d\sigma_{(S+V)}^H + d\sigma_H^{(S+V)}. \quad (3.45)$$

Если излучают оба фермиона, то

$$\Sigma_{(S+V)}^H + \Sigma_H^{(S+V)} = 2\Sigma^H \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left[(L-1) \ln \Delta + \frac{3}{4}L - 1 \right], \quad (3.46)$$

где Σ^H дается формулой (3.29). Более сложная ситуация возникает, если поправки связаны с одной и той же фермионной линией. В этом случае мы можем воспользоваться ранее полученным в работе [126] (см. также нашу статью [165]) выражением для комптоновского тензора с тяжелым фотоном, которое описывает процесс

$$\gamma^*(q) + e^-(p_1) \rightarrow e^-(q_1) + \gamma(k) + (\gamma_S). \quad (3.47)$$

В пределе излучения фотона на малый угол имеем

$$d\sigma^{H(S+V)} = \frac{\alpha^4 dx d^2\mathbf{q}_1^\perp d^2\mathbf{q}_2^\perp}{4x(1-x)(\mathbf{q}_2^\perp)^4\pi^3} [(B_{11}(s_1, t_1) + x^2 B_{11}(t_1, s_1))h + T],$$

$$T = T_{11}(s_1, t_1) + x^2 T_{11}(t_1, s_1) + x(T_{12}(s_1, t_1) + T_{12}(t_1, s_1)),$$

$$h = 2 \left(L - \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{-u_1} - 1 \right) (2 \ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2},$$

где $\Delta = (\Delta\varepsilon/\varepsilon) \ll 1$, $\Delta\varepsilon$ — максимальная энергия недетектируемого мягкого фотона; $B_{11}(s_1, t_1) = (-4(\mathbf{q}_2^\perp)^2)/(s_1 t_1) - 8m^2/s_1^2$ — борновская часть комптоновского тензора. Инварианты определены следующим образом: $s_1 = 2q_1 k$, $t_1 = -2p_1 k$, $u_1 = (p_1 - q_1)^2$, $s_1 + t_1 + u_1 = q^2$.

Опуская технические детали относительно громоздких вычислений, которые проводились с использованием компьютерной программы аналитических преобразований FORM [166, 167], приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Sigma^{H(S+V)} &= \Sigma_{H(S+V)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} \frac{dx(1+x^2)}{1-x} L \left\{ \left(2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) \times \right. \\ &\times [(L-1)(1+\Theta) + k(x, z)] + \frac{1}{2} \ln^2 x + (1+\Theta)[-2 + \ln x - 2 \ln \Delta] + \\ &+ (1-\Theta) \left[\frac{1}{2} L \ln x + 2 \ln \Delta \ln x - \ln x \ln(1-x) - \right. \\ &\left. - \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) - \frac{x(1-x) + 4x \ln x}{2(1+x^2)} \right] - \left. \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \right\}, \quad (3.48) \end{aligned}$$

где $k(x, z)$ берется из (3.29) и $\Theta \equiv \Theta(x^2 \rho^2 - z)$.

Рассмотрим теперь вклад в сечение за счет излучения двух жестких фотонов. Будем различать две его части: а) одновременное излучение двух фотонов в разных направлениях (вдоль импульсов электрона и позитрона) и б) излучение двух фотонов в одном направлении (вдоль импульса электрона или позитрона). В первом случае дифференциальное сечение может быть получено путем использования представления через импакт-параметр [168]. Это дает [169, 170]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow (e^+\gamma)(e^-\gamma)}}{dx_1 d^2\mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2\mathbf{q}_2^\perp} &= \frac{\alpha^4}{\pi^3} \int \frac{d^2\mathbf{k}^\perp}{\pi(\mathbf{k}^\perp)^4} (1 - \Pi(-(\mathbf{k}^\perp)^2))^{-2} \times \\ &\times R(x_1; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{k}^\perp) R(x_2; \mathbf{q}_2^\perp, -\mathbf{k}^\perp), \quad (3.49) \end{aligned}$$

где $R(x; \mathbf{q}^\perp, \mathbf{k}^\perp)$ берется из (3.25). Вычисление соответствующего вклада Σ_H^H в Σ аналогично случаю однократного жесткого тормозного излучения, результат имеет вид

$$\Sigma_H^H = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx_1 \frac{1+x_1^2}{1-x_1} \times \\ \times \int_{x_c/x_1}^{1-\Delta} dx_2 \frac{1+x_2^2}{1-x_2} \Phi(x_1, z) \Phi(x_2, z), \quad (3.50)$$

где (см. (3.30))

$$\Phi(x, z) = (L-1)[\Theta(z-1)\Theta(\rho^2-z) + \Theta(z-x^2)\Theta(\rho^2x^2-z)] + \\ + L_3[-\Theta(x^2-z) + \Theta(z-x^2\rho^2)] + \left(L_2 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(z-x^2) \times \\ \times \Theta(x^2\rho^2-z) + \left(L_1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(z-1)\Theta(\rho^2-z) + \\ + (\Theta(1-z) - \Theta(z-\rho^2)) \ln \left| \frac{(z-x)(\rho^2-z)}{(x\rho^2-z)(z-1)} \right|. \quad (3.51)$$

Обратимся теперь к случаю двойного тормозного излучения в одном направлении и к вкладу образования дополнительной жесткой e^+e^- -пары. Здесь мы будем использовать развитый представленный выше метод разбиения фазового пространства конечных частиц на коллинеарные и полуколлинеарные области.

В первом случае обе рожденные частицы движутся внутри узких конусов с углами $\theta_i < \theta_0 \ll 1$ вокруг импульсов породивших их частиц (начальных или конечных). В полуколлинеарной области только одна из излученных частиц движется внутри одного из этих узких конусов, а другая — вне. Для полностью инклюзивного сечения такое разделение этих кинематических областей не имеет физического смысла. Потому в сумме вкладов зависимость от вспомогательного параметра θ_0 обязана сократиться. Получение этого сокращения служит одной из внутренних проверок правильности проведенных вычислений. Подчеркнем, что используемый метод позволяет полностью получить вклады ведущего и следующего за ведущим логарифмических приближений. Кинематическая область, когда обе родившиеся частицы движутся вне всех узких конусов, не дает вообще никаких слагаемых, усиленных большими логарифмами. Систематическое отбрасывание вкладов этой кинематической области приводит к малому вкладу $\sim (\alpha/\pi)^2 \lesssim 0,6 \cdot 10^{-5}$ в теоретическую неопределенность окончательного результата.

После проведения громоздких вычислений мы получаем вклады коллинеарных и полуколлинеарных кинематических областей в виде

$$\Sigma^{HH} = \Sigma_{HH} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \times$$

$$\times \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} dx_1 \frac{I^{HHL}}{x_1(1-x-x_1)(1-x_1)^2},$$

$$I^{HH} = A \Theta(x^2 \rho^2 - z) + B + C \Theta((1-x_1)^2 \rho^2 - z),$$

$$A = \gamma\beta \left(\frac{L}{2} + \ln \frac{(\rho^2 x^2 - z)^2}{x^2 (\rho^2 x (1-x_1) - z)^2} \right) + (x^2 + (1-x_1)^4) \times$$

$$\times \ln \frac{(1-x_1)^2 (1-x-x_1)}{xx_1} + \gamma_A,$$

$$B = \gamma\beta \left(\frac{L}{2} + \ln \left| \frac{x^2(z-1)(\rho^2-z)(z-x^2)(z-(1-x_1)^2)^2}{(\rho^2 x^2 - z)(z-(1-x_1))^2 (\rho^2(1-x_1)^2 - z)^2} \right| + \right.$$

$$\left. + \ln \left| \frac{(\rho^2 x (1-x_1) - z)^2}{(z-x(1-x_1))^2} \right| \right) + (x^2 + (1-x_1)^4) \ln \frac{(1-x_1)^2 x_1}{x(1-x-x_1)} + \delta_B, \tag{3.52}$$

$$C = \gamma\beta \left(L + 2 \ln \left| \frac{x(\rho^2(1-x_1)^2 - z)^2}{(1-x_1)^2 (\rho^2 x (1-x_1) - z) (\rho^2(1-x_1) - z)} \right| \right) -$$

$$- 2(1-x_1)\beta - 2x(1-x_1)\gamma,$$

$$\gamma = 1 + (1-x_1)^2, \quad \beta = x^2 + (1-x_1)^2,$$

$$\gamma_A = xx_1(1-x-x_1) - x_1^2(1-x-x_1)^2 - 2(1-x_1)\beta,$$

$$\delta_B = xx_1(1-x-x_1) - x_1^2(1-x-x_1)^2 - 2x(1-x_1)\gamma.$$

Можно заметить, что комбинации

$$r^{\gamma\gamma} + \Sigma^{H(S+V)} + \Sigma^{HH}, \quad r^{\gamma}_\gamma + \Sigma^H_{S+V} + \Sigma^{S+V}_H + \Sigma^H_H \tag{3.53}$$

с $r^{\gamma\gamma}$ и r_γ^γ нормализованные (см. (3.42) и (3.43)) к

$$r^{\gamma\gamma} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} r_{S+V}^{\gamma\gamma}$$

и

$$r_\gamma^\gamma \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} r_{S+V\gamma}^\gamma$$

соответственно, не зависят от Δ в пределе $\Delta \rightarrow 0$.

Полное выражение $\Sigma^{2\gamma}$, дающее вклад в (3.20) за счет излучения двух фотонов (реальных и/или виртуальных), складывается из (3.43), (3.46), (3.48), (3.50), (3.51) и (3.53). Оно не зависит от параметра Δ и имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma^{2\gamma} &= \Sigma_{S+V}^{\gamma\gamma} + 2\Sigma^{H(V+S)} + 2\Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^H + 2\Sigma^{HH} = \\ &= \Sigma^{\gamma\gamma} + \Sigma_\gamma^\gamma + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L(\phi^{\gamma\gamma} + \phi_\gamma^\gamma), \quad L = \ln \frac{\varepsilon^2 \theta_1^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ведущие вклады $\Sigma^{\gamma\gamma}$ и Σ_γ^γ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\gamma\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-Q_1^2 z))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) [\Theta(x^2 \rho^2 - z) + 1] + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 \frac{dt}{t} P^{(1)}(t) P^{(1)}\left(\frac{x}{t}\right) \Theta(t^2 \rho^2 - z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\gamma^\gamma &= \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-Q_1^2 z))^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 P^{(1)}(x_1) \int_{x_c/x_1}^1 dx_2 \times \\ &\quad \times P^{(1)}(x_2) [\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x_1^2) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z)] \times \\ &\quad \times [\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x_2^2) \Theta(x_2^2 \rho^2 - z)]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Мы убеждаемся в том, что ведущие логарифмические вклады второго порядка теории возмущений в $\Sigma^{2\gamma}$ могут быть выражены через конволюцию борновского сечения с функциями расщепления. Таким образом, мы прямым счетом показали применимость подхода структурных функций электрона в ВЛП для данного процесса.

Функции $\phi^{\gamma\gamma}$ и ϕ_γ^γ в выражении (3.54) собирают те следующие за ведущими слагаемые, которые не повторяют структуры факторизации ВЛП.

Действительно, как обсуждалось в разд. 1, структура поправок СВЛП богаче той, что имеется в ВЛП.

Изучение процесса рождения пар в электрон-позитронных столкновениях проходило в течение многих лет (см., например, работу [169] и ссылки в ней). В частности, было обнаружено, что полный вклад процесса рождения реальных пар содержит третью степень большого логарифма, т.е. $\mathcal{O}(\alpha^2 L^3)$. Данные слагаемые происходят из кинематической области, когда пара имеет малую инвариантную массу и движется в узком конусе с раствором порядка $\sim m/\epsilon$ в направлении, близком к электронному или позитронному пучку. Покажем, что присутствие таких высоких степеней логарифма не противоречит подходу ВЛП, который дает как максимум только $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$, поскольку члены с более высокой степенью L сокращаются в сумме вкладов реальных и виртуальных пар.

Подчеркнем, что при наличии в конечном состоянии двух электрон-позитронных пар необходимо предельно аккуратно накладывать экспериментальные ограничения. В противном случае есть возможность столкнуться с проблемой двойного счета. Будем требовать, чтобы как минимум одна e^+e^- -пара была зарегистрирована детекторами, стоящими в противоположных направлениях (см. (3.89)).

Для расчета следующих за ведущими радиационных поправок за счет излучения реальных e^+e^- -пар мы применим метод разделения кинематического фазового пространства на коллинеарные, полуколлинеарные и неколлинеарные области аналогично тому, как это было сделано для случая излучения фотонов. В коллинеарной области реакции

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q^2) + e^-(p_-) + e^-(p_+) \quad (3.57)$$

обе дополнительные рожденные заряженные частицы, имеющие импульсы p_{\pm} , движутся внутри узких конусов вдоль направлений импульсов остальных начальных или конечных частиц:

$$\widehat{\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_-} \sim \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{p}_i} \sim \widehat{\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_i} < \theta_0 \ll 1, \quad \epsilon \theta_0 / m \gg 1, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2.$$

Вклад коллинеарных кинематических областей содержит члены порядков $(\alpha L/\pi)^2$, $(\alpha/\pi)^2 L \ln(\theta_0/\theta)$ и $(\alpha/\pi)^2 L$, где $\theta = \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_1}$ — угол рассеяния. В полуколлинеарных областях выполняется только одно из условий (3.58):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_-} < \theta_0, \quad \widehat{\mathbf{p}_{\pm} \mathbf{p}_i} > \theta_0, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{p}_i} < \theta_0, \quad \widehat{\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_i} > \theta_0, \\ \text{или} \quad \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{p}_i} > \theta_0, \quad \widehat{\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_i} < \theta_0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Соответствующие вклады содержат члены вида

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L \ln \frac{\theta_0}{\theta}, \quad \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L. \quad (3.60)$$

Зависимость от вспомогательного малого параметра θ_0 сокращается в сумме вкладов коллинеарных и полуколлинеарных областей.

Мы принимаем во внимание и синглетный, и несинглетный механизмы образования пары. При этом обязательно надо учесть попарную тождественность в конечном состоянии. В случае баба-рассеяния на малые углы важна только часть из всех 36 фейнмановских диаграмм (в рамках КЭД), описывающих процесс (3.57). Нетрудно проверить, что интерференция амплитуд, описывающих рождение дополнительных пар, движущихся вдоль направления электронного и позитронного пучков, очень сильно подавлена. Явление подавления интерференции *верх-низ* хорошо известно для случая излучения фотонов и обсуждалось в нашей работе [84].

Сумма вкладов виртуальных пар (за счет петлевых вставок поляризации вакуума в пропагатор виртуального фотона) и реальных мягких пар не содержит слагаемых, пропорциональных кубу большого логарифма. Но она зависит от вспомогательного параметра $\Delta = \delta\varepsilon/\varepsilon$ ($m_e \ll \delta\varepsilon \ll \varepsilon$, где $\delta\varepsilon$ есть сумма энергий компонент мягкой пары). Зависимость от Δ исчезает после добавления вклада жестких пар. Но прежде необходимо провести интегрирование по долям энергии компонент дополнительной пары и *основных* электрона и позитрона:

$$\Delta = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} < x_1 + x_2, \quad x_c < x = 1 - x_1 - x_2 < 1 - \Delta, \quad (3.61)$$

$$x_1 = \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon}, \quad x = \frac{q_1^0}{\varepsilon},$$

где ε_{\pm} — энергии компонент пары. Для определенности мы рассматриваем случай движения пары вдоль пучка электронов.

Обратимся сначала к случаю коллинеарной кинематики. Можно выделить четыре разные области: рожденная пара может двигаться в направлении импульса одной из четырех остальных частиц. Начнем со случая излучения пары коллинеарно импульсу начального электрона. Разложим импульсы на поперечные и продольные составляющие:

$$p_+ = x_1 p_1 + p_+^{\perp}, \quad p_- = x_2 p_1 + p_-^{\perp}, \quad q_1 = x p_1 + q_1^{\perp}, \quad (3.62)$$

$$x = 1 - x_1 - x_2, \quad q_2 \approx p_2, \quad p_+^{\perp} + p_-^{\perp} + q_1^{\perp} = 0,$$

где p_i^{\perp} — двумерные импульсы конечных частиц, поперечные по отношению к оси пучка электронов. Для кинематических инвариантов полезно ввести безразмерные величины:

$$z_i = \left(\frac{\varepsilon\theta_i}{m} \right)^2, \quad 0 < z_i < \left(\frac{\varepsilon\theta_0}{m} \right)^2 \gg 1,$$

$$A = \frac{(p_+ + p_-)^2}{m^2} = (x_1 x_2)^{-1} [(1-x)^2 + x_1^2 x_2^2 (z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2} \cos \phi)],$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2p_1 p_-}{m^2} = x_2^{-1} [1 + x_2^2 + x_2^2 z_2], \\
 A_2 &= \frac{2p_1 p_+}{m^2} = x_1^{-1} [1 + x_1^2 + x_1^2 z_1], \\
 C &= \frac{(p_1 - p_-)^2}{m^2} = 2 - A_1, \quad D = \frac{(p_1 - q_1)^2}{m^2} - 1 = A - A_1 - A_2,
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

где ϕ — азимутальный угол между плоскостями, задаваемыми следующими парами векторов: $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_+^\perp)$ и $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_-^\perp)$. Удерживая в квадрате матричного элемента только слагаемые, неисчезающие в пределе $\theta_0 \rightarrow 0$, находим, что только 8 из 36 диаграмм дают вклад. Результат непосредственных вычислений можно представить в факторизованной форме:

$$\sum_{\text{spins}} |M|^2 \Big|_{p_+, p_- \parallel p_1} = \sum_{\text{spins}} |M_0|^2 2^7 \pi^2 \alpha^2 \frac{I}{m^4}, \tag{3.64}$$

где один из множителей соответствует квадрату матричного элемента в борновском приближении (без рождения пары):

$$\sum_{\text{spins}} |M_0|^2 = 2^7 \pi^2 \alpha^2 \left(\frac{s^4 + t^4 + u^4}{s^2 t^2} \right), \tag{3.65}$$

$$s = 2p_1 p_2, \quad t = -Q^2 x, \quad u = -s - t,$$

а величина I , обозначающая фактор коллинеарного излучения, совпадает с выражением I_a , полученным в работе [171]. Запишем его через наши кинематические переменные:

$$\begin{aligned}
 I &= (1 - x_2)^{-2} \left(\frac{A(1 - x_2) + Dx_2}{DC} \right)^2 + (1 - x)^{-2} \left(\frac{C(1 - x) - Dx_2}{AD} \right)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2xAD} \left[\frac{2(1 - x_2)^2 - (1 - x)^2}{1 - x} + \frac{x_1 x - x_2}{1 - x_2} + 3(x_2 - x) \right] + \\
 &+ \frac{1}{2xCD} \left[\frac{(1 - x_2)^2 - 2(1 - x)^2}{1 - x_2} + \frac{x - x_1 x_2}{1 - x} + 3(x_2 - x) \right] + \\
 &+ \frac{x_2(x^2 + x_2^2)}{2x(1 - x_2)(1 - x)AC} + \frac{3x}{D^2} + \frac{2C}{AD^2} + \frac{2A}{CD^2} + \frac{2(1 - x_2)}{xA^2 D} - \\
 &- \frac{4C}{xA^2 D^2} - \frac{4A}{D^2 C^2} + \frac{1}{DC^2} \left[\frac{(x_1 - x)(1 + x_2)}{x(1 - x_2)} - 2 \frac{1 - x}{x} \right]. \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

Фазовый объем конечных частиц можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6 2q_1^0 2q_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 x + p_2 - q_1 - q_2) \times \\
 &\times m^4 2^{-8} \pi^{-4} x_1 x_2 dx_1 dx_2 dz_1 dz_2 \frac{d\phi}{2\pi}. \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

Далее мы интегрируем по переменным рожденной пары. Аналогично проводится вычисление вклада за счет излучения пары вдоль направления движения рассеянного электрона. Добавляя получаемый простыми заменами вклад двух оставшихся коллинеарных кинематических областей за счет излучения вдоль импульсов начального и конечного позитронов, получаем

$$d\sigma_{\text{coll}} = \frac{\alpha^4 dx}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \left\{ R_0(x) \left(L + 2 \ln \frac{\lambda^2}{z} \right) (1 + \Theta) + \right. \\ \left. + 4R_0(x) \ln x + 2\Theta f(x) + 2f_1(x) \right\}, \quad \lambda = \frac{\theta_0}{\theta_{\min}},$$

$$\Theta \equiv \Theta(x^2 \rho^2 - z) = \begin{cases} 1, & x^2 \rho^2 > z, \\ 0, & x^2 \rho^2 \leq z, \end{cases}$$

$$R_0(x) = \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} + \frac{(1-x)}{3x} (4+7x+4x^2) + 2(1+x) \ln x,$$

$$f(x) = -\frac{107}{9} + \frac{136}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3x} - \frac{20}{9(1-x)} + \\ + \frac{2}{3} \left[-4x^2 - 5x + 1 + \frac{4}{x(1-x)} \right] \ln(1-x) + \frac{1}{3} \left[8x^2 + 5x - 7 - \frac{13}{1-x} \right] \ln x - \\ - \frac{2}{1-x} \ln^2 x + 4(1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{2(3x^2-1)}{1-x} \text{Li}_2(1-x), \quad (3.68)$$

$$f_1(x) = -x \text{Re} f \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{116}{9} + \frac{127}{9}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3x} - \frac{20}{9(1-x)} + \\ + \frac{2}{3} \left[-4x^2 - 5x + 1 + \frac{4}{x(1-x)} \right] \ln(1-x) + \frac{1}{3} \left[8x^2 - 10x - 10 + \frac{5}{1-x} \right] \ln x - \\ - (1+x) \ln^2 x + 4(1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{2(x^2-3)}{1-x} \text{Li}_2(1-x),$$

$$Q_1 = \varepsilon \theta_{\min}, \quad L = \ln \frac{z Q_1^2}{m^2}.$$

Рассмотрим теперь полуколлинеарные кинематические области. Ограничимся опять случаем, когда рожденная пара движется вдоль импульса начального или конечного электрона. Можно выделить три основных полуколлинеарных области, дающих вклады, существенные в рамках заданной точности. Первая область включает события, в которых излученная пара имеет очень малую инвариантную массу:

$$4m^2 \ll (p_+ + p_-)^2 \ll |q^2|,$$

и при этом не попадает ни в один из ранее определенных узких конусов вокруг импульсов всех основных четырех частиц (в данном случае это условие важно для конусов только вокруг импульсов электронов). Эту область будем обозначать как $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$. Источником большого логарифма в данной кинематике является малость (по сравнению с s) знаменателя пропагатора виртуального фотона, который конвертируется в пару.

Вторая полуколлинеарная область включает в себя события, в которых мала инвариантная масса рожденного позитрона и рассеянного электрона: $4m^2 \ll (p_+ + q_1)^2 \ll |q^2|$, при условии, что рожденный позитрон избегает попадания в узкие конусы вдоль импульсов начального и конечного электронов. Мы обозначаем эту область как $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1$.

Третья полуколлинеарная область включает события, в которых рожденный электрон движется внутри узкого конуса вдоль импульса начального электрона, а рожденный позитрон — нет. Эта область будет обозначаться как $\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1$.

Соответствующий вклад в дифференциальное сечение имеет вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{8\pi^4 s^2} \frac{|M|^2}{q^4} \frac{dx_1 dx_2 dx}{x_1 x_2 x} d^2 \mathbf{p}_+^\perp d^2 \mathbf{p}_-^\perp d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp \times \\ \times \delta(1 - x_1 - x_2 - x) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp), \quad (3.69)$$

где x_1 (x_2), x и \mathbf{p}_+^\perp (\mathbf{p}_-^\perp), \mathbf{q}_1^\perp — доли энергии и поперечные импульсы рожденного позитрона (электрона) и рассеянного электрона (позитрона) соответственно. Величины $s = (p_1 + p_2)^2$ и $q^2 = -Q^2 = (p_2 - q_2)^2 = -\varepsilon^2 \theta^2$ суть квадрат энергии в системе центра масс и квадрат переданного импульса. В выделенных нами областях имеем разные выражения для квадрата матричного элемента $|M|^2$.

Для случая, когда $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$, получаем (подробности вычислений могут быть найдены в статье [83])

$$d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-} = \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp)^2} \times \\ \times \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + x\mathbf{q}_2^\perp)^2} \left[(1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 - \frac{4x x_1 x_2}{(1 - x)^2} \right], \quad (3.70)$$

где ϕ — угол между двумерными векторами \mathbf{q}_1^\perp и \mathbf{q}_2^\perp ; $\mathbf{q}_{1,2}^\perp$ — поперечные компоненты импульсов конечных электрона и позитрона; $x_{1,2}$ — их доли энергии ($x = 1 - x_1 - x_2$). На этом этапе нужно использовать ограничения на величины поперечных импульсов \mathbf{q}_1^\perp и \mathbf{q}_2^\perp . Это связано с необходимостью исключить попадание неколлинеарных импульсов в узкие конусы:

$$\left| \frac{\mathbf{p}_+^\perp}{\varepsilon_+} \right| > \theta_0, \quad \left| \mathbf{r}^\perp \right| = \left| \frac{\mathbf{p}_+^\perp}{\varepsilon_+} - \frac{\mathbf{q}_1^\perp}{\varepsilon_2} \right| > \theta_0, \quad (3.71)$$

где ε_+ и ε_2 — энергии рожденного позитрона и рассеянного электрона соответственно. Для исключения p_+^\perp из последнего выражения можно использовать закон сохранения для поперечного импульса, который в нашем случае имеет вид

$$\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \frac{1-x}{x_1} \mathbf{p}_+^\perp = 0.$$

В полуколлинейарной области, где $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1$, получаем

$$\begin{aligned} d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1} &= \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2} \times \\ &\times \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + x\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{x^2}{(1-x_2)^2} \left[(1-x)^2 + (1-x_1)^2 - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

с ограничениями

$$\left| \frac{\mathbf{p}_-^\perp}{\varepsilon_-} - \frac{\mathbf{q}_1^\perp}{\varepsilon_2} \right| > \theta_0, \quad \mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \frac{1-x_2}{x} \mathbf{q}_1^\perp = 0. \quad (3.73)$$

Наконец, для области $\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1$ находим

$$\begin{aligned} d\sigma_{\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1} &= \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2} \times \\ &\times \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp)^2} \left[\frac{(1-x)^2 + (1-x_1)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^4} \right]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ограничения, связанные с исключением из фазового пространства коллинейарных кинематических областей, в которых рожденная пара движется внутри узких конусов вдоль импульсов начального или конечного электрона, имеют вид

$$\frac{|\mathbf{p}_+^\perp|}{\varepsilon_1} > \theta_0, \quad \mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp = 0. \quad (3.75)$$

Для получения полного вклада в сечение баба-рассеяния на малые углы за счет излучения жесткой e^+e^- -пары в $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ -приближении мы должны добавить к $d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-} + d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1} + d\sigma_{\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1}$ вклад коллинейарной области (3.68). Включая аналогичные вклады за счет излучения вдоль направления позитронного пучка и интегрируя по доле энергии x_2 , получаем

$$\sigma_H = 2 \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \{ L^2(1+\Theta)R(x) + L[\Theta F_1(x) + F_2(x)] \}, \quad (3.76)$$

$$F_1(x) = d(x) + C_1(x), \quad F_2(x) = d(x) + C_2(x),$$

$$d(x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{8}{3} \ln(1-x) - \frac{20}{9} \right),$$

$$\begin{aligned} C_1(x) = & -\frac{113}{9} + \frac{142}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3x} - \frac{4}{3}(1+x) \ln(1-x) + \\ & + \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \left[\ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{(x\rho^2 - z)^2} - 3\text{Li}_2(1-x) \right] + \\ & + \left(8x^2 + 3x - 9 - \frac{8}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \ln x + \frac{2(5x^2 - 6)}{1-x} \ln^2 x + \beta(x) \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{\rho^4}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} C_2(x) = & -\frac{122}{9} + \frac{133}{9}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{3}(1+x) \ln(1-x) + \\ & + \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \left[\ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2-z)(z-1)}{(x^2\rho^2-z)(z-x)^2} \right| + 3\text{Li}_2(1-x) \right] + \\ & + \frac{1}{3} \left(-8x^2 - 32x - 20 + \frac{13}{1-x} + \frac{8}{x} \right) \ln x + 3(1+x) \ln^2 x + \\ & + \beta(x) \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2-z)(z-1)}{x^2\rho^2-z} \right|, \quad \beta = 2R(x) - \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x}, \\ R(x) = & \frac{1}{3} \frac{1+x^2}{1-x} + \frac{1-x}{6x} (4 + 7x + 4x^2) + (1+x) \ln x. \end{aligned}$$

Суммарный вклад излучения мягких (с энергией, не превышающей $\Delta\varepsilon$) и виртуальных e^+e^- -пар дается формулой (подробности вывода приведены в работе [84])

$$\begin{aligned} \sigma_{S+V} = & \frac{4\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L^2 \left(\frac{2}{3} \ln \Delta + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \mathcal{L} \left(-\frac{17}{6} + \frac{4}{3} \ln^2 \Delta - \frac{20}{9} \ln \Delta - \frac{4}{3} \zeta(2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Используя выражения (3.76) и (3.78), нетрудно проверить, что логарифмы вспомогательного параметра Δ сокращаются в сумме $\sigma_{\text{pair}} = \sigma_H + \sigma_{S+V}$. Таким образом, мы можем записать полный вклад σ_{pair} радиационных поправок

за счет e^+e^- -пар в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pair}} = & \frac{2\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L^2 \left(1 + \frac{4}{3} \ln(1-x_c) - \frac{2}{3} \int_{x_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \right) + \right. \\ & + L \left[-\frac{17}{3} - \frac{8}{3} \zeta_2 - \frac{40}{9} \ln(1-x_c) + \frac{8}{3} \ln^2(1-x_c) + \int_{x_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \left(\frac{20}{9} - \frac{8}{3} \ln(1-x) \right) \right] + \\ & \left. + \int_{x_c}^1 dx [L^2(1+\Theta)\bar{R}(x) + L(\Theta C_1(x) + C_2(x))] \right\}, \quad (3.79) \\ \bar{R}(x) = & R(x) - \frac{2}{3(1-x)}, \quad \bar{\Theta} = 1 - \Theta. \end{aligned}$$

Этот вклад в дальнейшем использовался для численных оценок в реалистических условиях экспериментов на LEP1 и LEP2. Легко видеть, что ведущие логарифмические поправки в найденном вкладе получились в форме, предсказанной ренормализационной группой в ВЛП. Важно отметить, что найденные прямым счетом фейнмановских диаграмм данного процесса следующие за ведущими поправки также согласуются с соответствующими СВЛП предсказаниями.

Для нахождения ведущих логарифмических поправок третьего порядка мы возьмем соответствующую часть пертурбативного разложения структурной функции электрона в ВЛП, выведенной во введении. Для упрощения аналитических выкладок воспользуемся реалистическим предположением о малости порога экспериментальной регистрации частиц и пренебрежем членами порядка

$$x_c^n \left(\frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \leq 3 \cdot 10^{-5}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.80)$$

Тогда в заданном порядке можно ограничиться рассмотрением излучения только начальными электроном и позитроном. Вклад чисто фотонных поправок (3 реальных или виртуальных фотона в любой комбинации) в сечение рассматриваемого процесса имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma^{3\gamma} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c}^1 dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \times \\ & \times \left[\frac{1}{6} \delta(1-x_2) P^{(3)}(x_1) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z) + \frac{1}{2x_1^2} P^{(2)}(x_1) P^{(1)}(x_2) \Theta_1 \Theta_2 \right] (1 + \mathcal{O}(x_c^3)), \quad (3.81) \\ \Theta_1 \Theta_2 = & \Theta \left(z - \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) \Theta \left(\rho^2 \frac{x_2^2}{x_1^2} - z \right). \end{aligned}$$

Помимо фотонных поправок в третьем порядке теории возмущений мы имеем и вклад рождения пар, сопровождаемый излучением одного фотона. Он также берется с помощью конволюции с соответствующей частью из выведенного ранее выражения для структурной функции электрона (учитываем и синглетный, и несинглетный механизмы образования пар):

$$\begin{aligned} \Sigma^{e^+e^- \gamma} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} L \right)^3 \int_1^{\rho^2} dz z^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c}^1 dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{3} \left[R^P(x_1) - \frac{1}{3} R^S(x_1) \right] \delta(1 - x_2) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2x_1^2} P^{(1)}(x_2) R(x_1) \Theta_1 \Theta_2 \right\}, \quad (3.82) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R(x) &= R^S(x) + \frac{2}{3} P^{(1)}(x), \\ R^S(x) &= \frac{1-x}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x, \\ R^P(x) &= R^S(x) \left(\frac{3}{2} + 2 \ln(1-x) \right) + (1+x) (-\ln^2 x + 4\text{Li}_2(1-x) + \\ & + \frac{1}{3} (-9 - 3x + 8x^2) \ln x + \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{x} - 8 + 8x + 3x^2 \right) + \frac{2}{3} P^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Полное выражение для сечения (3.20) рассматриваемого процесса определяется суммой выражений для фотонных поправок (3.31), (3.54), (3.81) и вкладов пар (3.79), (3.82). Величина Σ зависит от параметров x_c, ρ и Q_1^2 .

3.1.3. Оценка теоретической неопределенности. Теоретическая неопределенность результатов, полученных в рамках пертурбативной теории, складывается из оценок вкладов, которыми пренебрегли. Перечислим их.

1. Поправки первого порядка к диаграммам аннигиляционного типа можно оценить так:

$$\frac{\alpha}{\pi} \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta}{\theta^2} \Delta_\theta \leq 0,10 \cdot 10^{-4}. \quad (3.83)$$

2. Аналогичные члены второго порядка не превышают

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta}{\theta^2} l^4 &\leq 0,23 \cdot 10^{-4}, \\ \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (\theta_2^4 - \theta_1^4) \mathcal{L}^4 &\leq 0,5 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

3. Мы отбрасывали члены, нарушающие эйкональное приближение; они имеют порядок

$$\frac{\alpha}{\pi} \frac{Q^2}{s} \leq 0,3 \cdot 10^{-6}. \quad (3.85)$$

4. Для оценки неопределенности важны слагаемые второго порядка по α , которые не усилены большим логарифмом:

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 = 0,5 \cdot 10^{-5}. \quad (3.86)$$

5. Вклады за счет рождения более тяжелых пар ($\mu\mu$, $\tau\tau$, $\pi\pi$, ...) в несколько раз меньше рассмотренного вклада e^+e^- -пар (который и сам невелик):

$$\Sigma_{\pi\pi} + \Sigma_{\mu\mu} + \Sigma_{\tau\tau} \leq 0,1 \Sigma^{e^+e^-} \leq 0,5 \cdot 10^{-4}. \quad (3.87)$$

6. Поправки высших порядков, включая множественное ($n > 3$) излучение мягких и коллинеарных фотонов, малы, поскольку они пропорциональны фактору $(\alpha L/\pi)^4 \leq 0,2 \cdot 10^{-5}$.

7. Также были опущены члены третьего порядка, связанные с излучением конечными частицами. Это было сделано, поскольку в эксперименте детектирование конечных частиц и измерение их энергии проводится с помощью электромагнитных калориметров, а последние суммируют энергии всех частиц, попавших в некоторую область, задаваемую разрешением детектора. Это приводит к тому, что для этого вклада эффективно выполняются условия теоремы Киношита–Ли–Науэнберга и все ведущие логарифмические поправки сокращаются. Мы оцениваем связанную с этим погрешность как

$$x_c \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^3 \leq 0,3 \cdot 10^{-4} \quad (\text{для } x_c = 0,5). \quad (3.88)$$

Рассматривая неопределенности в пунктах 1–7 как независимые, можно заключить, что суммарная теоретическая неопределенность нашего результата составляет около $\pm 0,06\%$.

Определим величину Σ_0^0 как $\Sigma_0|_{\Pi=0}$ (см. выражение (3.21)), т. е. как величину, соответствующую борновскому сечению без учета эффекта поляризации вакуума. Экспериментально измеряемое сечение тогда представляется в виде

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \Sigma_0^0 (1 + \delta_0 + \delta\gamma + \delta^2\gamma + \delta^{e^+e^-} + \delta^3\gamma + \delta^{e^+e^-}\gamma), \quad (3.89)$$

где

$$\Sigma_0^0 = \Sigma_0|_{\Pi=0} = 1 - \rho^{-2} + \Sigma_W + \Sigma_\theta|_{\Pi=0} \quad (3.90)$$

и

$$\delta_0 = \frac{\Sigma_0 - \Sigma_0^0}{\Sigma_0^0}; \quad \delta\gamma = \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma_0^0}; \quad \delta^2\gamma = \frac{\Sigma^2\gamma}{\Sigma_0^0}; \dots \quad (3.91)$$

Таблица 4. Величины δ^i (в %) для $\sqrt{s} = 91,161$ ГэВ, $\theta_1 = 1,61^\circ$, $\theta_2 = 2,8^\circ$, $\sin^2 \theta_W = 0,2283$, $\Gamma_Z = 2,4857$ ГэВ

x_c	δ_0	δ^γ	$\delta_{\text{leading}}^{2\gamma}$	$\delta_{\text{nonleading}}^{2\gamma}$	$\delta^{e^+e^-}$	$\delta^{e^+e^-\gamma}$	$\delta^{3\gamma}$	$\sum \delta^i$
0,1	4,120	-8,918	0,657	0,162	-0,016	-0,017	-0,019	-4,031 \pm 0,006
0,2	4,120	-9,226	0,636	0,156	-0,027	-0,011	-0,016	-4,368 \pm 0,006
0,3	4,120	-9,626	0,615	0,148	-0,033	-0,008	-0,013	-4,797 \pm 0,006
0,4	4,120	-10,147	0,586	0,139	-0,039	-0,005	-0,010	-5,356 \pm 0,006
0,5	4,120	-10,850	0,539	0,129	-0,044	-0,003	-0,006	-6,115 \pm 0,006
0,6	4,120	-11,866	0,437	0,132	-0,049	-0,002	-0,001	-7,229 \pm 0,006
0,7	4,120	-13,770	0,379	0,130	-0,057	-0,001	0,005	-9,194 \pm 0,006
0,8	4,120	-17,423	0,608	0,089	-0,069	0,001	0,013	-12,661 \pm 0,006
0,9	4,120	-25,269	1,952	-0,085	-0,085	0,005	0,017	-19,379 \pm 0,006

Соответствующие численные результаты представлены в табл. 4.

Знак каждого из вкладов в сечение может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от наложенных условий. Действительно, при расчетах однопетлевых радиационных поправок типична ситуация, когда положительный вклад за счет излучения жестких реальных дополнительных частиц (тормозных фотонов или пар) борется с отрицательным вкладом суммы петлевых поправок и мягкого тормозного излучения. В более высоких порядках теории возмущений знак при вкладе виртуальных и мягких поправок меняется (он чередуется в зависимости от четности степени α), но явление больших численных сокращений между разными вкладами сохраняется. Когда угол раствора счетчиков в детекторе мал, происходит отбрасывание заметной доли событий с излучением жестких фотонов, что приводит к преобладанию в полной сумме отрицательного вклада однопетлевых виртуальных поправок. Это наиболее заметно в предельном случае малой апертуры ($\rho \rightarrow 1$, $x_c \rightarrow 1$). Представленные численные результаты были получены с помощью нашей компьютерной программы NLLВНА, описанной в [85].

3.2. Электрон-позитронная аннигиляция и баба-рассеяние на большие углы. Успешное осуществление программы аналитических вычислений следующих за ведущими радиационных поправок к баба-рассеянию на малые углы, описанное в предыдущем разделе, естественным образом вызвало желание обобщить результаты на случай рассеяния на большие углы. Эта задача является более сложной потому, что при ее решении нельзя пользоваться условием малости угла рассеяния. Тем не менее нам удалось развить и обобщить методы, применявшиеся в предыдущей задаче, на новый случай. С точки зрения вычисления КЭД радиационных поправок процессы электрон-позитронной аннигиляции являются родственными баба-рассеянию на большие углы. Поэтому в этом разделе мы будем обсуждать их параллельно.

Детали вычислений сечений процессов e^+e^- -аннигиляции и рассеяния на большие углы можно найти в серии работ [67–72, 74, 75, 80, 87].

Причины, по которым важно создание прецизионного теоретического описания процесса баба-рассеяния на малые углы, актуальны и для случая рассеяния на большой угол. Действительно, если для определения светимости на ускорителе LEP применялось малоугловое рассеяние, то для абсолютного большинства других электрон-позитронных коллайдеров для этой цели используется случай рассеяния на большой угол. Это обусловлено особенностью типичных детекторов на этих установках. С другой стороны, возможность иметь наиболее высокую точность теоретического описания этого процесса по-прежнему обуславливает выбор баба-рассеяния в качестве нормировочного*. Кроме того, процесс баба-рассеяния на большие углы, имея большое сечение, дает фон ко многим другим процессам, измеряемым в эксперименте. А на планируемом линейном коллайдере этот процесс еще будет использоваться и для высокоточного определения энергий сталкивающихся пучков.

Задаче теоретического описания e^+e^- -рассеяния уделялось много внимания начиная с середины прошлого века (см., например, книгу [116]). Но продвижение в пертурбативных вычислениях от борновского древесного приближения до двухпетлевого уровня заняло более 50 лет и потребовало приложения больших усилий. При этом существенным оказалось развитие новых подходов и методов аналитических вычислений. В частности, применение методов нахождения ведущих и следующих за ведущими логарифмических поправок позволило существенно продвинуться в решении задачи о повышении точности описания баба-рассеяния на большие углы.

Изучение процессов электрон-позитронной аннигиляции в другие частицы являлось и продолжает оставаться одним из основных источников информации в физике высоких энергий. Создание как можно более точных теоретических предсказаний для этих процессов становится все более и более необходимым с развитием экспериментальной техники.

В этом разделе мы разберем задачу *сшивки* результатов, получаемых в ВЛП вида $(\alpha/\pi)^n L^n$, с полными расчетами КЭД-поправок первого порядка. В первую очередь получаемые результаты ориентированы на применение при анализе данных экспериментов на встречных электрон-позитронных пучках с энергиями порядка нескольких гигаэлектронвольт, таких как ВЭПП-2М, ВЭПП-2000 (Новосибирск) [172, 173], DAΦNE (Фраскати) [174, 175], BEPC/BES (Пекин) [176, 177] и др.

Ранее часто применялся метод учета следующих за ведущими радиационных поправок в виде так называемого \mathcal{K} -фактора, $\mathcal{K} = 1 + (\alpha/\pi)K$, ко-

*В некоторых случаях для мониторинга светимости на e^+e^- -коллайдерах параллельно с баба-рассеянием используют еще и другие процессы, например аннигиляцию в два фотона.

торый ставился в виде множителя при борновском сечении, сворачиваемом со структурными и фрагментационными функциями. Однако такой подход не позволял учесть детали кинематики процессов жесткого излучения, дающих вклад в этот \mathcal{K} -фактор. Поэтому для учета особенностей экспериментальных условий для данных вкладов приходится отказаться от такой полностью факторизованной формы представления поправленного сечения. Только таким образом можно повысить точность предсказаний для реалистических экспериментальных условий.

3.2.1. *Аннигиляция в мюонную пару.* Рассмотрим для начала процесс электрон-позитронной аннигиляции в мюонную пару:

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-).$$

При рассматриваемых энергиях (несколько гигаэлектронвольт) вклад канала аннигиляции через промежуточный Z -бозон мал, так как он подавлен фактором $s/M_Z^2 \lesssim 10^{-3}$. Мы будем учитывать его только в борновском приближении:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \{1 + K_W\}, \quad \frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \beta}{4s} (2 - \beta^2(1 - c^2)), \\ \beta &= \sqrt{1 - 4m_\mu^2/s}, \quad c = \cos \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}, \quad s = (p_+ + p_-)^2 = 4\epsilon^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Все процессы аннигиляции в этом пункте будут рассматриваться в системе отсчета, связанной с центром масс сталкивающихся электрона и позитрона. Величина K_W обозначает хорошо известный вклад Z -бозона (см., например, [178, 179]).

Радиационные поправки к рассматриваемому процессу уместно разбить на четную и нечетную части относительно зависимости от c . В случае вперед-назад симметричных измерений, который является наиболее типичным, нечетная часть не дает нулевой вклад.

Рассмотрим сначала четную по c часть. Используя хорошо известные в литературе выражения для формфакторов Паули и Дирака, а также формулу для вклада мягкого тормозного излучения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{even}}^{B+S+V}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \frac{1}{|1 - \Pi(s)|^2} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[\left[L - 2 + \frac{1 + \beta^2}{2\beta} l_\beta \right] \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} + \frac{3}{4}(L - 1) + K_{\text{even}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned}
K_{\text{even}} &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} + \rho \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} \right) + \\
&+ \ln \frac{1 + \beta}{2} \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1 + \beta^2}{\beta} \right) - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \frac{l_\beta}{2 - \beta^2(1 - c^2)} + \\
&+ \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \left[\frac{\pi^2}{6} + 2\text{Li}_2 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) + \rho \ln \frac{1 + \beta}{2\beta^2} + 2 \ln \frac{1 + \beta}{2} \ln \frac{1 + \beta}{2\beta^2} \right], \\
l_\beta &= \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \rho = \ln \frac{s}{m_\mu^2}, \quad L = \ln \frac{s}{m_e^2},
\end{aligned}$$

где $\Delta\epsilon \ll \epsilon$ есть максимальная энергия мягких фотонов; $\Pi(s)$ — функция, описывающая поляризацию вакуума с учетом всех возможных эффектов [158].

Нечетная по c часть радиационных поправок происходит из интерференции борновских и однопетлевых амплитуд, описываемых фейнмановскими диаграммами типа *бокс*. Вторым источником служит интерференция между диаграммами, описывающими излучение фотонов из начального и конечного состояний. В результате возникает зарядовая асимметрия:

$$\eta = \frac{d\sigma(c) - d\sigma(-c)}{d\sigma(c) + d\sigma(-c)} \neq 0. \quad (3.94)$$

Нечетная часть мягких (S) и виртуальных (V) поправок имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\text{odd}}^{S+V}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \frac{2\alpha}{\pi} \left[2 \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \ln \frac{1 - \beta c}{1 + \beta c} + K_{\text{odd}} \right], \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
K_{\text{odd}} &= \frac{1}{2} l_-^2 - L_-(\rho + l_-) + \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \beta^2}{2(1 - \beta c)} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{\beta^2(1 - c^2)}{1 + \beta^2 - 2\beta c} \right) - \\
&- \int_0^{1 - \beta^2} \frac{dx}{x} f(x) \left(1 - \frac{x(1 + \beta^2 - 2\beta c)}{(1 - \beta c)^2} \right)^{-1/2} + \frac{1}{2 - \beta^2(1 - c^2)} \times \\
&\times \left\{ -\frac{1 - 2\beta^2 + \beta^2 c^2}{1 + \beta^2 - 2\beta c} (\rho + l_-) - \frac{1}{4} (1 - \beta^2) \left[l_-^2 - 2L_-(l_- + \rho) + \right. \right. \\
&+ 2\text{Li}_2 \left(\frac{1 - \beta^2}{2(1 - \beta c)} \right) \left. \right] + \beta c \left[-\frac{\rho}{2\beta^2} + \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4}\rho^2 \right) \left(1 - \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2\beta^3} \right) + \right. \\
&+ \frac{1}{\beta} \left(-1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} \right) \left(\rho \ln \frac{1 + \beta}{2} - 2\text{Li}_2 \left(\frac{1 - \beta}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \right) - \\
&\left. \left. - \frac{1}{2} l_-^2 + L_-(\rho + l_-) - \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \beta^2}{2(1 - \beta c)} \right) \right] \right\} - (c \rightarrow -c),
\end{aligned}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right) \ln \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2},$$

$$l_- = \ln \frac{1 - \beta c}{2}, \quad L_- = \ln \left(1 - \frac{1 - \beta^2}{2(1 - \beta c)} \right).$$

В ультрарелятивистском пределе ($\beta \rightarrow 1$) для четной части имеем

$$\left(\frac{d\sigma_{\text{even}}^{B+S+V}}{d\Omega} \right)_{\beta \rightarrow 1} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \frac{1}{|1 - \Pi(s)|^2} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[(-2 + L + \rho) \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} - 2 + \frac{3}{4}L + \frac{3}{4}\rho + \frac{\pi^2}{3} \right] \right\}. \quad (3.96)$$

Нечетная часть в этом пределе приобретает вид, ранее найденный в работе [180]:

$$\left(\frac{d\sigma_{\text{odd}}^{S+V}}{d\Omega} \right)_{\beta \rightarrow 1} = \frac{\alpha^3}{s\pi} \left\{ 2(1 + c^2) \left[\ln \left(\text{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{\epsilon}{\Delta\epsilon} + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) - \right. \right.$$

$$- \frac{1}{2} \ln^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{4} \text{Li}_2 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{4} \text{Li}_2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \left. \right] + \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) -$$

$$\left. - \sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) - \cos \theta \left[\ln^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) + \ln^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.97)$$

Обратимся теперь к вкладу жесткого тормозного излучения

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-) + \gamma(k). \quad (3.98)$$

Он детально изучался в [181]. Энергия жесткого фотона k^0 должна превышать $\Delta\epsilon$. Соответствующее дифференциальное сечение имеет вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^3}{2\pi^2 s^2} R d\Gamma,$$

$$d\Gamma = \frac{d^3 q_- d^3 q_+ d^3 k}{q_-^0 q_+^0 k^0} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_- - q_+ - k), \quad (3.99)$$

$$R = \frac{s}{16(4\pi\alpha)^3} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = R_e + R_\mu + R_{e\mu}.$$

Опуская детали стандартных промежуточных вычислений, дадим сразу выражения для этих вкладов:

$$\begin{aligned}
 R_e &= \frac{s}{\chi_- \chi_+} B - \frac{m_e^2}{2\chi_-^2} \frac{(t_1^2 + u_1^2 + 2m_\mu^2 s_1)}{s_1^2} - \frac{m_e^2}{2\chi_+^2} \frac{(t^2 + u^2 + 2m_\mu^2 s_1)}{s_1^2} - \\
 &\quad - \frac{m_e^2}{\chi_- \chi_+} \frac{(t - t_1)(u - u_1) - 2m_\mu^2 s}{s_1^2} + \frac{m_\mu^2}{s_1^2} \Delta_{s_1 s_1}, \\
 R_{e\mu} &= B \left(\frac{u}{\chi_- \chi'_+} + \frac{u_1}{\chi_+ \chi'_-} - \frac{t}{\chi_- \chi'_-} - \frac{t_1}{\chi_+ \chi'_+} \right) + \frac{m_\mu^2}{s s_1} \Delta_{s s_1}, \\
 R_\mu &= \frac{s_1}{\chi'_- \chi'_+} B + \frac{m_\mu^2}{s^2} \Delta_{ss}, \quad B = \frac{u^2 + u_1^2 + t^2 + t_1^2}{4s s_1}, \\
 \Delta_{s_1 s_1} &= - \frac{(t + u)^2 + (t_1 + u_1)^2}{2\chi_- \chi_+}, \\
 \Delta_{ss} &= - \frac{u^2 + t_1^2 + 2sm_\mu^2}{2(\chi'_-)^2} - \frac{u_1^2 + t^2 + 2sm_\mu^2}{2(\chi'_+)^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{\chi'_- \chi'_+} (s s_1 - s^2 + tu + t_1 u_1 - 2sm_\mu^2), \\
 \Delta_{s s_1} &= \frac{s + s_1}{2} \left(\frac{u}{\chi_- \chi'_+} + \frac{u_1}{\chi_+ \chi'_-} - \frac{t}{\chi_- \chi'_-} - \frac{t_1}{\chi_+ \chi'_+} \right) + \frac{2(u - t_1)}{\chi'_-} + \frac{2(u_1 - t)}{\chi'_+}.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Заметим, что из данных выражений простыми заменами легко получить выражение для матричного элемента кросс-симметричного процесса $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+ \gamma$. Строго говоря, в кросс-канале следует еще учесть появление дополнительных слагаемых, пропорциональных m_e^2 . Для рассматриваемого случая аннигиляции эти слагаемые имеют вид

$$\begin{aligned}
 R_\mu &\rightarrow R_\mu + \frac{m_e^2}{s^2} \Delta'_{ss}, \\
 \Delta'_{ss} &= \frac{2m_\mu^2 s_1}{\chi'_- \chi'_+} + \frac{t + u_1}{\chi'_-} + \frac{t_1 + u}{\chi'_+} + \frac{4m_\mu^2}{\chi'_-} + \frac{4m_\mu^2}{\chi'_+}.
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

С их учетом восстанавливается кросс-симметрия и наблюдается полное согласие с квадратом матричного элемента электрон-мюонного рассеяния, полученного в работе [182].

Сумма вклада жесткого излучения, проинтегрированного по фазовому пространству фотона с условием $k^0 > \Delta\epsilon$, с вкладами виртуальных и мягких однопетлевых поправок, рассмотренными выше, не зависит от величины вспомогательного параметра $\Delta = \Delta\epsilon/\epsilon \ll 1$. В этой сумме численно наиболее важны члены, пропорциональные большому логарифму. Здесь естественно выбрать за масштаб суммарную энергию в системе центра масс, так

что $L = \ln(s/m_e^2)$. Логарифмически усиленные слагаемые происходят из части поправки за счет излучения (реального или виртуального фотона) из начального состояния. Рассмотрим для определенности случай, когда реальный фотон излучается вдоль направления движения электронного пучка:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{-}\mathbf{k} = \theta \leq \theta_0 \ll 1, \quad \theta_0 \gg \frac{m_e}{\epsilon}. \quad (3.102)$$

Здесь можно использовать

$$R_e \Big|_{\mathbf{k} \parallel \mathbf{p}_{-}} = \frac{s^2}{s_1^2} \left\{ \frac{1 + (1-x)^2}{x\chi_{-}} - \frac{m_e^2}{\chi_{-}^2}(1-x) \right\} \frac{tt_1 + uu_1 + 2sm_{\mu}^2}{2}, \quad (3.103)$$

где x — доля энергии, уносимая излученным фотоном, $x = k^0/\epsilon = 1 - s_1/s$. Интегрируя по углу вылета фотона, получаем соответствующий вклад в сечение в виде (аналогичный вклад получается для случая излучения вдоль направления движения позитронного пучка)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{-}} \right)_{\text{coll}} = C + D,$$

$$C = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln \frac{s}{m_e^2} - 1 \right) \int_{\Delta}^1 dx \frac{1 + (1-x)^2}{x} \left[\frac{d\tilde{\sigma}_0(1-x, 1)}{d\Omega_{-}} + \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1-x)}{d\Omega_{-}} \right], \quad (3.104)$$

$$D = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\Delta}^1 dx \left\{ x + \frac{1 + (1-x)^2}{x} \ln \frac{\theta_0^2}{4} \right\} \left[\frac{d\tilde{\sigma}_0(1-x, 1)}{d\Omega_{-}} + \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1-x)}{d\Omega_{-}} \right],$$

где $d\tilde{\sigma}_0(1-x_1, 1-x_2)/d\Omega_{-}$ — это так называемое *сдвинутое* борновское дифференциальное сечение. Оно описывает процесс $e^+(p_+(1-x_2)) + e^-(p_-(1-x_1)) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-)$,

$$\frac{d\tilde{\sigma}_0(z_1, z_2)}{d\Omega_{-}} = \frac{\alpha^2}{4s} \frac{y_1[z_1^2(Y_1 - y_1c)^2 + z_2^2(Y_1 + y_1c)^2 + 8z_1z_2m_{\mu}^2/s]}{z_1^3z_2^3[z_1 + z_2 - (z_1 - z_2)cY_1/y_1]}, \quad (3.105)$$

$$y_{1,2}^2 = Y_{1,2}^2 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}, \quad Y_{1,2} = \frac{q_{-,+}^0}{\epsilon}, \quad z_{1,2} = 1 - x_{1,2}.$$

Используя законы сохранения

$$z_1 + z_2 = Y_1 + Y_2, \quad z_1 - z_2 = y_1c_{-} + y_2c_{+}, \quad (3.106)$$

$$y_1\sqrt{1 - c_{-}^2} = y_2\sqrt{1 - c_{+}^2}, \quad c_{-} \equiv c, \quad c_{+} = \cos \widehat{\mathbf{p}}_{-}\mathbf{q}_{+},$$

находим долю энергии мюона:

$$Y_1 = \frac{4m_\mu^2}{s} \frac{(z_2 - z_1)c}{2z_1z_2 + [4z_1^2z_2^2 - 4(m_\mu^2/s)((z_1 + z_2)^2 - (z_1 - z_2)^2c^2)]^{1/2}} + \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2 - c(z_1 - z_2)}. \quad (3.107)$$

Величина C после добавления поправки, связанной с мягким излучением и виртуальной петлей, оказывается равной первому члену пертурбативного разложения конволюции структурной функции электрона \mathcal{D} со сдвинутым борновским сечением. Зависимость от параметра θ_0 сократится при добавлении вклада излучения фотона вне узкого конуса вокруг импульса электрона.

Как отмечалось выше, мы должны предусмотреть возможность наложения экспериментальных условий детектирования частиц общего вида. В нашем случае их можно применять, например, следующим образом:

$$\Theta(z_1, z_2) = \Theta(Y_1 - y_{\text{th}}) \Theta(Y_2 - y_{\text{th}}) \Theta(\cos^2 \Psi_0 - c_+^2) \Theta(\cos^2 \Psi_0 - c_-^2), \quad (3.108)$$

где $c_+ = \widehat{\mathbf{p}_+ \mathbf{q}_+}$; величина $y_{\text{th}} \epsilon = \epsilon_{\text{th}}$ — порог детектора регистрации по энергии; угол Ψ_0 определяет недоступные для детектирования зоны, задаваемые конусами вокруг осей сталкивающихся пучков. Более детально экспериментальные условия могут быть учтены при использовании монте-карло-генераторов событий (например нашей программы [61]), создаваемых на основе наших формул.

В ведущем вкладе, содержащем большой логарифм, легко выделить ядро уравнений ДГЛАП:

$$d\sigma = \int dz_1 dz_2 \mathcal{D}(z_1) \mathcal{D}(z_2) \frac{d\tilde{\sigma}_0(z_1, z_2)}{|1 - \Pi(sz_1z_2)|^2}. \quad (3.109)$$

Эта формула задает ведущее логарифмическое приближение. Для учета пересуммирования вкладов высших порядков ее можно модифицировать путем использования экспоненцированного представления (1.29), (1.30) для структурных функций [42].

Таким образом, мы получаем дифференциальное сечение в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma)}}{d\Omega_-} &= \\ &= \int_{z_{\min}}^1 \int_{z_{\min}}^1 dz_1 dz_2 \frac{\mathcal{D}(z_1, s) \mathcal{D}(z_2, s)}{|1 - \Pi(sz_1z_2)|^2} \frac{d\tilde{\sigma}_0(z_1, z_2)}{d\Omega_-} \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} K\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{\alpha^3}{2\pi^2 s^2} \int_{\substack{k^0 > \Delta\epsilon \\ \bar{k}p_{\pm} > \theta_0}} \frac{R_e|_{m_e=0}}{|1 - \Pi(s_1)|^2} \frac{d\Gamma}{d\Omega_-} + \frac{D}{|1 - \Pi(s_1)|^2} \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{\alpha^3}{2\pi^2 s^2} \int_{k^0 > \Delta\epsilon} \left(\operatorname{Re} \frac{R_{e\mu}}{(1 - \Pi(s_1))(1 - \Pi(s))^*} + \frac{R_{\mu}}{|1 - \Pi(s)|^2} \right) \frac{d\Gamma}{d\Omega_-} + \right. \\
 & \left. + \operatorname{Re} \frac{C_{e\mu}}{(1 - \Pi(s_1))(1 - \Pi(s))^*} + \frac{C_{\mu}}{|1 - \Pi(s)|^2} \right\}, \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

$$C_{\mu} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_-} \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right), \quad z_{\min} = \frac{2m_{\mu}}{2\epsilon - m_{\mu}},$$

$$C_{e\mu} = \frac{4\alpha}{\pi} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_-} \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \ln \frac{1 - \beta c}{1 + \beta c}, \quad K = K_{\text{odd}} + K_{\text{even}},$$

где D , $C_{e\mu}$ и C_{μ} являются так называемыми *компенсаторами*, они устраняют двойной счет и обеспечивают сокращение зависимости от вспомогательных параметров Δ и θ_0 в выражениях внутри фигурных скобок. Первое слагаемое в правой части, содержащее структурные функции D , собирает ведущие логарифмические поправки. Часть следующих за ведущими поправок, пропорциональная борновскому сечению, представлена в виде \mathcal{K} -фактора. Подчеркнем, что \mathcal{K} -фактор в этой формуле содержит лишь часть следующих за ведущими поправок. Остальная их часть представлена двумя последующими слагаемыми. Компенсирующее слагаемое D (см. формулу (3.104)) происходит из интегрирования по коллинеарной области излучения жесткого фотона. Величины C_{μ} и $C_{e\mu}$ происходят из зарядово-четной и зарядово-нечетной частей дифференциального сечения, возникающих за счет виртуальных и мягких поправок соответственно. Для вкладов с двухчастичными конечными состояниями мы имеем распределение по $d\Omega_-$, а для трехчастичных — по $d\Gamma$. Используя законы сохранения импульса и энергии, мы можем определить пределы интегрирования по z_1 и z_2 .

Спектр излученных жестких фотонов обладает особым свойством: в конце спектра по энергии дифференциальное распределение пропорционально фактору

$$I(s_1) = \frac{2m_{\mu}^2 + s_1}{s_1^2} \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s_1}}, \quad (3.111)$$

который приводит к появлению пика при $s_1 \approx 5,6m_{\mu}^2$. Этот пик связан с вкладом диаграмм Фейнмана, описывающих излучение из начального состояния. Это явление подробно обсуждалось в книге [104].

3.2.2. *Баба-рассеяние на большие углы.* Сечение баба-рассеяния в борновском приближении с учетом эффекта поляризации вакуума, которое входит в мастер-формулу для поправленного сечения в ВЛП, имеет немного более сложный вид по сравнению со случаем процесса аннигиляции, рассмотренного выше. Это связано с тем, что помимо амплитуд в s -канале надо еще учитывать t -канальные вклады и интерференцию. Напомним выражение для квадрата матричного элемента в борновском приближении:

$$R_0(s, t, u) = \frac{1}{16(4\pi\alpha)^4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(e^-(p_-) + e^+(p_+) \rightarrow e^-(p'_-) + e^+(p'_+))|^2 =$$

$$= \frac{s^2 + u^2}{2t^2} + \frac{u^2 + t^2}{2s^2} + \frac{u^2}{st},$$

$$s = (p_- + p_+)^2, \quad t = (p_- - p'_-)^2, \quad u = (p_- - p'_+)^2,$$

$$s + t + u = \mathcal{O}(m_e^2). \quad (3.112)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует квадрату амплитуды в канале рассеяния, второе — квадрату аннигиляционной амплитуды и третье — интерференции амплитуд в этих двух каналах. Более компактное выражение также будет полезно: $R_0 = (1 + s/t + t/s)^2$. Представим дифференциальное сечение баба-рассеяния в борновском приближении в виде

$$\frac{d\sigma_0^{\text{Born}}}{d\Omega_-} = \frac{\alpha^2}{4s} \left(\frac{3 + c^2}{1 - c} \right)^2. \quad (3.113)$$

Нам понадобится также выражение для величины R при произвольных энергиях начальных частиц. Предположим, что начальные электрон и позитрон потеряли определенные доли энергии. Соответствующая кинематика определяется следующим образом:

$$e^-(z_1 p_-) + e^+(z_2 p_+) \rightarrow e^-(\tilde{p}_-) + e^+(\tilde{p}_+),$$

$$\tilde{s} = s z_1 z_2, \quad \tilde{t} = -\frac{1}{2} s z_1 Y_1 (1 - c), \quad \tilde{u} = -\frac{1}{2} s z_2 Y_1 (1 + c),$$

$$Y_1 = \frac{\tilde{p}_-^0}{\varepsilon} = \frac{2z_1 z_2}{a}, \quad a = z_1 + z_2 - (z_1 - z_2)c.$$

Тогда так называемое *сдвинутое* борновское сечение с поправкой за счет поляризации вакуума принимает вид

$$d\tilde{\sigma}_0(z_1, z_2) = \frac{4\alpha^2}{sa^2} \left\{ \frac{1}{|1 - \Pi(\tilde{t})|^2} \frac{a^2 + z_2^2(1 + c)^2}{2z_1^2(1 - c)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|1 - \Pi(\tilde{s})|^2} \frac{z_1^2(1 - c)^2 + z_2^2(1 + c)^2}{2a^2} - \right.$$

$$\left. - \text{Re} \frac{1}{(1 - \Pi(\tilde{t}))(1 - \Pi(\tilde{s}))^*} \frac{z_2^2(1 + c)^2}{az_1(1 - c)} \right\} d\Omega_-. \quad (3.114)$$

Перепиывая известные результаты для сечения с учетом однопетлевых виртуальных поправок и вклада за счет излучения реального мягкого фотона [133, 183, 184], получаем

$$\frac{d\sigma_{B+S+V}}{d\Omega_-} = \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1)}{d\Omega_-} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi}(L-1) \left[2 \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right] - \frac{8\alpha}{\pi} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} + \frac{\alpha}{\pi} K_{SV} \right\}, \quad (3.115)$$

где

$$\begin{aligned} K_{SV} = & 2 \operatorname{Li}_2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - 1 + \frac{1}{(3+c^2)^2} \left[\frac{\pi^2}{3} (2c^4 - 3c^3 - 15c) + \right. \\ & + 2(2c^4 - 3c^3 + 9c^2 + 3c + 21) \ln^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) - 4(c^4 + c^2 - 2c) \ln^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) - \\ & - 4(c^3 + 4c^2 + 5c + 6) \ln^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + 2(c^3 - 3c^2 + 7c - 5) \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) + \\ & \left. + \left(\frac{10}{3}c^3 + 10c^2 + 2c + 38 \right) \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (3.116) \end{aligned}$$

есть часть \mathcal{K} -фактора, происходящая за счет мягких и виртуальных фотонных поправок,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1)}{d\Omega_-} = & \frac{\alpha^2}{s} \left\{ \frac{5 + 2c + c^2}{2(1-c)^2 |1 - \Pi(t)|^2} + \frac{1 + c^2}{4|1 - \Pi(s)|^2} - \right. \\ & \left. - \operatorname{Re} \frac{(1+c)^2}{2(1-c)(1 - \Pi(t))(1 - \Pi(s))^*} \right\}, \quad (3.117) \end{aligned}$$

$$s = 4\epsilon^2, \quad t = -s \frac{1-c}{2}, \quad u = -s \frac{1+c}{2}, \quad c = \cos \theta, \quad \theta = \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{p}'_-}.$$

Величина $\Delta\epsilon$ в (3.115) есть максимальная энергия мягкого фотона. Функции $\Pi(s)$ и $\Pi(t)$ учитывают пересуммированный вклад поляризации вакуума в s - и t -каналах.

Рассмотрим теперь вклад в сечение за счет излучения жесткого (с энергией $\omega = k^0 > \Delta\epsilon$) фотона в реакции

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow e^+(p'_+) + e^-(p'_-) + \gamma(k).$$

Мы можем стартовать с полностью дифференциального выражения для сечения этого радиационного процесса в форме, предложенной Ф. А. Берендсом

в [183] (в приближении больших углов, $\theta_i \gg m_e/\epsilon$):

$$d\sigma_{\text{hard}} = \frac{\alpha^3}{2\pi^2 s} R_{e\bar{e}\gamma} d\Gamma,$$

$$d\Gamma = \frac{d^3 p'_+ d^3 p'_- d^3 k}{\epsilon'_+ \epsilon'_- k^0} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - p'_+ - p'_- - k),$$

$$R_{e\bar{e}\gamma} = \frac{WT}{4} - \frac{m_e^2}{(\chi'_+)^2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} + 1 \right)^2 - \frac{m_e^2}{(\chi'_-)^2} \left(\frac{s}{t_1} + \frac{t_1}{s} + 1 \right)^2 -$$

$$- \frac{m_e^2}{\chi_+^2} \left(\frac{s_1}{t} + \frac{t}{s_1} + 1 \right)^2 - \frac{m_e^2}{\chi_-^2} \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{t_1}{s_1} + 1 \right)^2,$$

где

$$W = \frac{s}{\chi_+ \chi_-} + \frac{s_1}{\chi'_+ \chi'_-} - \frac{t_1}{\chi'_+ \chi_+} - \frac{t}{\chi'_- \chi_-} + \frac{u}{\chi'_+ \chi_-} + \frac{u_1}{\chi'_- \chi_+},$$

$$T = \frac{ss_1(s^2 + s_1^2) + tt_1(t^2 + t_1^2) + uu_1(u^2 + u_1^2)}{ss_1 tt_1},$$

и инварианты определены следующим образом:

$$s = 2p_- p_+, \quad s_1 = 2p'_- p'_+, \quad t = -2p_- p'_-, \quad t_1 = -2p_+ p'_+,$$

$$u = -2p_- p'_+, \quad u_1 = -2p_+ p'_-, \quad \chi_{\pm} = kp_{\pm}, \quad \chi'_{\pm} = kp'_{\pm}.$$

Согласно разработанному нами подходу мы должны выделить кинематические области, отвечающие излучению коллинеарных фотонов. Это позволяет решить несколько задач. Во-первых, таким образом мы выделяем и специально рассматриваем области, в которых величина дифференциального сечения испытывает большие изменения. Во-вторых, получая в этих областях ведущие логарифмические поправки первого порядка, мы имеем возможность перейти и в более высокие порядки, используя факторизационные свойства и универсальность структурных функций. Коллинеарные кинематические области можно рассматривать в двух подходах: либо в приближении квазиреальных электронов, либо путем прямых последовательных вычислений. Второй подход может служить проверкой справедливости приближений, сделанных в первом.

Для получения явных выражений для компенсирующих слагаемых рассмотрим четыре кинематические области излучения коллинеарных фотонов, представляемых узкими конусами, вокруг направлений импульсов всех четырех заряженных частиц, участвующих в реакции. Вершины конусов находятся в вершине взаимодействия. Как и ранее, мы вводим малый параметр θ_0 , ограничивающий углы вылета коллинеарных фотонов,

$$m_e/\sqrt{s} \ll \theta_0 \ll 1. \quad (3.119)$$

Таким образом, коллинеарные кинематические области являются частью полного фазового пространства излучения фотона. Угол вылета коллинеарного фотона по отношению к импульсу заряженной частицы не превышает θ_0 в соответствующей области. С использованием метода квазиреальных электронов [136] квадрат матричного элемента \mathcal{M} (просуммированный по состояниям поляризации) процесса жесткого тормозного излучения может быть представлен через квадрат борновского матричного элемента (см. (4) в [136]):

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}(p_1, k, p'_1, \mathcal{X})|^2 &= 4\pi\alpha \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x(1-x)} \frac{1}{kp_1} - \frac{m^2}{(kp_1)^2} \right] \times \\ &\quad \times \sum |\mathcal{M}_0(p_1 - k, p'_1, \mathcal{X})|^2, \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}(p_1, p'_1, k, \mathcal{X})|^2 &= 4\pi\alpha \left[\frac{y^2 + Y^2}{\omega Y} \frac{\epsilon}{kp'_1} - \frac{m^2}{(kp'_1)^2} \right] \times \\ &\quad \times \sum |\mathcal{M}_0(p_1, p'_1 + k, \mathcal{X})|^2, \end{aligned}$$

$$x = \frac{\omega}{\epsilon}, \quad p_1^0 = \epsilon, \quad y = \frac{p_1^{\prime 0}}{\epsilon}, \quad Y = x + y,$$

где \mathcal{X} обозначает импульсы неизлучающих начальных и конечных частиц, участвующих в конкретном процессе. Интегрирование по фазовому пространству фотона внутри узкого конуса, окружающего импульс породившей его частицы, дает следующие факторы:

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha}{16\pi^2} \int \frac{d^3k}{\omega} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x(1-x)} \frac{1}{kp_1} - \frac{m^2}{(kp_1)^2} \right] &= \\ = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz_1}{z_1} \left[P_{\Theta}^{(1)}(z_1) \left(L - 1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4} \right) + 1 - z_1 \right], \quad z_1 = 1 - x, \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha}{16\pi^2} \int \frac{d^3k}{\omega} \left[\frac{y^2 + Y^2}{xY} \frac{1}{kp'_1} - \frac{m^2}{(kp'_1)^2} \right] &= \\ = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz_3}{z_3} \left[P_{\Theta}^{(1)}(z_3) \left(L - 1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4} + 2 \ln z_3 \right) + 1 - z_3 \right], \\ z_3 = 1 - \frac{\omega}{p_1^{\prime 0} + \omega} = 1 - \frac{x}{Y}. \end{aligned}$$

Отметим, что члены, пропорциональные $(L - 1)$, содержат ядро $P^{(1)}$ (см. (3.109)) уравнений эволюции ДГЛАП, точнее — так называемую Θ -часть несинглетного ядра в ведущем приближении (см. (1.8)). Собирая вклады всех

четырёх коллинеарных областей, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coll}}}{d\Omega_-} = & \frac{\alpha}{\pi} \int_{\Delta}^1 \frac{dx}{x} \left\{ \left[\left(1-x + \frac{x^2}{2}\right) \left(L-1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4} + 2 \ln(1-x)\right) + \frac{x^2}{2} \right] \times \right. \\ & \times 2 \frac{d\tilde{\sigma}_0(1,1)}{d\Omega_-} + \left[\left(1-x + \frac{x^2}{2}\right) \left(L-1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2} \right] \times \\ & \left. \times \left[\frac{d\tilde{\sigma}_0(1-x,1)}{d\Omega_-} + \frac{d\tilde{\sigma}_0(1,1-x)}{d\Omega_-} \right] \right\}, \quad (3.122) \end{aligned}$$

куда входит *сдвинутое* борновское сечение, определенное в (3.114).

Добавляя рассмотренные выше вклады виртуальных и мягких однопетлевых поправок, восстанавливаем полное несинглетное ядро с плюс-прескрипцией, реализованной через малый вспомогательный параметр Δ . Таким образом, приходим к выражению для поправленного сечения в ведущем логарифмическом приближении. Учитывая также полученные следующие за ведущими вклады, запишем окончательное выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-}(\gamma)}{d\Omega_-} = & \int_{\bar{z}_1}^1 dz_1 \int_{\bar{z}_2}^1 dz_2 \mathcal{D}(z_1) \mathcal{D}(z_2) \frac{d\tilde{\sigma}_0(z_1, z_2)}{d\Omega_-} \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} K_{SV}\right) \Theta \times \\ & \times \int_{y_{\text{th}}}^{Y_1} \frac{dy_1}{Y_1} \int_{y_{\text{th}}}^{Y_2} \frac{dy_2}{Y_2} \mathcal{D}\left(\frac{y_1}{Y_1}\right) \mathcal{D}\left(\frac{y_2}{Y_2}\right) + \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \int_{\Delta}^1 \frac{dx}{x} \left\{ \left[\left(1-x + \frac{x^2}{2}\right) \ln \frac{\theta_0^2(1-x)^2}{4} + \frac{x^2}{2} \right] 2 \frac{d\sigma_0^{\text{Born}}}{d\Omega_-} + \right. \\ & + \left[\left(1-x + \frac{x^2}{2}\right) \ln \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{x^2}{2} \right] \left[\frac{4\alpha^2}{s(1-x)^2[2-x(1-c)]^4} \times \right. \\ & \times \left. \left. \left(\frac{3-3x+x^2+2x(2-x)c+c^2(1-x+x^2)}{1-c} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4\alpha^2}{s[2-x(1+c)]^4} \left(\frac{3-3x+x^2-2x(2-x)c+c^2(1-x+x^2)}{1-c} \right)^2 \right] \right\} \Theta - \\ & - \frac{\alpha^2}{4s} \left(\frac{3+c^2}{1-c} \right)^2 \frac{8\alpha}{\pi} \ln\left(\text{ctg} \frac{\theta}{2}\right) \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} + \frac{\alpha^3}{2\pi^2 s} \int_{\pi-\theta_0 > \theta > \theta_0}^{k^0 > \Delta\epsilon} \frac{WT}{4} \Theta \frac{d\Gamma}{d\Omega_-}, \quad (3.123) \end{aligned}$$

$$Y_1 = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2 - c(z_1 - z_2)}, \quad Y_2 = \frac{z_1^2 + z_2^2 - (z_1^2 - z_2^2)c}{z_1 + z_2 - c(z_1 - z_2)},$$

$$\bar{z}_1 = \frac{y_{th}(1+c)}{2 - y_{th}(1-c)}, \quad \bar{z}_2 = \frac{z_1y_{th}(1-c)}{2z_1 - y_{th}(1+c)}.$$

Последнее слагаемое описывает процесс с излучением фотона при условии, что энергия фотона x превышает величину $\Delta = \Delta\varepsilon/\varepsilon$, а угол излучения относительно породившей его заряженной частицы больше, чем θ_0 . Сумма последних трех слагаемых не зависит от вспомогательных параметров Δ и θ_0 , если последние достаточно малы. Мы пренебрегли вкладом эффекта поляризации вакуума в последних трех слагаемых, описывающих излучение жесткого фотона. Это можно сделать, поскольку соответствующий вклад имеет более высокий порядок малости из-за того, что содержит дополнительную степень α . Тем не менее, если энергия в системе центра масс близка к массе какого-либо узкого резонанса, например к массе ϕ -мезона, то эффект поляризации вакуума заметно усиливается и может ощутимо повлиять на величину обсуждаемой радиационной поправки. В таком случае мы предлагаем использовать полученную нами новую формулу, заменяющую произведение WT в (3.123):

$$(WT)_{\Pi} = \frac{(SS)}{|1 - \Pi(s)|^2 s\chi'_- \chi'_+} + \frac{(S_1S_1)}{|1 - \Pi(s_1)|^2 s_1\chi_- \chi_+} -$$

$$- \frac{(TT)}{|1 - \Pi(t)|^2 t\chi_+ \chi'_+} - \frac{(T_1T_1)}{|1 - \Pi(t_1)|^2 t_1\chi_- \chi'_-} +$$

$$+ \operatorname{Re} \left\{ \frac{(TT_1)}{(1 - \Pi(t))(1 - \Pi(t_1))^* t t_1 \chi_- \chi'_- \chi_+ \chi'_+} - \right.$$

$$- \frac{(SS_1)}{(1 - \Pi(s))(1 - \Pi(s_1))^* s s_1 \chi_- \chi'_- \chi_+ \chi'_+} +$$

$$+ \frac{(TS)}{(1 - \Pi(t))(1 - \Pi(s))^* t s \chi'_- \chi_+ \chi'_+} +$$

$$+ \frac{(T_1S_1)}{(1 - \Pi(t_1))(1 - \Pi(s_1))^* t_1 s_1 \chi_- \chi'_- \chi_+} -$$

$$- \frac{(T_1S)}{(1 - \Pi(t_1))(1 - \Pi(s))^* t_1 s \chi_- \chi'_- \chi'_+} -$$

$$\left. - \frac{(TS_1)}{(1 - \Pi(t))(1 - \Pi(s_1))^* t s_1 \chi_- \chi_+ \chi'_+} \right\}, \quad (3.124)$$

где

$$\begin{aligned}
 (SS) &= (S_1 S_1) = t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2, \\
 (TT) &= (T_1 T_1) = s^2 + s_1^2 + u^2 + u_1^2, \\
 (SS_1) &= (t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2)(t\chi_+\chi'_+ + t_1\chi_-\chi'_- - u\chi_+\chi'_- - u_1\chi_-\chi'_+), \\
 (TT_1) &= (s^2 + s_1^2 + u^2 + u_1^2)(u\chi_+\chi'_- + u_1\chi_-\chi'_+ + s\chi'_-\chi'_+ + s_1\chi_-\chi_+), \\
 (TS) &= -\frac{1}{2}(u^2 + u_1^2) [s(t + s_1) + t(s + t_1) - uu_1], \\
 (TS_1) &= -\frac{1}{2}(u^2 + u_1^2) [t(s_1 + t_1) + s_1(s + t) - uu_1], \\
 (T_1S) &= \frac{1}{2}(u^2 + u_1^2) [t_1(s + t) + s(s_1 + t_1) - uu_1], \\
 (T_1S_1) &= \frac{1}{2}(u^2 + u_1^2) [s_1(s + t_1) + t_1(s_1 + t) - uu_1].
 \end{aligned}$$

Отметим, что приведенная выше формула является, насколько нам известно, новой. Ее применение заметно повышает точность описания радиационного баба-рассеяния. Мы проверили, что, *выключая* эффект поляризации вакуума, мы воспроизводим известный результат (3.118):

$$(WT)_{\Pi|\Pi=0} = WT. \quad (3.125)$$

В компенсационных членах, входящих в (3.123), тогда тоже надо учесть поправки за счет поляризации вакуума. Это можно сделать, стартуя с выражений (3.122). Мы получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\text{comp}}^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-(\gamma)}}{d\Omega_-} &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\Delta} \frac{dx}{x} \left\{ \left[\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \ln \frac{\theta_0^2(1-x)^2}{4} + \frac{x^2}{2} \right] \times \right. \\
 &\times \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1)}{d\Omega_-} \left(1 + \frac{1}{(1-x)^2}\right) + \left[\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \ln \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{x^2}{2} \right] \times \\
 &\times \left[\frac{d\tilde{\sigma}_0(1-x, 1)}{d\Omega_-} + \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1-x)}{d\Omega_-} \right] \left. \right\} - \\
 &- \frac{d\tilde{\sigma}_0(1, 1)}{d\Omega_-} \frac{8\alpha}{\pi} \ln \left(\text{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} d\Omega_-. \quad (3.126)
 \end{aligned}$$

Отметим, что величина R в (3.99) с поправками за счет поляризации вакуума в ультрарелятивистском пределе ($s \gg m_\mu^2$) может быть выведена из (3.124). Действительно, для этого нужно разделить $(WT)_{\Pi}$ на 4 и оставить в результате только слагаемые, пропорциональные (SS) , (SS_1) и (S_1S_1) .

3.2.3. *Аннигиляция в фотоны.* Рассмотрим теперь процесс аннигиляции в фотоны:

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma(q_1) + \gamma(q_2), \quad (3.127)$$

и учтем поправки за счет излучения дополнительного реального или виртуального фотона. При этом мы будем пользоваться известными результатами работ [185–188]* для однопетлевых поправок, дополняя их ведущими логарифмическими поправками высших порядков. Для виртуальных поправок в сумме с вкладом излучения мягкого фотона имеем

$$d\sigma_{B+S+V} = d\tilde{\sigma}_0(1, 1) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[(L-1) \left(2 \ln \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) + K_{SV} \right] \right\},$$

$$K_{SV} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1-c^2}{2(1+c^2)} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{1+c}{1-c} \right) \ln \frac{1-c}{2} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{1-c}{1+c} + \frac{1}{2} \frac{1+c}{1-c} \right) \ln^2 \frac{1-c}{2} + (c \rightarrow -c) \right], \quad (3.128)$$

$$d\tilde{\sigma}_0(1, 1) = \frac{\alpha^2(1+c^2)}{s(1-c^2)} d\Omega_1,$$

$$s = (p_+ + p_-)^2, \quad c = \cos \theta_1, \quad \theta_1 = \widehat{\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_-}.$$

Предполагаем, что оба жестких фотона в конечном состоянии регистрируются детекторами под углами по отношению к оси пучков, которые не слишком малы: $\theta_{1,2} \gg m_e/\epsilon$.

Рассмотрим теперь процесс трехфотонной аннигиляции

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma(q_1) + \gamma(q_2) + \gamma(q_3),$$

сечение которого было получено в работе М. В. Терентьева [185]:

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2 s} R_{3\gamma} d\Gamma, \quad (3.129)$$

$$R_{3\gamma} = s \frac{\chi_3^2 + (\chi_3')^2}{\chi_1 \chi_2 \chi_1' \chi_2'} - 2m_e^2 \left[\frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{\chi_1 \chi_2 (\chi_3')^2} + \frac{(\chi_1')^2 + (\chi_2')^2}{\chi_1' \chi_2' \chi_3^2} \right] + \\ + \text{две циклические перестановки}, \quad (3.130)$$

$$d\Gamma = \frac{d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3}{q_1^0 q_2^0 q_3^0} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_1 - q_2 - q_3),$$

*В процессе работы мы заново выводили и перепроверяли все используемые результаты.

где

$$\chi_i = q_i p_-, \quad \chi'_i = q_i p_+, \quad i = 1, 2, 3.$$

Процесс трехфотонной аннигиляции может трактоваться как вклад в радиационную поправку к процессу двухфотонной аннигиляции. При этом, конечно, необходимо учесть экспериментальные условия, которые должны устранить все неоднозначности.

Так же, как и для рассмотренных ранее процессов аннигиляции в мюоны и баба-рассеяния, мы выделяем коллинеарные кинематические области излучения третьего фотона вдоль направлений движения начальных заряженных частиц. Соответственно, в полуколлинеарных областях дополнительный фотон излучается вне узких конусов с осями по импульсам заряженных частиц. Вклад коллинеарных областей находим, используя метод квазиреальных электронов [136]:

$$d\sigma_{\text{coll}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\Delta}^1 \frac{dx}{x} \left[\left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \left(L - 1 + \ln \frac{\theta_0^2}{4} \right) + \frac{x^2}{2} \right] \times \\ \times [d\tilde{\sigma}_0(1-x, 1) + d\tilde{\sigma}_0(1, 1-x)], \quad (3.131)$$

где *сдвинутое* борновское сечение имеет вид

$$d\sigma_0(z_1, z_2) = \frac{2\alpha^2}{s} \frac{z_1^2(1-c)^2 + z_2^2(1+c)^2}{(1-c^2)(z_1+z_2+(z_2-z_1)c)^2} d\Omega_1. \quad (3.132)$$

Суммируя отдельные вклады и применяя метод структурных функций, получаем *поправленное* сечение в виде

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma(\gamma)} = \int_{\bar{z}_1}^1 dz_1 \mathcal{D}(z_1) \int_{\bar{z}_2}^1 dz_2 \mathcal{D}(z_2) d\tilde{\sigma}_0(z_1, z_2) \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} K_{SV} \right) + \\ + \frac{\alpha}{\pi} \int_{\Delta}^1 \frac{dx}{x} \left[\left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \ln \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{x^2}{2} \right] [d\tilde{\sigma}_0(1-x, 1) + d\tilde{\sigma}_0(1, 1-x)] + \\ + \frac{1}{3} \int_{\substack{z_i \geq \Delta \\ \pi - \theta_0 \geq \theta_i \geq \theta_0}} \frac{4\alpha^3}{\pi^2 s^2} \left[\frac{z_3^2(1+c_3^2)}{z_1^2 z_2^2 (1-c_1^2)(1-c_2^2)} + \right. \\ \left. + \text{две циклические перестановки} \right] d\Gamma, \quad (3.133)$$

$$z_i = \frac{q_i^0}{\epsilon}, \quad c_i = \cos \theta_i, \quad \theta_i = \widehat{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_i},$$

пределы интегрирования $\bar{z}_{1,2}$ совпадают с теми, которые даны в (3.123). Сумма последних двух слагаемых не зависит от параметров Δ и θ_0 . Отметим, что аннигиляционный процесс имеет КЭД-природу и в рассмотренных порядках теории возмущения не содержит вкладов сильных взаимодействий даже

через поляризацию вакуума. Потому процесс аннигиляции в фотоны рассматривается как альтернативный (по отношению к процессу баба-рассеяния) канал измерения светимости на e^+e^- -коллайдерах.

3.2.4. Аннигиляция в пионы и каоны. В физических программах электрон-позитронных коллайдеров с энергиями порядка нескольких гигаэлектрон-вольт основное внимание уделяется изучению каналов аннигиляции в адронные состояния. Точность теоретических предсказаний для этих каналов, конечно, не может быть такой же высокой, как и для рассмотренных выше КЭД-процессов. Однако существующие прецизионные измерения и важность для феноменологии делают необходимым создать как можно более аккуратные предсказания по крайней мере для основных (т. е. дающих наибольший вклад в полное сечение) каналов аннигиляции в изучаемой области энергий. В частности, для последовательного экспериментального определения отношения сечений аннигиляции в адроны и мюоны, которое используется для вычисления адронного вклада в поляризацию вакуума, становится необходимым учитывать радиационные поправки как к начальному, так и к конечному состояниям. Методы, развитые нами для КЭД-процессов, были применены и к процессам аннигиляции в адроны [69]. Только при описании радиационных поправок к конечным состояниям, например для случаев аннигиляции в пионы или каоны, приходится использовать скалярную электродинамику, в которой заряженные мезоны рассматриваются как точечные частицы. Последнее приближение дает дополнительный вклад в теоретическую неопределенность получаемых предсказаний. В настоящее время проводится экспериментальная проверка точности предсказаний, предварительные результаты которой говорят, что при типичных условиях ошибка получается незначительной (см. более детальное обсуждение в обзоре [158]).

3.2.5. Взаимодействие в конечном состоянии. Хорошо известно, что при аннигиляции в заряженные частицы при энергиях вблизи порога рождения наблюдается эффект значительного увеличения сечения за счет взаимодействий в конечном состоянии. Этот эффект связан с тем, что при малой относительной скорости v частиц параметром разложения теории возмущений эффективно выступает величина α/v . Поэтому вклады высших порядков становятся более существенными, чем в обычных случаях применения КЭД-поправок. В области малых относительных скоростей $v \ll 1$, где применимо нерелятивистское приближение, взаимодействие в конечном состоянии описывается так называемым фактором Гамова–Зоммерфельда–Сахарова [189–191]

$$G(Z) = \frac{Z}{1 - \exp(-Z)}, \quad Z = \frac{2\pi\alpha}{v}. \quad (3.134)$$

При попытке учета этого фактора в построении теоретических предсказаний для описания процессов на электрон-позитронных коллайдерах высоких энергий встают два вопроса. Во-первых, мы уже учли поправки первого порядка

теории возмущений ($\mathcal{O}(\alpha)$) *полностью*, и, следовательно, возникает опасность двойного счета определенных вкладов. Во-вторых, желательно, чтобы создаваемые нами формулы были верны в широком диапазоне энергий: от порога рождения пары до энергий, намного превышающих этот порог. Следовательно, очевидна необходимость проведения релятивистского обобщения этого фактора.

Двойной счет легко устранить, просто вычитая из фактора $G(Z)$ первый член его разложения по α :

$$G(Z) \rightarrow G(Z) - \frac{Z}{2}. \quad (3.135)$$

В литературе рассматривались различные обобщения фактора Гамова–Зоммерфельда–Сахарова на релятивистский случай (см. работы [192–198] и ссылки в них). Вообще говоря, релятивистское обобщение рассматриваемого фактора не единственно, поскольку пересуммирование поправок высших порядков за счет взаимодействий в конечном состоянии никак не может свестись к простому виду (3.134). Кроме того, выходя за рамки нерелятивистского приближения, в котором учитывались только кулоновские взаимодействия, мы получаем дополнительные вклады, зависящие от спина конечных частиц. Тем не менее и путем вычисления петлевых фейнмановских диаграмм [193, 195] можно убедиться, что в каждом порядке теории возмущений действительно возникают слагаемые, сингулярные по скорости родившихся частиц, которые отвечают вкладам скалярных интегралов по петлевым импульсам фейнмановских диаграмм лестничного типа. Кроме того, релятивизованные квазипотенциальные уравнения также позволяют получать различные обобщенные формы этого фактора.

В работе [199] с помощью релятивистского квазипотенциального уравнения было получено новое выражение для релятивизованного фактора Гамова–Зоммерфельда–Сахарова в случае произвольных масс конечных частиц. Оно имеет вид (3.134) и выделяется из ряда других представлений этого фактора только определением параметра v :

$$v = 2\sqrt{\frac{s - (m_1 + m_2)^2}{s - (m_1 - m_2)^2}} \left(1 + \frac{s - (m_1 + m_2)^2}{s - (m_1 - m_2)^2}\right)^{-1}, \quad (3.136)$$

где m_1 и m_2 — массы заряженных частиц в конечном состоянии.

Кроме того, что это определение было получено в обоснованной версии релятивизованного квазипотенциального уравнения, оно обладает рядом преимуществ. Во-первых, воспроизводится нерелятивистский предел, что, впрочем, характерно и для всех остальных присутствующих в литературе выражений для v . Во-вторых, имеется и правильный предел в случае, когда одна из масс много больше другой. В этом случае двухчастичная задача сводится

к точно решаемой одночастичной задаче — уравнению Дирака с кулоновским полем. Кроме того, оказалось, что выражение (3.136) для величины v , найденное путем решения квазипотенциального уравнения, точно совпало с релятивистским определением относительной скорости в системе центра масс. В частности, наше выражение удовлетворяет условию $v \rightarrow 1$ при $s \gg m_{1,2}^2$ в отличие от большинства других релятивизованных выражений для этого параметра, имеющих в литературе. Для случая равных масс, $m_1 = m_2 \equiv m$, релятивистская относительная скорость (3.136) приобретает вид

$$v = 2\sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} \left(1 + \frac{s - 4m^2}{s}\right)^{-1}. \quad (3.137)$$

3.2.6. Численные результаты и оценка точности. Подчеркнем, что полученные нами выражения для процессов взаимодействий электронов и позитронов высоких энергий представлены в дифференциальной форме, удобной для дальнейшего использования с возможностью налагать требуемые экспериментальные ограничения. Мощность современных компьютеров позволяет проводить численное интегрирование имеющихся выражений за малое время (минуты). Более того, полученные формулы можно использовать при создании генераторов событий по методу Монте-Карло. Компьютерная программа MCGPJ [61] основана именно на представленных выше формулах с использованием подхода разделения фазового пространства на области коллинеарного и неколлинеарного излучения.

Отметим, что условие рассеяния на большие углы для вылетающих детектируемых частиц существенно*. Процессы на малые углы требуют особого исследования, в частности, в них могут появляться дважды логарифмические слагаемые. Такие ситуации выходят за рамки темы обзора.

В табл. 5 и на рис. 9 представлены некоторые численные результаты, полученные с помощью выведенных выше формул. Мы предполагаем, что детекторы регистрируют частицы под углами к оси пучков, превышающими некоторое значение Ψ_0 . А энергии детектируемых частиц должны быть больше некоторого порогового значения ϵ_{th} . Обе эти величины можно отождествить с соответствующими параметрами детекторов в конкретных экспериментах. Можно также наложить дополнительное условие на относительный угол между детектируемыми частицами (аколлинеарность).

В табл. 5 даны значения различных вкладов радиационных поправок в сечение баба-рассеяния на большие углы. Ограничения накладывались только на углы рассеяния конечных электрона и позитрона. Вклады определены сле-

*Такая ситуация типична для экспериментов на e^+e^- -коллайдерах с энергиями порядка нескольких гигаэлектронвольт.

Таблица 5. Величина сечения баба-рассеяния и вклады радиационных поправок

$\theta_{\pm}, \text{ }^\circ$	$\sigma_0^{\text{Born}}, \text{ мб}$	$\delta_{\text{VP}}, \text{ \%}$	$\delta_{\text{SF}}^{\text{ini}}, \text{ \%}$	$\delta_{\text{SF}}^{\text{fin}}, \text{ \%}$	$\delta_{\mathcal{K}}, \text{ \%}$	$\delta_{\gamma}, \text{ \%}$	$\sigma_{\text{tot}}, \text{ мб}$
$9 < \theta_{\pm} < 171$	$3,77 \cdot 10^{-2}$	1,53	0,11	-0,30	-1,82	1,50	$3,81 \cdot 10^{-2}$
$1 < \theta_{\pm} < 179$	3,08	0,80	0,70	-0,17	-3,5	4,74	3,16

дующим образом (см. (3.123)):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &\equiv \int \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-(\gamma)}}{d\Omega_-} d\Omega_- = \\ &= \int \frac{d\sigma_0^{\text{Born}}}{d\Omega_-} d\Omega_- \left[1 + \frac{1}{100\%} \left(\delta_{\text{VP}} + \delta_{\text{SF}}^{\text{ini}} + \delta_{\text{SF}}^{\text{fin}} + \delta_{\mathcal{K}} + \delta_{\gamma} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.138)$$

где δ_{VP} — вклад, происходящий за счет поляризации вакуума; $\delta_{\text{SF}}^{\text{ini(fin)}}$ — вклад, происходящий за счет ведущих логарифмических поправок к начальному (конечному) состоянию; $\delta_{\mathcal{K}}$ показывает эффект включения \mathcal{K} -фактора; δ_{γ} представляет вклад за счет излучения жесткого фотона на большие углы (в неколлинеарной кинематике). Влияние фи-мезонного резонанса учтено во вкладе поляризации вакуума. Для представленных инклюзивных сечений оно оказалось мало, но при рассмотрении дифференциальных распределений по углу или поперечному импульсу оно существенно.

Рис. 9 показывает зарядово-нечетную часть дифференциального сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (см. (3.110)). Величина

$$A_{\text{FB}} = \frac{d\sigma_{\text{odd}}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma)}/dc}{d\sigma_0^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma)}/dc} 100\% \quad (3.139)$$

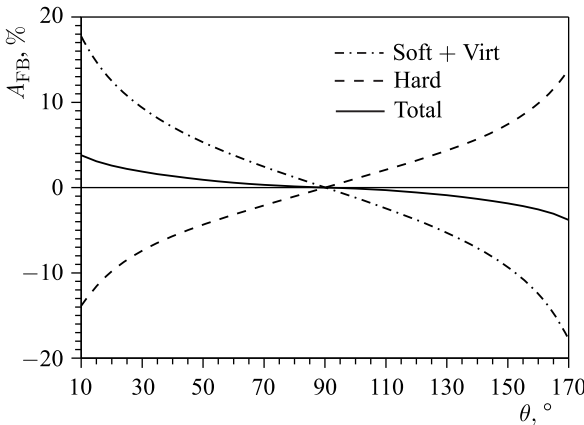


Рис. 9. Дифференциальная асимметрия вперед–назад для процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ как функция косинуса угла рассеяния при $\varepsilon = 1,55 \text{ ГэВ}$, $\Psi_0 = 10^\circ$, $\varepsilon_{\text{th}} = 0,2\varepsilon$

показана как функция косинуса угла рассеяния s . Штрихпунктирная линия представляет вклад за счет излучения мягких фотонов и за счет виртуальных однопетлевых поправок. Штриховая кривая показывает соответствующий нечетный по углу вклад излучения жесткого фотона. Он происходит из интерференции амплитуд излучения из конечного и начального состояний. Значение параметра Δ , разделяющего по энергии мягкие и жесткие фотоны, выбрано равным 0,01. Большие сокращения между описанными вкладами в сумме (сплошная линия) связаны с сокращением зависимости от этого параметра. Отметим, что функция асимметрии, изображенная на графике, обусловлена только КЭД-взаимодействиями. В борновском приближении в рамках КЭД асимметрии в этом процессе нет. Она возникает как чисто квантовый эффект. Помимо квантовых КЭД-эффектов асимметрия возникает и при учете слабых взаимодействий уже в древесном приближении. Количественно наиболее важный дополнительный вклад даст интерференция амплитуд аннигиляции через виртуальный фотон и Z -бозон. При данных энергиях он невелик: для энергий пучков порядка 0,5 ГэВ сдвиг в асимметрии получается около 0,01 %, а при $E_{\text{beam}} = 1,5$ ГэВ — около 0,1 %.

Полезно обсудить точность теоретических предсказаний, получаемых в описанной выше схеме *сшивки* полных однопетлевых КЭД-поправок с ведущими логарифмическими поправками высших порядков. Вклады слабых взаимодействий (обмена Z -бозоном) в сечения процесса аннигиляции в мюоны и баба-рассеяния, которыми мы пренебрегали, могут быть оценены путем учета дополнительного *слабого* \mathcal{K} -фактора:

$$\mathcal{K}_W = \frac{(d\sigma)_{\text{ew}} - (d\sigma)_{\text{QED}}}{(d\sigma)_{\text{QED}}}, \quad (3.140)$$

где величины $(d\sigma)_{\text{ew}}$ и $(d\sigma)_{\text{QED}}$ суть сечения рассматриваемых процессов в борновских приближениях Стандартной модели и КЭД соответственно. Слабые \mathcal{K} -факторы (мы пользуемся результатами работ [145–147, 178, 179]) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_W^{e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}} = & \frac{s^2(2 - \beta^2(1 - c^2))^{-1}}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} \left\{ (2 - \beta^2(1 - c^2)) \left(c_v^2 \left(3 - 2 \frac{M_Z^2}{s} \right) + c_a^2 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1 - \beta^2}{2} (c_a^2 + c_v^2) + c\beta \left[4 \left(1 - \frac{M_Z^2}{s} \right) c_a^2 + 8c_a^2 c_v^2 \right] \right\}, \quad (3.141) \end{aligned}$$

$$c_a = -\frac{1}{2 \sin 2\theta_W}, \quad c_v = c_a(1 - 4 \sin^2 \theta_W),$$

$$\mathcal{K}_W^{e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}} = \frac{(1 - c)^2}{2(3 + c^2)^2} \left[4B_1 + (1 - c)^2 B_2 + (1 + c)^2 B_3 \right] - 1,$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \left(\frac{s}{t}\right)^2 |1 + (g_v^2 - g_a^2)\xi|^2, \\
 B_2 &= |1 + (g_v^2 - g_a^2)\chi|^2, \\
 B_3 &= \frac{1}{2} \left|1 + \frac{s}{t} + (g_v + g_a)^2 \left(\frac{s}{t}\xi + \chi\right)\right|^2 + \frac{1}{2} \left|1 + \frac{s}{t} + (g_v - g_a)^2 \left(\frac{s}{t}\xi + \chi\right)\right|^2,
 \end{aligned}
 \tag{3.142}$$

$$\chi = \frac{\Lambda s}{s - m_z^2 + iM_Z\Gamma_Z}, \quad \xi = \frac{\Lambda t}{t - M_Z^2},$$

$$\Lambda = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} = (\sin 2\theta_W)^{-2}, \quad g_a = -\frac{1}{2}, \quad g_v = -\frac{1}{2}(1 - 4\sin^2 \theta_W),$$

где θ_W есть угол электрослабого смешивания. Эти величины имеют порядок 0,1 % при энергиях до $\sqrt{s} < 3$ ГэВ.

В процесс аннигиляции в фотоны в борновском приближении слабые поправки вклад не дают. Потому их вклад подавлен еще и степенью α . Его можно оценить как

$$(\mathcal{K}_W)_{e\bar{e} \rightarrow \gamma\gamma} \lesssim \frac{\alpha s}{\pi M_W^2}. \tag{3.143}$$

Еще один источник теоретической неопределенности связан с приближением квазиреальных электронов [136] в коллинеарной кинематике. Соответствующий вклад оценивается по наибольшим отброшенным слагаемым, которые имеют вид

$$\frac{\alpha}{\pi}\theta_0^2 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{m_e}{\epsilon\theta_0}\right)^2. \tag{3.144}$$

При вычислениях сечений для конкретных экспериментальных условий мы использовали значения параметра θ_0 порядка 10^{-2} , поскольку требуется одновременно выполнить ограничения $\theta_0 \ll 1$ и $\epsilon\theta_0/m_e \gg 1$. Отметим, что коэффициенты при рассматриваемых вкладах зависят от углов и долей энергии и имеют порядок 1. Вообще говоря, найти точные выражения для этих малых вкладов в коллинеарных областях технически несложно, но тогда мы бы вышли за рамки заданной точности и нарушили бы согласованность нашего подхода. Для энергии $\epsilon = 0,5$ ГэВ мы оцениваем погрешность как $2 \cdot 10^{-4}$, не более.

Третьим источником неопределенностей является погрешность определения адронного вклада в поляризацию вакуума. В 1995 г. она оценивалась в 0,04 и, к сожалению, за прошедшие годы сколько-нибудь заметно не уменьшилась [158]. Для коллайдеров, являющихся фи-мезонными фабриками (DAΦNE), нужно еще добавить неопределенность в параметризации вклада фи-мезона в поляризацию вакуума.

Следующим источником являются неучтенные слагаемые порядка $(\alpha/\pi)^2 L$. Методы расчета этих вкладов подробно обсуждались в других разделах обзора. В частности, были приведены аналитические результаты и

численные оценки для поправок этого порядка к процессу баба-рассеяния на малые углы. Поэтому нетрудно оценить вклад в теоретическую неопределенность для случая, когда эти поправки отбрасываются. Он имеет величину порядка $(\alpha/\pi)^2 L \approx 1 \cdot 10^{-4}$.

Рассматривая все перечисленные источники неопределенности, мы заключаем, что систематическая ошибка, связанная с теоретическими неопределенностями в представленных выше предсказаниях для процессов аннигиляции в мюоны и фотоны, а также баба-рассеяния на большие углы, не превышает 0,2%. И основной вклад в эту неопределенность происходит из-за отбрасывания следующих за ведущими поправок второго порядка. Последнее утверждение подчеркивает важность систематического учета таких поправок.

Для случаев аннигиляции в адроны вклад в теоретическую неопределенность дает еще приближение, связанное с тем, что поправки за счет излучения из конечного состояния рассчитывались в рамках скалярной электродинамики с точечными пионами и каонами. Соответствующая суммарная неопределенность описания процессов $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, K^+K^- с помощью описанного метода сшивки радиационных поправок первого порядка с ведущими логарифмическими поправками высших порядков оценивается как 0,3%.

3.3. Метод радиационного возвращения. В этом пункте мы представляем теоретические основы метода радиационного возвращения для двух случаев: для процесса глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния [89, 90] и для процессов электрон-позитронной аннигиляции [47].

3.3.1. Процесс глубоконеупругого рассеяния. Хорошо известно, что радиационные поправки к процессу глубоконеупругого рассеяния при высоких энергиях, связанные с излучением жестких фотонов, существенно меняют дифференциальные распределения наблюдаемых сечений в определенных кинематических областях. Действительно, излучение жесткого тормозного фотона заряженным лептоном в начальном состоянии приводит к эффективному изменению энергии лептона, участвующего в жестком подпроцессе, что прямо приводит к сдвигу наблюдаемых значений переменных Бьёркена по отношению к случаю безрадиационного процесса. Поэтому радиационные события в процессе глубоконеупругого рассеяния электрона на протоне (для определенности)

$$e(p_1) + p(P) \rightarrow e(p_2) + \gamma(k) + X + (\gamma) \quad (3.145)$$

должны обязательно учитываться при создании теоретических предсказаний [200–202].

С другой стороны, измерение энергии фотона, излученного под малым углом к направлению движения электронного пучка, позволяет расширить кинематическую область, доступную для изучения на электрон-протонном коллайдере HERA (DESY, Гамбург), в область очень малых переданных импульсов ($Q^2 \lesssim 1$ ГэВ) [50, 203–205]. Более того, эти радиационные события могут

использоваться (и использовались) для независимого определения структурных функций протона F_2 и F_1 и, следовательно, F_L при анализе данных коллайдера HERA без необходимости понижения энергии пучков [50, 206]. Результаты анализа структурных функций протона с использованием радиационных событий из данных HERA были представлены коллаборацией H1 [207].

Нашей задачей является вычисление КЭД радиационных поправок к процессу глубоконеупругого рассеяния в нейтральном токе с детектированием фотона, излученного под малым углом к оси пучка электронов ($\theta_\gamma = \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}} \leq \theta_0 \approx 5 \cdot 10^{-4}$ рад). В условиях коллайдера HERA экспериментальное детектирование таких фотонов обеспечивается наличием специальных фотонных детекторов, являющихся частью системы мониторинга светимости в экспериментах ZEUS и H1.

Рассмотрим кинематику радиационного процесса. Угол раствора фотонного детектора очень мал. Причем в эксперименте детектор измеряет только энергию попавшего в него фотона, а детали углового распределения попадающих туда фотонов несущественны.

Следовательно, мы можем проинтегрировать по угловым переменным фотона и рассмотреть, как изменяются стандартные бьёркеновские переменные x и y , определяемые через угол рассеяния и энергию детектируемого электрона:

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot (p_1 - p_2)}, \quad y = \frac{2P \cdot (p_1 - p_2)}{V},$$

$$Q^2 = 2p_1 \cdot p_2 = xyV, \quad V = 2P \cdot p_1. \quad (3.146)$$

Введем долю энергии электрона z , оставшуюся у него после излучения коллинеарного фотона:

$$z = \frac{2P \cdot (p_1 - k)}{V} = \frac{\epsilon - k^0}{\epsilon}, \quad (3.147)$$

где ϵ — энергия начального электрона и k^0 — энергия, регистрируемая фотонным детектором.

Альтернативно можно ввести набор кинематических переменных, более удобных для использования в случае описания рассматриваемых радиационных процессов. Так называемые *сдвинутые* переменные Бьёркена определим согласно статье [50]:

$$\hat{Q}^2 = -(p_1 - p_2 - k)^2, \quad \hat{x} = \frac{\hat{Q}^2}{2P \cdot (p_1 - p_2 - k)},$$

$$\hat{y} = \frac{P \cdot (p_1 - p_2 - k)}{P \cdot (p_1 - k)}. \quad (3.148)$$

Со стандартными кинематическими переменными они связаны так:

$$\hat{Q}^2 = zQ^2, \quad \hat{x} = \frac{xyz}{z + y - 1}, \quad \hat{y} = \frac{z + y - 1}{z}. \quad (3.149)$$

В борновском приближении сечение рассматриваемого радиационного процесса, проинтегрированное по углам вылета фотона, попадающего в детектор ($0 < \phi_\gamma < 2\pi$, $0 \leq \theta_\gamma \leq \theta_0$, $\theta_0 \ll 1$), имеет вид*

$$\frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_{\text{Born}}}{dx dy dz} = \frac{1}{\hat{y}} \frac{d^3 \sigma_{\text{Born}}}{d\hat{x} d\hat{y} dz} = \frac{\alpha}{2\pi} P(z, L_0) \tilde{\Sigma}, \quad (3.150)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} = \Sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{Q}^2) &= \frac{2\pi\alpha^2(-\hat{Q}^2)}{\hat{Q}^2 \hat{x} \hat{y}^2} F_2(\hat{x}, \hat{Q}^2) \times \\ &\times \left[2(1 - \hat{y}) - 2\hat{x}^2 \hat{y}^2 \frac{M^2}{\hat{Q}^2} + \left(1 + 4\hat{x}^2 \frac{M^2}{\hat{Q}^2} \right) \frac{\hat{y}^2}{1 + R} \right], \end{aligned} \quad (3.151)$$

$$P(z, L_0) = \frac{1 + z^2}{1 - z} L_0 - \frac{2z}{1 - z}, \quad R = R(\hat{x}, \hat{Q}^2) = \left(1 + 4\hat{x}^2 \frac{M^2}{\hat{Q}^2} \right) \frac{F_2(\hat{x}, \hat{Q}^2)}{2\hat{x} F_1(\hat{x}, \hat{Q}^2)},$$

$$\alpha(-\hat{Q}^2) = \frac{\alpha}{1 - \Pi(-\hat{Q}^2)}, \quad L_0 = \ln \left(\frac{\varepsilon^2 \theta_0^2}{m^2} \right), \quad \hat{Q}^2 = 2z p_1 \cdot p_2 = 2z \varepsilon^2 Y(1 - c),$$

$$Y = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = 1 - y + xy \frac{E_p(1 + \beta_p)}{2\varepsilon}, \quad c = \cos(\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}), \quad (3.152)$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{Q}^2}{2P \cdot (z p_1 - p_2)} = \frac{z \varepsilon Y(1 - c)}{z E_p(1 + \beta_p) - Y E_p(1 + \beta_p c)}, \quad \beta_p = \sqrt{\frac{1 - M^2}{E_p^2}},$$

$$\hat{y} = \frac{2P \cdot (z p_1 - p_2)}{zV} = \frac{z(1 + \beta_p) - Y(1 + \beta_p c)}{z(1 + \beta_p)}.$$

Величины F_2 и F_1 суть структурные функции протона; M и m — массы протона и электрона соответственно. В выражении для сечения (3.150) мы учли члены, пропорциональные M^2/\hat{Q}^2 , которые могут быть заметны при малых значениях квадрата переданного импульса \hat{Q}^2 . Отметим, что мы пренебрегли вкладом обмена Z -бозоном и его интерференцией с амплитудой с обменом фотоном, поскольку мы интересуемся событиями с малыми переданными импульсами, а отброшенные вклады подавлены как минимум фактором \hat{Q}^2/M_Z^{2**} . Энергии начального и конечного электронов, детектируемого фотона и начального протона (ε , ε_2 , k^0 и E_p) определяются в лабораторной системе отсчета; в нашем случае это система отсчета, в которой покоятся детекторы коллайдера HERA. Отметим, что данная система не совпадает

* Отметим, что в отличие от большинства других задач, рассматриваемых в обзоре, борновским мы сейчас называем именно радиационный (а не безрадиационный) процесс.

** При необходимости учета обмена Z -бозоном можно использовать борновское сечение, приведенное в работе [204].

ни с системой центра масс сталкивающихся частиц, ни с системой покоя протона. Наша формула для борновского сечения согласуется с аналогичными выражениями, приведенными в работах [50, 204]. Отметим также, что мы явным образом учли вклад поляризации вакуума на борновском уровне с помощью функции $\Pi(-\hat{Q}^2)$, входящей в выражение для пропагатора виртуального фотона. Нашей задачей является найти радиационные поправки к этому процессу в ведущем и следующем за ведущим логарифмических приближениях.

Здесь мы ограничимся рассмотрением модельно-независимых КЭД-поправок, связанных с лептонным тензором. Отметим, что рассматриваемые поправки для случая рассеяния в канале нейтрального тока образуют калибровочно-инвариантный вклад. Остальные вклады КЭД-поправок связаны с излучением из кварковых линий и его интерференцией с излучением лептоном. Эти вклады не содержат больших логарифмов и потому заметно меньше рассматриваемого. Кроме того, при вычислениях этих вкладов требуется вводить какую-либо модель структуры протона (отметим, что мы работаем в кинематической области малых переданных импульсов).

Первым шагом в нашем подходе к вычислению КЭД-поправок к рассматриваемому процессу является отбор фейнмановских диаграмм, которые дают существенные вклады в сечение в заданном приближении. Общая процедура аналогична той, что описана выше для случая вычисления поправок $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ к процессу баба-рассеяния на малые углы. В ведущем логарифмическом приближении поправки к данному процессу были найдены нами в работе [89] с помощью описанных в обзоре методов.

Для нахождения вкладов виртуальных однопетлевых поправок и мягкого тормозного излучения воспользуемся известным результатом для комптоновского тензора с *тяжелым* фотоном (т. е. с фотоном вне массовой поверхности) из работы [126], см. также нашу работу [165]:

$$K_{\mu\nu} = (8\pi\alpha)^{-1} \sum_{\text{spins}} M_{\mu}^{e\gamma^* \rightarrow e'\gamma} (M_{\nu}^{e\gamma^* \rightarrow e'\gamma})^*, \quad (3.153)$$

где M_{μ} — матричный элемент процесса комптоновского рассеяния

$$\gamma^*(-q) + e(p_1) \rightarrow \gamma(k) + e(p_2), \quad (3.154)$$

индекс μ описывает поляризационное состояние виртуального фотона. Тензор удобно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(P_{\mu\nu} + P_{\nu\mu}^*), \\ P_{\mu\nu} &= \tilde{g}_{\mu\nu} \left(B_g + \frac{\alpha}{2\pi} T_g \right) + \tilde{p}_{1\mu} \tilde{p}_{1\nu} \left(B_{11} + \frac{\alpha}{2\pi} T_{11} \right) + \\ &+ \tilde{p}_{2\mu} \tilde{p}_{2\nu} \left(B_{22} + \frac{\alpha}{2\pi} T_{22} \right) + \frac{\alpha}{2\pi} (\tilde{p}_{1\mu} \tilde{p}_{2\nu} T_{12} + \tilde{p}_{2\mu} \tilde{p}_{1\nu} T_{21}), \end{aligned} \quad (3.155)$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad \tilde{p}_{1\mu} = p_{1\mu} - q_\mu \frac{p_1 \cdot q}{q^2}, \quad \tilde{p}_{2\mu} = p_{2\mu} - q_\mu \frac{p_2 \cdot q}{q^2},$$

$$p_1 = q + p_2 + k.$$

Величины B_{ij} определяются борновским приближением*:

$$B_g = \frac{1}{st} [(s+u)^2 + (t+u)^2] - 2m^2 q^2 \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2} \right), \quad B_{11} = \frac{4q^2}{st} - \frac{8m^2}{s^2},$$

$$B_{22} = \frac{4q^2}{st} - \frac{8m^2}{t^2}, \quad s = 2p_2 \cdot k, \quad t = -2p_1 \cdot k, \quad u = (p_2 - p_1)^2, \quad (3.156)$$

$$q^2 = s + t + u, \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2, \quad k^2 = 0.$$

Вклады однопетлевых поправок к комптоновскому тензору даются величинами T_{ij} , их явный вид можно найти в работе [126]. Мы интегрируем их по углам вылета реального фотона, ограниченным апертурой детектора. При этом мы удерживаем только члены, не исчезающие в пределе $\theta_\gamma \rightarrow 0$. В частности, при интегрировании слагаемых из дифференциального выражения, которые медленно меняются при малых θ_γ , мы получим вклады, пропорциональные $\theta_0^2 \sim 10^{-6}$, которыми заведомо можно пренебречь. Дополнительное упрощение задачи связано с тем, что нас интересует только симметричная составляющая тензора K , точнее — вещественная часть этой составляющей. Требуется вычислить интегралы следующего типа:

$$\int \frac{d\Omega_k}{2\pi} \frac{1}{t} = -\frac{L_0}{2\varepsilon^2(1-z)}, \quad \int \frac{d\Omega_k}{2\pi} \frac{m^2}{t^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2(1-z)^2}. \quad (3.157)$$

Полный список необходимых интегралов приведен в приложении работы [90]. После интегрирования по углам вылета фотона получаем следующий вид для комптоновского тензора:

$$\int \frac{d\Omega_k}{2\pi} K_{\mu\nu} = (-Q_l^2 g_{\mu\nu} + 4z p_{1\mu} p_{1\nu}) \frac{1}{2\varepsilon^2(1-z)} \times$$

$$\times \left[\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \rho \right) P(z, L_0) - \frac{\alpha}{2\pi} T \right],$$

$$\rho = 4 \ln \frac{\lambda}{m} (L_Q - 1) - L_Q^2 + 3L_Q + 3 \ln z + \frac{\pi^2}{3} - \frac{9}{2}, \quad (3.158)$$

*В приводимых выражениях мы систематически опускаем слагаемые, которые после интегрирования по углу вылета фотона дадут вклады, подавленные квадратом (малого) углового раствора детектора.

$$T = \frac{1+z^2}{1-z} (A \ln z + B) - \frac{4z}{1-z} L_Q \ln z - \frac{2-(1-z)^2}{2(1-z)} L_0 + \mathcal{O}(\text{const}),$$

$$A = -L_0^2 + 2L_0 L_Q - 2L_0 \ln(1-z), \quad B = (\ln^2 z - 2 \text{Li}_2(1-z)) L_0,$$

$$L_Q = \ln \frac{Q^2}{m^2}.$$

Инфракрасная расходимость петлевых интегралов, входящих в ρ , регуляризована малым параметром — фиктивной массой фотона λ .

Используя условие калибровочной (градиентной) инвариантности адронного тензора [208], мы полагали, что $q_\mu = q_\nu = 0$ и $p_{2\mu,\nu} = z p_{1\mu,\nu}$ в тензоре $K_{\mu\nu}$. Сам адронный тензор можно записать в виде

$$H_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{M} \left(W_2(x_h, Q_h^2) \tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu - M^2 W_1(x_h, Q_h^2) \tilde{g}_{\mu\nu} \right), \quad (3.159)$$

$$x_h = \frac{Q_h^2}{2P \cdot q_h}, \quad \tilde{P}_\nu = P_\nu - q_{h\nu} \frac{P \cdot q_h}{q_h^2}.$$

Для адронных переменных мы положили $q_h = q$ и $Q_h^2 = -q^2$.

Рассмотрим теперь процесс с излучением мягкого фотона дополнительно к тому жесткому фотону, который детектируется. Как обычно, мы ограничиваем энергию мягкого фотона сверху малой величиной $\delta\varepsilon$, которую определим в системе центра масс.

При вычислениях этого вклада следует аккуратно учитывать факторы малости двух параметров: Δ и θ_0 . Удобно ввести иерархию $\theta_0 \ll \Delta \ll 1$. Тогда стандартные вычисления сопровождающего фактора мягкого излучения дают результат, приведенный в статье [126]. Суммирование его с вкладом виртуальных поправок приводит к замене величины ρ на $\tilde{\rho}$ в формуле (3.158):

$$\rho \rightarrow \tilde{\rho} = 2(L_Q - 1) \ln \frac{\Delta^2}{Y} + 3L_Q + 3 \ln z - \ln^2 Y - \frac{\pi^2}{3} - \frac{9}{2} + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{1+c}{2} \right).$$

Для суммы этих вкладов в сечение получаем

$$\frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_{VS}}{dx dy dz} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 [P(z, L_0) \tilde{\rho} - T] \tilde{\Sigma}. \quad (3.160)$$

Рассмотрим теперь вклад процесса с излучением дополнительного фотона с энергией большей, чем $\delta\varepsilon$; т. е. в нашем случае процесс, отвечающий вкладу жесткого тормозного излучения, является реакцией с излучением двух жестких фотонов. Причем по крайней мере один из них должен быть зарегистрирован детектором. Наличие двух *равноправных* фотонов осложняет ситуацию.

Для удобства разобьем кинематическое фазовое пространство на три области. В первой области оба фотона попадают в детектор, т. е. оба они имеют импульсы, содержащиеся в узком конусе вокруг направления электронного пучка ($\theta_{1,2} \leq \theta_0$). Во второй области один фотон излучается под малым углом к импульсу начального электрона и попадает в детектор, тогда как другой излучается вдоль направления движения конечного (рассеянного) электрона ($\theta_2 = \widehat{\mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2} \leq \theta'_0$) и не попадает в детектор. В этой области оба фотона рассматриваются как *коллинеарные*, но разным частицам. В третьей области имеется так называемая *полуколлинеарная* ситуация: импульс одного жесткого фотона коллинеарен импульсу начального электрона, а второй фотон излучается так, что его импульс не попадает ни в узкий конус вокруг оси электронного пучка ($\widehat{\mathbf{k}_2 \mathbf{p}_1} \geq \theta_0$), ни в узкий конус вокруг импульса конечного электрона ($\widehat{\mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2} \geq \theta'_0$).

Вклады первой и второй кинематических областей после интегрирования по углам обоих фотонов (в рамках апертуры детектора) содержат ведущие логарифмические слагаемые, квадратичные по L_0 и L_Q . Вклад третьей области формально содержит только следующие за ведущими слагаемые. Однако среди последних есть члены, пропорциональные $L_0 \ln(1/\theta_0^2)$, которые численно велики даже по сравнению с ведущими, поскольку $\varepsilon\theta_0/m \ll 1/\theta_0$.

Проводя вычисления в следующем за ведущим приближении, можно использовать описанные выше методы. Однако в данном случае мы применим готовые выражения, которые можно найти в работе Н. П. Меренкова [209]. Вклад первой области, в которой оба жестких фотона коллинеарны начальному электрону, дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_i^{\gamma\gamma}}{dx dy dz} = \frac{\alpha^2}{8\pi^2} L_0 \left[L_0 \left(P_{\Theta}^{(2)}(z) + 2 \frac{1+z^2}{1-z} \left(\ln z - \frac{3}{2} - 2 \ln \Delta \right) \right) + 6(1-z) + \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{1-z} - 1 - z \right) \ln^2 z - 4 \frac{(1+z)^2}{1-z} \ln \frac{1-z}{\Delta} \right] \tilde{\Sigma} + \mathcal{O}(\text{const}). \quad (3.161) \end{aligned}$$

Здесь мы видим Θ -часть знакомой нам функции расщепления $P_{\Theta}^{(2)}(z)$, появляющуюся во втором порядке разложения по α несинглетной структурной функции электрона в ВЛП.

Величина вклада второй кинематической области существенным образом зависит от экспериментального метода регистрации рассеянного электрона, который должен учитываться при построении реалистических теоретических предсказаний. Рассмотрим эксклюзивную постановку задачи регистрации электрона, когда детектируется только рассеянный электрон. А фотон при этом излучается вдоль (под углом не более θ'_0) направления движения конечного электрона, но остается *незамеченным*, т. е. либо вообще не детекти-

руется, либо просто не учитывается при анализе данных. Тогда мы получаем (см. также (П8) в [209])

$$\frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_{ii}^{\gamma\gamma}}{dx dy dz} = \frac{\alpha^2}{4\pi^2} P(z, L_0) \int_{\Delta/Y}^{y_2^{\max}} \frac{dy_2}{1+y_2} \left[\frac{1+(1+y_2)^2}{y_2} (\tilde{L}-1) + y_2 \right] \Sigma_s, \quad (3.162)$$

$$\Sigma_s = \Sigma(x_b, y_b, Q_b^2),$$

где

$$\tilde{L} = \ln \left(\frac{\varepsilon \theta'_0}{m} \right)^2 + 2 \ln Y, \quad y_2 = \frac{x_2}{Y}, \quad Y = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}, \quad y_2^{\max} = \frac{2z - Y(1+c)}{Y(1+c)},$$

$$x_b = \frac{xyz(1+y_2)}{z - (1-y)(1+y_2)}, \quad y_b = \frac{z - (1-y)(1+y_2)}{z}, \quad Q_b^2 = Q^2 z(1+y_2).$$

Более реалистична экспериментальная ситуация калориметрической регистрации, когда энергии электрона и фотонов, попадающих в близкие точки, суммируются и результат используется как измеренная на опыте энергия конечного электрона. При этом параметр θ'_0 , вволившийся ранее как вспомогательный и произвольный, приобретает вполне конкретный смысл углового разрешения детектора. В таком случае мы находим

$$\frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_{ii, \text{cal}}^{\gamma\gamma}}{dx dy dz} = \frac{\alpha^2}{4\pi^2} P(z, L_0) \int_{\Delta/Y}^{\infty} \frac{dy_2}{(1+y_2)^3} \left[\frac{1+(1+y_2)^2}{y_2} (\tilde{L}-1) + y_2 \right] \tilde{\Sigma} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{4\pi^2} P(z, L_0) \left[(\tilde{L}-1) \left(2 \ln \frac{Y}{\Delta} - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] \tilde{\Sigma}. \quad (3.163)$$

Для вывода последнего выражения использовано соотношение

$$\Sigma_s = \frac{1}{(1+y_2)^2} \tilde{\Sigma}, \quad (3.164)$$

которое верно для случая калориметрической постановки опыта.

Рассмотрим теперь последний случай — полуколлинеарную кинематику. Соответствующий вклад может быть найден с помощью метода квазиреальных электронов [136]:

$$\frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_{iii}^{\gamma\gamma}}{dx dy dz} = \frac{\alpha}{2\pi} P(z, L_0) \frac{2\alpha}{\pi} \int \frac{d^3 k_2}{\omega_2} \frac{\alpha^2 (Q_{sc}^2)}{Q_{sc}^4} I^\gamma, \quad (3.165)$$

$$I^\gamma = B_{\rho\sigma}(zp_1, p_2, k_1) H^{\rho\sigma} / (8\pi).$$

Величина $B_{\rho\sigma}(zp_1, p_2, k_1)$ получена из (3.156), где мы положили $m = 0$. После несложных алгебраических преобразований получаем

$$I^\gamma = \frac{1}{st} \left[F_2(x_{sc}, Q_{sc}^2) \left(\frac{M^2}{Q_{sc}^2} x_{sc} G - V \left[x_{sc}(z^2 + (1-y)^2)V + (1-y) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (zQ^2 - s) - z(zQ^2 - t) \right] \right) - GF_1(x_{sc}, Q_{sc}^2) \right], \quad (3.166)$$

$$G = z^2 Q^4 - 2st + Q_{sc}^4, \quad x_{sc} = \frac{Q_{sc}^2}{V(z+y-1) - 2P \cdot k_2},$$

$$s = 2p_2 \cdot k_2, \quad t = -2zp_1 \cdot k_2, \quad Q_{sc}^2 = zQ^2 - s - t.$$

Интегрирование по углам в (3.165) должно быть выполнено по всему фазовому пространству за исключением узких конусов вдоль направлений движения начального и конечного электронов, т. е. без тех областей, которые были уже учтены. Результат имеет вид

$$\frac{z}{y} \frac{d^3 \sigma_{ii}^{\gamma\gamma}}{dx dy dz} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 P(z, L_0) \left[\int_{\Delta}^{x_2^t} \frac{dx_2}{x_2} \frac{z^2 + (z-x_2)^2}{z(z-x_2)} \ln \frac{2(1-c)}{\theta_0^2} \Sigma_t + \right. \\ \left. + \int_{\Delta}^{x_2^s} \frac{dx_2}{x_2} \frac{1 + (1+y_2)^2}{1+y_2} \ln \frac{2(1-c)}{\theta_0^2} \Sigma_s + Z \right], \quad (3.167)$$

$$\Sigma_t = \Sigma(x_t, y_t, Q_t^2). \quad (3.168)$$

Логарифмическая зависимость от вспомогательного параметра Δ и от углов θ_0 и θ_0' полностью содержится в первых двух членах выражения в правой части. А величина Z представляет собой довольно сложную функцию, не имеющую сингулярностей, ее вид может быть найден в приложении В работы [90].

Верхние пределы интегрирования по x_2 в (3.167) имеют вид

$$x_2^t = z - \frac{Y(1+c)}{2}, \quad x_2^s = \frac{2z - Y(1+c)}{1+c}. \quad (3.169)$$

Аргументы функции Σ_t определены как

$$x_t = \frac{xy(z-x_2)}{z-x_2+y-1}, \quad y_t = \frac{z-x_2+y-1}{z-x_2}, \quad Q_t = Q^2(z-x_2). \quad (3.170)$$

Формулы (3.152), (3.160)–(3.162) (или (3.163)) и (3.167) дают полный ответ для суммарного вклада ведущих и следующих за ведущими поправок

к процессу глубоконеупругого электрон-протонного рассеяния с детектированием жесткого фотона под малыми углами к электронному пучку. Их сумма на зависит от величины вспомогательного параметра $\Delta = \delta\varepsilon/\varepsilon$.

Сумму вкладов рассматриваемых радиационных поправок можно переписать в виде

$$\frac{z}{y} \frac{d^3\sigma}{dx dy dz} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 (\Sigma_i + \Sigma_f). \quad (3.171)$$

Первый член Σ_i не зависит от условий регистрации электрона в конечном состоянии:

$$\begin{aligned} \Sigma_i = & \left\{ \frac{1}{2} L_0^2 P_{\Theta}^{(2)}(z) + P(z, L_0) \left[\frac{1 - 16z - z^2}{2(1 + z^2)} + \right. \right. \\ & + \left. \left(3 - 2 \ln Y + \frac{4z}{1 + z^2} \right) \ln z + \ln^2 Y - 2 \operatorname{Li}_2(z) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1 + c}{2}\right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2(1 + z)^2}{1 + z^2} \ln(1 - z) + \frac{1 - z^2}{2(1 + z^2)} \ln^2 z \right] \right\} \tilde{\Sigma} + P(z, L_0) \tilde{\Sigma} \ln \frac{2(1 - c)}{\theta_0^2} \times \\ & \times \left[\int_0^{u_0} \frac{du}{u} (1 + (1 - u)^2) \left(\frac{\Sigma_t}{(1 - u)\tilde{\Sigma}} - 1 \right) - \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} (1 + (1 - u)^2) \right] + P(z, L_0) Z, \\ & u = \frac{x_2}{z}, \quad u_0 = \frac{x_2^t}{z}. \end{aligned}$$

Выражение для Z громоздкое, оно может быть найдено в приложении В работы [90].

Второй член в (3.171), обозначенный Σ_f , существенным образом зависит от экспериментальных условий регистрации и отбора событий. Он соответствует вкладу фотонных поправок к конечному состоянию электрона. В эксклюзивной постановке, когда регистрируется энергия *голово* электрона (т. е. без суммирования с энергией летящего рядом с ним фотона), этот вклад принимает вид

$$\begin{aligned} \Sigma_f = \Sigma_f^{\text{excl}} = & P(z, L_0) \int_0^{x_2^s/Y} dy_2 \left[\left(\frac{1 + (1 + y_2)^2}{y_2} (L_Q + \ln Y - 1) + y_2 \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{1 + y_2} \Theta\left(y_2 - \frac{\Delta}{Y}\right) + (L_Q + \ln Y - 1) \delta(y_2) \left(2 \ln \frac{\Delta}{Y} + \frac{3}{2} \right) \right] \Sigma_s. \end{aligned}$$

В этом случае параметр θ_0^t является вспомогательным и полная сумма вкладов не должна от него зависеть.

Как будет видно из численных иллюстраций, ситуация заметно меняется, если электрон регистрируется калориметрически, т. е. ему приписывается энергия всех частиц, попавших в один и тот же кластер калориметра в детекторе. В более реалистических калориметрических условиях детектор не различает события с попаданием в него одного электрона и с попаданием пары летящих *близко* электрона и фотона (или двух фотонов), энергии которых детектором эффективно складываются. Для простоты *близость* фотона и электрона можно описать через угловое разрешение детектора θ'_0 так, что частицы, имеющие меньшее угловое расстояние, видны как одна с суммарной энергией. В таком случае мы получаем

$$\Sigma_f = \Sigma_f^{\text{cal}} = P(z, L_0) \left[\frac{1}{2} \tilde{\Sigma} + \ln \frac{2(1-c)}{\theta_0'^2} \int_0^\infty \frac{dy_2}{y_2} \frac{1 + (1+y_2)^2}{1+y_2} \times \right. \\ \left. \times \left(\Sigma_s \Theta(y_2^{\text{max}} - y_2) - \frac{\tilde{\Sigma}}{(1+y_2)^2} \right) \right]. \quad (3.172)$$

Отметим, что в такой калориметрической постановке опыта параметр θ'_0 имеет определенный физический смысл и окончательные результаты от него зависят. При этом коллинеарные массовые сингулярности, связанные с излучением фотонов электронами в конечном состоянии, сокращаются в соответствии с теоремой Киношита–Ли–Науэнберга [20]. При больших значениях $\theta'_0 \sim \mathcal{O}(1)$ результат приближается к тому, который был получен в работе [89] при полном пренебрежении излучением конечным электроном. Кроме того, наш результат отличается от найденного в работе [204], в которой не была учтена интерференция амплитуд, описывающих излучение двух фотонов (см. детальное обсуждение в [89]).

Рассмотрим теперь численные результаты, полученные для следующих калориметрических условий:

$$E_e = 27,5 \text{ ГэВ}, \quad E_p = 820 \text{ ГэВ}, \quad \theta_0 = 0,5 \text{ мрад}, \quad (3.173)$$

для углового разрешения детектора мы берем $\theta'_0 = 50$ мрад. Для структурных функций нуклона использовалась параметризация ALLM97 [210] с $R = 0$. На фазовое пространство излученных фотонов дополнительные ограничения не накладывались.

На рис. 10 показаны относительные вклады радиационных поправок

$$\delta_{\text{RC}} = \frac{d^3\sigma}{d^3\sigma_{\text{Born}}} - 1 \quad (3.174)$$

в ведущем и следующем за ведущим приближениях для случая стандартных переменных Бёркена x и y для $x = 0,1$ и $x = 10^{-4}$ при энергии зарегистрированного фотона $E_{\text{PD}} = 5$ ГэВ. Типичный эффект учета следующего

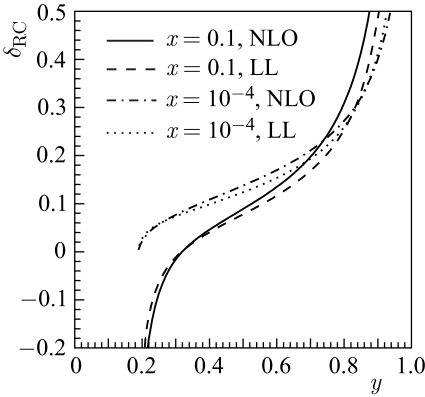


Рис. 10. Радиационные поправки δ_{RC} (3.174) в ведущем и следующем за ведущим логарифмических приближениях в стандартных бьёркеновских переменных для $x = 0,1$ и $x = 10^{-4}$ при регистрации фотона с энергией 5 ГэВ

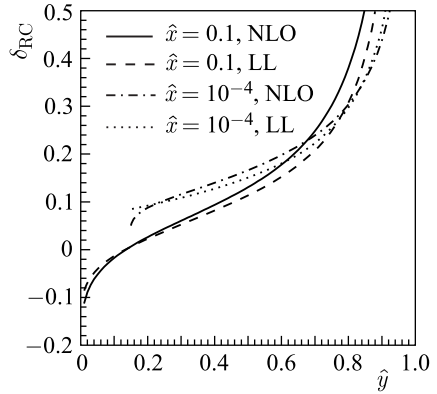


Рис. 11. Радиационные поправки δ_{RC} (3.174) в ведущем и следующем за ведущим приближениях в модифицированных бьёркеновских переменных для $\hat{x} = 0,1$ и $\hat{x} = 10^{-4}$ при регистрации фотона с энергией 5 ГэВ

за ведущим порядком относительно ведущего логарифмического приближения [89] составляет примерно 5%. При малых значениях y кривые обрываются на

$$y_{Bj, \min} = \frac{1 - z}{1 - xz} \tag{3.175}$$

из-за условия $\hat{x} \leq 1$, см. (3.149).

Для случая модифицированных переменных (3.148) результаты показаны на рис. 11. При этом не возникает обрезания на нижней границе переменной \hat{y} . Однако кривые при малых $\hat{x} = 10^{-4}$ не продолжают ниже того значения \hat{y} , при котором конусы с угловыми растворами $2\theta_0$ (PD) и $2\theta'_0$ (угловое разрешение калориметра) начинают перекрываться, поскольку $\hat{y} \rightarrow 0$ соответствует рассеянию электрона *вперед*. В этом случае разница между поправками ВЛП и СВЛП также составляет порядка 5%.

Для иллюстрации зависимости величины вклада СВЛП-поправок от доли энергии z зарегистрированного фотона мы представляем рис. 12 для $E_{PD} = 20$ ГэВ, $\hat{x} = 0,1$ и $\hat{x} = 10^{-4}$. На графике видно увеличение значимости поправок СВЛП при больших E_{PD} и в области малых \hat{x} , особо интересной для экспериментального анализа.

Отметим, что рассмотренный набор диаграмм Фейнмана является калибровочно-инвариантным и модельно-независимым, но он неполный. Мы отбросили вклады обмена электрона с нуклоном двумя фотонами и излучения фотонов и нуклона (кварков). Эти вклады модельно-зависимы и должны

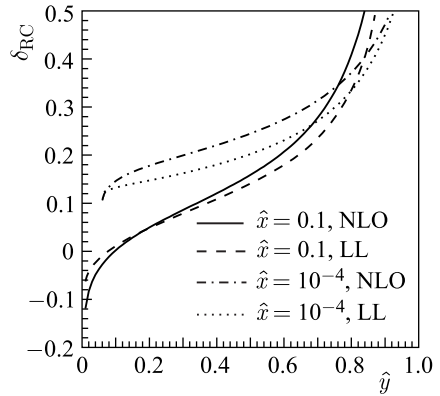


Рис. 12. Радиационные поправки δ_{RC} (3.174) в ведущем и следующем за ведущим приближениях в модифицированных бёркеновских переменных для $\hat{x} = 0,1$ и $\hat{x} = 10^{-4}$ при регистрации фотона с энергией 20 ГэВ

рассматриваться отдельно. Заметим, однако, что больших логарифмических поправок в отброшенных вкладах нет. Действительно, коллинеарные сингулярности, связанные с малыми (токовыми) массами кварков, удаляются из партонного сечения и переносятся в феноменологически определяемые плотности партонных распределений.

3.3.2. *Процесс e^+e^- -аннигиляции в адроны.* Эксперименты с регистрацией жестких фотонов, излученных из начальных состояний в электрон-протонных и электрон-позитронных столкновениях, становятся все более и более востребованными и привлекательными. Причиной тому служит то, что изучение радиационных событий позволяет получать информацию о соответствующих взаимодействиях при (эффективно) меняющейся энергии столкновений. Действительно, эффективная энергия процесса уменьшается на ту величину, что была унесена фотоном, излученным из начального состояния. Таким образом, становится возможным изучать кинематические области, недоступные при использовании только безрадиационных событий. Использование таких событий при анализе глубоконеупругого рассеяния было описано в предыдущем пункте обзора. А здесь мы обратимся к случаю электрон-позитронной аннигиляции в адроны*.

Большое значение тормозного излучения из начального состояния в процессе e^+e^- -аннигиляции хорошо известно. В древесном приближении оно подробно изучалось с теоретической точки зрения в работах В. Н. Байера, В. М. Каткова, В. С. Фадиной, В. А. Хозе [48, 49, 104, 211, 212] и многих других авторов. В этих работах также обсуждался механизм так называемого *радиационного возвращения на резонанс*, когда за счет излучения фотона из начального состояния эффективно происходило уменьшение энергии до

*Материалы этого пункта опубликованы в работе [88].

резонансной, например до области ρ -мезонного пика в процессе $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$.

Нашей идеей является возможность утилизации радиационных событий путем прямого их анализа. Будут рассмотрены условия применимости предлагаемого нами *метода* радиационного возвращения. Представлена программа последовательных вычислений ведущих и следующих за ведущими поправок к процессу аннигиляции, сопровождаемому регистрацией тормозного фотона.

Нашей задачей является найти спектр по энергии регистрируемых фотонов. Рассматривается случай электрон-позитронных столкновений при энергиях порядка нескольких гигаэлектронвольт, характерных для ряда современных экспериментов. Напомним, что измерения сечения аннигиляции в адроны при разных энергиях, проводящиеся на таких коллайдерах, существенны для прецизионной проверки Стандартной модели, поскольку они дают информацию об адронном вкладе в поляризацию вакуума. В частности, эти исследования необходимы для прецизионных сравнений теоретических предсказаний с данными экспериментов по измерению аномального магнитного момента мюона, $(g - 2)_\mu$.

Будем рассматривать процесс

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \gamma(k) + H(q), \quad k = (1 - z)p_1, \quad (3.176)$$

где H — какая-то система адронов. Жесткий фотон, попадающий в детектор, имеет импульс k . Удобно ввести его долю энергии $1 - z$ относительно энергии пучка (мы работаем в системе центра масс). Начнем с наиболее перспективной для высокоточных измерений ситуации, когда фотонный детектор расположен под малым углом к оси сталкивающихся пучков. Напомним, что именно с таким случаем мы имели дело при рассмотрении задачи о глубоконеупругом рассеянии с регистрацией фотонов. Пусть угловой растрор детектора составляет $2\theta_0 \ll 1$, причем $\varepsilon^2\theta_0^2 \gg m^2$, где m — масса электрона, а ε — энергия пучка. Для высокоточного описания данного процесса необходимо учесть радиационные поправки.

Для нахождения сечения рассматриваемого процесса (3.176) при условии нахождения фотонного детектора под малым углом в борновском приближении мы можем воспользоваться методом квазиреальных электронов [136]. Он дает

$$d\sigma(k, p_1, p_2) = dW_{p_1}(k)\sigma_0(p_1 - k, p_2), \quad (3.177)$$

где $dW_{p_1}(k)$ — плотность вероятности излучить фотон с долей энергии $1 - z$, летящий внутри под углом, не превышающим $\theta_0 \ll 1$ по отношению к оси электронного пучка,

$$dW_{p_1}(k) = \frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) dz, \quad P_1(z, L_0) = \frac{1 + z^2}{1 - z} L_0 - \frac{2z}{1 - z}, \quad (3.178)$$

где $L_0 = \ln(\varepsilon^2 \theta_0^2 / m^2)$. Величина $d\sigma_0$ дает дифференциальное сечение безрадиационного процесса e^+e^- -аннигиляции в адроны при уменьшенной энергии начального электрона,

$$\sigma_0(z, z_1) = \frac{8\pi^2 \alpha^2}{q^2 |1 - \Pi(q^2)|^2} \int T(q) d\Gamma(q), \quad T(q) = \frac{L_{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}}{(q^2)^2},$$

$$L_{\rho\sigma} = \frac{q^2}{2} \tilde{g}_{\rho\sigma} + 2z^2 \tilde{p}_{1\rho} \tilde{p}_{1\sigma}, \quad (3.179)$$

$$d\Gamma(q) = (2\pi)^4 \delta\left(q - \sum q_j\right) \prod \frac{d^3 q_j}{2\varepsilon_j (2\pi)^3},$$

$$q = zp_1 + z_1 p_2, \quad q^2 = sz_1 z, \quad \tilde{g}_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} - \frac{q_\rho q_\sigma}{q^2}, \quad \tilde{p}_{1\rho} = p_{1\rho} - \frac{p_1 q}{q^2} q_\rho,$$

где q — полный 4-импульс системы адронов в конечном состоянии; q_j — 4-импульс j -го адрона; $s = 2p_1 p_2 = 4\varepsilon^2$ — квадрат суммарной энергии сталкивающихся пучков в системе центра масс*; $H_{\rho\sigma}$ — адронный тензор. Как обычно, вклад поляризации вакуума в пропагатор виртуального фотона параметризуется функцией $\Pi(q^2)$. Адронный и лептонный тензоры удовлетворяют условию сохранения тока. Дифференциальное сечение по энергии регистрируемого фотона получается в результате интегрирования по фазовому пространству адронов, оно имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) \sigma_0(z, 1). \quad (3.180)$$

Каждое адронное состояние описывается собственным тензором. Выражения (3.179) и (3.180) для сечений могут использоваться в разных случаях.

Сумма всех вкладов адронных каналов

$$\sum_h \int H_{\rho\sigma} d\Gamma = f_h(q^2) \tilde{g}_{\rho\sigma} \quad (3.181)$$

связана с отношением полного сечения аннигиляции в адроны к сечению аннигиляции в мюоны $R = \sigma_h / \sigma_\mu$. Для конечного состояния $\mu^+ \mu^-$ имеем

$$f_\mu = \frac{q^2}{6\pi} K(q^2), \quad K(q^2) = \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}},$$

тогда

$$f_h(q^2) = \frac{q^2 R(q^2)}{6\pi} K(q^2). \quad (3.182)$$

*Массой электрона пренебрегаем, поскольку рассматриваются энергии порядка нескольких гигаэлектронвольт.

Подстановка этих выражений в правую часть уравнения (3.179) приводит к замене $\sigma_0(z, z_1) = R(q^2)4\pi\alpha^2 K(q^2)/(3q^2)$.

Возможна и полуинклюзивная постановка эксперимента, когда регистрируется конкретный адрон с 3-импульсом \mathbf{q}_1 , энергией ϵ_1 и массой M , а по фазовому пространству остальных частиц проводится интегрирование. В этом случае вместо (3.181) имеем

$$\sum_{h'} \int H_{\rho\sigma} d\Gamma = H_{\rho\sigma}^{(1)} \frac{d^3 q_1}{2\epsilon_1 (2\pi)^3}, \quad (3.183)$$

$$H_{\rho\sigma}^{(1)} = F_1(\eta, q^2) \tilde{g}_{\rho\sigma} - \frac{4}{q^2} F_2(\eta, q^2) \tilde{q}_{1\rho} \tilde{q}_{1\sigma}, \quad \eta = \frac{q^2}{2qq_1} > 1,$$

где введены безразмерные функции $F_1(\eta, q^2)$ и $F_2(\eta, q^2)$ аналогично случаю глюбоконеупругого рассеяния.

Введя безразмерную переменную $\lambda = 2qq_1/(2zp_1q_1)$, мы можем записать сечение радиационного процесса в виде

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\alpha^2(q^2)}{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) \Sigma(\eta, \lambda, q^2) \frac{1}{(q^2)^2} \frac{d^3 q_1}{\epsilon_1}, \quad (3.184)$$

$$\Sigma(\eta, \lambda, q^2) = F_1(\eta, q^2) + \frac{2F_2(\eta, q^2)}{\eta^2 \lambda^2} \left(\lambda - 1 - \frac{M^2}{q^2} \eta^2 \lambda^2 \right).$$

Современные методы вычисления КЭД радиационных поправок, включая те, которые приведены в данном обзоре, позволяют описать сечение рассматриваемого процесса с высокой точностью. Однако полный учет даже однопетлевых поправок к радиационному процессу является нетривиальной задачей с технической точки зрения*. Более того, для описания поправок к конечному состоянию приходится использовать какую-либо модель, описывающую взаимодействия фотонов с адронами**.

Сейчас мы ограничимся нахождением членов, усиленных первой и второй степенями большого логарифма L , работая в ведущем и следующем за ведущим логарифмическом приближениях.

Интерференция борновских и однопетлевых амплитуд, описывающих поправки к процессу с излучением из начального состояния, может быть получена путем кроссинг-преобразования из соответствующего вклада в электрон-протонное рассеяние, рассмотренное выше. Таким образом, для вклада за счет

* По степени сложности данная задача аналогична вычислению двухпетлевых поправок к безрадиационным процессам.

** Обычно вычисления для случая рождения (псевдо)скалярных мезонов проводятся в модели скалярной электродинамики.

излучения реальных мягких фотонов мы получили

$$\frac{d\sigma^S}{d\sigma_0} = \frac{\alpha}{\pi} \left[2(L_s - 1) \ln \frac{m\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon} + \frac{1}{2}L_s^2 - \frac{\pi^2}{3} \right], \quad (3.185)$$

$$L_s = \ln \frac{s}{m^2} = L_0 + L_\theta, \quad L_\theta = \ln \frac{4}{\theta^2},$$

где λ — фиктивная масса фотона; $\Delta\varepsilon$ — максимальная энергия мягкого фотона. Сумма вкладов за счет виртуальных поправок и мягкого тормозного излучения свободна от инфракрасных сингулярностей, т. е. в нашем случае — от зависимости от параметра λ . Сумма имеет вид

$$d\sigma^{V+S} = \frac{8\pi^2\alpha^2}{s|1 - \Pi(q^2)|^2} \frac{\alpha}{2\pi} [\rho B_{\rho\sigma}(q) + A_{\rho\sigma}(q)] \frac{H_{\rho\sigma}(q) d\Gamma(q)}{(q^2)^2} \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{d^3k}{\omega}, \quad (3.186)$$

где

$$\rho = 4(L_s - 1) \ln \Delta + 3L_q - \frac{\pi^2}{3} - \frac{9}{2}, \quad (3.187)$$

$$L_q = L_s + \ln z, \quad \Delta = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \ll 1,$$

величины k и ω есть 3-импульс и энергия жесткого детектируемого фотона соответственно. Тензоры $A_{\rho\sigma}$ и $B_{\rho\sigma}$ имеют довольно сложный вид. Первый из них может быть получен из соответствующих выражений, данных в работе [126]. Тензор $B_{\rho\sigma}$ совпадает с тем, что мы имеем для борновского приближения. В кинематической области, в которой жесткий фотон излучен под малым углом к оси пучка электронов, имеем

$$B_{\rho\sigma} = \frac{2}{z} \left(\frac{1 + z^2}{y_1(1 - z)} - \frac{2m^2z}{y_1^2} \right) L_{\rho\sigma}(q), \quad (3.188)$$

$$A_{\rho\sigma} = \frac{2}{q^2} A_g L_{\rho\sigma}(q), \quad q = zp_1 + p_2,$$

где тензор $L_{\rho\sigma}$ берется из (3.179), $y_1 = 2kp_1$, а величина A_g имеет вид

$$A_g = \frac{4zsm^2}{y_1^2} L_s \ln z + \frac{s}{y_1} \left[\frac{1 + z^2}{1 - z} (-2L_s \ln z - \ln^2 z + \right. \\ \left. + 2\text{Li}_2(1 - z) + 2 \ln \frac{y_1}{m^2} \ln z) + \frac{1 + 2z - z^2}{2(1 - z)} \right]. \quad (3.189)$$

Последующее интегрирование по фазовому пространству жесткого фотона выполняется с логарифмической точностью с использованием следующих

интегралов:

$$\int \frac{d^3k}{2\pi k_0} \left[\frac{1}{y_1}, \frac{m^2}{y_1^2}, \frac{\ln(y_1/m^2)}{y_1} \right] = \left[\frac{1}{2}L_0, \frac{1}{2(1-z)}, \frac{1}{4}L_0^2 + \frac{1}{2}L_0 \ln(1-z) \right] dz. \quad (3.190)$$

Окончательное выражение для сечения, поправленного за счет излучения мягких и виртуальных фотонов, принимает вид

$$\frac{d\sigma^{B+V+S}}{dz} = \sigma_0(z, 1) \left[\frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 (\rho P_1(z, L_0) + N) \right],$$

$$N = -\frac{1+z^2}{1-z} \left[(L_0 + \ln z) \ln z - \frac{\pi^2}{3} + 2 \text{Li}_2(z) \right] L_0 -$$

$$- 2P_1(z, L_0) \ln \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{1+2z-z^2}{2(1-z)} L_0 + \frac{4z}{1-z} L_0 \ln z. \quad (3.191)$$

Если дополнительный (второй) фотон, излученный электроном в начальном состоянии, также попадает в фотонный детектор, то мы уже не можем прямо пользоваться методом квазиреальных электронов. Вместо этого мы должны стартовать с полного набора фейнмановских диаграмм, описывающих двойное тормозное излучение в древесном приближении. Однако аналогичные вычисления мы уже проводили только для кросс-симметричного случая — для канала аннигиляции (см. работу [135]). Для нашего случая путем кроссинг-преобразований получаем

$$\frac{d\sigma_{c1}^H}{dz} = \sigma_0(z, 1) \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 L_0 \int_{\Delta}^{1-z-\Delta} \frac{dx}{\xi} \left[\frac{\gamma\tau}{2} L_0 + (z^2 + (1-x)^4) \times \right.$$

$$\left. \times \ln \frac{(1-x)^2(1-z-x)}{zx} + zx(1-z-x) - x^2(1-x-z)^2 - 2\tau(1-x) \right], \quad (3.192)$$

$$\xi = x(1-x)^2(1-z-x), \quad \gamma = 1 + (1-x)^2, \quad \tau = z^2 + (1-x)^2.$$

Здесь переменная интегрирования x имеет смысл доли энергии одного из фотонов, а величина $1-z-x$ — второго. Так что суммарная энергия фотонов, а именно она регистрируется детектором, равна $1-z$. Индекс $c1$ указывает на то, что этот вклад соответствует кинематической области излучения дополнительного фотона вдоль направления импульса начального электрона \mathbf{p}_1 .

Интегрирование по x в правой части (3.192) дает

$$\frac{d\sigma_{c1}^H}{dz} = \sigma_0(z, 1) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{L_0}{2} \left\{ \left[P_{\Theta}^{(2)}(z) + 2 \frac{1+z^2}{1-z} \left(\ln z - \frac{3}{2} - 2 \ln \Delta \right) \right] L_0 + \right. \\ \left. + 6(1-z) + \frac{3+z^2}{1-z} \ln^2 z - \frac{4(1+z)^2}{1-z} \ln \frac{1-z}{\Delta} \right\}, \quad (3.193)$$

где $P_{\Theta}^{(2)}(z)$ есть знакомая нам Θ -часть фотонной составляющей несинглетной функции расщепления электрона второго порядка в ВЛП.

Если дополнительный фотон, излученный из начального состояния, не попадает в фотонный детектор, мы выделяем кинематическую область, соответствующую коллинеарному излучению вдоль налетающего позитрона. Пусть угол между импульсами позитрона и дополнительно фотона не превышает $\theta' \ll 1$, тогда

$$\frac{d\sigma_{c2}^H}{dz} = \frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) \int_{\Delta}^{1-\delta/z} \frac{\alpha}{2\pi} P_1(1-x, L') \sigma_0(z, 1-x) dx, \quad (3.194)$$

где $L' = L_s + \ln(\theta'^2/4)$, $\delta = M^2/s$, а M^2 есть квадрат минимальной инвариантной массы адронной системы. Предполагаем, что $z \sim 1$.

Заметим, что мы ввели дополнительный вспомогательный параметр $\theta' \ll 1$, который (вместе с θ_0) отделяет области коллинеарного излучения второго фотона. В отличие от θ_0 , который задается геометрическими размерами детектора, зависимость от параметра θ' должна пропасть при сложении вкладов коллинеарных и полуколлинеарных кинематических областей излучения второго фотона. В полуколлинеарной области имеем

$$\frac{d\sigma_{sc}^H}{dz} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 P_1(z, L_0) \int \frac{d^3 k_1}{2\pi\omega_1^3} \frac{16\pi^2 \alpha^2}{(1-c^2)z^2} T(c, z, x),$$

$$T(c, z, x) = \int \frac{H_{\rho\sigma}(q_2) d\Gamma(q_2)}{s(q_2^2)^2 |1 - \Pi(q_2^2)|^2} \left[\frac{s}{2} ((z-x_2)^2 + z^2(1-x_1)^2) g_{\rho\sigma} + \right. \\ \left. + 2(z(1-x_1) - x_2)(z^2 p_{1\rho} p_{1\sigma} + p_{2\rho} p_{2\sigma}) \right], \quad (3.195)$$

$$x_1 = \frac{x}{2}(1-c), \quad x_2 = \frac{x}{2}(1+c), \quad (3.196)$$

$$q_2 = zp_1 + p_2 - k_1, \quad c = \cos \widehat{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1}.$$

Фазовый объем второго фотона можно представить в виде

$$\int \frac{d^3 k_1}{2\pi\omega^3} = \int_{\Delta}^{\hat{x}} \frac{dx}{x} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{-1+\theta'^2/2}^{1-\theta_0^2/2} dc, \quad \hat{x} = \frac{2(z-\delta)}{1+z+c(1-z)}. \quad (3.197)$$

Явно выделив вклады, зависящие от вспомогательных параметров, получаем

$$\frac{d\sigma_{sc}^H}{dz} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 P_1(z, L_0) \left[\Sigma_{sc}(z) + \ln \frac{4}{\theta_0^2} \int_{\Delta}^{z^{-\delta}} \frac{dx}{x} \frac{z^2 + (z-x)^2}{z^2} \sigma_0(z-x, 1) + \ln \frac{4}{\theta'^2} \int_{\Delta}^{1-\delta/z} \frac{dx}{x} (1 + (1-x)^2) \sigma_0(z, 1-x) \right], \quad (3.198)$$

$$\Sigma_{sc} = \frac{8\pi^2 \alpha^2}{z^2} \int_{-1}^1 dc \int_{\Delta}^{\hat{x}} \frac{dx}{x} \left[\frac{T(c, z, x) - T(1, z, x)}{1-c} + \frac{T(c, z, x) - T(-1, z, x)}{1+c} \right].$$

Окончательно поправка порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ к радиационному процессу аннигиляции представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dz} &= \frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) \sigma_0(z, 1)(1+r) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} P_1(z, L_0) \sigma_0(z, 1) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left\{ L_0 \left(\frac{1}{2} L_0 P^{(2)}(z) + G \right) \sigma_0(z, 1) + \right. \\ &\quad \left. + P_1(z, L_0) \left[\int_0^{1-\delta/z} C_1(x) \sigma_0(z, 1-x) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L\theta \int_0^{z^{-\delta}} C_2(z, x) \sigma_0(z-x, 1) dx + \Sigma_{sc} \right] \right\}, \quad (3.199) \end{aligned}$$

где последнее слагаемое определяется выражением (3.198) и

$$\begin{aligned} C_1(x) &= P_1(1-x, L_s) \Theta(x-\Delta) + (L_s-1) \left(2 \ln \Delta + \frac{3}{2} \right) \delta(x), \\ C_2(z, x) &= \frac{z^2 + (z-x)^2}{z^2 x} \Theta(x-\Delta) + \left(2 \ln \Delta + \frac{3}{2} - 2 \ln z \right) \delta(x), \\ G(z) &= \frac{1+z^2}{1-z} (3 \ln z - 2 \text{Li}_2(z)) + \frac{1}{2} (1+z) \ln^2 z - \\ &\quad - \frac{2(1+z)^2}{1-z} \ln(1-z) + \frac{1-16z-z^2}{2(1-z)} + \frac{4z \ln z}{1-z}. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Для повышения точности описания рассматриваемого процесса следует учесть ведущие поправки высших порядков. Сделать это можно на осно-

вании обсуждавшихся во введении методов. Представим сечение электрон-позитронной аннигиляции в адроны в виде

$$\sigma(s) = \int_{\delta}^1 dx_1 \int_{\delta/x_1}^1 dx_2 \mathcal{D}(x_1, \alpha_{\text{eff}}) \mathcal{D}(x_2, \alpha_{\text{eff}}) \sigma(x_1 x_2 s), \quad (3.201)$$

где структурные функции электрона включают и несинглетную, и синглетную части

$$\mathcal{D}(x_1, \alpha_{\text{eff}}) = \mathcal{D}^{\text{NS}}(x, \alpha_{\text{eff}}) + \mathcal{D}^{\text{S}}(x_1, \alpha_{\text{eff}}). \quad (3.202)$$

Удобно ввести величину

$$\Sigma = \mathcal{D}(z, \bar{\alpha}_{\text{eff}}) \int_{\delta/z}^1 dx_1 \int_{\delta/zx_1}^1 dx_2 \mathcal{D}(x_1, \tilde{\alpha}_{\text{eff}}) \mathcal{D}(x_2, \hat{\alpha}_{\text{eff}}) \sigma_0(zx_1, x_2). \quad (3.203)$$

Отметим, что *сдвинутое* сечение в (3.201) совпадает с тем, которое входит в (3.179): $\sigma(x_1 x_2 s) = \sigma_0(x_1, x_2)$.

Структурные функции возьмем в ВЛП:

$$\mathcal{D}^{\text{NS}}(x, \alpha_{\text{eff}}) = \delta(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}}{2\pi} \right)^n P_1^{\otimes n}(x), \quad (3.204)$$

$$\mathcal{D}^{\text{S}}(x, \alpha_{\text{eff}}) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}}{2\pi} \right)^2 R(x) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}}{2\pi} \right)^3 \left[2P_1 \otimes R(x) - \frac{2}{3} R(x) \right]. \quad (3.205)$$

Бегущую константу связи можно взять на разных масштабах:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\text{eff}} &= -3\pi \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} L_0 \right), \\ \tilde{\alpha}_{\text{eff}} &= -3\pi \ln \left(\frac{1 - (\alpha/3\pi) L_s}{1 - (\alpha/3\pi) L_0} \right), \\ \hat{\alpha}_{\text{eff}} &= -3\pi \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} L_s \right), \end{aligned} \quad (3.206)$$

что, впрочем, является выходом за рамки ВЛП.

При фиксированных значениях z ($z < 1$) величина Σ определяет ведущий логарифмический вклад в сечение процесса с регистрацией фотона. Он соответствует только Θ -части структурной функции $D(z, \bar{\alpha}_{\text{eff}})$ перед знаком интеграла в (3.203). Если мы рассмотрим только фотонные поправки, то надо ограничиться несинглетной частью структурной функции и первыми членами разложения бегущей константы связи:

$$\bar{\alpha}_{\text{eff}} \rightarrow \alpha L_0, \quad \tilde{\alpha}_{\text{eff}} \rightarrow \alpha L_\theta, \quad \hat{\alpha}_{\text{eff}} \rightarrow \alpha L_s. \quad (3.207)$$

Легко увидеть, что в этом случае ведущий вклад в сечение (3.199) может быть получен разложением величины $\Sigma(z < 1)$ по степеням α с удержанием только членов, пропорциональных α^2 в произведении структурных функций.

Если мы хотим учесть вклады поправок за счет реальных и виртуальных e^+e^- -пар, как показано в [213], нужно использовать синглетную и несинглетную части структурных функций и бегущие константы связи (3.206). Отметим, что включение в рассмотрение поправок высших порядков приводит к появлению новых вопросов о деталях экспериментальных условий, касающихся регистрации и отбора событий.

Полное сечение e^+e^- -аннигиляции в адроны может быть получено путем интегрирования величины Σ по z :

$$\sigma(s) = \int_{\delta}^1 dz \mathcal{D}(z, \bar{\alpha}_{\text{eff}}) \int_{\delta/z}^1 dx_1 \int_{\delta/zx_1}^1 dx_2 \mathcal{D}(x_1, \tilde{\alpha}_{\text{eff}}) \mathcal{D}(x_2, \hat{\alpha}_{\text{eff}}) \sigma(zx_1x_2s). \quad (3.208)$$

Это выражение можно упростить, если зафиксировать $zx_1 = y$:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 dz \mathcal{D}(z, \bar{\alpha}_{\text{eff}}) \int_{\delta/z}^1 dx_1 \mathcal{D}(x_1, \tilde{\alpha}_{\text{eff}}) &= \int_{\delta}^1 dz \int_y^1 dy \mathcal{D}(z, \bar{\alpha}_{\text{eff}}) \mathcal{D}\left(\frac{y}{z}, \tilde{\alpha}_{\text{eff}}\right) = \\ &= \int_{\delta}^1 dy \mathcal{D}(y, \bar{\alpha}_{\text{eff}} + \tilde{\alpha}_{\text{eff}}), \quad \bar{\alpha}_{\text{eff}} + \tilde{\alpha}_{\text{eff}} = \hat{\alpha}_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Используя этот результат и определение $\hat{\alpha}_{\text{eff}}$, получаем вид, полностью аналогичный форме представления сечения процесса Дрелла–Яна, предсказываемой подходом ренормализационной группы.

Формулы (3.209), (3.203) дают представление о поведении сечения рассматриваемого процесса и радиационных поправок к нему. На рис. 13 показано дифференциальное сечение $d\sigma/dz$ как функция доли энергии z . Энергия пучков выбрана равной $E_{\text{beam}} = 0,5$ ГэВ. Область изменения переменной z слева ограничена порогом рождения пары пионов*, а справа — порогом регистрации фотона, выбранным равным 50 МэВ. Высокий пик в центральной части рисунка соответствует резонансному вкладу промежуточного состояния ρ -мезона. Для численных оценок величина R взята из экспериментальных данных [214]. Величина соответствующих радиационных поправок r (см. (3.209)) представлена на рис. 14.

*Процесс $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ с более низким порогом по энергии имеет малое сечение и требует специального рассмотрения.

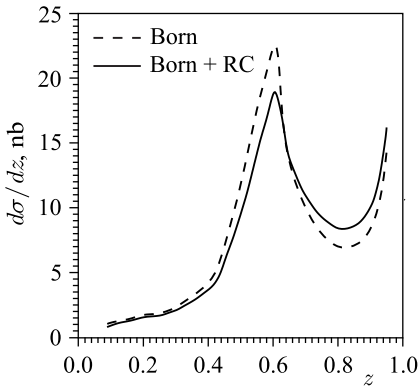


Рис. 13. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow$ адроны с регистрацией тормозного фотона

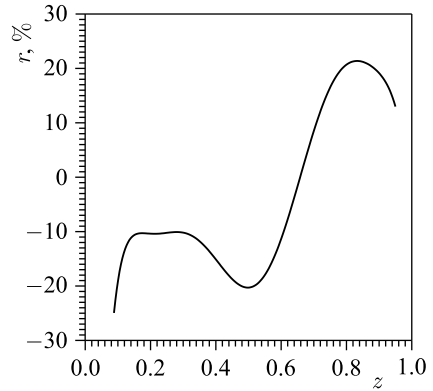


Рис. 14. Радиационные поправки к сечению процесса $e^+e^- \rightarrow$ адроны с регистрацией фотона

Таким образом, мы рассмотрели случай аннигиляции в адроны с регистрацией фотона, вылетающего под малым углом к оси пучка электронов. Общее выражение для наблюдаемого сечения, из которого потом надо извлекать величину σ_0 , можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_0 \left[a_1 \frac{\alpha}{\pi} L + b_1 \frac{\alpha}{\pi} + a_2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 L^2 + b_2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 L + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (3.210)$$

где L — большой логарифм. Выше приведены выражения для слагаемых a_1 , b_1 , a_2 , b_2 и некоторые вклады в c_2 . Обобщенная формула (3.203) позволяет учесть члены порядка $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$. Возможно дальнейшее повышение точности за счет учета следующих за ведущими поправкам высших порядков и в первую очередь вклада излучения из конечного состояния и его интерференции с амплитудами, описывающими излучение из электронов*.

Полностью аналогично рассмотренному случаю с расположением фотонного детектора под малым углом можно проанализировать ситуацию с регистрацией фотона на большой угол [215–217]. При этом выражение для радиационного сечения низшего порядка уже не будет содержать большого логарифма. Тогда увеличится теоретическая неопределенность, связанная с вкладом излучения из конечного состояния. Однако такая постановка опыта более удобна по техническим причинам (на существующих установках нет возможности разместить детектор под малым углом к пучку). При планировании будущих экспериментов на сталкивающихся e^+e^- -пучках уже заранее

*Во вперед–назад симметричной постановке эксперимента вклады интерференции подавлены, поскольку в низшем порядке они зарядово-нечетны.

учитывается целесообразность размещения таких специализированных фотонных детекторов.

Таким образом, на современных коллайдерах, таких как ВЭПП-2М, ВЕПП-2000 (Новосибирск), BEPS (Пекин), DAΦNE (Фраскати) и др., включая фабрики B -мезонов, имеется возможность изучать процесс электрон-позитронной аннигиляции в адроны при непрерывно меняющейся энергии, которая контролируется путем измерения фотонов, излученных из начального состояния. При этом для достижения высокой точности результатов анализа данных необходимо строить высокоточные теоретические предсказания с учетом радиационных поправок в ведущем и следующем за ведущим приближении.

3.4. Метод определения бегущей $\alpha(Q^2)$. В работе [73] опубликован разработанный нами метод измерения бегущей постоянной электромагнитных взаимодействий путем анализа данных по баба-рассеянию на малые углы. Позднее этот метод был развит [138] и обобщен на случай мюон-электронного рассеяния [139].

3.4.1. Описание метода. Стандартная модель физики элементарных частиц содержит квантовую электродинамику как часть теории электрослабых взаимодействий. Квантовые эффекты делают константы всех взаимодействий СМ зависящими от энергии. В частности, бегущая постоянная электромагнитных взаимодействий α обычно определяется следующим образом:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Delta\alpha(q^2)}, \quad (3.211)$$

где $\alpha(0) - \alpha_0$ — постоянная тонкой структуры Зоммерфельда, которая измерена в экспериментах при низких энергиях с огромной точностью порядка $1 \cdot 10^{-9}$ [218]. Величина $\Delta\alpha(q^2)$ возникает из-за квантовых петлевых эффектов в пропагаторе фотона. Обычно в КЭД она нормируется так, что $\Delta\alpha(0) = 0$. Все многочисленные и многообразные исследования электрослабых явлений при более высоких энергиях с необходимостью вовлекают в рассмотрение значения $\alpha(q^2)$ при $q^2 \neq 0$. Например, знание значения $\alpha(m_Z^2)$ существенно для физического анализа данных экспериментов, проводившихся на ускорителе LEP в ЦЕРН. В последнем случае требуется учесть изменение масштаба энергии с нулевого до масштаба массы тяжелого калибровочного бозона m_Z^2 . В эволюции величины $\Delta\alpha$ участвуют вклады от взаимодействий фотона с лептонами, адронами и калибровочными бозонами. Адронный вклад в поляризацию вакуума не может быть (пока) рассчитан теоретически в рамках КХД. Он оценивается путем анализа экспериментальных* данных по

*Асимптотическое поведение анализируемых сечений, предсказываемое пертурбативной КХД при высоких энергиях, также учитывается.

e^+e^- -аннигиляции в адроны и распадов τ -лептона с использованием дисперсионных соотношений (см. обзор [158]). Таким образом, погрешность описания адронных вкладов в величину $\alpha(q^2)$ особенно при $|q^2| > 4m_\pi^2$ оказывается существенной. Вследствие этого мы получаем и заметные вклады в неопределенность теоретического описания многих наблюдаемых в физике элементарных частиц величин: аномального магнитного момента мюона, сечения баба-рассеяния, величины массы бозона Хиггса (извлекаемой в рамках СМ из высокоточных данных LEP) и многих других. В современных экспериментах, в первую очередь проводимых на e^+e^- -коллайдерах, прикладываются большие усилия для достижения все более точного определения адронного вклада в бегущую $\alpha(q^2)$. Отметим, что при этом результаты, получаемые в различных экспериментах, не всегда друг с другом согласуются (см. [158]). Поэтому кажется целесообразным развивать альтернативные методы извлечения величины бегущей $\alpha(q^2)$ из экспериментальных данных. Известны попытки прямого определения $\alpha(q^2)$ из данных по e^+e^- -рассеянию, например путем анализа отношения сечений радиационного и безрадиационного баба-рассеяния ($e^+e^-\gamma/e^+e^-$) [219] или прямо из анализа углового распределения баба-рассеяния на большие углы [220].

Мы предлагаем использовать для изучения бегущей α данные по баба-рассеянию на малые углы. Действительно, этот процесс дает уникальную информацию о поведении постоянной взаимодействий КЭД при пространственно-подобном переданном импульсе $\sqrt{-t}$, где

$$t = -\frac{1}{2}s(1 - \cos\theta) \quad (3.212)$$

определяется через полную энергию в системе центра масс \sqrt{s} и через угол рассеяния электрона θ .

Одним из достоинств предлагаемого метода является то, что процесс баба-рассеяния на малые углы практически полностью определяется квантово-электродинамическими взаимодействиями. Действительно, вклад слабых взаимодействий в него мал даже при энергиях LEP и будущего линейного коллайдера. А сильные взаимодействия дают заметный вклад лишь в саму бегущую константу связи. Это позволяет достичь точности теоретического описания на уровне 0,1% и выше. Более того, в сечении процесса рассеяния на малые углы доминирует вклад t -канала. Табл. 6 и 7 показывают численные значения различных вкладов для типичных условий.

Поскольку вклад (аннигиляционного) s -канала в сечение баба-рассеяния мал, погрешность за счет адронного вклада бегущей константы $\alpha(s)$ во времени-подобной области мала. Таким образом, мы получаем прямой доступ к информации об изменении $\alpha(t)$. Кроме того, ограничиваясь рассмотрением кинематической области рассеяния на малые углы, мы получаем существенные упрощения при вычислении радиационных поправок высших порядков к рассматриваемому процессу, как обсуждалось в п. 3.1.

Таблица 6. Сечение баба-рассеяния на малые углы (нб) в различных приближениях в зависимости от суммарной энергии в с. ц. м. (ГэВ), проинтегрированное по угловому диапазону 45–110 мрад. Индекс t обозначает учет только амплитуд рассеяния в t -канале

Поправка	\sqrt{s} , ГэВ						
	91,187 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 3,4 ГэВ)	91,2 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 3,4 ГэВ)	189 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 7,1 ГэВ)	206 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 7,7 ГэВ)	500 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 18,8 ГэВ)	1000 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 37,5 ГэВ)	3000 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 112,6 ГэВ)
QED	51,428	51,413	11,971	10,077	1,7105	0,42763	0,047514
QED _{t}	51,484	51,469	11,984	10,088	1,7124	0,42809	0,047566
EW	51,436	51,413	11,965	10,072	1,7105	0,42871	0,049507
EW + VP _{t}	54,041	54,018	12,743	10,745	1,8590	0,47303	0,055748
EW + VP	54,036	54,013	12,742	10,744	1,8588	0,47296	0,055742

Таблица 7. То же, что и в табл. 6, но для углового диапазона 5–50 мрад

Поправка	\sqrt{s} , ГэВ						
	91,187 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 1,1 ГэВ)	91,2 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 1,1 ГэВ)	189 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 2,2 ГэВ)	206 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 2,4 ГэВ)	500 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 5,8 ГэВ)	1000 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 11,6 ГэВ)	3000 ($\sqrt{\langle -t \rangle} =$ 34,8 ГэВ)
QED	4963,4	4962,0	1155,4	972,54	165,08	41,271	4,5857
QED _{t}	4963,5	4962,1	1155,4	972,57	165,09	41,272	4,5858
EW	4963,4	4962,0	1155,4	972,53	165,08	41,272	4,5885
EW + VP _{t}	5075,0	5073,5	1190,6	1003,3	172,51	43,647	4,9603
EW + VP	5075,0	5073,5	1190,6	1003,3	172,51	43,646	4,9605

Лептонный и адронный вклады согласно [159] в величину $\Delta\alpha(t)$ в зависимости от квадрата переданного импульса t показаны на рис. 15. Видно, что адронный вклад быстро растет как раз в области значений переданных импульсов, доступной для изучения при анализе данных баба-рассеяния.

Предлагаемый метод измерения бегущей α основан на представлении сечения измеряемого процесса $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ в виде произведения трех факторов:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma^0}{dt} \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)} \right)^2 (1 + \Delta r(t)). \quad (3.213)$$

Первый фактор — сечение баба-рассеяния в борновском приближении. Третий учитывает все возможные радиационные поправки к рассматриваемому процессу за исключением вклада поляризации вакуума, который выделен в виде второго фактора. Первый и третий факторы могут быть предсказаны с теоретической точностью лучше 0,1 %, как обсуждалось в п. 3.1. Зная теоретические предсказания для двух факторов из трех и используя высокоточные экспериментальные данные для дифференциального сечения баба-рассеяния на малые углы, можно извлечь значения $\alpha(t)$. Отметим, что сечение баба-рассеяния на малые углы очень велико и проблем с набором статистических

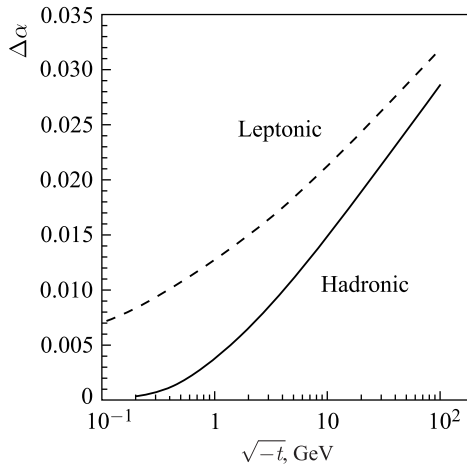


Рис. 15. Вклады в $\Delta\alpha$ от лептонов (штриховая линия) и от адронов (сплошная) в зависимости от $\sqrt{-t}$

данных нет. С другой стороны, надо признать, что при анализе данных будет необходимо знать общую нормировку — светимость установки. Обычно на коллайдерах типа LEP и ILC светимость определяется именно по малоугловому баба-рассеянию, измеряемому тем же самым детектором, который мы предлагаем использовать для определения бегущей α . В этом случае эффективность фитирования $\Delta\alpha$ с одновременным мониторингом светимости будет немного ниже, чем если бы эти операции проводились отдельно. Однако, как показано в нашей работе [73], предлагаемый метод позволяет достичь высокой точности, ограниченной в условиях коллайдера LEP лишь угловым разрешением фотонного детектора.

В работе [221] коллаборация OPAL представила анализ данных, полученных на ускорителе LEP, основанный на предложенном нами методе. Было показано, что метод работает и, действительно, с его помощью можно наблюдать изменение α с ростом переданного импульса. Более того, явно было показано, что в наблюдаемом изменении статистически значим адронный вклад. К сожалению, из-за того что фотонные детекторы не были рассчитаны на высокоточное измерение углов, результирующая точность измерения $\delta\alpha$ оказалась не очень велика. Мы надеемся, что на будущих e^+e^- -ускорителях наш метод будет применен при использовании детекторов с более высоким угловым разрешением.

3.5. Обратное тормозное излучение в процессе Дрелла–Яна. Этот пункт посвящен обсуждению одного из вкладов КЭД радиационных поправок порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ в сечения процессов одиночного рождения электрослабых кали-

бровочных бозонов W и Z . А именно, мы рассмотрим вклад процессов так называемого *обратного тормозного излучения*:

$$h_1 + h_2 \rightarrow X + \gamma + q \rightarrow X + q' + \ell_1 + \bar{\ell}_2, \quad (3.214)$$

где h_1 и h_2 — сталкивающиеся адроны (в нашем случае это пара протон–протон или протон–антипротон); ℓ_1 и $\bar{\ell}_2$ — пара конечных лептонов (например, μ^- и μ^+ в случае одиночного рождения Z , или e^+ и ν_e в случае одиночного рождения W^+); q — начальный кварк, сталкивающийся с фотоном γ ; q' — конечный кварк; X — остальные частицы (адроны), которыми мы не интересуемся. Фотон γ и кварк q рассматриваются как партоны, найденные в начальных адронах и несущие определенную долю импульса при заданном масштабе факторизации. Для получения численных оценок мы используем партонные функции распределения MRST2004QED [222], в которых содержится, в частности, функция распределения фотона в протоне в следующем за ведущим порядке теории возмущений КЭД.

Некоторые численные результаты для процессов обратного тормозного излучения в канале заряженного тока были опубликованы ранее в работе [55]. Ниже мы приведем сравнение этих результатов с нашими. Результаты для случая нейтрального тока получены нами впервые.

3.5.1. Учет массы кварков. Сечение процесса (3.214) получается сверткой партонных функций распределения с сечениями соответствующих подпроцессов на партонном уровне и суммированием по всем подпроцессам. В случае заряженного тока это подпроцессы вида

$$\gamma + q \rightarrow q' + \ell^+ + \nu_\ell, \quad \gamma + \bar{q} \rightarrow \bar{q}' + \ell^- + \bar{\nu}_\ell. \quad (3.215)$$

В случае нейтрального тока рассматриваются следующие подпроцессы:

$$\gamma + q \rightarrow q + \ell^- + \ell^+, \quad \gamma + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \ell^- + \ell^+. \quad (3.216)$$

Фейнмановские диаграммы для рассматриваемых подпроцессов показаны на рис. 16 и 17.

Матричные элементы для процессов обратного тормозного излучения, соответствующие данным диаграммам, вычисляются в среде SANC [51]. В этих вычислениях удерживаются массы всех кварков, т. е. применяется схема вычитаний типа ACOT [223]. Далее, как обычно, необходимо провести процедуру вычитания сингулярностей, связанных с массами кварков.

Дифференциальное сечение на адронном уровне для рассматриваемого процесса дается следующей формулой:

$$\frac{d\sigma_{\text{inv.brem}}^{pp \rightarrow \ell_1 \bar{\ell}_2 X}(s)}{dc_1} = \sum_{q_i} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 q_i(x_1, M^2) \gamma(x_2, M^2) \times \\ \times \frac{d^2 \hat{\sigma}^{q_i \gamma \rightarrow q'_i \ell_1 \bar{\ell}_2}(\hat{s})}{d\hat{c}_1} \mathcal{J} \Theta(c_1, x_1, x_2), \quad (3.217)$$

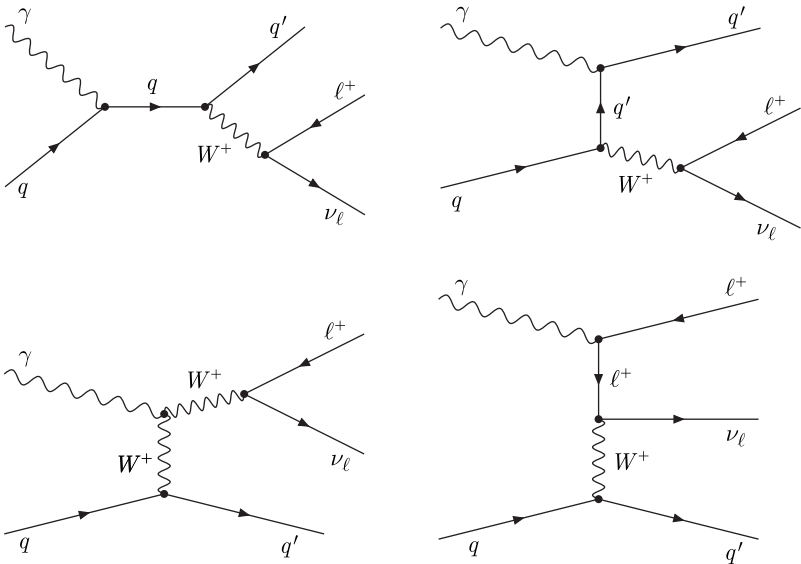


Рис. 16. Диаграммы Фейнмана для подпроцесса обратного тормозного излучения в канале заряженного тока

где c_1 — косинус угла рассеяния первого лептона (можно также выбрать другую переменную). Ступенчатая функция $\Theta(c_1, x_1, x_2)$ определяет область фазового пространства, соответствующую заданной процедуре отбора событий. Партонное сечение задано в системе масс начальных партонов, где косинус угла рассеяния первого лептона равен \hat{c}_1 . Преобразование от переменной c_1 к переменной \hat{c}_1 определяется якобианом

$$\mathcal{J} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial c} = \frac{4x_1x_2}{a^2}, \quad a = x_1 + x_2 - c(x_1 - x_2), \tag{3.218}$$

$$\hat{c} = 1 - (1 - c) \frac{2x_1}{a}, \quad \hat{s} = sx_1x_2,$$

где s — квадрат энергии сталкивающихся адронов в системе их центра масс.

3.5.2. *Вычитание кварковых массовых сингулярностей.* Для рассматриваемых процессов обратного тормозного излучения имеются два типа кварковых массовых сингулярностей. Сингулярности первого типа возникают благодаря фейнмановским диаграммам справа сверху на рис. 16 и 17 для процессов в заряженном и нейтральном токах соответственно. Эти сингулярности проявляются в кинематической области, где пропагатор виртуального кварка близок к массовой поверхности. В этом случае имеется свертка распределений для двух подпроцессов: перехода фотона в пару кварк–антикварк и партонного

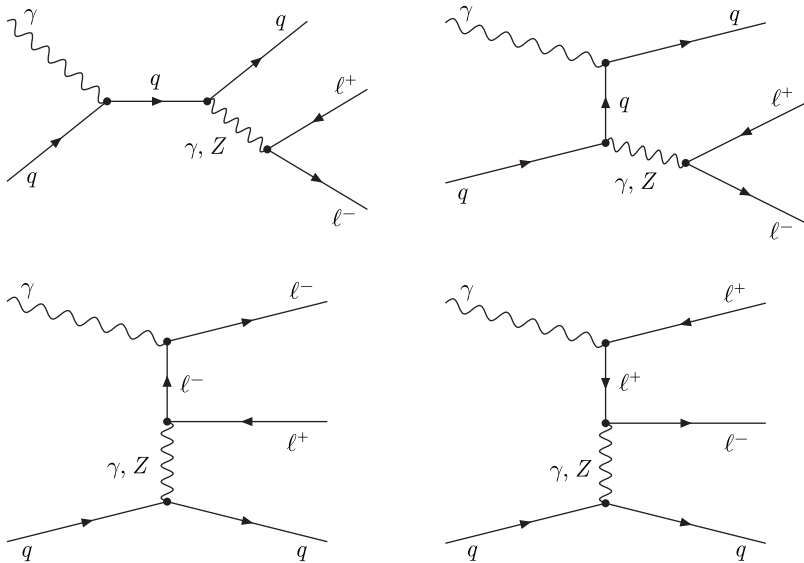


Рис. 17. Диаграммы Фейнмана для подпроцесса обратного тормозного излучения в канале нейтрального тока

процесса Дрелла–Яна $q + q' \rightarrow \ell_1 + \bar{\ell}_2$. При применении процедуры вычитания по схеме $\overline{\text{MS}}$ соответствующий вклад дается формулой

$$\delta_1(c_1) = \sum_{q_i} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 \gamma(x_1, M^2) q_i(x_2, M^2) \int_0^1 dx_3 \mathcal{D}_{q'\gamma}(x_3, M, m_{q'}) \times \frac{d^2 \tilde{\sigma}^{q_i q'_i \rightarrow \ell_1 \bar{\ell}_2}(\tilde{s})}{d\tilde{c}_1} \tilde{\mathcal{J}} \Theta(c_1, x_1 x_3, x_2), \quad (3.219)$$

где \tilde{c}_1 , $\tilde{\mathcal{J}}$ и \tilde{s} вычисляются согласно уравнению (3.218) с заменой $x_1 \rightarrow x_1 x_3$. В случае нейтрального тока в этом уравнении $q = q'$. Структурная функция $\mathcal{D}_{q'\gamma}(x_3, M, m_{q'})$ описывает вероятность найти кварк q' с долей энергии x_3 в протоне. Для схемы $\overline{\text{MS}}$ в следующем за ведущим порядке теории возмущений эта функция принимает вид

$$\mathcal{D}_{q'\gamma}^{\overline{\text{MS}}}(x_3, M, m_{q'}) = \frac{\alpha}{2\pi} Q_{q'}^2 \log \frac{M^2}{m_{q'}^2} [x_3^2 + (1 - x_3)^2], \quad (3.220)$$

где M — масштаб факторизации; $Q_{q'}$ — заряд кварка.

Сингулярности второго типа возникают только в случае нейтрального тока. Они связаны с двумя фейнмановскими диаграммами в нижней части

рис. 17, когда пропагатор виртуального фотона находится вблизи массовой поверхности. В этом случае мы имеем свертку распределений следующих процессов: $\gamma\gamma \rightarrow \ell^-\ell^+$ и $q \rightarrow \gamma q$. Соответствующий вклад дается формулой

$$\delta_2(c_1) = \sum_{q_i} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 q_i(x_1, M^2) \gamma(x_2, M^2) \int_0^1 dx_3 \mathcal{D}_{\gamma q}(x_3, M, m_q) \times \\ \times \frac{d^2 \tilde{\sigma}^{\gamma\gamma \rightarrow \ell^-\ell^+}(\tilde{s})}{d\tilde{c}_1} \tilde{\mathcal{J}} \Theta(c_1, x_1 x_3, x_2). \quad (3.221)$$

Структурная функция $\mathcal{D}_{\gamma q}(x_3, M, m_q)$ описывает плотность вероятности найти фотон γ с долей энергии x_3 в кварке

$$\mathcal{D}_{\gamma q}^{\overline{\text{MS}}}(x_3, M, m_q) = \frac{\alpha}{2\pi} Q_q^2 \frac{1 + (1 - x_3)^2}{x_3} \left\{ \log \frac{M^2}{m_q^2} - 2 \log x_3 - 1 \right\}. \quad (3.222)$$

Далее следует вычесть вклады (3.219) и (3.221) из сечения соответствующего процесса на адронном уровне (3.217). В реальной ситуации нам необходимо выполнить эту процедуру численно для того, чтобы иметь возможность налагать различные экспериментальные ограничения.

3.5.3. Численные результаты. Для получения численных результатов использовался набор входных параметров, как в [55]. Применялась G_F -схема и партонные функции распределения MRST2004QED. Налагались следующие кинематические ограничения на псевдобыстроту η_ℓ и поперечный импульс P_ℓ^\perp лептона, а в случае заряженного тока и на поперечный импульс нейтрино P_{missing}^\perp :

$$|\eta_\ell| < 1,2, \quad P_\ell^\perp > 25 \text{ ГэВ}, \quad P_{\text{missing}}^\perp > 25 \text{ ГэВ}. \quad (3.223)$$

Для процессов на партонном уровне ($\gamma + q \rightarrow q' + \ell_1 + \bar{\ell}_2$) было проведено сравнение с результатами, полученными с помощью пакета CompHEP [224, 225], и получено согласие до четвертой значащей цифры.

В табл. 8 приведены результаты сравнения для процесса обратного тормозного излучения в канале заряженного тока при различных кинематических ограничениях на величину поперечного импульса лептона P_ℓ^\perp . Наши результаты, обозначенные SANC, сравниваются с результатами работы [55]. Малые различия для величин поправок связаны с различными схемами вычисления и вызваны эффектами высших порядков разложения по α . Эти различия лежат в пределах требуемой точности 1 %.

В табл. 9 показано аналогичное сравнение для различных диапазонов изменения поперечной массы пары лептон–нейтрино. Соответствующие поправки $\delta_{\gamma q}$ получились меньше 1 %.

Таблица 8. Сечения σ_0 процессов $p[q]p[q'] \rightarrow \nu_\mu\mu^+X$ и $p[\gamma]p[q] \rightarrow \nu_\mu\mu^+X$ на LHC и соответствующие поправки $\delta_{\gamma q} = \sigma_{\gamma q}/\sigma_0$, полученные группами DK и SANC для различных значений интервалов изменения P_μ^\perp

Сечение, поправка	Группа	P_μ^\perp , ГэВ					
		25 – ∞	50 – ∞	100 – ∞	200 – ∞	500 – ∞	1000 – ∞
σ_0 , пб	DK	2112,2(1)	13,152(2)	0,9452(1)	0,11511(2)	0,0054816(3)	0,00026212(1)
	SANC	2112,2(1)	13,151(1)	0,9451(1)	0,11511(1)	0,0054813(1)	0,00026211(1)
$\delta_{\gamma q}$, %	DK	0,071(1)	5,24(1)	13,10(1)	16,44(2)	14,30(1)	11,89(1)
	SANC	0,074(1)	5,24(1)	13,09(1)	16,43(1)	14,30(1)	11,90(1)

Таблица 9. Сечения σ_0 процессов $p[q]p[q'] \rightarrow \nu_\mu\mu^+X$ и $p[\gamma]p[q] \rightarrow \nu_\mu\mu^+X$ на LHC и соответствующие поправки $\delta_{\gamma q} = \sigma_{\gamma q}/\sigma_0$, полученные группами DK и SANC для различных значений интервалов изменения $M_{\nu_\mu\mu^+}^\perp$

Сечение, поправка	Группа	$M_{\nu_\mu\mu^+}^\perp$, ГэВ				
		50 – ∞	100 – ∞	200 – ∞	500 – ∞	1000 – ∞
σ_0 , пб	DK	2112,2(1)	13,152(2)	0,9452(1)	0,057730(5)	0,0054816(3)
	SANC	2112,2(1)	13,151(1)	0,9451(1)	0,057730(5)	0,0054813(1)
$\delta_{\gamma q}$, %	DK	0,0567(3)	0,1347(1)	0,2546(1)	0,3333(1)	0,3267(1)
	SANC	0,0532(1)	0,1350(1)	0,2537(1)	0,3314(1)	0,3245(1)

Таблица 10. Сечения σ_0 процессов $p[q]p[q'] \rightarrow \mu^+\mu^-X$ и $p[\gamma]p[q] \rightarrow \mu^+\mu^-X$ на LHC и соответствующие поправки $\delta_{\gamma q} = \sigma_{\gamma q}/\sigma_0$ для различных значений интервалов изменения $M_{\mu^+\mu^-}$

Сечение, поправка	$M_{\mu^+\mu^-}$, ГэВ				
	50 – ∞	100 – ∞	200 – ∞	500 – ∞	1000 – ∞
σ_0 , пб (HORACE)	254,64(1)	10,571(1)	0,45303(3)	0,026996(2)	0,0027130(2)
σ_0 , пб (SANC)	254,65(2)	10,571(1)	0,45308(3)	0,026996(2)	0,0027131(2)
$\delta_{\gamma q}$, % (SANC)	0,047(1)	0,449(1)	0,013(1)	0,496(1)	0,619(1)

В табл. 10 даны результаты для вклада процесса обратного тормозного излучения в канале нейтрального тока с рождением пары мюонов. В этой таблице рассматриваются различные ограничения на инвариантную массу пары мюонов. Для борновского сечения показаны также числа группы HORACE, которые находятся в хорошем согласии с нашими числами.

На рис. 18 показаны борновское распределение по поперечному импульсу мюона P_μ^\perp и величина поправок к нему.

На рис. 19 и 20 приведены борновское сечение процесса Дрелла–Яна в канале нейтрального тока и соответствующий вклад процесса обратного тормоз-

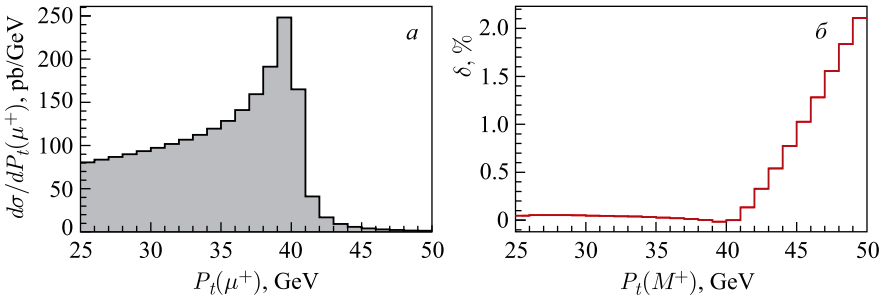


Рис. 18. Сечение процесса Дрелла-Яна по каналу заряженного тока (а) и соответствующий вклад процесса обратного тормозного излучения (б) для распределения по поперечному импульсу μ^+

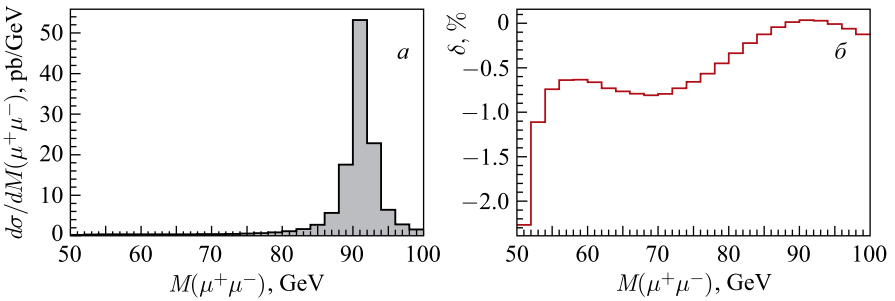


Рис. 19. Сечение процесса Дрелла-Яна по каналу нейтрального тока (а) и соответствующий вклад процесса обратного тормозного излучения (б) для распределения по инвариантной массе пары (μ^-, μ^+)

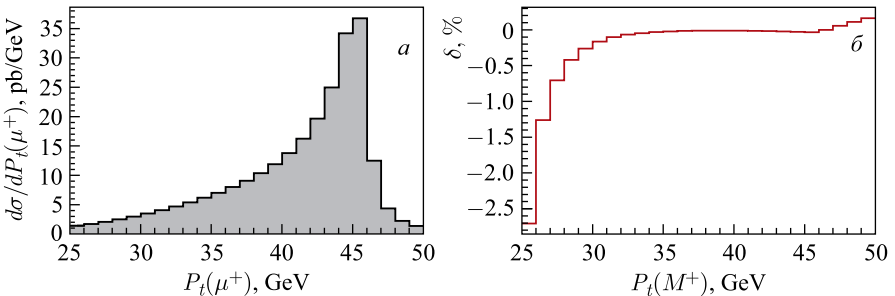


Рис. 20. Сечение процесса Дрелла-Яна по каналу нейтрального тока (а) и соответствующий вклад процесса обратного тормозного излучения (б) для распределения по поперечному импульсу μ^+

ного излучения для распределения по инвариантной массе пары (μ^-, μ^+) и по поперечному импульсу μ^+ соответственно.

4. ПРЕЦИЗИОННОЕ ОПИСАНИЕ СПЕКТРА РАСПАДА МЮОНА

Со времени открытия мюона в 1936 г. экспериментальные и теоретические исследования стали играть роль одного из краеугольных камней всего здания физики элементарных частиц. Действительно, изучение свойств мюона и его взаимодействий с другими частицами давало и продолжает давать важнейшие данные, анализ которых существен для развития всей физики элементарных частиц (см. обзор [226]). Проводимые высокоточные измерения свойств мюона позволяют проверять предсказания теоретических моделей, накладывать ограничения на значения параметров моделей, выходящих за рамки СМ, и дают возможность искать проявления новой физики [64, 65, 227, 228]. Доступность пучков мюонов большой интенсивности и прецизионность современного экспериментального оборудования приводят к необходимости создания адекватных по точности теоретических предсказаний.

В частности, точность измерения аномального магнитного момента мюона достигла нескольких единиц $10^{-5} \%$ [229], а точность измерения времени жизни мюона — $0,001 \%$ [230, 231]. Названные инклюзивные наблюдаемые дают чрезвычайно важную информацию, однако они не позволяют делать выводы о деталях соответствующих взаимодействий частиц. Дополнительная информация о структуре слабых взаимодействий извлекается из экспериментов по наблюдению дифференциальных распределений продуктов распада мюона по импульсам и энергиям. Сопоставление получаемых таким образом данных с предсказаниями Стандартной модели позволяет накладывать серьезные ограничения на параметры моделей *новой физики*.

Завершившийся относительно недавно эксперимент TWIST [232–235] поднял точность определения параметров спектра распада мюона более чем на порядок по сравнению с предыдущими исследованиями. Продолжаются прецизионные опыты по измерению времени жизни мюона в институте П. Шеррера (PSI, Виллиген) на установках FAST [230] и μ LAN [236], где достигнут уровень неопределенности порядка 1 части на миллион. Это позволило повысить точность определения постоянной G_F .

Международная рабочая группа Particle Data Group в периодически публикуемые обзоры [218] обязательно включает специальный раздел, посвященный теоретическим вопросам описания распада мюона. В обзорах [64, 65] помимо обсуждения собственно свойств мюона и стандартных мод его распада также рассматриваются возможности наблюдения проявлений нестандартных взаимодействий в процессах с участием этой частицы.

Существует ряд современных экспериментов, нацеленных на обнаружение безнейтринных распадов мюона с нарушением лептонного числа: $\mu \rightarrow e\gamma$ и $\mu \rightarrow 3e$ [237, 238]. Для изучения этих распадов необходимо достаточно точно знать распределения фоновых процессов $\mu \rightarrow e\gamma\nu_\mu\bar{\nu}_e$ и $\mu \rightarrow 3e\nu_\mu\bar{\nu}_e$ при стремлении суммарных импульса и энергии нейтрино к нулю, точнее —

к величине экспериментального разрешения, присущей конкретному измерению.

Все эти задачи мотивируют детальное изучение вкладов радиационных поправок к распределениям продуктов распада мюона. Кроме того, аналогичные проблемы возникают при рассмотрении распадов τ -лептонов и тяжелых кварков, и возможно взаимное расширение полученных для разных процессов результатов. Кроме всего прочего изучение распада мюона является одной из классических задач физики элементарных частиц, без продвижения в решении которой невозможно развитие данной науки.

В этом разделе мы обсудим основные результаты, опубликованные в серии работ [45, 91–95]. Часть этих результатов использована при анализе данных эксперимента TWIST [232, 233, 235, 239], проводившегося в лаборатории TRIUMF (Ванкувер).

4.1. Распад мюона на борновском уровне. В модели четырехфермионного взаимодействия Ферми дифференциальная ширина стандартного распада мюона на электрон и два нейтрино представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma^{\text{Born}}}{dx dc} &= \Gamma_0 x^2 \beta (f^{\text{Born}}(x) + c\xi g^{\text{Born}}(x)), \quad \Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \\ f^{\text{Born}}(x) &= 3 - 2x + \frac{x}{4}(3x - 4)(1 - \beta^2), \\ g^{\text{Born}}(x) &= (1 - 2x)\beta + \frac{3x^2}{4}(1 - \beta^2)\beta, \\ \beta &= \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E_e^2}}, \quad E_e = \frac{m_\mu}{2}x, \quad c = \cos\theta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где m_e и m_μ — массы электрона и мюона; θ — угол между импульсом электрона и вектором поляризации мюона ($c \rightarrow -c$ для распада μ^+); ξ — степень поляризации мюона; β — скорость электрона в системе покоя мюона; E_e — энергия электрона; x — доля энергии электрона,

$$x_{\min} < x < x_{\max}, \quad x_{\min} = 2\sqrt{\rho}, \quad x_{\max} = 1 + \rho, \quad \rho = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}. \quad (4.2)$$

В безмассовом пределе ($m_e \rightarrow 0$) получаем

$$f^{\text{Born}}(x) \rightarrow f_0(x) = 3 - 2x, \quad g^{\text{Born}}(x) \rightarrow g_0(x) = 1 - 2x. \quad (4.3)$$

Интегрирование по долям энергии дает

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx x^2 \beta f^{\text{Born}}(x) = \frac{1}{2}F(\rho), \quad \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx x^2 \beta g^{\text{Born}}(x) = \frac{1}{2}G(\rho),$$

$$\begin{aligned}
 F(\rho) &= 1 - 8\rho - 12\rho^2 \ln \rho + 8\rho^3 - \rho^4, \\
 G(\rho) &= -\frac{1}{3} + \frac{32}{3}\rho^{3/2} - 30\rho^2 + 32\rho^{5/2} - \frac{40}{3}\rho^3 + \rho^4.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Интегрирование по угловой переменной функции $F(\rho)$ дает полную ширину мюона в борновском приближении:

$$\Gamma^{\text{Born}} = \int_{-1}^1 dc \Gamma_0 \frac{F(\rho)}{2} = \Gamma_0 F(\rho).
 \tag{4.5}$$

А интегрирование функции $G(\rho)$ приводит к ответу для вперед–назад асимметрии распада мюона:

$$\Gamma_{\text{FB}}^{\text{Born}} = \int_0^1 dc c \xi \Gamma_0 \frac{G(\rho)}{2} - \int_{-1}^0 dc c \xi \Gamma_0 \frac{G(\rho)}{2} = \xi \Gamma_0 G(\rho).
 \tag{4.6}$$

В рамках Стандартной модели распад мюона описывается диаграммой Фейнмана с обменом промежуточным векторным W -бозоном. Причем модель четырехфермионного взаимодействия Ферми получается в пределе бесконечно большой массы W -бозона. Следуя определению постоянной Ферми, G_F , предложенному в работе [240], при рассмотрении распада мюона можно перенести все эффекты, связанные с деталями слабых взаимодействий, в значение этой константы. При этом эффекты КЭД-поправок можно считать в рамках (эффективной) модели Ферми. Несмотря на то, что сама модель Ферми является неперенормируемой, электродинамические радиационные поправки к вершине четырехфермионного взаимодействия для данного канала остаются конечными [241] во всех порядках теории возмущений (с учетом стандартных перенормировок КЭД). Отметим, что в 2010 г. Particle Data Group [242] приняла эклектическое определение* константы Ферми в духе соотношений, предложенных ранее в работах [243–245] через формулу для времени жизни мюона,

$$\begin{aligned}
 \tau_\mu^{-1} &\equiv \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} F(\rho) \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\mu^2}{M_W^2} \right) \left[1 + H_1(\rho) \frac{\hat{\alpha}(m_\mu)}{\pi^2} + H_2(\rho) \frac{\hat{\alpha}(m_\mu)^2}{\pi^2} \right], \\
 F(\rho) &= 1 - 8\rho - 12\rho^2 \ln \rho + 8\rho^3 - \rho^4, \\
 H_1(\rho) &= \frac{25}{8} - \frac{\pi^2}{2} - (9 + 4\pi^2 + 12 \ln \rho)\rho + 16\pi^2 \rho^{3/2} + \mathcal{O}(\rho^2),
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

*Определение в PDG за 2010 г. отличается от того, которое было в выпуске 2008 г.

$$H_2(\rho) = \frac{156815}{5184} - \frac{518}{81}\pi^2 - \frac{895}{36}\zeta(3) + \frac{67}{720}\pi^4 + \frac{53}{6}\pi^2 \ln 2 - \frac{5}{4}\pi^2\sqrt{\rho} + \mathcal{O}(\rho),$$

$$\hat{\alpha}^{-1}(m_\mu) = \alpha^{-1} + \frac{1}{3\pi} \ln \rho \approx 135,9, \quad \rho = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}.$$

Впрочем, использование данного определения вполне возможно, поскольку оно отличается от того, которое предложено в [240], только в более высоких порядках теории возмущений, полные вклады которых еще не найдены.

В стандартном подходе к определению G_F явно выделяется эффект за счет конечности массы W -бозона в виде фактора

$$\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\mu^2}{m_W^2} \right). \quad (4.8)$$

Учет более высоких порядков разложения по степеням малой величины $m_\mu^2/M_W^2 \sim 2 \cdot 10^{-4}$ возможен, но не оправдан при точности имеющихся экспериментов.

4.2. Полная поправка первого порядка. В этом пункте мы получим КЭД-поправки порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ к спектру распада поляризованного мюона, точно учитывая зависимость от масс электрона и мюона. Результат получен с помощью стандартной техники однопетлевых вычислений (см., например, [116]). Как обычно, мы разделяем вклады виртуальных, мягких и жестких фотонов:

$$\frac{d^2\Gamma^{(1)}}{dx dc} = \frac{d^2\Gamma^V}{dx dc} + \frac{d^2\Gamma^S}{dx dc} + \frac{d^2\Gamma^H}{dx dc}. \quad (4.9)$$

Для краткости из отдельных вкладов мы приведем явное выражение только для излучения одного мягкого фотона, чья энергия ограничена величиной $\Delta\epsilon$, которое факторизуется при борновской дифференциальной ширине:

$$\frac{d^2\Gamma^S}{dx dc} = \frac{d^2\Gamma^{\text{Born}}}{dx dc} \delta^S, \quad (4.10)$$

$$\delta^S = -\frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 2 \left(2 \ln \frac{2\Delta\epsilon}{m_\mu} + L + \ln \frac{m_e^2}{\lambda^2} \right) \left[1 - \frac{1}{2\beta} l_\beta \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\beta} l_\beta^2 - \frac{1}{\beta} l_\beta + \frac{2}{\beta} \text{Li}_2 \left(\frac{2\beta}{1+\beta} \right) - 2 \right\}, \quad l_\beta = \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad (4.11)$$

где λ — фиктивная масса фотона ($\lambda \ll m_e$).

Вспомогательные параметры λ и $\Delta\epsilon$ сокращаются в полной сумме трех вкладов:

$$\frac{d^2\Gamma^{(1)}}{dx dc} = \Gamma_0 x^2 \beta \frac{\alpha}{2\pi} (f_1(x) + c\xi g_1(x)), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
f_1(x) = & f^{\text{Born}}(x) \left(\frac{2}{\beta} A + \frac{x^2(1-\beta^2) - 4(1+x\beta)}{2x\beta} \ln \frac{q^2}{m_\mu^2} + \right. \\
& + \frac{4-x^2(1-\beta^2)}{x\beta} \ln \frac{2-x(1-\beta)}{2} \left. \right) + \frac{1}{\beta} \left(L + 2 \ln x + 2 \ln \frac{1+\beta}{2} \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{5x^4}{384} (1-\beta^2)^3 - \frac{x^3}{4} (1-\beta^2)^2 + \frac{3x^2}{32} (3-12\beta+\beta^2)(1-\beta^2) + \right. \\
& + x \left[\frac{2}{3} + 2\beta + (1-\beta^2) \left(\frac{3}{2} + \beta \right) \right] + \frac{1}{8} [-20 - 12\beta - 19(1-\beta^2)] + \frac{2}{x} + \frac{5}{6x^2} \left. \right\} + \\
& + \left(\ln x + \ln \frac{1+\beta}{2} \right) \left[\frac{9}{4} x^2 (1-\beta^2) + 2x(\beta^2 - 3) + 3 \right] + \\
& + f^{\text{Born}}(x) \left[-\frac{11}{18} x(1-\beta^2) + \frac{22}{27} \beta^2 - \frac{2}{9} \right] + \\
& + x \left(-\frac{22}{27} \beta^4 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{11}{6} \right) + \frac{22}{9} (3-\beta^2) - \frac{22}{3x}, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A = & L \left(\ln \frac{q^2}{m_\mu^2} - \ln x + \ln \frac{1+\beta}{2\beta} + \ln \frac{2-x(1-\beta)}{2\beta} \right) + \\
& + \left[\ln \frac{q^2}{m_\mu^2} - 2 \ln x + 2 \ln \frac{1+\beta}{2} + 4 \ln \frac{2-x(1-\beta)}{2\beta} \right] \left(\ln x + \ln \frac{1+\beta}{2} \right) + \\
& [0.5mm] + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{(1-\beta)(2-x(1+\beta))}{(1+\beta)(2-x(1-\beta))} \right) - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2-x(1+\beta)}{2-x(1-\beta)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(x) = & g^{\text{Born}}(x) \left(\frac{2}{\beta} A - 4 \ln \frac{2-x(1-\beta)}{2} \right) + \frac{1}{\beta^2} \left(L + 2 \ln x + 2 \ln \frac{1+\beta}{2} \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{5x^4}{384} (1-\beta^2)^3 + \frac{x^3}{8} (1-\beta^2)^2 (1-3\beta^2) + \frac{3x^2}{32} (1-\beta^2) (-11+15\beta^2-12\beta^3) + \right. \\
& + x \left[\frac{2}{3} + 2\beta + (1-\beta^2) \left(\frac{\beta^2}{2} - 2\beta + \frac{3}{2} \right) \right] - \frac{7}{2} - \frac{\beta}{2} + \\
& + (1-\beta^2) \left(\frac{17}{8} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{1}{6x^2} \left. \right\} + \beta \left(\ln x + \ln \frac{1+\beta}{2} \right) \times \\
& \times \left(\frac{9}{4} x^2 (1-\beta^2) - 4x + 1 \right) + \frac{1}{\beta^2} \left(\ln \frac{q^2}{m_\mu^2} - 2 \ln \frac{2-x(1-\beta)}{2} \right) \times \\
& \times \left\{ -\frac{x^3}{48} (1-\beta^2)^2 (1-19\beta^2) + x^2 (1-\beta^2) \left(-\frac{3}{2} \beta^3 - \frac{5}{4} \beta^2 + \frac{1}{4} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + x \left[4\beta + (1 - \beta^2) \left(-\frac{3}{4}\beta^2 - 4\beta - \frac{5}{4} \right) \right] + \frac{16}{3} - 2\beta + \\
 & + (1 - \beta^2)(2\beta - 2) + \frac{1}{x}(-6 + (1 - \beta^2)) + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{3x^3} \Big\} + \\
 & + g^{\text{Born}}(x) \left[-\frac{5}{144\beta^2}x^2(1 - \beta^2)^2 - \frac{10}{27\beta^2}x(1 - \beta^2) - \frac{55}{54} + \frac{203}{162\beta^2} \right] + \\
 & + \frac{x}{81} \left(\frac{17}{\beta} - 195\beta \right) - \frac{1}{324} \left(\frac{595}{\beta} - 1923\beta \right) + \frac{10}{3x\beta} - \frac{1}{x^2\beta}, \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

где $L \equiv \ln(m_\mu^2/m_e^2)$ и $q^2 = m_\mu^2(1 - x) + m_e^2$. Как и следовало ожидать, в пределе $m_e \rightarrow 0$, взятом всюду, кроме аргументов больших логарифмов $L = \ln(m_\mu^2/m_e^2) \approx 11$, найденные выражения для $f_1(x)$ и $g_1(x)$ совпадают с классическими результатами [246]:

$$\begin{aligned}
 f_1(z) = (L-1) \left[\frac{5}{6} + 2z - 4z^2 + \frac{8}{3}z^3 + 2z^2(3-2z) \ln \frac{1-z}{z} \right] + 2z^2(3-2z)R_1(z) + \\
 + \frac{1-z}{6} \left[(10 + 34z - 32z^2) \ln z + 5 - 27z + 34z^2 \right], \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1(z) = (L-1) \left[-\frac{1}{6} - 4z^2 + \frac{8}{3}z^3 + 2z^2(1-2z) \ln \frac{1-z}{z} \right] + \\
 + 2z^2(1-2z)R_1(z) - \frac{1 + 27z^2 - 16z^3}{3} \ln z - \\
 - \frac{1-z}{6} (7 - 13z - 30z^2) - \frac{4(1-z)^3}{3z} \ln(1-z), \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

$$R_1(z) \equiv -2\text{Li}_2(1-z) + \ln z \ln(1-z) - 2\ln^2 z - \frac{\ln(1-z)}{z} - \frac{5}{4}.$$

Формулу для $\lim_{m_e \rightarrow 0} f_1(x)$ также можно согласовать с ответом еще более ранней работы [247], в которой надо исправить ошибку, как описано в [246, 248] (см. также приложение в [240]). Для вкладов виртуальных и мягких фотонов в $f_1(x)$ согласие также можно проверить с [249], где, однако, не было произведено интегрирование по фазовому объему излучения жесткого фотона. Кроме того, позднее приведенные здесь результаты были независимо воспроизведены в работе [250].

Интегрирование по доле энергии электрона и по углу его вылета дает поправки ко времени жизни мюона и к вперед-назад асимметрии:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_0 \frac{\alpha}{2\pi} F_1(\rho), \quad \Gamma_{\text{FB}}^{(1)} = \xi \Gamma_0 \frac{\alpha}{2\pi} G_1(\rho), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
F_1(\rho) = & (1 - \rho^2) \left(\frac{25}{4} - \frac{239}{3} \rho + \frac{25}{4} \rho^2 \right) - \\
& - \rho \ln \rho \left(20 + 90\rho - \frac{4}{3} \rho^2 + \frac{17}{3} \rho^3 \right) - \rho^2 \ln^2 \rho (36 + \rho^2) - (1 - \rho^2) \left(\frac{17}{3} - \frac{64}{3} \rho + \frac{17}{3} \rho^2 \right) \times \\
& \times \ln(1 - \rho) + 4(1 + 30\rho^2 + \rho^4) \ln \rho \ln(1 - \rho) + 6(1 + 16\rho^2 + \rho^4) \times \\
& \times [\text{Li}_2(\rho) - \zeta(2)] + 64\rho^{3/2}(1 + \rho) \left(3\zeta(2) - 2\text{Li}_2(\sqrt{\rho}) + \right. \\
& \left. + 2\text{Li}_2(-\sqrt{\rho}) - \ln \rho \ln \frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} \right), \quad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(\rho) = & -\frac{472}{27}(1 - \sqrt{\rho}) + (1 - \rho) \left(\frac{1271}{108} + \frac{47}{27} \rho^{1/2} - \frac{2959}{108} \rho + 60\rho^{3/2} - \right. \\
& - \frac{4657}{108} \rho^2 + 11\rho^{5/2} - \frac{21}{4} \rho^3 \left. \right) - \ln(1 + \sqrt{\rho})(1 - \rho) \left(\frac{100}{9} + \frac{52}{9} \rho + \right. \\
& \left. + \frac{268}{9} \rho^2 + \frac{20}{3} \rho^3 \right) + \ln(1 - \sqrt{\rho})(1 - \sqrt{\rho}) \frac{2048}{9} + \\
& + \ln(1 - \sqrt{\rho})(1 - \rho) \left(-\frac{2035}{9} + \frac{2048}{9} \sqrt{\rho} - \frac{1987}{9} \rho + \frac{512}{3} \rho^{3/2} - \right. \\
& - \frac{637}{9} \rho^2 + \frac{17}{3} \rho^3 \left. \right) - \ln \rho (1 - \sqrt{\rho}) \frac{608}{9} + \ln \rho (1 - \rho) \left(\frac{608}{9} - \right. \\
& - \frac{614}{9} \sqrt{\rho} + \frac{623}{9} \rho - 56\rho^{3/2} + \frac{967}{18} \rho^2 + 2\rho^{5/2} + \frac{1}{2} \rho^3 \left. \right) + \\
& + \ln \rho [\ln(1 - \sqrt{\rho}) + 2 \ln(1 + \sqrt{\rho})] \left(\frac{2}{3} + 8\rho^2 - \frac{32}{3} \rho^3 + 2\rho^4 \right) + \\
& + \rho^2 \ln^2 \rho \left(7 + 16\rho - \frac{3}{2} \rho^2 \right) + (\zeta(2) + 2\text{Li}_2(-\sqrt{\rho})) \left(\frac{14}{3} + 16\rho + \right. \\
& + 32\rho^2 - \frac{16}{3} \rho^3 + 6\rho^4 \left. \right) - \rho^2 \frac{2}{3} \ln^3 \rho + 16\rho^2 \ln \rho [2\zeta(2) - 2\text{Li}_2(-\sqrt{\rho}) - \\
& - \text{Li}_2(\sqrt{\rho})] + 16\rho^2 [2\text{Li}_3(\sqrt{\rho}) + 12\text{Li}_3(-\sqrt{\rho}) + 7\zeta(3)]. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Выражение для $F_1(\rho)$ совпадает с тем, которое было получено в работе [251], где, однако, использовался другой выбор переменных, вследствие чего в промежуточных вычислениях не было получено ни поправок к дифференциальной ширине (4.13), (4.14), ни поправки к асимметрии. Отметим, что обе функции $F_1(\rho)$ и $G_1(\rho)$ стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 1$ вследствие исчезновения в этом пределе фазового объема частиц в конечном состоянии.

Интересно заметить, что функция $G_1(\rho)$ содержит члены, пропорциональные первой степени отношения масс электрона и мюона, тогда как в $F_1(\rho)$

таких нет (см. обсуждение в [240]). Такие члены также были найдены в поправках первого порядка к вперед–назад асимметрии A_{FB} в процессе аннигиляции электрона и позитрона в тяжелые фермионы [179] и некоторых других процессах. Зависимость от электронной массы проще увидеть в разложении результата по степеням ρ :

$$F_1 = \frac{25}{4} - \pi^2 - \rho(68 + 24 \ln \rho) + 32\pi^2 \rho^{3/2} - \rho^2(16\pi^2 + 273 - 36 \ln \rho + 36 \ln^2 \rho) + 32\pi^2 \rho^{5/2} - \rho^3 \left(\frac{1052}{9} - \frac{152}{3} \ln \rho \right) + \mathcal{O}(\rho^4), \quad (4.20)$$

$$G_1 = -\frac{617}{108} + \frac{14}{3}\zeta(2) - \frac{8}{3}\sqrt{\rho} + \rho \left(-32 + 16\zeta(2) + \frac{2}{3} \ln \rho \right) + \rho^{3/2} \left(\frac{568}{27} + \frac{112}{9} \ln \rho \right) + \rho^2 \left(\frac{281}{6} + 32\zeta(2) + 112\zeta(3) - 16 \ln \rho + 32\zeta(2) \ln \rho + 7 \ln^2 \rho - \frac{2}{3} \ln^3 \rho \right) + \rho^{5/2} \left(-\frac{95624}{225} + \frac{1232}{15} \ln \rho \right) + \rho^3 \left(\frac{5662}{27} - \frac{16}{3}\zeta(2) - \frac{698}{9} \ln \rho + 16 \ln^2 \rho \right) + \rho^{7/2} \left(-\frac{134248}{4725} - \frac{512}{63} \ln \rho \right) + \mathcal{O}(\rho^4). \quad (4.21)$$

В процессе вычислений замечено, что член порядка $|m_e/m_\mu|^1 = \sqrt{\rho}$ происходит из области интегрирования вблизи верхней границы доли энергии электрона, тогда как в самом дифференциальном распределении (спектре) отсутствуют члены, линейные по массе электрона. Во втором порядке теории возмущений в недавней работе [252] было обнаружено, что аналогичные члены в следующем порядке, $\mathcal{O}(\alpha^2 m_e/m_\mu)$, возникают и в поправке ко времени жизни.

Таким образом, включение впервые найденных полных поправок первого порядка позволяет записать формулу для спектра распада мюона в виде

$$\frac{d^2\Gamma^{\text{rad.corr}}}{dx dc} = \frac{d^2\Gamma^{\text{Born}}}{dx dc} + \frac{d^2\Gamma^{(1)}}{dx dc} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (4.22)$$

Поправки более высоких порядков будут обсуждаться ниже.

В табл. 11 показан численный эффект за счет членов, подавленных отношением m_e^2/m_μ^2 на борновском и на однопетлевом уровнях,

$$\delta_m^{\text{Born}} = 10^4 \cdot \left(\frac{h^{\text{Born}}(\tilde{x})}{h_0(x)} - 1 \right), \quad \delta_m^{(1)} = 10^4 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \frac{h_1(\tilde{x}) - h_1^{m_e \rightarrow 0}(x)}{h_0(x)}, \quad (4.23)$$

$$h_{0,1}(x) = f_{0,1}(x) + c\xi g_{0,1}(x), \quad h^{\text{Born}}(\tilde{x}) = f^{\text{Born}}(\tilde{x}) + c\xi g^{\text{Born}}(\tilde{x}).$$

Таблица 11. Величина эффекта за счет конечности массы электрона в зависимости от доли энергии

x	$h_0(x)$	$h^{\text{Born}}(\tilde{x})$	δ_m^{Born}	$h_1^{m_e \rightarrow 0}(x)$	$h_1(\tilde{x})$	$\delta_m^{(1)}$
$c = 0, \quad \xi = 1$						
0,05	0,00725	0,00711	-194,5	4,11481	4,10454	-16,45
0,1	0,02800	0,02786	-49,52	5,95508	5,95444	-0,266
0,2	0,10400	0,10387	-12,80	8,68399	8,68517	0,132
0,3	0,21600	0,21587	-5,796	10,3054	10,3067	0,071
0,5	0,50000	0,49989	-2,105	8,66761	8,66871	0,026
0,7	0,78400	0,78391	-1,088	-1,55489	-1,55410	0,012
0,9	0,97200	0,97193	-0,742	-25,6678	-25,6670	0,010
0,99	0,99970	0,99963	-0,702	-67,6027	-67,6011	0,019
0,999	1,00000	0,99993	-0,702	-107,665	-107,663	0,026
$c = 1, \quad \xi = 1$						
0,05	0,00950	0,00928	-236,8	3,6880	3,6657	-27,32
0,1	0,03600	0,03579	-59,02	5,2896	5,2850	-1,490
0,2	0,12800	0,12781	-14,51	7,4177	7,4179	0,027
0,3	0,25200	0,25184	-6,186	7,8913	7,8925	0,054
0,5	0,50000	0,49991	-1,871	2,7579	2,7589	0,024
0,7	0,58800	0,58796	-0,659	-8,1130	-8,1129	0,001
0,9	0,32400	0,32400	-0,150	-13,120	-13,121	-0,022
0,99	0,03920	0,03920	-0,013	-3,2805	-3,2807	-0,053
0,999	0,00399	0,00399	-0,001	-0,4949	-0,4949	-0,081

Аргумент функций с точной зависимостью от масс подвергнут преобразованию $\tilde{x} = x \cdot x_{\text{max}}$ для обеспечения совпадения шкалы с безмассовым случаем.

Видно, что вклад эффекта за счет конечности массы электрона в поправках порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ мал по сравнению с современной экспериментальной точностью, достигающей 10^{-4} , для области $x > 0,3$.

В табл.12 представлен соответствующий эффект для инклюзивных величин

$$\delta_F^{\text{Born}} = 10^4 \cdot \left(\frac{F(\rho)}{F(0)} - 1 \right), \quad \delta_F^{(1)} = 10^4 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \frac{F_1(\rho) - F_1(0)}{F(0)},$$

$$\delta_G^{\text{Born}} = 10^4 \cdot \left(\frac{G(\rho)}{G(0)} - 1 \right), \quad \delta_G^{(1)} = 10^4 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \frac{G_1(\rho) - G_1(0)}{G(0)}. \quad (4.24)$$

Точность измерения ширины распада мюона (его времени жизни) планируется в ближайшее время довести до одной части на миллион, что повышает актуальность теоретических исследований в этой области. Потенци-

Таблица 12. Величина эффекта за счет конечности масс в полных ширинах распадов мюона и τ -лептона и во вперед–назад асимметрии

ρ	$F(0)$	$F(\rho)$	δ_F^{Born}	$F_1(0)$	$F_1(\rho)$	$\delta_F^{(1)}$
$m_e^2/m_\mu^2 = 2,34 \cdot 10^{-5}$	1,0000	0,9998	-1,871	-3,6196	-3,6152	0,051
$m_\mu^2/m_\tau^2 = 3,54 \cdot 10^{-3}$	1,0000	0,9726	-274,3	-3,6196	-3,3367	3,286
ρ	$G(0)$	$G(\rho)$	δ_G^{Born}	$G_1(0)$	$G_1(\rho)$	$\delta_G^{(1)}$
$m_e^2/m_\mu^2 = 2,34 \cdot 10^{-5}$	-0,3333	-0,3333	-0,036	1,9634	1,9502	0,460
$m_\mu^2/m_\tau^2 = 3,54 \cdot 10^{-3}$	-0,3333	-0,3314	-56,71	1,9634	1,7651	6,908

ально вперед–назад асимметрия в распаде мюона может быть измерена также с огромной точностью [253], что позволит получить дополнительную информацию о слабых взаимодействиях и, возможно, почувствовать вклады новой физики.

Отметим, что все представленные формулы после очевидных замен могут быть применены к описанию лептонных распадов τ -лептона.

4.3. Ведущие логарифмические поправки к спектру распада мюона.

В этом пункте мы рассмотрим ведущие логарифмические поправки высших порядков к спектру распада поляризованного мюона. Впервые они были найдены в работах [93, 254]. Позднее наш результат был частично воспроизведен в статье [255]. В работе [256] предпринята также попытка численно получить полный вклад КЭД-поправок второго порядка к спектру мюона. Поправки второго порядка ко времени жизни мюона были впервые посчитаны в [257, 258]. Недавно также вклады этого порядка, подавленные отношением массы электрона к массе мюона, были найдены в [252]. Однако метод, которым вычислялись поправки к полной ширине распада, не позволял на промежуточном этапе получить соответствующие поправки к дифференциальной ширине.

Вообще вопрос о поправках высших порядков к спектру распада мюона обсуждается с того времени, как было обнаружено [246], что спектр энергий электрона после учета поправок первого порядка перестает быть знакоположительной функцией. Действительно, как отмечалось в предыдущем пункте, при стремлении доли энергии электрона x к единице КЭД-поправка становится большой и может превысить 100 %. Естественно, такое поведение говорит не об ошибке в расчетах и не об ошибочности самой КЭД, а лишь о том, что первого порядка теории возмущений недостаточно [246, 249]. Как обсуждалось в ранней работе [259], для решения проблемы положительности дифференциальной ширины как наблюдаемой физической величины естественно применить процедуру экспоненциации мягкого тормозного излучения. Однако, как было указано в той же работе, эта процедура помимо решения проблемы со знакоопределенностью спектра в области $x \rightarrow 1$ приводит и к воз-

никновению *неправильного* поведения ведущих логарифмических поправок в высших порядках, заключающегося в нарушении теоремы Киношита–Ли–Науэнберга [20, 21]. Кроме того, задача систематического непротиворечивого учета поправок высшего порядка к этому процессу стала актуальной в связи с повысившейся точностью современных экспериментов. Как будет видно, численный эффект обсуждаемых поправок велик по сравнению с точностью современных экспериментов. Это делает учет наших результатов при анализе экспериментальных данных обязательным.

В этом пункте мы будем работать в пределе $m_e \rightarrow 0$, т. е. пренебрегать массой электрона по сравнению с его энергией и с массой мюона всюду, кроме аргумента большого логарифма. Предварительная оценка масштаба рассматриваемого эффекта может быть сделана просто как $(\alpha^2/\pi^2)L^2 \simeq 6 \cdot 10^{-4}$, где $L \equiv \ln(m_\mu^2/m_e^2) \simeq 10,66$. Очевидно, что при достижении современными экспериментами по измерению характеристик спектра распада уровня точности порядка $1 \cdot 10^{-4}$ учет обсуждаемых поправок становится совершенно необходимым.

Для определенности будем рассматривать распад положительно заряженного мюона*. На борновском уровне спектр распада описывается формулой (4.1), которую мы перепишем в виде

$$\frac{d^2\Gamma_{\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}}}{dz d \cos \theta} = \Gamma_0 [F(z) - \cos \theta P_\mu G(z)],$$

$$\Gamma_0 \equiv \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\mu^2}{m_W^2} \right), \quad (4.25)$$

$$z \equiv \frac{2E}{(1+r^2)m_\mu}, \quad r \equiv \frac{m_e}{m_\mu}, \quad z_0 \leq z \leq 1, \quad z_0 \equiv \frac{2r}{1+r^2},$$

где m_e и m_μ — массы электрона и мюона; θ — угол между направлениями вылета позитрона и спина мюона (для перехода к случаю распада μ^- достаточно поменять знак перед $\cos \theta$); P_μ — степень поляризации мюона; E — энергия позитрона.

Функции $F(z)$ и $G(z)$ описывают изотропную и анизотропную части спектра позитрона. Их можно разложить в ряд по α :

$$F(z) = f_{\text{Born}}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} f_1(z) + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 f_2(z) + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (4.26)$$

и аналогично для $G(z)$.

*В эксперименте данный случай имеет преимущество, поскольку фоновые процессы дают гораздо меньше позитронов, чем электронов.

Как отмечалось ранее, точная зависимость от массы электрона на борновском уровне

$$\begin{aligned}
 f_{\text{Born}}(z) &= 6(1+r^2)^4 vz \left[z(1-z) + \frac{2}{9}\rho(4z^2 - 3z - z_0^2) + \eta z_0(1-z) \right], \\
 g_{\text{Born}}(z) &= -2(1+r^2)^4 v^2 z^2 \xi \left[1-z + \frac{2}{3}\delta(4z-3-rz_0) \right], \\
 v &\equiv \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}},
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

где ρ , η , ξ и δ — так называемые параметры Мишеля [218, 260–262], которые можно выделить модельно-независимым образом при рассмотрении лоренцевской структуры четырехфермионных взаимодействий общего вида. В Стандартной модели слабый заряженный ток взаимодействует только с левыми компонентами спинорных частиц ($V-A$ -взаимодействие), что приводит к предсказанию значений параметров Мишеля: $\rho = 3/4$, $\eta = 0$, $\xi = 1$ и $\delta = 3/4$. Эти значения находятся в прекрасном согласии с современными экспериментальными данными [232, 233, 235, 239, 263], усредненными в [218]:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 0,74979 \pm 0,00026, \\
 \eta &= 0,057 \pm 0,034, \\
 \xi P_\mu &= 1,0009 \pm 0,0016, \\
 \delta &= 0,75047 \pm 0,00034.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Отметим, что при анализе экспериментальных данных учитывались представленные в обзоре результаты для поправок высших порядков.

В пределе ($m_e \rightarrow 0$) имеем

$$f_{\text{Born}}(z) \rightarrow f_0(z) = z^2(3-2z), \quad g_{\text{Born}}(z) \rightarrow g_0(z) = z^2(1-2z). \tag{4.29}$$

Поправки порядка $\mathcal{O}(\alpha)$ даются формулами (4.13) и (4.14), которые мы сейчас для удобства будем рассматривать в пределе $m_e \rightarrow 0$, т.е. в виде (4.15), (4.16).

Поправки второго порядка можно разделить на три части по степеням большого логарифма:

$$f_2(z) = \frac{(L-1)^2}{2} f_2^{\text{LL}}(z) + (L-1) f_2^{\text{NLL}}(z) + \Delta f_2(z) \tag{4.30}$$

и аналогично для g_2 . В этом пункте мы рассмотрим ведущие логарифмические вклады второго порядка, f_2^{LL} и g_2^{LL} , и третьего порядка, f_3^{LL} и g_3^{LL} .

Разделим вклады второго порядка на связанные только с излучением (реальных и виртуальных) фотонов и на те, в которых появляются реальные или виртуальные e^+e^- -пары:

$$f_2^{\text{LL}} \equiv f_2^{\text{LL}(\gamma)} + f_2^{\text{LL}(e^+e^-)}, \quad g_2^{\text{LL}} \equiv g_2^{\text{LL}(\gamma)} + g_2^{\text{LL}(e^+e^-)}. \quad (4.31)$$

В случае рождения реальных электрон-позитронных пар определение переменной z требует уточнения: возникает вопрос о том, какой позитрон первичный, а какой — вторичный. Важно отметить, что интерференция амплитуд, *перемешивающая* первичный и вторичный позитроны, не дает вклада в вдушем логарифмическом приближении. Используя аналогию с КХД, можно разделить вклад реальных пар на несинглетный и синглетный каналы:

$$\begin{aligned} f_2^{\text{LL}(e^+e^-)} &\equiv \frac{2}{3} f_{2\text{NS}}^{\text{LL}(e^+e^-)} + f_{2\text{S}}^{\text{LL}(e^+e^-)}, \\ g_2^{\text{LL}(e^+e^-)} &\equiv \frac{2}{3} g_{2\text{NS}}^{\text{LL}(e^+e^-)} + g_{2\text{S}}^{\text{LL}(e^+e^-)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

В случае несинглетного канала детектируется позитрон из e^+e^- -пары, родившейся через виртуальный фотон. А в несинглетном канале мы считаем, что детектируется именно тот позитрон, который образовался в слабом взаимодействии вместе с электронным нейтрино.

Как показано в разд. 1, ведущие логарифмические поправки могут быть получены конволюцией функций распределения в борновском приближении со структурными функциями электрона. Точнее, в данном случае мы будем использовать функции фрагментации, поскольку речь идет о поправках к конечному состоянию:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(w, \beta) &\equiv \mathcal{D}_\gamma(w, \beta) + \mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{NS}}(w, \beta) + \mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{S}}(w, \beta), \\ \mathcal{D}_\gamma(w, \beta) &= \delta(1-w) + \sum_{n=1} \frac{\beta^n}{n!} P^{(n)}(w), \\ \mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{NS}}(w, \beta) &= \frac{\beta^2}{3} P^{(1)}(w) + \mathcal{O}(\alpha^3 L^3), \\ \mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{S}}(w, \beta) &= \frac{\beta^2}{2} R(w) + \mathcal{O}(\alpha^3 L^3), \quad \beta \equiv \frac{\alpha}{2\pi}(L-1). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Конволюция борновских функций $P^{(1)}$ воспроизводит ведущую логарифмическую часть поправок первого порядка (4.15) и (4.16):

$$\begin{aligned} f_1^{\text{LL}}(z) &= P^{(1)}(\bullet) \otimes f_0(z) = \frac{5}{6} + 2z - 4z^2 + \frac{8}{3}z^3 + 2z^2(3-2z) \ln \frac{1-z}{z}, \\ g_1^{\text{LL}}(z) &= -\frac{1}{6} - 4z^2 + \frac{8}{3}z^3 + 2z^2(1-2z) \ln \frac{1-z}{z}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

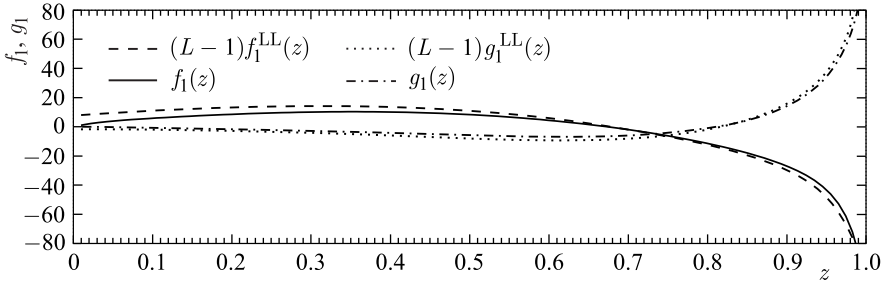


Рис. 21. Величина поправок f_1 и g_1 как функция z в ВЛП (LL) и в СЗВЛП

Численное сравнение ведущей и следующей за ведущей частей поправки первого порядка представлено на рис. 21. Видно, что ведущие поправки действительно дают основной вклад в общую сумму, особенно в области $z > 0,3$, которая исследуется в эксперименте.

Для получения фотонных поправок второго порядка в ВЛП находим конволюцию с функцией $P^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 f_2^{LL(\gamma)}(z) = P^{(2)}(\bullet) \otimes f_0(z) = & 4z^2(3 - 2z)\Phi(z) + \\
 & + \left(\frac{10}{3} + 8z - 16z^2 + \frac{32}{3}z^3 \right) \ln(1 - z) + \left(-\frac{5}{6} - 2z + 8z^2 - \frac{32}{3}z^3 \right) \ln z + \\
 & + \frac{11}{36} + \frac{17}{6}z + \frac{8}{3}z^2 - \frac{32}{9}z^3,
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
 g_2^{LL(\gamma)}(z) = & 4z^2(1 - 2z)\Phi(z) + \left(-\frac{2}{3} - 16z^2 + \frac{32}{3}z^3 \right) \ln(1 - z) + \\
 & + \left(\frac{1}{6} + 8z^2 - \frac{32}{3}z^3 \right) \ln z - \frac{7}{36} - \frac{7}{6}z + \frac{8}{3}z^2 - \frac{32}{9}z^3,
 \end{aligned}$$

$$\Phi(z) \equiv \text{Li}_2\left(-\frac{1-z}{z}\right) + \ln^2 \frac{1-z}{z} - \frac{\pi^2}{6}.$$

Аналогичным образом получаем и ведущие поправки третьего порядка [93]:

$$\begin{aligned}
 f_3^{LL(\gamma)}(z) = & \frac{1}{6}(L_Q - 1)^3 P^{(3)}(\bullet) \otimes [z^2 f_0(z)] = \\
 = & \frac{1}{6}(L_Q - 1)^3 \left[8z^2(3 - 2z)\Psi(z) + (10 + 24z - 48z^2 + 32z^3) \ln^2(1 - z) + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{5}{12} + z - 8z^2 + 16z^3 \right) \ln^2 z + (-5 - 12z + 48z^2 - 64z^3) \ln z \ln(1 - z) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (5 + 12z - 32z^3) \operatorname{Li}_2(1 - z) + (-10 - 24z + 48z^2 - 32z^3) \zeta(2) + \\
& + \left(-\frac{13}{18} - \frac{21}{2}z + \frac{64}{3}z^3 \right) \ln z + \left(\frac{11}{6} + 17z + 16z^2 - \frac{64}{3}z^3 \right) \ln(1 - z) + \\
& \quad + \frac{569}{216} + \frac{4}{3}z - \frac{16}{3}z^2 + \frac{128}{27}z^3, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3^{\operatorname{LL}(\gamma)}(z) &= \frac{1}{6}(L_Q - 1)^3 \left[8z^2(1 - 2z)\Psi(z) + (-2 - 48z^2 + 32z^3) \ln^2(1 - z) + \right. \\
& + \left(-\frac{1}{12} - 8z^2 + 16z^3 \right) \ln^2 z + (1 + 48z^2 - 64z^3) \ln z \ln(1 - z) + \\
& \quad + (-1 - 32z^3) \operatorname{Li}_2(1 - z) + (2 + 48z^2 - 32z^3) \zeta(2) + \\
& + \left(\frac{5}{18} + \frac{5}{2}z + \frac{64}{3}z^3 \right) \ln z + \left(-\frac{7}{6} - 7z + 16z^2 - \frac{64}{3}z^3 \right) \ln(1 - z) - \\
& \quad \left. - \frac{133}{216} - \frac{13}{6}z - \frac{16}{3}z^2 + \frac{128}{27}z^3 \right], \quad (4.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= 3 \operatorname{Li}_3(1 - z) - 2S_{1,2}(1 - z) + \ln^3(1 - z) - \frac{1}{6} \ln^3 z + \frac{3}{2} \ln^2 z \ln(1 - z) - \\
& - 3 \ln z \ln^2(1 - z) - 3 \operatorname{Li}_2(1 - z) \ln(1 - z) + 2\zeta(3) - 3\zeta(2) \ln \frac{1 - z}{z}.
\end{aligned}$$

В согласии с теоремой Киношity–Ли–Науэнберга [20, 21] интегралы от ведущих логарифмических фотонных поправок по доле энергии электрона равны нулю:

$$\int_0^1 dz f_{1,2,3}^{\operatorname{LL}(\gamma)}(z) = \int_0^1 dz g_{1,2,3}^{\operatorname{LL}(\gamma)}(z) = 0. \quad (4.38)$$

Численной иллюстрацией может служить рис. 22, на котором представлен относительный вклад поправки второго порядка в ВЛП

$$\delta_2^{\operatorname{LL}(\gamma)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \frac{(L - 1)^2}{2} \left(\frac{f_2^{\operatorname{LL}(\gamma)}(z) - \cos \theta g_2^{\operatorname{LL}(\gamma)}(z)}{f_0(z) - \cos \theta g_0(z)} \right). \quad (4.39)$$

В табл. 13 представлены значения относительных поправок разных порядков для случая распада неполяризованного мюона. Величина $\delta_{2+3}^{\operatorname{LL}(\gamma)} = \delta_2^{\operatorname{LL}(\gamma)} + \delta_3^{\operatorname{LL}(\gamma)}$ дает сумму ведущих логарифмических поправок второго и третьего порядков. Под числами с фиксированной шкалой факторизации $Q^2 = m_\mu^2$ в скобках даны результаты, получаемые для переменной шкалы $Q^2 = z^2 m_\mu^2$. Сравнение полной поправки первого порядка $\delta_1^{\operatorname{tot}}$ с вкладом ВЛП первого порядка $\delta_1^{\operatorname{LL}(\gamma)}$ показывает, что переменная шкала дает лучшее приближение, особенно при малых z . Видно также, что дополнительный

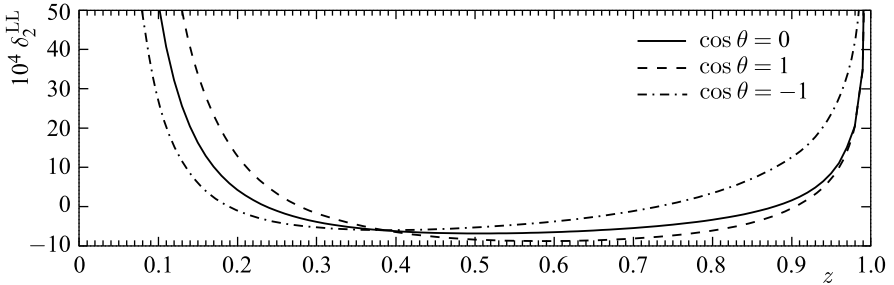


Рис. 22. Относительная величина фотонных поправок в ВЛП как функция доли энергии для трех разных значений $\cos \theta$

Таблица 13. Фотонные поправки к спектру распада неполяризованного мюона в различных приближениях

z	$10^4 \delta_1^{\text{tot}}$	$10^4 \delta_1^{\text{LL}(\gamma)}$	$10^4 \delta_2^{\text{LL}(\gamma)}$	$10^4 \delta_{2+3}^{\text{LL}(\gamma)}$	$10^4 \delta_{\text{exp}}^{\text{a.h}}$	$10^4 \delta_{\text{exp}}^{\text{SF}}$
0,05	6705,7	15255,3 (5796,6)	268,9 (38,8)	268,6 (38,8)	0,01	0,00
0,1	2482,1	4507,5 (2359,3)	52,6 (14,4)	52,1 (14,3)	0,00	0,00
0,2	971,2	1494,3 (996,5)	4,3 (1,9)	4,1 (1,9)	0,00	0,00
0,3	554,5	785,7 (589,9)	-3,9 (-2,2)	-4,0 (-2,2)	0,00	0,00
0,5	201,4	261,9 (224,3)	-6,8 (-5,0)	-6,8 (-5,0)	0,00	0,00
0,7	-23,0	-20,1 (-18,6)	-5,4 (-4,7)	-5,4 (-4,6)	0,00	0,00
0,9	-306,7	-338,8 (-331,4)	1,6 (1,5)	1,7 (1,7)	0,00	0,00
0,99	-785,4	-865,2 (-863,4)	33,3 (33,2)	32,6 (32,5)	0,05	0,00
0,999	-1250,5	-1382,2 (-1381,9)	91,4 (91,3)	87,6 (87,6)	0,24	0,11

вклад за счет экспоненциации при использовании экспоненцированных структурных функций (помечены индексом SF) или *ad hoc* процедуры (помечены a. h) мал.

Во втором порядке теории возмущений по α спектр энергии электрона получает вклады как от излучения фотонов, так и от e^+e^- -пар. Вклады за счет образования (виртуальных) пар более тяжелых фермионов малы [264].

В ведущем порядке поправки за счет e^+e^- -пар находятся путем конволюции борновских распределений f_0 и g_0 с функциями $P^{(1)}$ (для несинглетного

канала) и R (для синглетного канала) аналогично (4.34):

$$f_{2NS}^{\text{LL}(e^+e^-)}(z) = f_1^{\text{LL}}(z), \quad g_{2NS}^{\text{LL}(e^+e^-)}(z) = g_1^{\text{LL}}(z), \quad (4.40)$$

$$f_{2S}^{\text{LL}(e^+e^-)}(z) = \frac{17}{9} + \frac{2}{3z} + 3z - \frac{14}{3}z^2 - \frac{8}{9}z^3 + \left(\frac{5}{3} + 4z + 4z^2\right) \ln z, \quad (4.41)$$

$$g_{2S}^{\text{LL}(e^+e^-)}(z) = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9z} + z + \frac{2}{9}z^2 - \frac{8}{9}z^3 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z^2\right) \ln z.$$

В табл. 14 даны численные значения величины $\delta_2^{\text{LL}(e^+e^-)}$, показывающей вклад ведущих логарифмических поправок за счет излучения пар по отношению к борновскому распределению (для $P_\mu = 1$),

$$\delta_2^{\text{LL}(e^+e^-)} = \int_{w_{\min}}^1 \frac{dw}{w} \frac{f_0(z/w) - g_0(z/w) \cos \theta}{f_0(z) - g_0(z) \cos \theta} \left[\mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{NS}}(w, \beta) + \mathcal{D}_{e^+e^-}^{\text{S}}(w, \beta) \right], \quad (4.42)$$

$$w_{\min} = \max \left\{ z, \frac{z}{z+y} \right\},$$

где y — верхняя граница на долю энергии, унесенной реальной парой, $E_{\text{pair}} \leq ym_\mu/2$. Учтены вклады и синглетного, и несинглетного каналов. Таким образом, мы имитировали экспериментальную ситуацию, в которой наблюдение двух позитронов в конечном состоянии трактуется как одновременный распад двух антимюонов.

В общем случае величина вклада за счет рождения реальных e^+e^- -пар существенно зависит от экспериментальных условий детектирования и обработки событий.

Для инклюзивных величин (ширины и асимметрии распада) полный вклад за счет излучения e^+e^- -пар находится путем отбрасывания синглетного ка-

Таблица 14. Ведущие логарифмические поправки за счет излучения пар $10^4 \delta_2^{\text{LL}(e^+e^-)}$ для $\cos \theta = -1$

z	y				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,05	5,60	20,62	51,01	99,44	164,88
0,1	1,90	5,15	10,03	16,83	25,32
0,2	0,46	1,66	2,83	4,07	5,35
0,3	-0,10	0,73	1,36	1,91	2,36
0,5	-0,72	-0,14	0,17	0,35	0,40
0,7	-1,18	-0,80	-0,71	-0,71	-0,71
0,9	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01

нала (для избежания двойного счета) и интегрирования по долям энергии функций $f_{2S}^{LL(e^+e^-)}(z)$ и $g_{2S}^{LL(e^+e^-)}(z)$ с последующим добавлением вкладов виртуальных и мягких пар. Условие (4.38) гарантирует полное сокращение ведущих логарифмических поправок в этом случае.

Вблизи верхней границы спектра распада мюона по доле энергии электрона ($z \rightarrow 1$) поправки первого порядка f_1^{LL} и g_1^{LL} расходятся по абсолютной величине. Как обсуждалось в работах [246, 249], это является указанием на то, что в данном случае необходимо выйти за рамки однопетлевого приближения. Более того, соответствующие поправки второго порядка также расходятся при $z \rightarrow 1$, имея, однако, при этом обратные знаки. В такой ситуации, естественно, возникает вопрос о возможности частичного суммирования ряда теории возмущений путем экспоненциации. Действительно, это можно сделать на основании теоремы [17], поскольку расходимость в конце спектра связана как раз с излучением мягких (и виртуальных) фотонов. В нашем случае можно воспользоваться экспоненциальным представлением структурной (фрагментационной) функции электрона (1.29) [42, 108]. Применение процедуры экспоненцирования к поправкам в спектре распада мюона критиковалось в [259], поскольку помимо собственно исправления ситуации с расходимостью в конце спектра она приводила к появлению в высших порядках массовых сингулярностей, нарушающих теорему Киношита–Ли–Науэнберга, т. е. соотношения типа (4.38).

Как показано в [265], экспоненцирование существенно лишь в узкой части спектра вблизи $z = 1$. Действительно, вклад поправок первого порядка достигает $\sim 50\%$ лишь при $1 - z = 10^{-10}$, что существенно меньше, чем разрешение детекторов по энергии. По этой причине мы не видим необходимости применять экспоненцирование в данной задаче. Как будет показано ниже, получаемая при этом точность практически не страдает.

Более того, верхняя часть спектра обычно исключается при анализе экспериментальных данных и фитировании параметров Мишеля. Это делается для уменьшения неопределенности из-за конечности разрешения детекторов по энергии, которое именно в этой области наиболее существенно. Действительно, форма спектра, наблюдаемая в эксперименте, является сверткой *истинного* спектра распада с функцией энергетического разрешения детектора. В средней части спектра эффект конечности разрешающей способности детектора мал. Однако на верхней границе резкая ступенька заметно сглаживается. Более того, исключение из анализа верхней части спектра помогает уменьшить и теоретическую неопределенность, поскольку неизвестные поправки высших порядков в этой области должны быть максимальными.

Помимо экспоненцированных структурных функций для численной оценки эффекта за счет экспоненциации можно использовать простой вариант так называемой *ad hoc* экспоненциации, которая заключается в замене сингуляр-

ных членов следующего вида:

$$1 + \frac{\alpha}{\pi}(L-1) \ln \frac{1-z}{z} \rightarrow \exp \left\{ \frac{\alpha}{\pi}(L-1) \ln \frac{1-z}{z} \right\}. \quad (4.43)$$

А собственно нетривиальный вклад экспоненциации получается путем вычитания уже полученных нами в ВДЛ слагаемых:

$$\delta_{a.h}^{\text{exp}}(z) = \exp \left\{ \frac{\alpha}{\pi}(L-1) \ln (1-x) \right\} - 1 - \frac{\alpha}{\pi}(L-1) \ln \frac{1-z}{z} - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}(L-1) \ln \frac{1-z}{z} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{\pi}(L-1) \ln \frac{1-z}{z} \right)^3. \quad (4.44)$$

Для оценки численного эффекта за счет поправок второго порядка в ВЛП было проведено генерирование двухмерного распределения по z и $\cos \theta$ с учетом радиационных поправок. Затем было выполнено фитирование полученного спектра формулами без учета поправок второго порядка. По методу Монте-Карло было сгенерировано 10^9 распадов мюона согласно формуле (4.25), включая полное выражение для поправок первого порядка и фотонные поправки второго порядка в ВЛП. Для анализа были выбраны события в кинематической области $0,34 \leq |\cos \theta| \leq 0,98$ и с долями энергии электрона от $0,4 \leq z$ до верхней границы z_{max} , которая варьировалась в диапазоне $0,96-0,995$. Эти диапазоны имитируют условия эксперимента TWIST [266, 267]. Далее по методу наименьших квадратов фитировались 4 параметра Мишеля ρ, η, ξ, δ и полная нормировка ширины распада в заданном кинематическом диапазоне. Для проверки было проведено также фитирование полученного распределения формулами с учетом радиационных поправок, что привело к воспроизведению исходных значений параметров Мишеля.

Фитируя же сгенерированное распределение формулами, в которых учтены только поправки первого порядка, мы получили статистически значимые отклонения значений параметров Мишеля от их исходных значений. Поскольку отклонения превышают экспериментальную точность, то найденные поправки должны учитываться при анализе экспериментальных данных. И, более того, видно, что результаты предыдущих экспериментов по фитированию параметров Мишеля имеют дополнительную систематическую погрешность из-за недооценки неизвестных ранее поправок второго порядка.

Смещения значений параметров Мишеля, получаемых из описанного фита, из-за влияния радиационных поправок зависят от выбора кинематической области и, вообще говоря, от ряда других особенностей процедуры анализа экспериментальных данных, в частности от экспериментального разрешения по энергии и углу. Рассмотрим идеализированную ситуацию, принимая во внимание только эффекты, связанные с теоретическим описанием самого

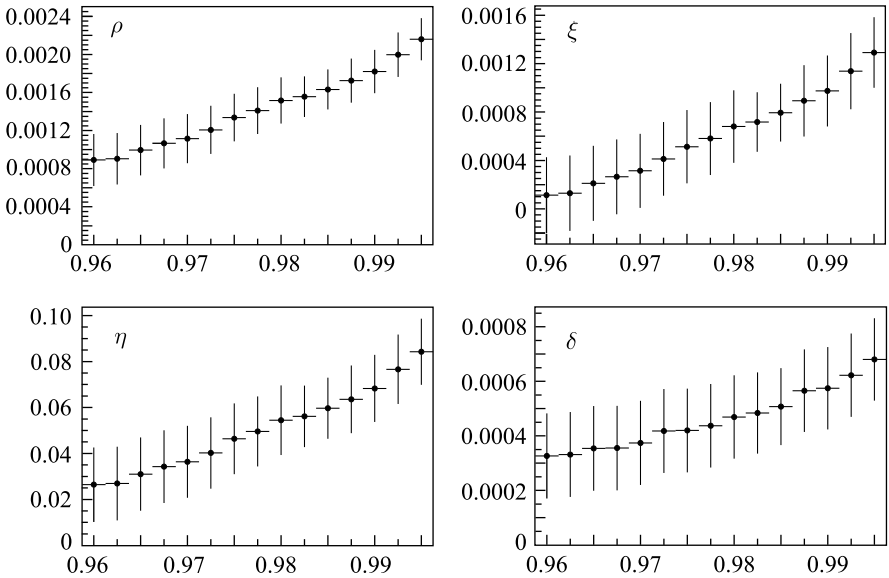


Рис. 23. Смещения параметров Мишеля из-за поправок второго порядка в ВЛП для различных значений обрезания z_{\max} по доле энергии позитрона. По вертикальной оси отложена разница между реконструированными значениями параметров Мишеля и их величинами в СМ. Точки коррелированы, поскольку получены из одного набора моделированных данных

процесса распада. Рис. 23 показывает зависимость смещений от выбора верхней границы по доле энергии области фитирования.

Для реалистического значения $z_{\max} = 0,97$ вследствие учета поправок второго порядка в ВЛП получены следующие смещения значений параметров Мишеля:

$$\begin{aligned}
 \Delta\rho &\simeq 11 \cdot 10^{-4}, \\
 \Delta\eta &\simeq 350 \cdot 10^{-4}, \\
 \Delta\xi &\simeq 3 \cdot 10^{-4}, \\
 \Delta\delta &\simeq 4 \cdot 10^{-4}.
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Относительно большая величина смещения значения параметра η обусловлена тем, что она входит в борновское выражение с маленьким коэффициентом $z_0 \simeq 10^{-2}$. Если мы фиксируем значение $\eta = 0$, т.е. придаем ему значение, следующее из предсказаний Стандартной модели, то смещения значений остальных параметров оказываются равными $5 \cdot 10^{-4}$ для ρ $-3 \cdot 10^{-4}$ для ξ и $3 \cdot 10^{-4}$ для δ . Сравнивая эти результаты со случаем

фитирования всех параметров Мишеля, мы видим значительную корреляцию между η , ρ и ξ .

Рис. 23 показывает довольно сильную зависимость параметров Мишеля от выбора z_{\max} . Это является следствием того, что радиационные поправки имеют резкую зависимость (пики) при $z \rightarrow 1$. Тогда как процедура фитирования «пытается» компенсировать эти пики путем смещения параметров Мишеля (и полной нормировки).

Для дальнейшего повышения точности теоретического описания спектра распада мюона необходимо рассчитать вклады следующих за ведущими логарифмических поправок порядка $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$, которые будут рассмотрены ниже. Предварительно можно попытаться оценить их величину, зная $L \approx 11$ и задав фактор 3 для обеспечения надежности оценки:

$$\delta_2^{\text{NLL}(\gamma)} \sim \frac{3}{L} \delta_2^{\text{LL}(\gamma)} \simeq 0,3 \delta_2^{\text{LL}(\gamma)}. \quad (4.46)$$

Вклады e^+e^- -пар также будут рассмотрены ниже.

С учетом рассмотренных выше поправок в ВЛП точность теоретического описания спектра распада мюона, выраженную через точности фитирования параметров Мишеля, можно оценить (для $z_{\max} = 0,97$) как

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{th}}(\rho) &= 3 \cdot 10^{-4}, \\ \sigma^{\text{th}}(\eta) &= 100 \cdot 10^{-4}, \\ \sigma^{\text{th}}(\xi P_\mu) &= 1 \cdot 10^{-4}, \\ \sigma^{\text{th}}(\delta) &= 1 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

что можно сравнить с точностью, достигнутой в эксперименте TWIST [232–235]:

$$\begin{aligned} \rho &= 0,75014 \pm 0,00017 \pm 0,00045, \\ \eta &= 0,071 \pm 0,037 \pm 0,005, \\ \xi P_\mu &= 1,0003 \pm 0,0006 \pm 0,0038, \\ \delta &= 0,75067 \pm 0,00030 \pm 0,00067, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где приведены отдельно систематические и статистические экспериментальные ошибки. Видно, что учет ВЛП-поправок второго порядка оказался существенным для данного эксперимента, а при повышении точности в будущем знание поправок более высоких порядков также окажется необходимым.

4.4. Следующие за ведущими поправки второго порядка. В данном пункте рассмотрим следующие за ведущими КЭД-поправки высших порядков [45, 93] к спектру распада поляризованного мюона. Подчеркнем, что несмотря на малость постоянной тонкой структуры α , эти поправки важны для

современных экспериментов, где погрешность измерения параметров Мишеля достигает уровня 10^{-4} [266, 267].

Как показано в предыдущем пункте, учет ведущих логарифмических поправок второго порядка оказался существенным для экспериментов, проводившихся в прошлом. С учетом непрерывного развития экспериментальных программ по изучению свойств мюона естественным образом встает вопрос об учете следующих за ведущими поправок. С целью нахождения этих поправок воспользуемся описанным выше методом работы в СВЛП КЭД.

Запишем дифференциальное сечение распада мюона в виде

$$\frac{d^2\Gamma}{dx dc}(x, c, m_\mu, m_e) = \sum_{j=e,\gamma} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{d^2\hat{\Gamma}_j}{dz dc}(z, c, m_\mu, \mu_f) \mathcal{D}_j\left(\frac{x}{z}, \mu_f, m_e\right), \quad (4.49)$$

где x и c — доля энергии и косинус угла вылета электрона; $d^2\hat{\Gamma}_j/(dz dc)$ — дифференциальная ширина распада мюона с образованием безмассового партона типа j с долей энергии z ($z = 2E_j/m_\mu$, где E_j есть энергия соответствующего партона). Функция фрагментации $\mathcal{D}_j(x/z, \mu_f, m_e)$ дает плотность вероятности превращения безмассового партона j в массивный электрон. Как и ранее, будем использовать $\overline{\text{MS}}$ факторизационную схему со шкалой факторизации μ_f .

Кoeffициентные функции разлагаем в ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\hat{\Gamma}_j}{dz}(z, m_\mu, \mu_f) &= A_j^{(0)}(z) + \frac{\bar{\alpha}(\mu_f)}{2\pi} \hat{A}_j^{(1)}(m_\mu, \mu_f, z) + \\ &+ \left(\frac{\bar{\alpha}(\mu_f)}{2\pi}\right)^2 \hat{A}_j^{(2)}(m_\mu, \mu_f, z) + \mathcal{O}(\alpha^3), \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $\bar{\alpha}(\mu_f)$ есть перенормированная константа связи КЭД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме. Для безмассовых электронов спектр распада в низшем порядке задается формулами

$$\begin{aligned} \hat{A}_e^{(0)}(z, c) &= f_0(z) \pm cP_\mu g_0(z), \\ f_0(z) &= z^2(3 - 2z), \\ g_0(z) &= z^2(1 - 2z). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Здесь, как и далее, знак плюс перед c выбирается для распада мюона и минус — для антимюона. В первом порядке для распада с образованием безмассового электрона имеем

$$\hat{A}_e^{(1)}(z, c) = \hat{f}_e^{(1)}(z) \pm cP_\mu \hat{g}_e^{(1)}(z), \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_e^{(1)}(z) = & \left(2z^2(2z-3) \ln \left[\frac{z}{1-z} \right] + 2z + \frac{8}{3}z^3 + \frac{5}{6} - 4z^2 \right) \ln \left(\frac{m_\mu^2}{\mu_f^2} \right) + \\ & + 2z^2(2z-3) (4\zeta_2 - 4\text{Li}_2(z) + 2\ln^2 z - 3\ln z \ln(1-z) - \ln^2(1-z)) + \\ & + \left(\frac{5}{3} - 2z - 13z^2 + \frac{34}{3}z^3 \right) \ln(1-z) + \left(\frac{5}{3} + 4z - 2z^2 - 6z^3 \right) \ln z + \\ & + \frac{5}{6} - \frac{23}{3}z - \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{3}z^3, \quad (4.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_e^{(1)}(z) = & \left(2z^2(1-2z) \ln \frac{1-z}{z} - \frac{1}{6} - 4z^2 + \frac{8}{3}z^3 \right) \ln \frac{m_\mu^2}{\mu_f^2} + \\ & + 2z^2(1-2z) \left(\ln^2(1-z) - 4\text{Li}_2(1-z) - \ln z \ln(1-z) - 2\ln^2 z \right) + \\ & + \left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3z} - 6z - \frac{17}{3}z^2 + \frac{34}{3}z^3 \right) \ln(1-z) + \\ & + \left(-\frac{1}{3} - 6z^2 - 6z^3 \right) \ln z - \frac{7}{6} + 3z + \frac{7}{6}z^2 + 3z^3. \quad (4.54) \end{aligned}$$

Аналогично для вспомогательной коэффициентной функции, описывающей спектр фотона, мы нашли

$$\hat{A}_\gamma^{(0)}(z, c) = 0, \quad \hat{A}_\gamma^{(1)}(z, c) = \hat{f}_\gamma^{(1)}(z) \pm cP_\mu \hat{g}_\gamma^{(1)}(z), \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_\gamma^{(1)}(z) = & \left(\ln \frac{m_\mu^2}{\mu_f^2} + \ln(1-z) \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{5}{3} + 2z - 2z^2 + \frac{2}{3}z^3 \right) + \\ & + \ln z \left(\frac{2}{z} - \frac{10}{3} + 4z \right) - \frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \frac{35}{12}z - 2z^2 - \frac{1}{4}z^3, \quad (4.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_\gamma^{(1)}(z) = & \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3z} - \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{3}z^3 \right) \left(\ln \frac{m_\mu^2}{\mu_f^2} + \ln(1-z) \right) + \\ & + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3z} \right) \ln z - \frac{2}{3} + \frac{2}{3z} + \frac{11}{12}z - \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3. \quad (4.57) \end{aligned}$$

Выбирая масштаб факторизации $\mu_f \sim m_\mu$, получаем возможность исключить из рассмотрения сложные для прямого вычисления коэффициентные функции $\hat{A}_j^{(2)}$, поскольку они не дают вклада ни в ВЛП, ни в СВЛП.

В $\overline{\text{MS}}$ -схеме для константы связи имеем [240] соотношение с традиционно используемым значением в схеме на массовой поверхности:

$$\bar{\alpha}(\mu_f) = \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi} \ln \frac{\mu_f^2}{m_e^2} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} \ln \frac{\mu_f^2}{m_e^2} + \frac{15\alpha^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\alpha^4). \quad (4.58)$$

Функции фрагментации также берем в СВЛП-приближении, разбив ее на чисто фотонную (см. (2.15)) и связанную с поправками за счет e^+e^- -пар. Последнюю часть, в свою очередь, полезно разбить на вклады несинглетного и синглетного каналов, а также их интерференцию (точнее, конволюцию). Для фрагментации партона типа электрон ($j = e$) в массивный электрон имеем

$$\mathcal{D}_e(x, \mu_f, m_e) = \mathcal{D}_e^{(\gamma)}(x) + \mathcal{D}_e^{(\text{NS})}(x) + \mathcal{D}_e^{(\text{S})}(x) + \mathcal{D}_e^{(\text{int})}(x), \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e^{(\gamma)}(x) = & \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_1(x, \mu_0, m_e) + \frac{\alpha}{2\pi} L_f P^{(1)}(x) + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} L_f^2 P^{(2)}(x) + L_f P^{(1)} \otimes d_1(x, \mu_0, m_e) + L_f P_{ee}^{(\text{NLO}, \gamma)\text{frg}}(x) \right) + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \frac{1}{6} L_f^3 P^{(3)}(x), \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e^{(\text{NS})}(x) = & \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3} L_f^2 P_{ee}^{(1)}(x) + L_f P_{ee}^{(\text{NLO}, \text{NS})\text{frg}}(x) \right) + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L_f^3 \left(\frac{1}{3} P^{(2)}(x) + \frac{4}{27} P_{ee}^{(1)}(x) \right), \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e^{(\text{S})}(x) = & \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} L_f^2 P_{e\gamma} \otimes P_{\gamma e}(x) + L_f P_{ee}^{(\text{NLO}, \text{S})\text{frg}}(x) \right) + \\ & + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L_f^3 \left(\frac{1}{3} P_{e\gamma} \otimes P_{\gamma e} \otimes P_{ee}^{(1)}(x) - \frac{1}{9} P_{e\gamma} \otimes P_{\gamma e}(x) \right), \quad (4.62) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_e^{(\text{int})}(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L_f P_{ee}^{(\text{NLO}, \text{int})\text{frg}}(x), \quad L_f \equiv \ln \frac{\mu_f^2}{m_e^2}. \quad (4.63)$$

Отметим, что мы систематически пренебрегали членами порядков $\mathcal{O}(\alpha^2 L_f^0)$, $\mathcal{O}(\alpha^3 L_f^2)$, $\mathcal{O}(\alpha^4)$ и выше.

Что касается фрагментационной функции фотона (в электрон), нам достаточно воспользоваться ее низшим ненулевым порядком разложения:

$$\mathcal{D}_\gamma(x, \mu_f, m_e) = \frac{\alpha}{2\pi} L_f P_{e\gamma}(x) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (4.64)$$

поскольку она сворачивается с коэффициентной функцией, уже имеющей лишнюю степень α по сравнению с борновской. Функции расщепления ВЛП, использованные для определения \mathcal{D}_γ и \mathcal{D}_e , даны в (1.6) и (1.13).

Для КЭД-функций расщепления следующего за ведущим порядка в канале фрагментации имеем

$$P_{ee}^{(\text{NLO,NS})\text{frg}}(x) = \delta(1-x) \left(-\frac{4}{3}\zeta_2 - \frac{1}{6} \right) - \frac{20}{9} \left[\frac{1}{1-x} \right]_+ - \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \ln x - \frac{2}{9} + \frac{22}{9}x, \quad (4.65)$$

$$P_{ee}^{(\text{NLO,S})\text{frg}}(x) = (1+x) \ln^2 x + \left(-5 - 9x - \frac{8}{3}x^2 \right) \ln x - 8 - \frac{20}{9x} + 4x + \frac{56}{9}x^2, \quad (4.66)$$

$$P_{ee}^{(\text{NLO,int})\text{frg}}(x) = \frac{1+x^2}{1-x} \left(2\text{Li}_2(1-x) + \frac{3}{2} \ln x \right) - \frac{7}{2}(1+x) \ln x - 7 + 8x. \quad (4.67)$$

Выражение для $P_{ee}^{(\text{NLO},\gamma)\text{frg}}$ дано в (2.17).

Для конволюции функций расщепления между собой и затем с коэффициентными функциями была создана компьютерная программа на языке FORM [166], реализующая таблицу интегралов, приведенную в приложении 1. В частности, для свертки функций расщепления с функцией d_1 находим

$$P^{(1)} \otimes d_1(x) = P^{(2)}(x) \left(\ln \frac{\mu_0^2}{m_e^2} - 1 \right) + \delta(1-x) \left(\frac{21}{4} - 8\zeta_3 \right) + \left[\frac{1}{1-x} (7 + 8\zeta_2 - 6 \ln(1-x) - 12 \ln^2(1-x)) \right]_+ + \frac{8}{1-x} \ln x \ln(1-x) + (1+x) [6 \ln^2(1-x) - 6 \ln x \ln(1-x) - 2 \text{Li}_2(1-x) - 4\zeta_2] + 2x \ln x + (7-x) \ln(1-x) - \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x. \quad (4.68)$$

После аналитического интегрирования уравнения (4.49) помимо уже полученных ранее ВЛП-поправок находим следующие за ведущими слагаемые в порядках $\mathcal{O}(\alpha)$ и $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$. По построению в $\mathcal{O}(\alpha)$ воспроизводится хорошо известный полный* результат (4.15), (4.16), а поправки следующего порядка являются новыми и найдены нами впервые [45, 93]. Вследствие отсутствия полной инклюзивности мы вынуждены разделять вклады чисто фотонных поправок и тех, которые связаны с рождением реальных или виртуальных пар.

*Конечно, в приближении $m_e/m_\mu \ll 1$.

Для дополнительных вкладов в функцию спектра распада (4.25) мы нашли

$$\begin{aligned}
 f_2^{(\text{NLO},\gamma)}(x) = & 2x^2(3-2x)(-2\text{Li}_3(x) - 2\text{S}_{1,2}(x) + 2\text{Li}_2(x)\ln(1-x) + \\
 & + 2\text{Li}_2(x)\ln x + 5\ln x \ln^2(1-x) - 5\ln^2 x \ln(1-x) + 2\ln^3 x - 2\zeta_2 \ln(1-x) - \\
 & - 2\zeta_2 \ln x + 7\zeta_3) + \text{Li}_2(x) \left(\frac{10}{3} + 14x - 40x^2 + \frac{92}{3}x^3 \right) + \\
 & + \ln x \ln(1-x) \left(\frac{25}{3} + 32x - 54x^2 + \frac{92}{3}x^3 \right) + \\
 & + \ln^2(1-x)(-12x - 4x^2 + 8x^3) + \ln^2 x \left(-\frac{25}{12} - 5x + 22x^2 - \frac{70}{3}x^3 \right) + \\
 & + \ln(1-x) \left(-\frac{17}{3} - \frac{53}{3}x + \frac{64}{3}x^2 - 12x^3 \right) + \ln x \left(-\frac{3}{4} + \frac{37}{6}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{44}{9}x^3 \right) + \\
 & + \zeta_2 \left(-\frac{10}{3} - 2x + 35x^2 - \frac{98}{3}x^3 \right) + \frac{211}{216} - \frac{287}{12}x + \frac{83}{3}x^2 - \frac{559}{54}x^3, \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2^{(\text{NLO},\text{NS})}(x) = & 2x^2(3-2x) \left(-2\text{Li}_2(1-x) - \frac{2}{3}\ln x \ln(1-x) + \frac{2}{3}\ln^2(1-x) - \right. \\
 & \left. - \ln^2 x - \frac{2}{3}\zeta_2 \right) + \ln(1-x) \left(\frac{10}{9} - \frac{4}{3}x - \frac{46}{3}x^2 + 12x^3 \right) + \\
 & + \ln x \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{3}x + 8x^2 - \frac{76}{9}x^3 \right) - \frac{11}{6} - \frac{19}{3}x + \frac{100}{9}x^2 - \frac{64}{9}x^3, \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2^{(\text{NLO},\text{S})}(x) = & [\text{Li}_2(1-x) + \ln x \ln(1-x)] \left(\frac{5}{3} + 4x + 4x^2 \right) + \\
 & + \ln^2 x \left(\frac{5}{2} + 6x + 4x^2 \right) + \ln(1-x) \left(\frac{17}{9} + \frac{2}{3x} + 3x - \frac{14}{3}x^2 - \frac{8}{9}x^3 \right) + \\
 & + \ln x \left(\frac{8}{9} + \frac{4}{3x} - \frac{5}{6}x - \frac{19}{3}x^2 \right) - \frac{1}{3x} - \frac{67}{9} + \frac{43}{18}x + \frac{77}{18}x^2 + \frac{10}{9}x^3, \quad (4.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2^{(1,\text{int})}(x) = & 2x^2(3-2x)(2\text{Li}_3(1-x) - 4\text{S}_{1,2}(1-x) - 2\text{Li}_2(1-x)\ln x) + \\
 & + \text{Li}_2(1-x) \left(\frac{5}{3} + 4x - 26x^2 + \frac{52}{3}x^3 \right) + \ln^2 x \left(-9x^2 + \frac{26}{3}x^3 \right) + \\
 & + \ln x \left(-\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{28}{3}x^2 \right) - \frac{62}{9} + \frac{41}{3}x - \frac{55}{3}x^2 + \frac{104}{9}x^3. \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

И аналогичные выражения для нечетной по s части

$$\begin{aligned}
 g_2^{(\text{NLO},\gamma)}(x) = & 4x^2(1-2x) \left(\text{Li}_3(1-x) + \text{S}_{1,2}(1-x) - 2\text{Li}_2(1-x) \ln(1-x) + \right. \\
 & \left. + \ln x \ln^2(1-x) - 3 \ln^2 x \ln(1-x) + \ln^3 x - \zeta_2 \ln x + \frac{3}{2} \zeta_3 \right) + \\
 & + \left(\frac{14}{3} - \frac{8}{3x} - 6x + 24x^2 - \frac{92}{3}x^3 \right) \text{Li}_2(1-x) + \left(6x - 5 - \frac{86}{3}x^2 \right) \ln x \ln(1-x) + \\
 & + \left(8 - \frac{8}{3x} - 12x + \frac{20}{3}x^2 + 8x^3 \right) \ln^2(1-x) + \left(\frac{5}{12} + 18x^2 - \frac{70}{3}x^3 \right) \ln^2 x + \\
 & + \left(-\frac{13}{3} + \frac{37}{3}x + \frac{50}{3}x^2 - \frac{32}{3}x^3 \right) \ln(1-x) + \left(\frac{25}{12} - \frac{59}{6}x + 6x^2 + \frac{32}{9}x^3 \right) \ln x + \\
 & + \left(-8 + \frac{8}{3x} + 12x - \frac{29}{3}x^2 - 2x^3 \right) \zeta_2 + \frac{817}{216} - \frac{91}{12}x + \frac{62}{3}x^2 - \frac{607}{54}x^3, \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2^{(\text{NLO},\text{NS})}(x) = & 4x^2(1-2x) \left(-\text{Li}_2(1-x) - \frac{1}{3} \ln x \ln(1-x) + \frac{1}{3} \ln^2(1-x) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{1}{3} \zeta_2 \right) + \left(\frac{22}{9} - \frac{8}{9x} - 4x - 6x^2 + 12x^3 \right) \ln(1-x) + \\
 & + \left(-\frac{1}{9} + \frac{8}{9}x^2 - \frac{76}{9}x^3 \right) \ln x - \frac{7}{18} + \frac{5}{3}x + \frac{86}{9}x^2 - \frac{20}{3}x^3, \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2^{(\text{NLO},\text{S})}(x) = & (\text{Li}_2(1-x) + \ln x \ln(1-x)) \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2} \right) \ln^2 x + \\
 & + \left(-\frac{1}{9} - \frac{2}{9x} + x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{9}x^3 \right) \ln(1-x) + \left(\frac{5}{9} - \frac{4}{9x} + \frac{5}{2}x + \frac{5}{9}x^2 \right) \ln x + \\
 & + \frac{1}{3x} + \frac{4}{3} - \frac{7}{18}x - \frac{43}{18}x^2 + \frac{10}{9}x^3, \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2^{(\text{NLO},\text{int})}(x) = & 4x^2(1-2x) (\text{Li}_3(1-x) - 2\text{S}_{1,2}(1-x) - \text{Li}_2(1-x) \ln x) + \\
 & + \left(-\frac{1}{3} - 14x^2 + \frac{52}{3}x^3 \right) \text{Li}_2(1-x) + \left(-3x^2 + \frac{26}{3}x^3 \right) \ln^2 x + \\
 & + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{28}{3}x^2 \right) \ln x + \frac{10}{9} - \frac{1}{3}x - \frac{37}{3}x^2 + \frac{104}{9}x^3. \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

Приведем также явные выражения для вкладов третьего порядка за счет излучения e^+e^- -пар* в ВЛП:

$$f_3^{(LL,NS)}(x) = 8x^2(3-2x)\Phi(x) + \left(\frac{20}{3} + 16x - \frac{80}{3}x^2 + \frac{160}{9}x^3\right)\ln(1-x) + \left(-\frac{5}{3} - 4x + \frac{32}{3}x^2 - \frac{160}{9}x^3\right)\ln x + \frac{73}{54} + \frac{67}{9}x + \frac{16}{9}x^2 - \frac{128}{27}x^3, \quad (4.77)$$

$$g_3^{(LL,NS)}(x) = 8x^2(1-2x)\Phi(x) + \left(-\frac{4}{3} - \frac{272}{9}x^2 + \frac{160}{9}x^3\right)\ln(1-x) + \left(\frac{1}{3} + \frac{128}{9}x^2 - \frac{160}{9}x^3\right)\ln x - \frac{29}{54} - \frac{7}{3}x + \frac{16}{9}x^2 - \frac{128}{27}x^3, \quad (4.78)$$

$$f_3^{(LL,S)}(x) = \left(\frac{5}{3} + 4x + 4x^2\right)(4\text{Li}_2(1-x) + 4\ln x \ln(1-x) - \ln^2 x) - 4x^2 \ln^2 x + \left(\frac{68}{9} + \frac{8}{3x} + 12x - \frac{56}{3}x^2 - \frac{32}{9}x^3\right)\ln(1-x) + \left(-\frac{29}{9} - \frac{14}{3}x + 16x^2 + \frac{32}{9}x^3\right)\ln x - \frac{287}{27} - \frac{4}{9x} - \frac{13}{9}x + \frac{86}{9}x^2 + \frac{80}{27}x^3, \quad (4.79)$$

$$g_3^{(LL,S)}(x) = \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}\right)(4\text{Li}_2(1-x) + 4\ln x \ln(1-x) - \ln^2 x) - \frac{4}{3}x^2 \ln^2 x + \left(-\frac{4}{9} - \frac{8}{9x} + 4x + \frac{8}{9}x^2 - \frac{32}{9}x^3\right)\ln(1-x) + \left(\frac{1}{9} - 2x - \frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}x^3\right)\ln x + \frac{31}{27} + \frac{4}{27x} - \frac{35}{9}x - \frac{10}{27}x^2 + \frac{80}{27}x^3, \quad (4.80)$$

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln^2(1-x) - 2 \ln x \ln(1-x) - \text{Li}_2(1-x) - \zeta_2.$$

Обсудим теперь, как происходит сокращение массовых сингулярностей при переходе от поправок к спектру распада к поправке ко времени жизни (и асимметрии). Для ВЛП-вкладов пар и фотонов в несинглетном канале механизм сокращения прост:

$$\int_0^1 dx f_n^{(LL,j)}(x) = \int_0^1 dx g_n^{(LL,j)}(x) = 0, \quad j = \text{NS}, \gamma, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.81)$$

Это гарантируется условиями нормировки функций фрагментации.

* Строго говоря, в третьем порядке мы имеем одновременно и пару, и фотон.

Заметим, что *наивное* интегрирование спектра распада даст нам поток электронов, который отличается от полной ширины распада, поскольку процессы с образованием реальных пар дают по два электрона в конечном состоянии. Потому возникает необходимость избежать *двойного счета*. Это, кажется, легко сделать, беря только несинглетный канал и отбрасывая синглетный. Но СВЛП-вклады $f_2^{(1,\text{int})}$ и $g_2^{(1,\text{int})}$ также содержат двойной счет. Для решения этой проблемы мы можем воспользоваться свойствами функции расщепления, отвечающей именно за интерференцию синглетного и несинглетного каналов с образованием позитронов [37]:

$$P_{\bar{e}e}^{(1,\text{int})}(x) = 2 \frac{1+x^2}{1+x} \left(-2 \text{Li}_2(-x) - 2 \ln x \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln^2 x - \zeta_2 \right) + 2(1+x) \ln x + 4(1-x). \quad (4.82)$$

Теперь можно убедиться, что поток электронов, даваемый $f_2^{(1,\text{int})}$, действительно в два раза превышает поток позитронов:

$$\int_0^1 dx f_2^{(\text{NLO},\text{int})}(x) = 2 \int_0^1 dx P_{\bar{e}e}^{(\text{NLO},\text{int})} \otimes f_0(x) = \frac{13}{4} - 3\zeta_2 + 2\zeta_3. \quad (4.83)$$

Поэтому сокращение массовых сингулярностей происходит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx (f_2^{(\text{NLO},\gamma)}(x) + f_2^{(\text{NLO},\text{int})}(x) - P_{\bar{e}e}^{(\text{NLO},\text{int})} \otimes f_0(x)) = \\ = \int_0^1 dx \left(f_2^{(\text{NLO},\gamma)}(x) + \frac{1}{2} f_2^{(\text{NLO},\text{int})}(x) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Рассмотрим теперь интеграл от вклада пар в несинглетном канале. Как известно [257], в нем сокращения массовых сингулярностей не происходит, но выделяется эффект за счет *бега* константы связи:

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 L \int_0^1 dx f_2^{(1,\text{NS})}(x) = \frac{\Delta\alpha(m_\mu)}{2\pi} \left[\int_0^1 dx f_1(x) \right] \Big|_{m_e \rightarrow 0}, \quad (4.85)$$

где $\Delta\alpha(m_\mu) = L\alpha^2/(3\pi) = \alpha(m_\mu) - \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0)$.

Численные результаты для чисто фотонных поправок приведены в табл. 15 через значения величин

$$\delta_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{f_1(x) \pm cP_\mu g_1(x)}{f_{\text{Born}}(x) \pm cP_\mu g_{\text{Born}}(x)},$$

Таблица 15. Фотонные поправки к спектру распада μ^- в зависимости от x для $c = 1$ и $P_\mu = 1$

x	$10^4 \delta_1$	$10^4 \delta_1^{(LL,\gamma)}$	$10^4 \delta_2^{(LL,\gamma)}$	$10^4 \delta_2^{(NLO,\gamma)}$	$10^4 \delta_3^{(LL,\gamma)}$	$10^4 \delta_{a,h}^{\text{exp}}$	$10^4 \delta_{\text{SF}}^{\text{exp}}$
0,05	4590,1	10325,0	184,96	-247,63	-0,43	0,00	6,90
0,1	1715,1	3257,7	33,18	-37,79	-0,35	0,00	1,39
0,2	674,0	1106,2	-1,28	0,34	-0,15	0,01	0,05
0,3	364,0	549,1	-6,58	4,48	-0,05	0,01	-0,20
0,5	64,1	82,6	-6,50	3,73	0,05	0,06	-0,26
0,7	-160,3	-214,9	-1,28	0,70	0,07	0,18	-0,09
0,9	-470,3	-592,1	15,19	-5,97	-0,14	0,72	0,62
0,99	-971,9	-1198,8	69,84	-26,08	-1,95	3,47	3,70
0,999	-1439,8	-1772,5	155,10	-57,86	-6,64	9,17	9,75

$$\delta_n^{(LL,\gamma)} = \frac{L^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \frac{f_n^{(LL,\gamma)}(x) \pm cP_\mu g_n^{(LL,\gamma)}(x)}{f_{\text{Born}}(x) \pm cP_\mu g_{\text{Born}}(x)}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4.86)$$

$$\delta_2^{(NLO,\gamma)} = L \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \frac{f_2^{(NLO,\gamma)}(x) \pm cP_\mu g_2^{(NLO,\gamma)}(x)}{f_{\text{Born}}(x) \pm cP_\mu g_{\text{Born}}(x)}.$$

Отметим, что сходимость ряда по L во втором порядке не кажется такой же быстрой, как в первом.

Относительные вклады поправок за счет e^+e^- -пар, приведенные в табл. 16, определены так:

$$\begin{aligned} \delta_2^{(LL,e\bar{e})} &= \\ &= \frac{L^2}{6} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \frac{2f_2^{(LL,NS)}(x) + 3f_2^{(LL,S)}(x) \pm cP_\mu (2g_2^{(LL,NS)}(x) + 3g_2^{(LL,S)}(x))}{f_{\text{Born}}(x) \pm cP_\mu g_{\text{Born}}}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\delta_2^{(NLO,e\bar{e})} = L \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \sum_{i=NS,S,int} \frac{f_2^{(NLO,i)}(x) \pm cP_\mu g_2^{(NLO,i)}(x)}{f_{\text{Born}}(x) \pm cP_\mu g_{\text{Born}}(x)},$$

$$\delta_3^{(LL,e\bar{e})} = \frac{L^3}{6} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^3 \sum_{j=NS,S} \frac{f_3^{(LL,j)}(x) \pm cP_\mu g_3^{(LL,j)}(x)}{f_{\text{Born}}(x) \pm cP_\mu g_{\text{Born}}(x)}.$$

Отметим то, что следующие за ведущими поправки за счет пар имеют тот же порядок величины, что и ведущие, в отличие от случая чисто фотонных поправок, где иерархия масштабов поправок ВЛП и СВЛП четко прослеживается. Это явление характерно и для других процессов. Кроме того, необходимо отметить, что при анализе экспериментальных данных поправки за счет

Таблица 16. Поправки за счет e^+e^- -пар к спектру распада μ^- в зависимости от x для $c = \pm 1$ и $P_\mu = 1$

x	$c = 1$			$c = -1$		
	$10^4 \delta_2^{(LL, e\bar{e})}$	$10^4 \delta_2^{(NLO, e\bar{e})}$	$10^4 \delta_3^{(LL, e\bar{e})}$	$10^4 \delta_2^{(LL, e\bar{e})}$	$10^4 \delta_2^{(NLO, e\bar{e})}$	$10^4 \delta_3^{(LL, e\bar{e})}$
0,05	548,14	-661,94	-2,19	2132,14	-2848,25	-9,12
0,1	66,02	-68,36	-0,18	241,62	-274,34	-0,76
0,2	9,55	-9,99	-0,05	29,25	-29,68	-0,04
0,3	3,43	-3,58	-0,06	9,59	-9,77	-0,05
0,5	0,49	-0,71	-0,06	2,54	-2,99	-0,08
0,7	-0,86	0,76	-0,02	0,46	-1,03	-0,08
0,9	-2,44	2,95	0,05	-1,36	0,99	0,00
0,99	-4,95	8,24	-0,73	-3,92	5,47	0,33
0,999	-7,32	15,41	-18,18	-6,29	11,76	0,92

излучения реальных пар лучше моделировать по методу Монте-Карло, тогда как для вкладов виртуальных и, возможно, мягких пар можно прямо применять полученные здесь результаты. Вообще говоря, пятилептонные моды распада мюона и тау-лептона интересны сами по себе. Они обсуждались в литературе, в частности в нашей работе [268]. Недавно были вычислены однопетлевые КЭД-поправки к этим модам распада [269, 270]. Кроме того, в работе [92] были получены полные выражения для поправок к спектру распада поляризованного мюона за счет виртуальных и мягких e^+e^- -пар в порядке $\mathcal{O}(\alpha^2)$ с учетом следующих за следующими за ведущими слагаемых, т. е. членов порядка $\mathcal{O}(\alpha^2 L^0)$.

Суммарный эффект найденных поправок в порядках выше первого

$$\delta_{h.o.} = \delta_2^{(0,\gamma)} + \delta_2^{(1,\gamma)} + \delta_3^{(0,\gamma)} + \delta_2^{(0,e\bar{e})} + \delta_2^{(1,e\bar{e})} + \delta_3^{(0,e\bar{e})} + \delta_{SF}^{\text{exp}} \quad (4.88)$$

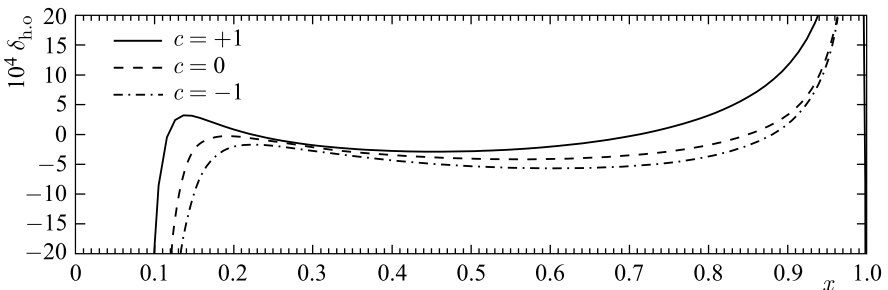


Рис. 24. Относительный вклад поправок высших порядков как функция доли энергии электрона для различных углов

показан на рис. 24. Видно, что в центральной области поправки высших порядков имеют масштаб нескольких единиц на 10^{-4} , увеличиваясь на краях спектра*.

4.5. Радиационный распад мюона. Как обсуждалось выше, в модельно-независимом подходе распад мюона $\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ описывается с помощью четырех параметров Мишеля. Однако общее число типов (лоренцевских структур) возможных четырехфермионных взаимодействий намного больше, см. [218]. Поэтому для поиска отклонений от предсказаний Стандартной модели с $V-A$ -взаимодействиями надо рассматривать как можно большее число разных процессов. Одним из источников дополнительной информации о структуре слабых взаимодействий служит анализ радиационного распада мюона

$$\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma. \quad (4.89)$$

Несмотря на то, что ширина этого процесса подавлена фактором α относительно ширины безрадиационного распада, в современных экспериментах набираются огромные объемы статистических данных.

С точным учетом массы заряженных лептонов радиационные распады мюона и тау-лептона были рассмотрены в [271]. Используя обозначения, принятые в обзоре [65], можно представить дифференциальное сечение радиационного распада поляризованного мюона в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(\mu^\pm \rightarrow e^\pm\bar{\nu}\nu\gamma)}{dx dy d\Omega_e d\Omega_\gamma} &= \\ &= \Gamma_0 \frac{\alpha_{\text{QED}} \beta_e}{64\pi^3} \frac{1}{y} [F(x, y, d) \mp \beta_e P_\mu \cos \theta_e G(x, y, d) \mp P_\mu \cos \theta_\gamma H(x, y, d)], \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \quad d = 1 - \beta_e \cos \theta_{e\gamma}, \quad \beta_e = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E_e^2}},$$

где $\Omega_{e,\gamma}$ — телесные углы электрона и фотона; θ_e (θ_γ) — угол между спином мюона и импульсом электрона (фотона); P_μ — степень поляризации мюона; $\theta_{e\gamma}$ — угол между импульсами электрона и фотона; x и y — доли энергии электрона и фотона соответственно, $x \equiv 2E_e/m_\mu$ и $y \equiv 2E_\gamma/m_\mu$.

Функции F , G и H являются полиномами по степеням отношения масс электрона и мюона:

$$\mathcal{F}(x, y, d) = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^k \mathcal{F}^{(k)}, \quad (4.91)$$

$$\mathcal{F} \equiv F(x, y, d), \quad G(x, y, d), \quad H(x, y, d).$$

*Экспериментальное изучение левого края спектра затруднено из-за малости дифференциальной ширины в этой области.

Они зависят от обобщенных параметров Мишеля ρ , η , $\bar{\eta}$, ξ , δ , κ , α и β . В древесном приближении эти функции имеют вид

$$\begin{aligned}
 F^{(0)} = & 32\rho \left(\frac{16x^2y + 12xy^2 + 4y^3 + 8x^3 - 3y^2 - 6x^2 - 6xy}{3d} - \right. \\
 & - \frac{10}{3}x^2y^2 - \frac{8x^3y}{3} - 2xy^3 - \frac{xy^2}{3} - \frac{5x^2y}{3} - \frac{4x^3}{3} + xy + x^2 + \\
 & + xyd \left(\frac{4x^2}{3} + x^2y + xy^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{x}{2} \right) - \frac{x^3y^2d^2}{6}(2+y) \Big) + \\
 & + \bar{\eta}8xy^2(2y + 4x - xd - xyd - 2) + \\
 & + 48 \frac{y^2 + 2xy + 2x^2 - y^3 - 2x^3 - 3xy^2 - 4x^2y}{d} + \\
 & + 96x^3y + 112x^2y^2 + 56xy^3 + 48x^2(x+y-1) + 16xy^2 - 48xy + \\
 & + 4xyd(6x - 7xy(1+y) - 12x^2 - 9x^2y) + 6x^3y^2d^2(2+y), \\
 F^{(1)} = & \beta \left(\frac{24x(x+y-1)}{d} - \frac{4y^2}{d} + 4xy^2 - 12x(xy+x+y-1) - x^2y^2d + 6x^2yd \right) + \\
 & + \alpha \left(\frac{12x(1-x-y)}{d} + 6x(xy+x+y-1) - 3x^2yd \right), \quad (4.92) \\
 F^{(2)} = & 16\rho \left(\frac{8(x+y)(3-4x-4y)}{3xd^2} + \frac{18y^2 - 12x^2 + 20xy - 16x - 12y}{3d} + \right. \\
 & + 2x^2y - \frac{2xy^2}{3} + 2x^2 + 2xy + \frac{8x}{3} - \frac{x^2yd(2+y)}{2} \Big) + 16\bar{\eta} \left(-xy^2 - \frac{2y^2}{d} \right) + \\
 & + \frac{192(x^2 + y^2 + 2xy - x - y)}{xd^2} + \frac{96x^2 - 112y^2 - 96xy + 96y}{d} - \\
 & - 48x^2y + 16xy^2 - 48x^2 - 48xy + 12x^2yd(2+y), \\
 F^{(3)} = & 96\eta \left(4\frac{x+y-1}{xd^2} + \frac{2(x-y)}{d} - x \right), \\
 F^{(4)} = & 64\rho \frac{8 + 6x + 6y - 3xyd}{3xd^2} + 96\frac{xyd - 2y - 2x}{xd^2}, \\
 F^{(5)} = & \eta \left(-\frac{384}{xd^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$G^{(0)} = 8\xi \left(\frac{4x^3 + 6x^2y - 4x^2 - 2xy}{d} + \frac{4xy^2}{3d} - 3x^3y - \frac{5}{3}x^2y^2 - 2x^3 - x^2y + 2x^2 + \frac{x^3yd(2+y)}{2} \right) + 32\delta\xi \left(\frac{xy}{d} - \frac{10xy^2}{9d} + \frac{2x^2}{d} - \frac{4x^2y}{d} - \frac{8x^3}{3d} - x^2 + \frac{5x^2y}{6} + \frac{11x^2y^2}{9} + \frac{4x^3}{3} + 2x^3y - \frac{x^3yd(2+y)}{3} \right) + 8\kappa\xi xy^2 \left(x - \frac{2}{d} \right),$$

$$G^{(2)} = 8\xi \left(\frac{8(1-x-y)}{d^2} + \frac{2xy}{d} - \frac{4x^2}{d} + 2x^2 + x^2y \right) + 16\delta\xi \left(\frac{8(4x+4y-3)}{3d^2} - \frac{2xy}{d} + \frac{20x^2}{3d} - \frac{10x^2}{3} - \frac{5x^2y}{3} \right), \quad (4.93)$$

$$G^{(4)} = \xi \frac{64}{d^2} - \delta\xi \frac{640}{3d^2},$$

$$G^{(1)} = 0, \quad G^{(3)} = 0, \quad G^{(5)} = 0.$$

$$H^0 = 8\xi \left(\frac{2y(x^2 + y^2 - y - x)}{d} + \frac{14xy^2}{3d} - \frac{7}{3}xy^3 - x^3y + \frac{2xy^2}{3} - 3x^2y^2 + x^2y + \frac{7}{6}x^2y^3d + x^3y^2d - \frac{x^2y^2d}{2} - \frac{x^3y^3d^2}{4} \right) + 8\delta\xi \left(\frac{4y(3x+3y-4x^2-4y^2)}{3d} - \frac{104xy^2}{9d} + \frac{40}{9}xy^3 + \frac{8x^3y}{3} + \frac{20}{3}x^2y^2 + \frac{4xy^2}{9} - 2x^2y + x^2y^2d - \frac{20}{9}x^2y^3d - \frac{8}{3}x^3y^2d + \frac{2}{3}x^3y^3d^2 \right) + 8\kappa\xi \left(\frac{2xy^2}{d} + 2xy^3 + 3x^2y^2 - 4xy^2 - x^2y^3d \right), \quad (4.94)$$

$$H^{(2)} = 8\xi \left(\frac{8y(1-y-x)}{xd^2} + \frac{14y^2}{3d} + \frac{2xy}{d} - \frac{4y}{d} - \frac{2xy^2}{3} + x^2y - \frac{x^2y^2d}{2} \right) + 8\delta\xi \left(\frac{16y(4y+4x-3)}{3xd^2} - \frac{116y^2}{9d} - \frac{4xy}{d} + \frac{8y}{d} + \frac{20xy^2}{9} - \frac{10x^2y}{3} + \frac{5x^2y^2d}{3} \right) + 16\kappa\xi \left(-xy^2 - \frac{2y^2}{d} \right),$$

$$H^{(4)} = 32\xi \left(\frac{2y}{xd^2} - \frac{y}{d} \right) + 320\delta\xi \left(\frac{y}{3d} - \frac{2y}{3xd^2} \right),$$

$$H^{(1)} = 0, \quad H^{(3)} = 0, \quad H^{(5)} = 0.$$

Отметим, что зависимость от параметров $\bar{\eta}$, κ , α и β позволяет извлечь важную физическую информацию о структуре слабых взаимодействий, дополнительную к той, что получают из анализа спектра безрадиационного распада мюона. Также отметим, что зависимость от α и β проявляется только в членах, подавленных первой степенью отношения масс $r \equiv m_e/m_\mu \approx 5 \cdot 10^{-3}$ (или $m_\mu/m_\tau \approx 6 \cdot 10^{-2}$ для распадов тау-лептона). Присутствие вкладов, пропорциональных первой степени отношения масс, является нетривиальным эффектом, так как чаще всего в вычислениях наблюдается зависимость от квадрата отношения масс. Аналогичный эффект был обнаружен при вычислении однопетлевых поправок к спектру безрадиационного распада мюона [94] (см. (4.21)).

Интерес к радиационному распаду мюона и тау-лептона также обусловлен тем, что он служит фоном к нарушающему закон сохранения лептонного числа безнейтринному распаду $\mu \rightarrow e\gamma$, возможность которого предсказывается во многих расширениях СМ. Процесс (4.89) дает фон к безнейтринному распаду в кинематической области, когда энергия, унесенная нейтрино, мала.

Очевидно, что для прецизионного анализа данных по радиационному распаду мюона требуется учитывать радиационные поправки. Анализ требуемой точности показал, что достаточно ограничиться вычислением поправок первого порядка по α .

В работе [95] нами рассмотрена специальная кинематическая область радиационного распада мюона, имитирующая безнейтринный распад $\mu \rightarrow e\gamma$. А именно, мы рассмотрели случай, когда энергия и импульс, унесенные нейтрино, малы (не превышают разрешения детекторов), так что стандартный распад $\mu \rightarrow e\gamma\bar{\nu}_e\nu_\mu$ неотличим от запрещенного в СМ безнейтринного распада*. При этом использовались стандартные методы однопетлевых вычислений с учетом появления дополнительного малого параметра — отношения энергии, унесенной парой нейтрино, к массе распадающегося мюона.

Более общий случай с произвольной кинематикой был рассмотрен в работах [91, 272, 273], где были получены общие формулы для дифференциальной ширины радиационного распада (4.89) с учетом полных однопетлевых поправок. Отметим, что эта задача аналогична случаю расчета поправок к процессу аннигиляции с детектированием тормозного фотона, т. е. обсуждавшемуся выше процессу *радиационного возвращения*. Полученные результаты уже использованы для извлечения параметров Мишеля из данных по радиационным распадам тау-лептона [274]. Планируется новое измерение относительной вероятности радиационного распада мюона $\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu\gamma$

*При наличии массы нейтрино и их смешивания распад $\mu \rightarrow e\gamma$ становится разрешенным и в рамках СМ, но его парциальная ширина получается порядка 10^{-50} , что недостижимо мало для современных опытов.

в широкой области фазового пространства, что на высоком статистическом уровне позволит значительно повысить точность определения этой величины. Вероятность распада зависит от параметров ρ и $\bar{\eta}$, последний из которых определяется только в этом процессе. В рамках Стандартной модели их значения $\rho = 3/4$ и $\bar{\eta} = 0$. Измеренное в эксперименте значение $\bar{\eta}$ позволяет определить верхний предел на этот параметр. Целью проекта является измерение относительной вероятности радиационного распада мюона с точностью до 2%, а также уменьшение верхнего предела на значение параметра $\bar{\eta}$ в 2,5 раза. Это исследование будет осуществлено в ходе эксперимента PEN по изучению распада $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, который проводится в PSI (Швейцария) с помощью установки RIBETA [275].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в обзоре рассмотрены методы нахождения КЭД радиационных поправок в ведущем и следующем за ведущим логарифмических приближениях. Данное направление исследований в настоящее время продолжает активно развиваться в связи с необходимостью обеспечить будущие эксперименты высокоточными теоретическими предсказаниями.

Использование формализма КЭД структурных функций в ведущем логарифмическом приближении сегодня является обязательным при оценке эффектов радиационных поправок для описания процессов при высоких энергиях. В частности, данный формализм применяется в компьютерной программе PHOTOS [276], которая широко используется в настоящее время для монте-карло-моделирования множественного излучения фотонов. Также следует отметить развитие методов комбинирования учета полных однопетлевых КЭД-поправок с ведущими логарифмическими поправками высших порядков в так называемом формализме КЭД партонных ливней. Этот формализм успешно реализован в ряде современных компьютерных программ [277, 278].

Использование же следующих за ведущими логарифмических поправок КЭД в порядках $\mathcal{O}(\alpha^2)$ и выше еще не получило такого широкого распространения, как в КХД. Повышение точности экспериментов в области физики высоких энергий однозначно требует выхода за рамки ведущего логарифмического приближения. При этом важно не только получать аналитические формулы, но и создавать монте-карло-генераторы событий для непосредственного использования при моделировании и анализе экспериментальных данных.

Вычисления, представленные в обзоре, основаны на использовании стандартных методов квантовой теории поля. Все основные результаты проверялись на предмет соответствия (для ряда предельных случаев) известным классическим достижениям в данной области теоретической физики. Анали-

тические преобразования, в частности связанные со взятием многократных интегралов, всегда контролировались численно.

В обзоре описан систематический метод учета следующих за ведущими логарифмических квантово-электродинамических поправок к процессам взаимодействия частиц. Он основан на подходе ренормализационной группы. При этом допускается возможность налагать ограничения на кинематические переменные не только заряженных лептонов, но и фотонов, что необходимо для расчетов в реалистических экспериментальных условиях.

В разд. 3 явление радиационного возвращения (эффективного уменьшения энергии взаимодействующих частиц за счет излучения фотона из начального состояния) исследовано в следующем за ведущим приближении. Получено прецизионное описание радиационных событий для глубоконеупругого рассеяния. Обосновано применение метода радиационного возвращения к процессам электрон-позитронной аннигиляции в адроны на коллайдерах промежуточных энергий. Рассмотрен также оригинальный метод прямого (без использования дисперсионных соотношений) измерения бега константы взаимодействий КЭД.

В обзоре также продемонстрировано применение описанных методов к созданию высокоточных теоретических предсказаний для ряда процессов, изучаемых в современных экспериментах физики высоких энергий: электрон-позитронной аннигиляции (в мюоны, адроны или фотоны), баба-рассеяния, процессов аннигиляции и глубоконеупругого рассеяния с детектированием тормозного излучения, тормозного излучения при рассеянии на ядрах, обратного тормозного излучения в процессе Дрелла–Яна.

В разд. 4 представлено прецизионное теоретическое описание спектра распада поляризованного мюона. Впервые учтены ведущие и следующие за ведущими логарифмические поправки высших порядков, а также точная зависимость от массы электрона в выражениях для поправок первого порядка. Это позволило достичь точности предсказаний порядка 10^{-4} , необходимой для анализа данных современных и планируемых экспериментов.

Приложение 1

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ КОНВОЛЮЦИИ

Во многих приложениях, в частности в случае применения взаимной факторизации двух или более функций, возникает задача нахождения аналитического выражения для интеграла от произведения двух функций одного аргумента, изменяющегося в пределах от 0 до 1. Такая ситуация типична при рассмотрении пертурбативных разложений уравнений эволюции в ренорм-групповом подходе.

Довольно часто задача о поиске интегральной свертки (конволюции) произведения двух функций решается методом моментов с помощью преобра-

зований Меллина. В пространстве моментов результат свертки, точнее, его момент, находится как произведение моментов заданных функций. Потому данный метод позволяет систематически решать задачи рассматриваемого типа, причем с возможностью построения общего алгоритма и реализации его в виде компьютерной программы. Однако этот метод содержит целый ряд вспомогательных шагов, включающих, в частности, обратные преобразования Меллина, которые могут оказаться весьма трудоемкими. Более того, в реалистических случаях, возможно, будет необходимо сдвинуть пределы интегрирования для выделения определенной области физического фазового пространства. Кроме того, в особо сложных функциях приходится полностью или частично находить свертки численно, что плохо укладывается в алгоритм метода моментов.

Здесь представлен подход к нахождению сверток методом прямого интегрирования, который хорошо работает для широкого класса функций, возникающих в задачах, решаемых методом теории возмущений.

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $g(y)$, определенные на интервале $0 \leq x, y \leq 1$. Их свертка (конволюция) определяется следующим образом:

$$[f \otimes g](z) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(z - xy) f(x) g(y) = \int_z^1 \frac{dx}{x} f(x) g\left(\frac{z}{x}\right), \quad (\text{П1.1})$$

где $0 \leq z \leq 1$.

Иногда требуется найти конволюцию специальных функций. В частности, функций, определенных с использованием так называемой *плюс-прескрипции*. Эта прескрипция задает правило регуляризации полюсной сингулярности в точке $x = 1$:

$$\int_{x_{\min}}^1 dx [f(x)]_+ g(x) = \int_0^1 dx f(x) [g(x) \Theta(x - x_{\min}) - g(1)], \quad (\text{П1.2})$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \geq 0, \\ 0 & \text{для } x < 0, \end{cases} \quad 0 \leq x_{\min} < 1.$$

Интегралы функций, имеющих полюсы в точках $x = z$ или $x = 1$, расходятся. Они могут быть регуляризованы путем введения малого вспомогательного параметра $\Delta \ll 1$. Причем в результате конкретных вычислений члены, зависящие от этого параметра, должны взаимно сокращаться. Этому параметру можно придать и физический смысл параметра, отделяющего фазовые пространства мягкого и жесткого тормозного излучения. С другой стороны, есть однозначное соответствие между методами Δ -регуляризации и

плюс-прескрипции (П1.2):

$$[f(x)]_+ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\delta(1-x)f_\Delta + \Theta(1-\Delta-x)f_\Theta(x)], \quad (\text{П1.3})$$

$$f_\Delta = - \int_0^{1-\Delta} dx f(x), \quad f_\Theta(x) = f(x)|_{x < 1}.$$

Мы будем называть f_Δ и $f_\Theta(x)$ как Δ - и Θ -части специальной функции $f(x)$ соответственно. Вторая реализация плюс-прескрипции удобна как в случае аналитических вычислений, так и при численном счете, где первое определение заведомо неприменимо напрямую, так как оно допускает появление ноля в знаменателе подынтегральной функции. Ниже показано, как можно систематически использовать Δ -регуляризацию расходящихся интегралов с учетом проверки сокращения зависимости от вспомогательного параметра после суммирования вкладов Δ - и Θ -частей, как, например, в (П1.3).

Для нахождения Δ -части заданной функции можно воспользоваться таблицей определенных интегралов по интервалу $0 < x < 1 - \Delta$. Для интегралов от несингулярных функций берется полный интервал $0 < x < 1$, и соответствующие значения могут быть найдены во многих таблицах (см., например, [279]). Конволюция двух сингулярных функций, регуляризованных с помощью плюс-прескрипции, может быть представлена в виде

$$[[f]_+ \otimes [g]_+](z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} \frac{dx}{x} f_\Theta(x) g_\Theta\left(\frac{z}{x}\right) + f_\Delta g_\Theta(z) + f_\Theta(z) g_\Delta \right\}. \quad (\text{П1.4})$$

Рассмотрим сначала интегралы от сингулярных функций, которые будем регуляризовать параметром $\Delta \ll 1$, оставляя зависимость от него лишь в аргументе логарифма:

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln^n(1-x)}{1-x} = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1}(1-z) - \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} \Delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{1}{x-z} = -\ln \Delta + \ln(1-z) - \ln z, \quad (\text{П1.5})$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln x}{x-z} = -\ln \Delta \ln z + \text{Li}_2(1-z) + \ln(1-z) \ln z - \frac{1}{2} \ln^2 z,$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln(1-x)}{x-z} = -\ln \Delta \ln(1-z) - \ln(1-z) \ln z + \ln^2(1-z) - \zeta(2),$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln^2 x}{x-z} = -\ln \Delta \ln^2 z + 2S_{1,2}(1-z) + 2\text{Li}_2(1-z) \ln z +$$

$$+ \ln(1-z) \ln^2 z - \frac{1}{3} \ln^3 z,$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln^2(1-x)}{x-z} = -\ln \Delta \ln^2(1-z) + \ln^3(1-z) -$$

$$- \ln^2(1-z) \ln z - 2\zeta(2) \ln(1-z) + 2\zeta(3),$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln(1-x) \ln x}{x-z} = -\ln \Delta \ln(1-z) \ln z + 2S_{1,2}(1-z) -$$

$$- \text{Li}_3(1-z) + \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) + \text{Li}_2(1-z) \ln z +$$

$$+ \ln^2(1-z) \ln z - \frac{1}{2} \ln(1-z) \ln^2 z - \zeta(2) \ln z, \quad (\text{П1.6})$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\text{Li}_2(1-x)}{x-z} = \text{Li}_2(1-z) (\ln(1-z) - \ln z - \ln \Delta) -$$

$$- S_{1,2}(1-z) - \text{Li}_3(1-z),$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\text{Li}_3(1-x)}{x-z} = \text{Li}_3(1-z) (\ln(1-z) - \ln z - \ln \Delta) -$$

$$- S_{2,2}(1-z) - \text{Li}_4(1-z),$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{S_{1,2}(1-x)}{x-z} = S_{1,2}(1-z) (\ln(1-z) - \ln z - \ln \Delta) +$$

$$+ S_{2,2}(1-z) - 2S_{1,3}(1-z) - \frac{1}{2} (\text{Li}_2(1-z))^2,$$

$$\int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln(1-x)}{x-z} = \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) \times$$

$$\times (\ln(1-z) - \ln z - \ln \Delta) + \text{Li}_4(1-z) - 2S_{2,2}(1-z) + \frac{1}{2} (\text{Li}_2(1-z))^2 -$$

$$- \text{Li}_3(1-z) \ln(1-z) - S_{1,2}(1-z) \ln(1-z) - \zeta(2) \text{Li}_2(1-z),$$

$$\begin{aligned}
& \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\operatorname{Li}_2(1-x) \ln x}{x-z} = \operatorname{Li}_2(1-z) \ln z (\ln(1-z) - \ln z - \ln \Delta) + \\
& \quad + 4\operatorname{S}_{1,3}(1-z) - 4\operatorname{S}_{2,2}(1-z) + (\operatorname{Li}_2(1-z))^2 - \operatorname{Li}_3(1-z) \ln z + \\
& \quad \quad \quad + \operatorname{S}_{1,2}(1-z) \ln z + \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2(1-z) \ln^2 z, \\
& \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln^2(1-x) \ln x}{x-z} = -\ln \Delta \ln^2(1-z) \ln z + 2\operatorname{Li}_4(1-z) - \\
& \quad - (\operatorname{Li}_2(1-z))^2 - 2\operatorname{Li}_3(1-z) (\ln(1-z) + \ln z) + 4\operatorname{S}_{1,2}(1-z) \ln(1-z) + \\
& \quad + 2\operatorname{Li}_2(1-z) \ln(1-z) \ln z + \operatorname{Li}_2(1-z) \ln^2(1-z) + \ln^3(1-z) \ln z - \\
& \quad \quad \quad - \frac{1}{2} \ln^2(1-z) \ln^2 z - 2\zeta(2) \ln(1-z) \ln z + 2\zeta(3) \ln z, \\
& \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln(1-x) \ln^2 x}{x-z} = -\ln \Delta \ln(1-z) \ln^2 z + 2\operatorname{S}_{2,2}(1-z) - \\
& \quad - (\operatorname{Li}_2(1-z))^2 - 2\operatorname{Li}_3(1-z) \ln z + 2\operatorname{S}_{1,2}(1-z) (\ln(1-z) + \ln z) + \\
& \quad + 2\operatorname{Li}_2(1-z) \ln(1-z) \ln z + \operatorname{Li}_2(1-z) \ln^2 z + \ln^2(1-z) \ln^2 z - \\
& \quad \quad \quad - \frac{1}{3} \ln(1-z) \ln^3 z - \zeta(2) \ln^2 z, \\
& \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln^3(1-x)}{x-z} = \ln^3(1-z) (\ln(1-z) - \ln z - \ln \Delta) - \\
& \quad \quad \quad - 3\zeta(2) \ln^2(1-z) + 6\zeta(3) \ln(1-z) - 6\zeta(4), \\
& \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} dx \frac{\ln^3 x}{x-z} = -\ln \Delta \ln^3 z + 6\operatorname{S}_{1,3}(1-z) + 6\operatorname{S}_{1,2}(1-z) \ln z + \\
& \quad \quad \quad + 3\operatorname{Li}_2(1-z) \ln^2 z + \ln(1-z) \ln^3 z - \frac{1}{4} \ln^4 z.
\end{aligned}$$

Следующий набор интегралов конволюции несингулярных функций использовался в статьях [45, 68, 93, 110] и других работах при получении аналитических выражений для поправок высших порядков в ВЛП и СВЛП:

$$\int_z^1 dx x^n = \frac{1}{n+1} (1 - z^{n+1}), \quad n \neq -1,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^n x}{x} = -\frac{1}{n+1} \ln^{n+1} z, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^n(1-x)}{x} = (-1)^n n! [\zeta(n+1) - S_{1,n}(z)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x) \ln x}{x} = S_{1,2}(1-z) - \frac{1}{2} \ln(1-z) \ln^2 z,$$

$$\int_z^1 dx x^n \ln x = -\frac{z^{n+1}}{n+1} \ln z - \frac{1}{(n+1)^2} (1 - z^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{z^{n-1}(n-1)^2} ((n-1) \ln z + 1 - z^{n-1}), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (\text{П1.7})$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^n x}{1-x} = (-1)^n n! S_{1,n}(1-z), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x) \ln x}{1-x} = \text{Li}_3(1-z) - \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z),$$

$$\int_z^1 dx x^n \ln(1-x) = \frac{1-z^{n+1}}{n+1} \ln(1-z) + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{z^k}{k} - S_1(n+1) \right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x)}{x^2} = \ln z + \frac{1-z}{z} \ln(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x)}{x^n} = \frac{1}{n-1} \left(\ln z + \frac{1-z^{n-1}}{z^{n-1}} \ln(1-z) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{kz^k} + S_1(n-2) \right),$$

$$n = 3, 4, 5, \dots,$$

$$\int_z^1 dx x^n \ln^2 x = \frac{2}{(n+1)^3} (1 - z^{n+1}) + \frac{2z^{n+1}}{(n+1)^2} \ln z - \frac{z^{n+1}}{n+1} \ln^2 z, \quad n \neq -1,$$

$$\int_z^1 dx x^n \ln^2(1-x) = \frac{1-z^{n+1}}{n+1} \ln^2(1-z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \times \\ \times \frac{(1-z)^{k+1}}{(k+1)^2} \left(\frac{2}{k+1} - 2 \ln(1-z) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_z^1 dx x^n \ln(1-x) \ln x = -\frac{1}{n+1} \text{Li}_2(1-z) - \frac{z^{n+1}}{n+1} \ln(1-z) \ln z - \\ - \frac{1-z^{n+1}}{(n+1)^2} \ln(1-z) + \frac{1}{n+1} \ln z \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z^k}{k} + \\ + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n+1} (1-z^k) \frac{n+k+1}{k^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln x \ln(1-x)}{x^n} = \frac{1}{n-1} \text{Li}_2(1-z) + \frac{\ln z \ln(1-z)}{z^{n-1}(n-1)} + \\ + \ln z \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{z^k k} \right) + \frac{1-z^{n-1}}{z^{n-1}(n-1)^2} \ln(1-z) + \\ + \frac{\ln^2 z}{2(n-1)} - \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(1-z^k)(n+k-1)}{z^k k^2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^2(1-x)}{x^2} = \frac{1-z}{z} \ln^2(1-z) + 2\text{Li}_2(1-z) + 2 \ln(1-z) \ln z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^2(1-x)}{x^n} = \frac{1-z^{n-1}}{(n-1)z^{n-1}} \ln^2(1-z) + \\ + \frac{2}{n-1} (\text{Li}_2(1-z) + \ln(1-z) \ln z) - \frac{2}{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} \int_z^1 dx \frac{\ln(1-x)}{x^k}, \\ n = 3, 4, 5, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \ln^2(1-x) \ln x = 2\text{Li}_3(1-z) - 2\text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) - \\ - z \ln^2(1-z) \ln z + 2\text{Li}_2(1-z) + 2z \ln(1-z) \ln z - \\ - (1-z) \ln^2(1-z) + 4(1-z) \ln(1-z) - 2z \ln z + 6z - 6,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^2(1-x) \ln x}{x} = 2\text{S}_{1,2}(1-z) \ln(1-z) - \\ - 2\text{S}_{2,2}(1-z) - \frac{1}{2} \ln^2(1-z) \ln^2 z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^2(1-x) \ln x}{x^2} = -2S_{1,2}(1-z) - 2Li_3(1-z) +$$

$$+ 2Li_2(1-z) \ln(1-z) + \frac{1}{z} \ln^2(1-z) \ln z + \ln(1-z) \ln^2 z +$$

$$+ 2Li_2(1-z) + 2 \ln(1-z) \ln z + \frac{1-z}{z} \ln^2(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^2(1-x) \ln x}{1-x} = -2Li_4(1-z) + 2Li_3(1-z) \ln(1-z) -$$

$$- Li_2(1-z) \ln^2(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \ln(1-x) \ln^2 x = 2S_{1,2}(1-z) - z \ln(1-z) \ln^2 z + 2Li_2(1-z) +$$

$$+ 2z \ln(1-z) \ln z + z \ln^2 z + 2(1-z) \ln(1-z) - 4z \ln z + 6z - 6,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x) \ln^2 x}{x} = -2S_{1,3}(1-z) - \frac{1}{3} \ln(1-z) \ln^3 z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x) \ln^2 x}{x^2} = -2S_{1,2}(1-z) + \frac{1}{z} \ln(1-z) \ln^2 z + \frac{1}{3} \ln^3 z +$$

$$+ 2Li_2(1-z) + \frac{2}{z} \ln(1-z) \ln z + \ln^2 z + 2 \frac{1-z}{z} \ln(1-z) + 2 \ln z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln(1-x) \ln^2 x}{1-x} = -2S_{2,2}(1-z) + 2S_{1,2}(1-z) \ln(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \ln^3(1-x) = (1-z)(\ln^3(1-z) - 3 \ln^2(1-z) + 6 \ln(1-z) - 6),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^3(1-x)}{x^2} = -6Li_3(1-z) + 6Li_2(1-z) \ln(1-z) +$$

$$+ 3 \ln^2(1-z) \ln z + \frac{1-z}{z} \ln^3(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \ln^3 x = -z \ln^3 z + 3z \ln^2 z - 6z \ln z + 6z - 6,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^3 x}{x^2} = \frac{1}{z} (\ln^3 z + 3 \ln^2 z + 6 \ln z - 6z + 6).$$

Путем тождественных преобразований (см. приложение 2) мы можем упростить аргументы полилогарифмических функций к виду $(1-x)$. В подынтегральных функциях мы проводим то же самое упрощение. Отметим, что есть определенные аргументы в пользу выбора вида $(1-x)$ для аргумента, кажущегося, на первый взгляд, менее удобным, чем просто x . В большинстве приложений точка $x = 1$ соответствует сингулярности (регуляризованной как-либо) структурных функций или функций фрагментации. Вспомним, например, несинглетную функцию расщепления в низшем порядке:

$$P^{(0)}(x) = \left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ . \quad (\text{П1.8})$$

Таким образом, в аналитических результатах, получаемых путем конволюции, предел $x \rightarrow 1$ имеет принципиальное значение. Выбранный нами способ редукции аргументов полилогарифмических функций упрощает анализ поведения результата в этом пределе. В любом случае преобразование функций, зависящих от $(1-x)$, в те, что имеют аргументом x , может быть выполнено с использованием формул из того же набора, представленного в приложении 2.

К основным интегралам от полилогарифмических функций можно отнести следующие:

$$\int_z^1 dx x^n \text{Li}_2(1-x) = \frac{1-z^{n+1}}{n+1} \text{Li}_2(1-z) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{z^k}{k} \ln z + \frac{1-z^k}{k^2} \right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x)}{1-x} = \text{Li}_3(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x)}{x} = -2\text{S}_{1,2}(1-z) - \text{Li}_2(1-z) \ln z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x)}{x^n} = \frac{1-z^{n-1}}{z^{n-1}(n-1)} \text{Li}_2(1-z) + \frac{1}{n-1} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1-z^k}{z^k k^2} + \frac{\ln z}{z^k k} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 z \right], \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

$$\int_z^1 dx \text{Li}_3(1-x) = (1-z) \text{Li}_3(1-z) - (1-z) \text{Li}_2(1-z) + z \ln z + 1-z,$$

$$\begin{aligned}
 \int_z^1 dx \frac{\text{Li}_3(1-x)}{x} &= -\text{Li}_3(1-z) \ln z - \frac{1}{2} (\text{Li}_2(1-z))^2, \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{Li}_3(1-x)}{x^2} &= \frac{1-z}{z} \text{Li}_3(1-z) + 2\text{S}_{1,2}(1-z) + \text{Li}_2(1-z) \ln z, \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{Li}_3(1-x)}{1-x} &= \text{Li}_4(1-z), \\
 \int_z^1 dx \text{S}_{1,2}(1-x) &= (1-z) \text{S}_{1,2}(1-z) + \frac{z}{2} \ln^2 z - z \ln z + z - 1, \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{S}_{1,2}(1-x)}{x} &= -3\text{S}_{1,3}(1-z) - \text{S}_{1,2}(1-z) \ln z, \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{S}_{1,2}(1-x)}{x^2} &= \frac{1-z}{z} \text{S}_{1,2}(1-z) + \frac{1}{6} \ln^3 z, \tag{III.9} \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{S}_{1,2}(1-x)}{1-x} &= \text{S}_{2,2}(1-z), \\
 \int_z^1 dx \text{Li}_2(1-x) \ln(1-x) &= (1-z) \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) + \\
 &\quad + (z-2) \text{Li}_2(1-z) - z \ln(1-z) \ln z - (1-z) \ln(1-z) + \\
 &\quad \quad \quad + 2z \ln z + 3 - 3z, \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln(1-x)}{x} &= 2\text{S}_{2,2}(1-z) - \frac{1}{2} (\text{Li}_2(1-z))^2 - \\
 &\quad - 2\text{S}_{1,2}(1-z) \ln(1-z) - \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) \ln z, \\
 \int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln(1-x)}{x^2} &= 3\text{S}_{1,2}(1-z) + \text{Li}_2(1-z) \ln z + \\
 &\quad + \frac{1-z}{z} \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) - \frac{1}{2} \ln(1-z) \ln^2 z,
 \end{aligned}$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln(1-x)}{1-x} = -\text{Li}_4(1-z) + \text{Li}_3(1-z) \ln(1-z),$$

$$\int_z^1 dx \text{Li}_2(1-x) \ln x = -2\text{S}_{1,2}(1-z) - (z \ln z - z + 1) \text{Li}_2(1-z) -$$

$$-z \ln^2 z + 3z \ln z - 3z + 3,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln x}{x} = 3\text{S}_{1,3}(1-z) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(1-z) \ln^2 z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln x}{x^2} = 2\text{S}_{1,2}(1-z) + \frac{1}{z} (\ln z - z + 1) \text{Li}_2(1-z) -$$

$$- \frac{1}{3} \ln^3 z - \frac{1}{2} \ln^2 z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1-x) \ln x}{1-x} = -\frac{1}{2} (\text{Li}_2(1-z))^2.$$

Иногда возникают и интегралы от функций, имеющих в аргументе $(1+x)$ (мы рассматриваем только реальную часть этих функций):

$$\int_z^1 dx \frac{1}{1+x} = \ln 2 - \ln(1+z),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln x}{1+x} = \text{Li}_2(1+z) - \frac{3}{2} \zeta(2),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\ln^2 x}{1+x} = \frac{7}{2} \zeta(3) - 2\text{S}_{1,2}(1+z),$$

$$\int_z^1 dx \text{Li}_2(1+x) = -(1+z) \text{Li}_2(1+z) - z \ln z - 1 + z + 3\zeta(2),$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1+x)}{1+x} = -\text{Li}_3(1+z) + \frac{7}{8} \zeta(3) + \frac{3}{2} \zeta(2) \ln 2,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1+x)}{x} = \frac{7}{2} \zeta(3) - 2\text{S}_{1,2}(1+z) - \text{Li}_2(1+z) \ln z,$$

$$\int_z^1 dx \frac{\text{Li}_2(1+x)}{x^n} = -\frac{3}{2(n-1)}\zeta(2) + \frac{1}{z^{n-1}(n-1)}\text{Li}_2(1+z) -$$

$$-\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\left(\text{Li}_2(1+z) + \frac{1}{2}\ln^2 z - \frac{3}{2}\zeta(2)\right) -$$

$$-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{n+k}\left(\frac{1-z^k}{z^k k^2} + \frac{\ln z}{z^k k}\right), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{П1.10})$$

Приведенная выше таблица интегралов была заложена в компьютерную программу [280] на языке FORM [166, 167]. Программа позволяет автоматизировать операции интегрирования, приведения подобных слагаемых и редукции аргументов полилогарифмических функций. Таблица интегралов применялась при вычислении радиационных поправок к ряду процессов взаимодействий частиц (см., например, работы [45, 93, 110, 254, 281]). Приведенный набор интегралов позволяет решать задачи конволюции для довольно широкого класса проблем, возникающих при вычислении радиационных поправок высших порядков теории возмущений как в КЭД, так и в КХД. Большая часть из приведенных выше интегралов может быть найдена в других источниках, включая автоматические программы, такие как МАТНЕМАТИСА [282]. Однако сведение вместе необходимого набора математических инструментов, направленных на решение определенного класса задач, кажется вполне уместным и полезным. Кроме того, в приведенных выше выражениях систематически использовались тождественные преобразования к таким функциям, в которых асимптотика при $z \rightarrow 1$ легко просматривается.

Приложение 2 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИЛОГАРИФМОВ

При нахождении аналитических выражений для рассматриваемых вкладов логарифмических поправок систематически возникают специальные математические функции, в частности полилогарифмы и ζ -функция Римана. Следуя обозначениям работы [279] (см. также [283, 284]), полилогарифм Нильсена (Nielsen) в общем виде запишем так:

$$S_{n,m}(z) = \frac{(-1)^{n+m-1}}{(n-1)!m!} \int_0^1 dx \frac{\ln^{n-1}(x) \ln^m(1-xz)}{x},$$

$$n = 1, 2, 3 \dots, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{П2.1})$$

В частности, дилогарифм, рассмотренный Эйлером в 1768 г., называемый также часто функцией Спенса, мы определяем следующим образом:

$$\text{Li}_2(z) \equiv S_{1,1}(z) = - \int_0^1 dx \frac{\ln(1-xz)}{x}. \quad (\text{П2.2})$$

Типичный интеграл, приводящий к возникновению функции Спенса:

$$\int dx \frac{\ln(a+bx)}{c+ex} = \frac{1}{e} \left[\ln\left(\frac{ae-bc}{e}\right) \ln(c+ex) - \text{Li}_2\left(-b\frac{c+ex}{ae-bc}\right) \right]. \quad (\text{П2.3})$$

Кроме того, в обзоре встречались полилогарифмы и более высоких порядков:

$$\begin{aligned} S_{1,2}(z) &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\ln^2(1-xz)}{x}, \\ \text{Li}_3(z) \equiv S_{2,1}(z) &= \int_0^1 dx \frac{\ln(x) \ln(1-xz)}{x} = \int_0^z dx \frac{\text{Li}_2(x)}{x}, \\ \text{Li}_4(z) \equiv S_{3,1}(z) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\ln^2(x) \ln(1-xz)}{x}, \\ S_{1,3}(z) &= -\frac{1}{6} \int_0^1 dx \frac{\ln^3(1-xz)}{x}, \\ S_{2,2}(z) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\ln(x) \ln^2(1-xz)}{x}. \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Полезно привести несколько конкретных значений ζ -функции Римана:

$$\begin{aligned} \zeta(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \\ \zeta(3) &\approx 1,20205690315959, \\ \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(5) \approx 1,03692775514337. \end{aligned} \quad (\text{П2.5})$$

Для преобразования полилогарифмов от аргумента z к функциям от аргумента $(1-z)$ были использованы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(z) &= -\text{Li}_2(1-z) - \ln z \ln(1-z) + \zeta(2), \\ S_{1,2}(z) &= -\text{Li}_3(1-z) + \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) + \frac{1}{2} \ln^2(1-z) \ln z + \zeta(3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Li}_3(z) &= -\text{S}_{1,2}(1-z) - \text{Li}_2(1-z) \ln z - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(1-z) \ln^2 z + \zeta(2) \ln z + \zeta(3), \\
 \text{S}_{1,3}(z) &= -\text{Li}_4(1-z) + \text{Li}_3(1-z) \ln(1-z) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(1-z) \ln^2(1-z) - \\
 &\quad - \frac{1}{6} \ln^3(1-z) \ln z + \zeta(4), \quad (\text{П2.6}) \\
 \text{S}_{2,2}(z) &= -\text{S}_{2,2}(1-z) - \text{Li}_3(1-z) \ln z + \text{S}_{1,2}(1-z) \ln(1-z) + \\
 &\quad + \text{Li}_2(1-z) \ln(1-z) \ln z + \frac{1}{4} \ln^2(1-z) \ln^2 z + \zeta(3) \ln z + \frac{1}{4} \zeta(4), \\
 \text{Li}_4(z) &= -\text{S}_{1,3}(1-z) - \text{S}_{1,2}(1-z) \ln z - \frac{1}{2} \text{Li}_2(1-z) \ln^2 z - \\
 &\quad - \frac{1}{6} \ln(1-z) \ln^3 z + \frac{1}{2} \zeta(2) \ln^2 z + \zeta(3) \ln z + \zeta(4).
 \end{aligned}$$

Переход от более сложных аргументов, возникающих на практике, к наиболее простым (z и $1-z$) также делался методами тождественных преобразований иногда с использованием некоторых дополнительных соотношений между полилогарифмами более сложных аргументов, например

$$\begin{aligned}
 \text{Li}_2\left(-\frac{z}{1-z}\right) &= -\text{Li}_2(z) - \frac{1}{2} \ln^2(1-z), \\
 \text{Li}_2(z^2) &= 2[\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(-z)]
 \end{aligned} \tag{П2.7}$$

и т. д. Отметим, что в некоторых из приведенных соотношений отброшены мнимые части, которые при необходимости можно восстановить, пользуясь аналитическими свойствами соответствующих функций [284].

Полезны некоторые явные выражения для полилогарифмов от постоянных аргументов:

$$\begin{aligned}
 \text{S}_{n,m}(0) &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\
 \text{Li}_n(1) &= \zeta(n), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \\
 \text{S}_{2,2}(1) &= \frac{1}{4} \zeta(4), \quad \text{S}_{1,n}(1) = \zeta(n+1), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\
 \text{Re Li}_2(2) &= \frac{3}{2} \zeta(2), \quad \text{Li}_2(-1) = -\frac{1}{2} \zeta(2), \\
 \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \zeta(2) - \frac{1}{2} \ln^2 2, \\
 \text{Re Li}_3(2) &= \frac{7}{8} \zeta(3) + \frac{3}{2} \ln 2 \zeta(2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \operatorname{Li}_3(-1) &= -\frac{3}{4}\zeta(3), & \operatorname{Re} S_{1,2}(2) &= \frac{7}{4}\zeta(3), \\
\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\ln 2 + \frac{1}{6}\ln^3 2, \\
S_{1,2}(-1) &= \frac{1}{8}\zeta(3), \\
S_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}\zeta(3) - \frac{1}{6}\ln^3 2.
\end{aligned}
\tag{П2.8}$$

Для разложения в ряд решений уравнений эволюции, полученных в приближении мягкого тормозного излучения, удобно использовать следующее представление для Γ -функции:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.
\tag{П2.9}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glashow S. L.* Partial Symmetries of Weak Interactions // Nucl. Phys. 1961. V. 22. P. 579.
2. *Weinberg S.* A Model of Leptons // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1264.
3. *Salam A.* Elementary Particle Theory / Ed. N. Svartholm. Stockholm: Almqvist and Wiksel, 1968. 367 p.
4. *Bardin D. Y., Passarino G.* The Standard Model in the Making: Precision Study of the Electroweak Interactions. Oxford, UK: Clarendon, 1999.
5. *Abada A. et al. (FCC Collab.).* Future Circular Collider. V. 3. The Hadron Collider (FCC-hh). CERN-ACC-2018-0058.
6. *Accomando E. et al. (ECFA/DESY LC Physics Working Group).* Physics with e^+e^- Linear Colliders // Phys. Rep. 1998. V. 299. P. 1.
7. *Abada A. et al. (FCC Collab.).* Future Circular Collider. V. 2. The Lepton Collider (FCC-ee). CERN-ACC-2018-0057. 2018.
8. *Guimaraes da Costa J. et al. (CEPC Study Group).* CEPC Conceptual Design Report. V. 2. Physics & Detector. arXiv:1811.10545 [hep-ex].
9. *Penin A. A.* Two-Loop Photonic Corrections to Massive Bhabha Scattering // Nucl. Phys. B. 2006. V. 734. P. 185.
10. *Penin A. A.* Two-Loop Corrections to Bhabha Scattering // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 010408.
11. *Becher N., Melnikov K.* Two-Loop QED Corrections to Bhabha Scattering // JHEP. 2007. V. 0706. P. 084.
12. *Fleischer J., Gluza J., Kajda K., Riemann T.* Pentagon Diagrams of Bhabha Scattering // Acta Phys. Polon. B. 20017. V. 38. P. 3529.

13. *Actis S., Czakon M., Gluza J., Riemann T.* Virtual Hadronic and Heavy-Fermion $O(\alpha^2)$ Corrections to Bhabha Scattering // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P.085019.
14. *Carloni Calame C. et al.* NNLO Leptonic and Hadronic Corrections to Bhabha Scattering and Luminosity Monitoring at Meson Factories // *JHEP.* 2011. V.1107. P.126.
15. *Penin A.A., Ryan G.* Two-Loop Electroweak Corrections to High Energy Large-Angle Bhabha Scattering // *JHEP.* 2011. V. 1111. P.081.
16. *Bhabha H.J.* The Scattering of Positrons by Electrons with Exchange on Dirac's Theory of the Positron // *Proc. Roy. Soc. A.* 1936. V. 154. P.195.
17. *Yennie D.R., Frautschi S.C., Suura H.* The Infrared Divergence Phenomena and High-Energy Processes // *Ann. Phys.* 1961. V. 13. P.379.
18. *Bernauer J. C. et al. (A1 Collab.).* Electric and Magnetic Form Factors of the Proton // *Phys. Rev. C.* 2014. V. 90. P.015206.
19. *Arbuzov A. B., Kopylova T. V.* On Higher Order Radiative Corrections to Elastic Electron-Proton Scattering // *Eur. Phys. J. C.* 2015. V. 75. P.603.
20. *Kinoshita T.* Mass Singularities of Feynman Amplitudes // *J. Math. Phys.* 1962. V. 3. P.650.
21. *Lee T.D., Nauenberg M.* Degenerate Systems and Mass Singularities // *Phys. Rev.* 1964. V. 133. P.B1549.
22. *Stueckelberg E. C. G., Peterman A.* La normalisation des constantes dans la theorie des quanta // *Helv. Phys. Acta.* 1953. V. 26. P.499.
23. *Gell-Mann M., Low F. E.* Quantum Electrodynamics at Small Distances // *Phys. Rev.* 1954. V. 95. P.1300.
24. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* On the Renormalization Group in Quantum Electrodynamics // *Dokl. AN SSSR.* 1955. V. 103. P.203.
25. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Application of the Renormalization Group to Improve the Formulae of Perturbation Theory // *Ibid.* P.391.
26. *Shirkov D. V.* Renormalization Group with Two Coupling Constants in the Theory of Pseudoscalar Mesons // *Ibid.* V. 105. P.972.
27. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Charge Renormalization Group in Quantum Field Theory // *Nuovo Cim.* 1956. V. 3. P.845.
28. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
29. *Shirkov D. V.* Evolution of the Bogoliubov Renormalization Group // *Quantum Field Theory: A Xth Century Profile / Ed. A. N. Mitra.* New Dehli, 2000. P.26–58.
30. *Gribov V. N., Lipatov L. N.* Deep Inelastic ep -Scattering in a Perturbation Theory // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1972. V. 15. P.438.
31. *Gribov V. N., Lipatov L. N.* e^+e^- Pair Annihilation and Deep Inelastic ep Scattering in Perturbation Theory // *Ibid.* P.675.
32. *Lipatov L. N.* The Parton Model and Perturbation Theory // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1975. V. 20. P.94.
33. *Altarelli G., Parisi G.* Asymptotic Freedom in Parton Language // *Nucl. Phys. B.* 1977. V. 126. P.298.

34. *Dokshitzer Y.L.* Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics // *Sov. Phys. JETP*. 1977. V. 46. P. 641.
35. *Matveev V.A., Muradian R.M., Tavkhelidze A.N.* Muon Pair Production in Strong Interactions and the Asymptotic Sum Rules. Preprint SLAC-TRANS-0098. 1969; JINR P2-4543. Dubna, 1969.
36. *Drell S.D., Yan T.M.* Massive Lepton Pair Production in Hadron–Hadron Collisions at High Energies // *Phys. Rev. Lett.* 1970. V. 25. P. 316; Erratum // *Ibid.* V. 25. P. 902.
37. *Curci G., Furmanski W., Petronzio R.* Evolution of Parton Densities beyond Leading Order: The Nonsinglet Case // *Nucl. Phys. B*. 1980. V. 175. P. 27.
38. *Floratos E.G., Kounnas C., Lacaze R.* Higher Order QCD Effects in Inclusive Annihilation and Deep Inelastic Scattering // *Nucl. Phys. B*. 1981. V. 192. P. 417.
39. *Furmanski W., Petronzio R.* Singlet Parton Densities beyond Leading Order // *Phys. Lett. B*. 1980. V. 97. P. 437.
40. *Ellis R.K., Vogelsang W.* The Evolution of Parton Distributions beyond Leading Order: The Singlet Case. arXiv:hep-ph/9602356.
41. *Grunberg G.* Renormalization Scheme Independent QCD and QED: The Method of Effective Charges // *Phys. Rev. D*. 1984. V. 29. P. 2315.
42. *Kuraev E.A., Fadin V.S.* On Radiative Corrections to e^+e^- Single Photon Annihilation at High Energy // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1985. V. 41. P. 466.
43. *Skrzypek M.* Leading Logarithmic Calculations of QED Corrections at LEP // *Acta Phys. Polon. B*. 1992. V. 23. P. 135.
44. *Berends F.A., van Neerven W.L., Burgers G.J.H.* Higher Order Radiative Corrections at LEP Energies // *Nucl. Phys. B*. 1988. V. 297. P. 429; Erratum // *Ibid.* V. 304. P. 921.
45. *Arbuzov A., Melnikov K.* $O(\alpha^2 \ln(m(\mu)/m(e)))$ Corrections to Electron Energy Spectrum in Muon Decay // *Phys. Rev. D*. 2002. V. 66. P. 093003.
46. *Glover E.W.N., Tausk J.B., Van der Bij J.J.* Second Order Contributions to Elastic Large-Angle Bhabha Scattering // *Phys. Lett. B*. 2001. V. 516. P. 33.
47. *Arbuzov A.B., Kuraev E.A., Merenkov N.P., Trentadue L.* Hadronic Cross-Sections in Electron–Positron Annihilation with Tagged Photon // *JHEP*. 1998. V. 9812. P. 009.
48. *Baier V.N., Khoze V.A.* Radiation Accompanying Two Particle Annihilation of an Electron–Positron Pair // *Sov. Phys. JETP*. 1965. V. 21. P. 1145.
49. *Baier V.N., Khoze V.A.* Photon Emission in Muon Pair Production in Electron–Positron Collisions // *Ibid.* P. 629.
50. *Krasny M.W., Placzek W., Spiesberger H.* Determination of the Longitudinal Structure Function at HERA from Radiative Events // *Z. Phys. C*. 1992. V. 53. P. 687.
51. *Andonov A., Arbuzov A., Bardin D. et al.* SANCscope — v.1.00 // *Comp. Phys. Commun.* 2006. V. 174. P. 481; Erratum // *Ibid.* 2007. V. 177. P. 623.
52. *Arbuzov A. et al.* SANCnews: Sector 4f, Charged Current // *Eur. Phys. J. C*. 2007. V. 51. P. 585.
53. *Andonov A., Arbuzov A. et al.* Standard SANC Modules // *Comp. Phys. Commun.* 2010. V. 181. P. 305.

54. *Andonov A., Bardin D., Bondarenko S. et al.* SANC Press Release // Nucl. Instr. Meth. A. 2003. V. 502. P. 576.
55. *Arbuzov A., Baur U., Bondarenko S., Carloni Calame S. et al.* Tuned Comparison of Electroweak Corrections to Drell–Yan-Like W - and Z -Boson Production — A Status Report // *Buttar C. et al.* Les Houches Physics at TeV Colliders 2005, Standard Model and Higgs Working Group: Summary Report. arXiv:hep-ph/0604120.
56. *Arbuzov A., Bardin D., Bondarenko S. et al.* One-Loop Corrections to the Drell–Yan Process in SANC. I: The Charged Current Case // Eur. Phys. J. C. 2006. V. 46. P. 407; Erratum // Ibid. V. 50. P. 505.
57. *Arbuzov A., Bardin D., Bondarenko S. et al.* One-Loop Corrections to the Drell–Yan Process in SANC. II. The Neutral Current Case // Eur. Phys. J. C. 2008. V. 54. P. 451.
58. *Arbuzov A. B., Sadykov R. R.* Inverse Bremsstrahlung Contributions to Drell–Yan Like Processes // J. Exp. Theor. Phys. 2008. V. 133. P. 564.
59. *Andonov A., Arbuzov A., Bondarenko S. et al.* NLO QCD Corrections to Drell–Yan Processes in the SANC Framework // Phys. At. Nucl. 2010. V. 73. P. 1810.
60. *Blumlein J., Kawamura H.* $O(\alpha^2 L)$ Radiative Corrections to Deep Inelastic ep Scattering // Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 242.
61. *Arbuzov A. B., Fedotov G. V., Ignatov F. V., Kuraev E. A., Sibidanov A. L.* Monte-Carlo Generator for e^+e^- Annihilation into Lepton and Hadron Pairs with Precise Radiative Corrections // Eur. Phys. J. C. 2006. V. 46. P. 689.
62. *Akhmetshin R. R., Anashkin E. V., Arbuzov A. B. et al. (CMD-2 Collab.).* Measurement of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ Cross Section with CMD-2 around Rho Meson // Phys. Lett. B. 2002. V. 527. P. 161.
63. *Akhmetshin R. R., Anashkin E. V., Arbuzov A. B. et al. (CMD-2 Collab.).* Reanalysis of Hadronic Cross Section Measurements at CMD-2 // Phys. Lett. B. 2004. V. 578. P. 285.
64. *Fetscher W., Gerber H. J.* Muon Decay Parameters // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 15. P. 316.
65. *Kuno Y., Okada Y.* Muon Decay and Physics beyond the Standard Model // Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 151.
66. *Eidelman S.* Project of the Super-Tau-Charm Factory in Novosibirsk // Nucl. Part. Phys. Proc. 2015. V. 260. P. 238.
67. *Arbuzov A. B., Awramik M., Czakon M., Freitas A., Grunewald M. W., Monig K., Riemann S., Riemann T.* ZFITTER: A Semi-Analytical Program for Fermion Pair Production in e^+e^- Annihilation, from Version 6.21 to Version 6.42 // Comp. Phys. Commun. 2006. V. 174. P. 728.
68. *Arbuzov A. B.* Higher Order Pair Corrections to Electron–Positron Annihilation // JHEP. 2001. V. 0107. P. 043.
69. *Arbuzov A. B., Astakhov V. A., Fedorov A. V., Fedotov G. V., Kuraev E. A., Merenkov N. P.* Radiative Corrections for Pion and Kaon Production at e^+e^- Colliders of Energies below 2 GeV // JHEP. 1997. V. 10. P. 006.
70. *Arbuzov A. B., Fedotov G. V., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Rushai V. D., Trentadue L.* Large Angle QED Processes at e^+e^- Colliders at Energies below 3 GeV // Ibid. P. 001.

71. *Kobel M., Arbuzov A. B. et al. (Two Fermion Working Group)*. Two-Fermion Production in Electron–Positron Collisions // CERN Yellow Report / Eds.: S. Jadach, G. Passarino and R. Pittau. Reports of the Working Groups on Precision Calculation for LEP2 Physics. Geneva, 1999–2000. P. 269–378.
72. *Arbuzov A. B., Scherbakova E. S.* Next-to-Leading Order Corrections to Bhabha Scattering in Renormalization Group Approach. I: Soft and Virtual Photonic Contributions // JETP Lett. 2006. V. 83. P. 499.
73. *Arbuzov A. B., Haidt D., Matteuzzi C., Paganoni M., Trentadue L.* The Running of the Electromagnetic Coupling Alpha in Small-Angle Bhabha Scattering // Eur. Phys. J. C. 2004. V. 34. P. 267.
74. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Shaikhatdenov B. G.* Violation of the Factorization Theorem in Large Angle Radiative Bhabha Scattering // J. Exp. Theor. Phys. 1999. V. 88. P. 213.
75. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Shaikhatdenov B. G.* Second Order Contributions to Elastic Large-Angle Bhabha Scattering // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 2305.
76. *Arbuzov A. B., Gach G. I., Gontchar V. Yu., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Trentadue L.* Small-Angle Bhabha Scattering at LEP1. Analytical Results for Wide-Narrow Angular Acceptance // Phys. Lett. B. 1997. V. 399. P. 312.
77. *Merenkov N. P., Arbuzov A. B., Fadin V. S., Kuraev E. A., Lipatov L. N., Trentadue L.* Analytical Calculation of Small-Angle Bhabha Cross-Section at LEP1 // Acta Phys. Polon. B. 1997. V. 28. P. 491.
78. *Arbuzov A. B., Fadin V. S., Kuraev E. A., Lipatov L. N., Merenkov N. P., Trentadue L.* Small-Angle Electron–Positron Scattering // Phys. Lett. B. 1997. V. 394. P. 218.
79. *Arbuzov A. B., Fadin V. S., Kuraev E. A., Lipatov L. N., Merenkov N. P., Trentadue L.* Small-Angle Bhabha Scattering with a per Mille Accuracy // Nucl. Phys. B. 1997. V. 485. P. 457.
80. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Trentadue L.* Hard Pair Production in Large-Angle Bhabha Scattering // Nucl. Phys. B. 1996. V. 474. P. 271.
81. *Arbuzov A. B., Bigi M., Burkhardt H. et al.* The Present Theoretical Error on the Bhabha Scattering Cross-Section in the Luminometry Region at LEP // Phys. Lett. B. 1996. V. 383. P. 238.
82. *Арбузов А. Б., Кураев Э. А.* Баба-рассеяние на малые углы // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27. С. 1247.
83. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Trentadue L.* Pair Production in Small Angle Bhabha Scattering // J. Exp. Theor. Phys. 1995. V. 81. P. 638.
84. *Arbuzov A., Fadin V., Kuraev E., Lipatov L., Merenkov N., Trentadue L.* Small-Angle Bhabha Scattering for LEP // CERN Yellow Report. CERN 95-03. 1995. P. 369.
85. *Anlauf H., Arbuzov A. et al.* Event Generators for Bhabha Scattering // CERN Yellow Report. 1996. V. 96-01. P. 229.
86. *Arbuzov A. B., Fadin V. S., Kuraev E. A., Lipatov L. N., Merenkov N. P., Trentadue L.* Small-Angle Bhabha Scattering // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 1996. V. 51S. P. 154.
87. *Arbuzov A. B.* LABSMC: Monte Carlo Event Generator for Large-Angle Bhabha Scattering. arXiv:hep-ph/9907298.

88. *Arbuzov A. B.* Radiative Corrections to High Energy Lepton Bremsstrahlung on Heavy Nuclei // JHEP. 2008. V. 01. P. 031.
89. *Anlauf H., Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Merenkov N. P.* QED Corrections to Deep Inelastic Scattering with Tagged Photons at HERA // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 014003.
90. *Anlauf H., Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Merenkov N. P.* Tagged Photons in DIS within the Next-to-Leading Accuracy // JHEP. 1998. V. 10. P. 013.
91. *Arbuzov A. B., Scherbakova E. S.* One-Loop Corrections to Radiative Muon Decay // Phys. Lett. B. 2004. V. 597. P. 285.
92. *Arbuzov A. B.* Virtual and Soft Pair Corrections to Polarized Muon Decay Spectrum // JETP Lett. 2003. V. 78. P. 179.
93. *Arbuzov A.* Higher Order QED Corrections to Muon Decay Spectrum // JHEP. 2003. V. 0303. P. 063.
94. *Arbuzov A. B.* First Order Radiative Corrections to Polarized Muon Decay Spectrum // Phys. Lett. B. 2002. V. 524. P. 99; Erratum // Ibid. V. 535. P. 378.
95. *Arbuzov A. B., Krehl O., Kuraev E. A., Magar E. N., Shaikhmatdenov B. G.* Radiative Corrections to the Background of $\mu \rightarrow e\gamma$ Decay // Phys. Lett. B. 1998. V. 432. P. 421.
96. *Feynman R. P.* Very High-Energy Collisions of Hadrons // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 1415.
97. *Bjorken J. D., Paschos E. A.* Inelastic Electron Proton and Gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon // Phys. Rev. 1969. V. 185. P. 1975.
98. *Kuraev E. A.* Radiative Tail in $\pi(e^2)$ Decay and Some Remarks on μ - e Universality // JETP Lett. 1997. V. 65. P. 127.
99. *De Rujula A., Petronzio R., Savoy-Navarro A.* Radiative Corrections to High-Energy Neutrino Scattering // Nucl. Phys. B. 1979. V. 154. P. 394.
100. *Arbuzov A., Bardin D. Y., Blumlein J., Kalinovskaya L., Riemann T.* HECTOR 1.00 — A Program for the Calculation of QED, QCD and Electroweak Corrections to ep and lN Deep Inelastic Neutral and Charged Current Scattering // Comp. Phys. Commun. 1996. V. 94. P. 128.
101. *Blumlein J.* Leading Log Radiative Corrections to Deep Inelastic Neutral and Charged Current Scattering at HERA // Z. Phys. C. 1990. V. 47. P. 89.
102. *Blumlein J.* HELIOS 1.00: A Program to Calculate Leading Log QED Corrections to ep Scattering // Proc. of Physics at HERA. Hamburg, 1991. V. 3. P. 1270–1284.
103. *Altarelli G.* Partons in Quantum Chromodynamics // Phys. Rep. 1982. V. 81. P. 1.
104. *Баїєр В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
105. *Brodsky S. J., Frankfurt L., Gunion J. F., Mueller A. H., Strikman M.* Diffractive Leptonproduction of Vector Mesons in QCD // Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 3134.
106. *Collins J. C., Frankfurt L., Strikman M.* Factorization for Hard Exclusive Electroproduction of Mesons in QCD // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 2982.
107. *Tsai Y. S.* Radiative Corrections to e^+e^- Reactions to All Orders in Alpha Using the Renormalization Group. Preprint SLAC-PUB-3129. 1983.

108. *Cacciari M., Deandrea A., Montagna G., Nicrosini O.* QED Structure Functions: A Systematic Approach // *Europhys. Lett.* 1992. V. 17. P. 123.
109. *Arbuzov A. B., Bytev V. V., Kuraev E. A., Tomasi-Gustafsson E., Bystritskiy Yu. M.* Structure Function Approach in QED for High Energy Processes // *Phys. Part. Nucl.* 2010. V. 41. P. 394.
110. *Arbuzov A. B.* Non-Singlet Splitting Functions in QED // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 470. P. 252.
111. *Przybycien M.* A Fifth Order Perturbative Solution to the Gribov–Lipatov Equation // *Acta Phys. Polon. B.* 1993. V. 24. P. 1105.
112. *Jadach S., Ward B. F. L.* YFS2: The Second Order Monte Carlo for Fermion Pair Production at LEP/SLC with the Initial State Radiation of Two Hard and Multiple Soft Photons // *Comp. Phys. Commun.* 1990. V. 56. P. 351.
113. *Jadach S., Richter-Was E., Ward B. F. L. et al.* Higher Order Radiative Corrections to Low Angle Bhabha Scattering: The YFS Monte Carlo Approach // *Phys. Lett. B.* 1995. V. 353. P. 362.
114. *Nicrosini O., Trentadue L.* Soft Photons and Second Order Radiative Corrections to $e^+e^- \rightarrow Z^0$ // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 196. P. 551.
115. *Antropov A., Arbuzov A., Sadykov R., Was Z.* Extra Lepton Pair Emission Corrections to Drell–Yan Processes in PHOTOS and SANC // *Acta Phys. Polon. B.* 2017. V. 48. P. 1469.
116. *Akhiezer A. I., Berestecki V. B.* Quantum Electrodynamics. New York: Wiley Intersci., 1969.
117. *Berestetskii V. B., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Quantum Electrodynamics. 2nd Ed. Oxford: Pergamon Press, 1982.
118. *Fomin P. I.* Radiative Corrections to Bremsstrahlung // *Sov. Phys. JETP.* 1959. V. 35, No. 8. P. 491.
119. *Antipov Yu. M. et al.* Measurement of π -Meson Polarizability in Pion Compton Effect // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 121. P. 445.
120. *Guskov A.* Pion Polarizabilities Measurement at COMPASS // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2008. V. 110. P. 022016.
121. *Adolph C. et al. (COMPASS Collab.).* Measurement of the Charged-Pion Polarizability // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 114. P. 062002.
122. *Abbon P. et al. (COMPASS Collab.).* The COMPASS Experiment at CERN // *Nucl. Instr. Meth. A.* 2007. V. 577. P. 455.
123. Proc. of Workshop on Future Physics at COMPASS, CERN, Geneva, Switzerland, Sept. 26–27, 2002. CERN Yellow Report 2004-011.
124. *Andreev Yu. M., Bugaev E. V.* Muon Bremsstrahlung on Heavy Atoms // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55. P. 1233.
125. *Vanderhaeghen M. et al.* QED Radiative Corrections to Virtual Compton Scattering // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 62. P. 025501.
126. *Kuraev E. A., Merenkov N. P., Fadin V. S.* The Compton Effect Tensor with Heavy Photon // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1987. V. 45. P. 486.
127. *Bardin D., Bondarenko S., Kalinovskaya L. et al.* SANCnews: Sector $f\bar{f}b\bar{b}$ // *Comp. Phys. Commun.* 2007. V. 177. P. 738.

128. *Lepage G. P.* A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration // *J. Comp. Phys.* 1978. V. 27. P. 192.
129. *Akhundov A. A., Bardin D. Y., Mitselmakher G., Olszewski A. G.* About the Electromagnetic Corrections to the Polarizabilities of a Charged Pion // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1985. V. 42. P. 426.
130. *Bardeen W. A., Buras A. J., Duke D. W., Muta T.* Deep Inelastic Scattering beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories // *Phys. Rev. D.* 1978. V. 18. P. 3998.
131. *Ellis R. K., Stirling W. J., Webber B. R.* QCD and Collider Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
132. *Catani S.* The Singular Behaviour of QCD Amplitudes at Two-Loop Order // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 427. P. 161.
133. *Beenakker W., Berends F. A., van der Marck S. C.* Large Angle Bhabha Scattering // *Nucl. Phys. B.* 1991. V. 349. P. 323.
134. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Trentadue L.* Virtual and Soft Real Pair Production in Large Angle Bhabha Scattering // *Phys. At. Nucl.* 1997. V. 60. P. 591.
135. *Arbuzov A. B., Astakhov V. A., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Trentadue L., Zemlyanaya E. V.* Emission of Two Hard Photons in Large-Angle Bhabha Scattering // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 483. P. 83.
136. *Baier V. N., Fadin V. S., Khoze V. A.* Quasireal Electron Method in High-Energy Quantum Electrodynamics // *Nucl. Phys. B.* 1973. V. 65. P. 381.
137. *'t Hooft G., Veltman M. J. G.* Scalar One-Loop Integrals // *Nucl. Phys. B.* 1979. V. 153. P. 365.
138. *Carloni Calame C. M., Passera M., Trentadue L., Venanzoni G.* A New Approach to Evaluate the Leading Hadronic Corrections to the Muon $g-2$ // *Phys. Lett. B.* 2015. V. 746. P. 325.
139. *Abbiendi G. et al.* Measuring the Leading Hadronic Contribution to the Muon $g-2$ via μe Scattering // *Eur. Phys. J. C.* 2017. V. 77. P. 139.
140. *Pietrzyk B.* High Precision Measurements of the Luminosity at LEP // *Proc. of the Tennessee Intern. Symp. on Radiative Corrections: Status and Outlook, Gatlinburg, Tennessee, June 27–July 1, 1994.* Singapore: World Sci., 1995.
141. *Decamp D. et al. (ALEPH Collab.).* Determination of the Number of Light Neutrino Species // *Phys. Lett. B.* 1989. V. 231. P. 519.
142. *Ward B. F. L., Jadach S., Placzek W., Skrzypek M., Yost S. A.* Path to the 0.01% Theoretical Luminosity Precision Requirement for the FCC-ee (and ILC). arXiv:1902.05912 [hep-ph].
143. *Fadin V. S., Kuraev E. A., Lipatov L. N., Merenkov N. P., Trentadue L.* Generalized Eikonal Representation of the Small Angle e^+e^- Scattering Amplitude at High Energy // *Phys. At. Nucl.* 1993. V. 56. P. 1537.
144. *Jadach S., Richter-Was E., Ward B. F. L., Was Z.* Analytical $O(\alpha)$ Distributions for Bhabha Scattering at Low Angles // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 253. P. 469.
145. *Budny R.* Weak Effects in $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ // *Phys. Lett. B.* 1975. V. 58. P. 338.

146. *Bohm M., Denner A., Hollik W.* Radiative Corrections to Bhabha Scattering at High-Energies. 1. Virtual and Soft Photon Corrections // Nucl. Phys. B. 1988. V.304. P.687.
147. *Bardin D.Y., Hollik W., Riemann T.* Bhabha Scattering with Higher Order Weak Loop Corrections // Z. Phys. C. 1991. V.49. P.485.
148. *Beenakker W., Berends F.A., van der Marck S.C.* Small Angle Bhabha Scattering // Nucl. Phys. B. 1991. V.355. P.281.
149. *Cacciari M., Deandrea A., Montagna G., Nicosini O., Trentadue L.* Bhabha Scattering at LEP: Small Angle // Phys. Lett. B. 1991. V.271. P.431.
150. *Caffo M., Czyz H., Remiddi E.* Bhabha Scattering at High-Energy // Nuovo Cim. A. 1992. V.105. P.277.
151. *Bjoerkevold K.S., Osland P., Faeldt G.* Two Loop Ladder Diagram Contributions to Bhabha Scattering. 2: Asymptotic Results for High Energies // Nucl. Phys. B. 1992. V.386. P.303.
152. *Beenakker W., Pietrzyk B.* Contribution of Terms Containing Z Boson Exchange to the Luminosity Measurements at LEP // Phys. Lett. B. 1992. V.296. P.241.
153. *Beenakker W., Pietrzyk B.* Bhabha Scattering at Very Small Angles at LEP // Phys. Lett. B. 1993. V.304. P.366.
154. *Cacciari M., Montagna G., Nicosini O., Piccinini F.* SABSPV: A Monte Carlo Integrator for Small Angle Bhabha Scattering // Comp. Phys. Commun. 1995. V.90. P.301.
155. *Redhead M.L.G.* Radiative Corrections to the Scattering of Electrons and Positrons by Electrons // Proc. Roy. Soc. A. 1953. V.220. P.219.
156. *Polovin R.V.* Radiative Corrections to the Scattering of Electrons by Electrons and Positrons // Sov. Phys. JETP. 1956. V.4. P.385.
157. *Berends F.A., Gaemers K.J.F., Gastmans R.* Hard Photon Corrections for Bhabha Scattering // Nucl. Phys. B. 1974. V.68. P.541.
158. *Actis S., Arbutov A., Balossini G. et al.* Quest for Precision in Hadronic Cross Sections at Low Energy: Monte Carlo Tools vs. Experimental Data // Eur. Phys. J. C. 2010. V.66. P.585.
159. *Eidelman S., Jegerlehner F.* Hadronic Contributions to $g-2$ of the Leptons and to the Effective Fine Structure Constant $\alpha(M(z)^2)$ // Z. Phys. C. 1995. V.67. P.585.
160. *Kuraev E.A., Lipatov L.N., Merenkov N.P.* High Energy Behavior of Total Cross-Sections for e^+e^- Scattering and the Slope at q -Squared=0 of the Dirac Form-Factor // Phys. Lett. B. 1973. V.47. P.33.
161. *Cheng H., Wu T.T.* High-Energy Collision Processes in Quantum Electrodynamics. II // Phys. Rev. 1969. V.182. P.1868.
162. *Gorshkov V.G.* Electrodynamical Processes in Opposed High-Energy Particle Beams // Usp. Fiz. Nauk. 1973. V.110. P.45.
163. *Barbieri R., Mignaco J.A., Remiddi E.* Electron Form-Factors up to Fourth Order. 1 // Nuovo Cim. A. 1972. V.11. P.824.
164. *Barbieri R., Mignaco J.A., Remiddi E.* Electron Form-Factors up to Fourth Order. 2 // Ibid. P.865.

165. *Akushevich I., Arbutov A., Kuraev E.* Compton Tensor with Heavy Photon in the Case of Longitudinally Polarized Fermion // *Phys. Lett. B.* 1998. V.432. P. 222.
166. *Vermaseren J.A.M.* The FORM Project // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2008. V.183. P. 19.
167. *Kuipers J., Ueda T., Vermaseren J.A.M., Vollinga J.* FORM Version 4.0 // *Comp. Phys. Commun.* 2013. V. 184. P. 1453.
168. *Cheng H., Wu T.T.* Expanding Protons: Scattering at High Energies. Cambridge, USA, 1987.
169. *Baier V.N., Kuraev E.A., Fadin V.S., Khoze V.A.* Inelastic Processes in Quantum Electrodynamics at High Energies // *Phys. Rep.* 1981. V. 78. P. 293.
170. *Budnev V.M., Ginzburg I.F., Meledin G.V., Serbo V.G.* The Two Photon Particle Production Mechanism. Physical Problems. Applications. Equivalent Photon Approximation // *Phys. Rep.* 1975. V. 15. P. 181.
171. *Merenkov N.P.* Production of Hard e^+e^- Pairs in ep Collisions at High Energies // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1989. V. 50. P. 469.
172. *Akhmetshin R.R. et al.* Measurement of Phi Meson Parameters with CMD-2 Detector at VEPP-2M Collider // *Phys. Lett. B.* 1995. V. 364. P. 199.
173. *Eidelman S.* Physics at VEPP-2000 // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2006. V. 162. P. 323.
174. *Aloisio A. et al.* KLOE, A General Purpose Detector for DAΦNE. Preprint LNF-92/019 (IR); also in the DAΦNE Physics Handbook. 1993. V. 2.
175. *Franzini P.* The Muon Gyromagnetic Ratio and R_H at DAΦNE // *The Second DAΦNE Physics Handbook / Eds.: L.Maiani, G.Pancheri, N.Paver.* 1995. V. 2. P. 471.
176. *Ni H.L. et al.* The Luminosity Monitor of BES // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1993. V. 336. P. 542.
177. *Olsen S.L.* Status of BEPC-II and BES-III // *AIP Conf. Proc.* 2009. V. 1182. P. 402.
178. *Berends F.A., Kleiss R., Jadach S.* Radiative Corrections to Muon Pair and Quark Pair Production in Electron-Positron Collisions in the $Z(0)$ Region // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 202. P. 63.
179. *Arbutov A.B., Bardin D.Y., Leike A.* Analytic Final State Corrections with Cut for $e^+e^- \rightarrow$ Massive Fermions // *Mod. Phys. Lett. A.* 1992. V. 7. P. 2029; Erratum // *Mod. Phys. Lett. A.* 1994. V. 9. P. 1515.
180. *Khriplovich I.B.* Charge Asymmetry of Muon Angular Distribution in $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Process // *Yad. Fiz.* 1973. V. 17. P. 576.
181. *Eidelman S.I., Kuraev E.A., Panin V.S.* Processes $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma, \mu^+\mu^-\gamma, \gamma\gamma\gamma$ with Emission of Final Particles at Large Angles // *Nucl. Phys. B.* 1979. V. 148. P. 245.
182. *Bardin D.Y., Kalinovskaya L.* QED Corrections for Polarized Elastic μe Scattering. hep-ph/9712310.
183. *Berends F.A., Gaemer K.J.F., Gastmans R.* Hard Photon Corrections for the Process $e^+e^- \rightarrow \mu^\pm\mu^\mp$ // *Nucl. Phys. B.* 1973. V. 57. P. 381.
184. *Kuraev E.A., Meledin G.V.* QED Distributions for Hard Photon Emission in $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ // *Nucl. Phys. B.* 1977. V. 122. P. 485.

185. *Terentiev M. V.* Double-Logarithm Asymptotics of the $e^+ + e^- \rightarrow 3\gamma$ Annihilation // *Yad. Fiz.* 1969. V. 9. P. 1212.
186. *Berends F. A., Gastmans R.* Hard Photon Corrections for $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ // *Nucl. Phys. B.* 1973. V. 61. P. 414.
187. *Eidelman S. I., Kuraev E. A.* e^+e^- Annihilation into Two and Three Photons at High Energy // *Nucl. Phys. B.* 1978. V. 143. P. 353.
188. *Berends F. A., Kleiss R., De Causmaecker P. et al.* Multiple Bremsstrahlung in Gauge Theories at High Energies. 2. Single Bremsstrahlung // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 206. P. 61.
189. *Gamow G.* Zur Quantentheorie des Atomkernes // *Z. Phys.* 1928. V. 51. P. 204.
190. *Sommerfeld A.* Atombau und Spektrallinien. Bd. 2. Braunschweig: Vieweg, 1939.
191. *Sakharov A. D.* Interaction of an Electron and Positron in Pair Production // *Sov. Phys. Usp.* 1991. V. 34. P. 375.
192. *Todorov I. T.* Quasipotential Equation Corresponding to the Relativistic Eikonal Approximation // *Phys. Rev. D.* 1971. V. 3. P. 3251.
193. *Fadin V. S., Khoze V. A.* Production of a Pair of Heavy Quarks in e^+e^- Annihilation in the Threshold Region // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1988. V. 48. P. 309.
194. *Fadin V. S., Khoze V. A., Sjostrand T.* On the Threshold Behavior of Heavy Top Production // *Z. Phys. C.* 1990. V. 48. P. 613.
195. *Bardin D. Y., Beenakker W., Denner A.* The Coulomb Singularity in Off-Shell W Pair Production // *Phys. Lett. B.* 1993. V. 317. P. 213.
196. *Yoon J. H., Wong C. Y.* Relativistic Modification of the Gamow Factor // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 61. P. 044905.
197. *Yoon J. H., Wong C. Y.* Relativistic Generalization of the Gamow Factor for Fermion Pair Production or Annihilation // *J. Phys. G.* 2005. V. 31. P. 149.
198. *Solovtsova O. P., Chernichenko Yu. D.* Threshold Resummation S -Factor in QCD: The Case of Unequal Masses // *Phys. At. Nucl.* 2010. V. 73. P. 1612.
199. *Arbuzov A. B.* On a Novel Equal Time Relativistic Quasipotential Equation for Two Scalar Particles // *Nuovo Cim. A.* 1994. V. 107. P. 1263.
200. *Mo L. W., Tsai Y. S.* Radiative Corrections to Elastic and Inelastic ep and μp Scattering // *Rev. Mod. Phys.* 1969. V. 41. P. 205.
201. *Spiesberger H. et al.* Radiative Corrections at HERA // *Physics at HERA / Eds.: W. Buchmüller, G. Ingelman.* Hamburg: DESY, 1991.
202. *Akhundov A. A., Bardin D. Y., Kalinovskaya L., Riemann T.* Model Independent QED Corrections to the Process $ep \rightarrow eX$ // *Fortsch. Phys.* 1996. V. 44. P. 373.
203. *Jadach S., Placzek W., Jezabek M.* How to Handle QED Bremsstrahlung Effects at HERA by Photon Tagging // *Phys. Lett. B.* 1990. V. 248. P. 417.
204. *Bardin D. Y., Kalinovskaya L., Riemann T.* Deep Inelastic Scattering with Tagged Photons at HERA // *Z. Phys. C.* 1997. V. 76. P. 487.
205. *Ahmed T. et al. (H1 Collab.).* Experimental Study of Hard Photon Radiation Processes at HERA // *Z. Phys. C.* 1995. V. 66. P. 529.
206. *Favart L., Gruwe M., Marage P. et al.* On the Possibility of Measuring $F(L)(x, Q^2)$ at HERA Using Radiative Events // *Z. Phys. C.* 1996. V. 72. P. 425.

207. *Aktas A. et al. (H1 Collab.)*. Measurement of the Proton Structure Function F^2 at Low Q^2 in QED Compton Scattering at HERA // *Phys. Lett. B*. 2004. V. 598. P. 159.
208. *Feynman R.P.* Photon–Hadron Interactions. Reading, Massachusetts: W.A. Benjamin, Inc., 1972.
209. *Merenkov N.P.* A Study of the Process of Emission of Two Hard Photons in ep Collisions at High Energies // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1988. V. 48. P. 1073.
210. *Abramowicz H., Levy A.* The ALLM Parameterization of $\sigma(\text{tot})(\gamma^*p)$: An Update. Preprint DESY-97-251; hep-ph/9712415.
211. *Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A.* Photon Bremsstrahlung in Collisions of High-Energy Electrons // *Sov. Phys. JETP*. 1966. V. 24. P. 760.
212. *Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A.* Radiation Effects in Experiments with Colliding Electron Beams // *Sov. Phys. Dokl.* 1967. V. 12. P. 464.
213. *Catani S., Trentadue L.* Fermion Pair Exponentiation in QED // *JETP Lett.* 1990. V. 51. P. 83.
214. *Dolinsky S.I. et al.* Summary of Experiments with the Neutral Detector at e^+e^- Storage Ring VEPP-2M // *Phys. Rep.* 1991. V. 202. P. 99.
215. *Binner S., Kuhn J.H., Melnikov K.* Measuring $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons})$ Using Tagged Photon // *Phys. Lett. B*. 1999. V. 459. P. 279.
216. *Arbuzov A.B., Bytev V.V., Kuraev E.A.* Radiative Muon Pair Production in High-Energy Electron Positron Annihilation Process // *JETP Lett.* 2004. V. 79. P. 593.
217. *Arbuzov A.B., Bartos E., Bytev V.V., Kuraev E.A., Silagadze Z.K.* High Accuracy Description of Radiative Return Production of Low-Mass Muon and Pion Pairs at e^+e^- -Colliders // *Ibid.* V. 80. P. 678.
218. *Tanabashi M. et al. (Particle Data Group)*. Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D*. 2018. V. 98. P. 030001.
219. *Levine I. et al. (TOPAZ Collab.)*. Measurement of the Electromagnetic Coupling at Large Momentum Transfer // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 78. P. 424.
220. *Acciarri M. et al. (L3 Collab.)*. Measurement of the Running of the Fine Structure Constant // *Phys. Lett. B*. 2000. V. 476. P. 40.
221. *Abbiendi G. et al. (OPAL Collab.)*. Measurement of the Running of the QED Coupling in Small-Angle Bhabha Scattering at LEP // *Eur. Phys. J. C*. 2006. V. 45. P. 1.
222. *Martin A.D., Roberts R.G., Stirling W.J. et al.* Parton Distributions Incorporating QED Contributions // *Eur. Phys. J. C*. 2005. V. 39. P. 155.
223. *Aivazis M.A.G., Collins J.C., Olness F.I., Tung W.K.* Leptoproduction of Heavy Quarks. 2. A Unified QCD Formulation of Charged and Neutral Current Processes from Fixed Target to Collider Energies // *Phys. Rev. D*. 1994. V. 50. P. 3102.
224. *Boos E. et al. (CompHEP Collab.)*. CompHEP 4.4: Automatic Computations from Lagrangians to Events // *Nucl. Instr. Meth. A*. 2004. V. 534. P. 250.
225. *Pukhov A. et al.* CompHEP: A Package for Evaluation of Feynman Diagrams and Integration over Multi-Particle Phase Space. User's Manual for Version 33. arXiv:hep-ph/9908288.
226. *Scheck F.* Muon Physics // *Phys. Rep.* 1978. V. 44. P. 187.
227. *Fetscher W., Gerber H.J.* Precision Measurements in Muon and Tau Decays // *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* 1995. V. 14. P. 657.

228. *Fetscher W., Gerber H.J., Johnson K.F.* Muon Decay: Complete Determination of the Interaction and Comparison with the Standard Model // *Phys. Lett. B.* 1986. V. 173. P. 102.
229. *Bennett G. W. et al. (Muon $g-2$ Collab.).* Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 73. P. 072003.
230. *Barczyk A. et al. (FAST Collab.).* Measurement of the Fermi Constant by FAST // *Phys. Lett. B.* 2008. V. 663. P. 172.
231. *Chitwood D. B. et al. (MuLan Collab.).* Improved Measurement of the Positive Muon Lifetime and Determination of the Fermi Constant // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 032001.
232. *MacDonald R. P. et al. (TWIST Collab.).* A Precision Measurement of the Muon Decay Parameters ρ and δ // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 032010.
233. *Jamieson B. et al.* Measurement of $P(\mu)\xi$ in Polarized Muon Decay // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 072007.
234. *Musser J. R. et al. (TWIST Collab.).* Measurement of the Michel Parameter ρ in Muon Decay // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. P. 101805.
235. *Danneberg N. et al.* Muon Decay: Measurement of the Transverse Polarization of the Decay Positrons and Its Implications for the Fermi Coupling Constant and Time Reversal Invariance // *Ibid.* P. 021802.
236. *Webber D. M. et al. (MuLan Collab.).* Measurement of the Positive Muon Lifetime and Determination of the Fermi Constant to Part-per-Million Precision // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. P. 041803.
237. *Lauss B.* Fundamental Measurements with Muons — View from PSI // *Nucl. Phys. A.* 2009. V. 827. P. 401C.
238. *Okada Y., Okumura K.-i., Shimizu Y.* $\mu \rightarrow e\gamma$ and $\mu \rightarrow 3e$ Processes with Polarized Muons and Supersymmetric Grand Unified Theories // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 61. P. 094001.
239. *Bayes R. et al. (TWIST Collab.).* Experimental Constraints on Left-Right Symmetric Models from Muon Decay // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. P. 041804.
240. *van Ritbergen T., Stuart R.G.* On the Precise Determination of the Fermi Coupling Constant from the Muon Lifetime // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 564. P. 343.
241. *Berman S. M., Sirlin A.* Some Considerations on the Radiative Corrections to Muon and Neutron Decay // *Ann. Phys.* 1962. V. 20. P. 20.
242. *Nakamura K. et al. (Particle Data Group).* Review of Particle Physics // *J. Phys. G.* 2010. V. 37. P. 075021.
243. *Marciano W. J., Sirlin A.* Electroweak Radiative Corrections to τ Decay // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 61. P. 1815.
244. *Sirlin A.* Radiative Corrections in the $SU(2)-L \times U(1)$ Theory: A Simple Renormalization Framework // *Phys. Rev. D.* 1980. V. 22. P. 971.
245. *Marciano W. J.* Fermi Constants and New Physics // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 093006.
246. *Kinoshita T., Sirlin A.* Radiative Corrections to Fermi Interactions // *Phys. Rev.* 1959. V. 113. P. 1652.

247. *Behrends R. E., Finkelstein R. J., Sirlin A.* Radiative Corrections to Decay Processes // *Phys. Rev.* 1956. V. 101. P. 866.
248. *Berman S. M.* Radiative Corrections to Muon and Neutron Decay // *Phys. Rev.* 1958. V. 112. P. 267.
249. *Marciano W. J., Marques G. C., Papanicolaou N.* On Infrared Problems in Muon Decay // *Nucl. Phys. B.* 1975. V. 96. P. 237.
250. *Fischer M., Groote S., Korner J. G., Mauser M. C.* Leptonic μ and τ Decays: Mass Effects, Polarization Effects and $O(\alpha)$ Radiative Corrections // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 113008.
251. *Nir Y.* The Mass Ratio $M(C)/M(B)$ in Semileptonic B Decays // *Phys. Lett. B.* 1989. V. 221. P. 184.
252. *Pak A., Czarnecki A.* Mass Effects in Muon and Semileptonic $b \rightarrow c$ Decays // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100. P. 241807.
253. *Beltrami I. et al.* Muon Decay: Measurement of the Integral Asymmetry Parameter // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 194. P. 326.
254. *Arbuzov A., Czarnecki A., Gaponenko A.* Muon Decay Spectrum: Leading Logarithmic Approximation // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 113006.
255. *Bartos E., Kuraev E. A., Secansky M.* Radiative Corrections to Muon Decay in Leading and Next to Leading Approximation for Electron Spectrum // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2009. V. 6. P. 365.
256. *Anastasiou C., Melnikov K., Petriello F.* The Electron Energy Spectrum in Muon Decay through $O(\alpha^2)$ // *JHEP.* 2007. V. 0709. P. 014.
257. *van Ritbergen T., Stuart R. G.* Complete 2-Loop Quantum Electrodynamics Contributions to the Muon Lifetime in the Fermi Model // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82. P. 488.
258. *Steinhauser M., Seidensticker T.* Second Order Corrections to the Muon Lifetime and the Semileptonic B Decay // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 467. P. 271.
259. *Roos M., Sirlin A.* Remarks on the Radiative Corrections of Order Alpha-Squared to Muon Decay and the Determination of $g(\mu)$ // *Nucl. Phys. B.* 1971. V. 29. P. 296.
260. *Michel L.* Interaction between Four Half Spin Particles and the Decay of the μ Meson // *Proc. Phys. Soc. A.* 1950. V. 63. P. 514.
261. *Bouchiat C., Michel L.* Theory of μ -Meson Decay with the Hypothesis of Nonconservation of Parity // *Phys. Rev.* 1957. V. 106. P. 170.
262. *Kinoshita T., Sirlin A.* Polarization of Electrons in Muon Decay with General Parity-Nonconserving Interactions // *Ibid.* V. 108. P. 844.
263. *Gaponenko A. et al. (TWIST Collab.).* Measurement of the Muon Decay Parameter Delta // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 071101.
264. *Davydychev A. I., Schilcher K., Spiesberger H.* Hadronic Corrections at $O(\alpha^2)$ to the Energy Spectrum of Muon Decay // *Eur. Phys. J. C.* 2001. V. 19. P. 99.
265. *Sachs A. M., Sirlin A.* // *Muon Physics* / Ed. by C. Wu and V. Hughes. New York: Acad. Press, 1977. V. 2. P. 49.
266. *Quraan M. et al.* A Precision Measurement of Muon Decay // *Nucl. Phys. A.* 2000. V. 663. P. 903.

267. *Rodning N. L. et al.* TWIST — The TRIUMF Weak Interaction Symmetry Test: The Michel Parameters from μ^+ Decay // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2001. V. 98. P. 247.
268. *Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Merenkov N. P., Makhaldiani N. V.* Five Lepton Decay Modes of μ and τ Mesons // JETP Lett. 1993. V. 57. P. 758.
269. *Fael M., Greub C.* Next-to-Leading Order Prediction for the Decay $\mu \rightarrow e(e^+e^-)\nu\bar{\nu}$ // JHEP. 2017. V. 1701. P. 084.
270. *Pruna G. M., Signer A., Ulrich Y.* Fully Differential NLO Predictions for the Rare Muon Decay // Phys. Lett. B. 2017. V. 765. P. 280.
271. *Arbuzov A. B., Kopylova T. V.* Michel Parameters in Radiative Muon Decay // JHEP. 2016. V. 1609. P. 109.
272. *Fael M., Mercolli L., Passera M.* Radiative μ and τ Leptonic Decays at NLO // JHEP. 2015. V. 1507. P. 153.
273. *Pruna G. M., Signer A., Ulrich Y.* Fully Differential NLO Predictions for the Radiative Decay of Muons and Taus // Phys. Lett. B. 2017. V. 772. P. 452.
274. *Abdesselam A. et al. (Belle Collab.).* Measurement of Michel Parameters ($\bar{\eta}, \xi\kappa$) in the Radiative Leptonic Decay of τ at Belle // Nucl. Part. Phys. Proc. 2017. V. 287–288. P. 11.
275. *Frléz E. et al.* Design, Commissioning and Performance of the PIBETA Detector at PSI // Nucl. Instr. Meth. A. 2004. V. 526. P. 300.
276. *Barberio E., Was Z.* PHOTOS: A Universal Monte Carlo for QED Radiative Corrections. Version 2.0 // Comp. Phys. Commun. 1994. V. 79. P. 291.
277. *Balossini G., Carloni Calame C. M., Montagna G., Nicosini O., Piccinini F.* Matching Perturbative and Parton Shower Corrections to Bhabha Process at Flavour Factories // Nucl. Phys. B. 2006. V. 758. P. 227.
278. *Barze L., Montagna G., Nason P., Nicosini O., Piccinini F.* Implementation of Electroweak Corrections in the POWHEG BOX: Single W Production // JHEP. 2012. V. 1204. P. 037.
279. *Devoto A., Duke D. W.* Table of Integrals and Formulae for Feynman Diagram Calculations // Nuovo Cim. 1984. V. 7. P. 1–39.
280. *Arbuzov A. B.* Tables of Convolution Integrals. arXiv:hep-ph/0304063.
281. *Arbuzov A. B., Scherbakova E. S.* QED Collinear Radiation Factors in the Next-to-Leading Logarithmic Approximation // Phys. Lett. B. 2008. V. 660. P. 37.
282. *Wolfram S.* Mathematica — A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Pub. Comp. Inc., 1998.
283. *Kolbig K. S., Mignaco J. A., Remiddi E.* On Nielsen's Generalized Polylogarithms and Their Numerical Calculation // BIT Numer. Math. 1970. V. 10. P. 38.
284. *Lewin L.* Polylogarithms and Associated Functions. North-Holland–New York: Elsevier Science, 1981.