

КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Д. В. Наумов *, *В. А. Наумов* **

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	6
КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ПЛОСКОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ	10
Квантовые состояния	10
Плосковолновая теория нейтринных осцилляций в вакууме	12
Неполнота и парадоксы плосковолнового приближения.	
Обзор предлагаемых решений	14
КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В МОДЕЛИ С ВОЛНОВЫМ ПАКЕТОМ	17
Общие свойства волнового пакета	17
Средняя траектория волнового пакета	18
Расплывание волнового пакета	
в конфигурационном пространстве	19
Поперечное расплывание волнового пакета	
ведет к закону обратных квадратов	20
Нековариантный гауссов волновой пакет	22
Теория вакуумных нейтринных осцилляций	
в модели волнового пакета	25
Макроскопическое усреднение вероятности перехода	26
Качественное обсуждение формулы для вероятности осцилляций в модели волнового пакета	28
РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ	32
Определения	32
Средний 4-импульс	37
Волновой пакет для фермиона	39
Перестановочная функция	42
Многopakетные состояния	44

*E-mail: dnaumov@jinr.ru

**E-mail: vnaumov@theor.jinr.ru

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ГАУССОВЫ ПАКЕТЫ	48
Функция $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$	48
Средняя и среднеквадратичная скорости	51
Волновая функция $\psi_G(\mathbf{p}, x)$.	53
Перестановочная функция $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x)$	56
Приближение нерасплывающихся пакетов	57
Эффективные размеры и масса пакета	63
Неопределенности энергии и импульса пакета	64
Область применимости СРГП	66
РАССЕЯНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ	69
Амплитуда рассеяния	71
Число взаимодействий для неколлинеарных столкновений волновых пакетов	72
Релятивистская инвариантность квадрата прицельного параметра	74
МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ	76
Макроскопическая диаграмма общего вида	77
Примеры макродиаграмм	77
Правила Фейнмана	81
Интегралы перекрытия	83
Плосковолновой предел	83
Тензоры перекрытия	84
Факторы, ответственные за баланс энергии-импульса	86
Прицельные точки, геометрические факторы подавления, симметрии и все такое	86
Асимптотические условия	93
Фазовые факторы	100
Объемы перекрытия	100
АМПЛИТУДА ПРОЦЕССА С РОЖДЕНИЕМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНОВ В ИСТОЧНИКЕ И ДЕТЕКТОРЕ И ВИРТУАЛЬНЫМ НЕЙТРИНО	101
Асимптотика амплитуды при больших L	105
Интегрирование по q_0	107
Окончательная формула для амплитуды	114
Эффективный волновой пакет	118
МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКИ РАЗНЕСЕННЫХ СОБЫТИЙ	124
ВЕРОЯТНОСТЬ И СКОРОСТЬ СЧЕТА	125
Макроскопическое усреднение	125
ФУНКЦИЯ ДЕКОГЕРЕНТНОСТИ	134

Синхронизированные измерения	135
Диагональная функция декогерентности	137
Недиагональная функция декогерентности	141
Дополнительные методические замечания	144
ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ	146
Как виртуальное нейтрино становится реальным	146
Волновая функция нейтрино и амплитуда процесса	147
Усреднение по ансамблю и роль	
релятивистской ковариантности	147
Вероятность флейворных переходов	149
Наблюдаемость волнового пакета	151
ВЫВОДЫ	153
Приложение 1	
СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ ПЕРЕКРЫТИЯ	159
Общие формулы для $\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}$	159
Обратные тензоры перекрытия $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}$	160
Двухчастичный распад в источнике	163
Квазиупругое рассеяние в детекторе	169
Трехчастичный распад в источнике	180
Приложение 2	
МНОГОМЕРНЫЕ ГАУССОВЫ КВАДРАТУРЫ	182
Приложение 3	
ФАКТОРИЗАЦИЯ АДРОННЫХ БЛОКОВ	184
Приложение 4	
СТАЦИОНАРНАЯ ТОЧКА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ	
КОНФИГУРАЦИИ ИМПУЛЬСОВ ВНЕШНИХ	
ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ	187
Решение Ферро–Тартальи–Кардано в радикалах	189
Решение в тригонометрической форме Виета	190
Корни уравнения (365)	191
Приложение 5	
РАСПЛЫВАНИЕ НЕЙТРИННОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА	
НА СВЕРХДАЛЬНИХ РАССТОЯНИЯХ	191
Приложение 6	
ПРОСТРАНСТВЕННОЕ УСРЕДНЕНИЕ	196
Приложение 7	
КОМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦИЯ ОШИБОК	
И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ФОРМУЛЫ	201
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	202

КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Д. В. Наумов *, *В. А. Наумов* **

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Работа посвящена подробному изложению теории нейтринных осцилляций в рамках квантово-полевой теории возмущений с релятивистскими волновыми пакетами в качестве асимптотически свободных in- и out-состояний. Разработан формализм ковариантного волнового пакета. Формализм применен для вычисления вероятности взаимодействия волновых пакетов, рассеивающихся друг на друге с ненулевым прицельным параметром. Вычислено геометрическое подавление вероятности взаимодействия волновых пакетов для неколлинеарных столкновений. Сформулированы правила Фейнмана для рассеяния волновых пакетов, и вычислена диаграмма достаточно общего вида с макроскопически разнесенными вершинами — «источником» и «детектором». В пространственно-временных областях вблизи этих вершин рождаются заряженные лептоны — ℓ_{α}^{\pm} в «источнике» и ℓ_{β}^{\mp} в «детекторе». Нейтрино рассматривается как виртуальная частица (пропагатор), соединяющая вершины макродиаграммы. Разработан корректный метод макроскопического усреднения, применение которого позволило получить формулу для числа событий, соответствующего макроскопической фейнмановской диаграмме. Получено обобщение стандартной квантово-механической вероятности нейтринных флейворных переходов с учетом продольной дисперсии эффективного волнового пакета нейтрино и конечных временных интервалов активности «источника» и «детектора». Предсказан ряд новых потенциально наблюдаемых эффектов в явлении нейтринных осцилляций.

The article is devoted to a detailed presentation of the theory of neutrino oscillations within the framework of quantum field perturbation theory with relativistic wave packets as asymptotically free external in- and out-states. A formalism of covariant wave packet is developed and applied to calculate the probability of interaction of wave packets scattered on each other with a nonzero impact parameter. The geometric suppression of the probability of interaction of wave packets for noncollinear collisions is calculated. Feynman rules for the wave packet scattering are formulated and a rather general diagram with macroscopically separated vertices (called “source” and “detector”) is calculated. In the space-time regions around these vertices, the charged leptons are born — ℓ_{α}^{\pm} in the “source” and ℓ_{β}^{\mp} in the “detector”. A neutrino is treated as a virtual particle (propagator) connecting the vertices of the macrodiagram. A proper method of macroscopic averaging is developed, the application of which makes it possible to derive a formula for the number

*E-mail: dnaumov@jinr.ru

**E-mail: vnaumov@theor.jinr.ru

of events, corresponding to the macroscopic Feynman diagram. A generalization of the standard quantum-mechanical probability of neutrino flavor transitions is obtained taking into account the longitudinal dispersion of the effective wave packet of neutrinos and finite time intervals of activity of the “source” and “detector”. A number of new and potentially measurable effects in the neutrino oscillation phenomenon are predicted.

PACS: 13.15.+g; 14.60.Pq; 14.60.St

ВВЕДЕНИЕ

Нейтрино — легкий фермион с нулевым электрическим зарядом, участвующий в слабых взаимодействиях. Эта частица была предложена В. Паули в 1930 г. для спасения закона сохранения энергии и объяснения «неправильной» статистики в ядерных β -распадах и вскоре была использована Э. Ферми при построении первой количественной теории β -распада [1] в правильном предположении, что нейтрино не является составной частью ядра (как считал Паули), а рождается при его распаде вместе с β -частицей*. С тех пор были обнаружены три аромата (флейвора) нейтрино $\nu_\alpha = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, ассоциируемые с соответствующими заряженными лептонами $\ell_\alpha = (e, \mu, \tau)$: рождение лептона ℓ_α^+ в процессе слабого взаимодействия всегда сопровождается рождением нейтрино ν_α того же флейвора α , что можно сформулировать как закон сохранения лептонного числа L_α .

По аналогии с осцилляциями нейтральных каонов $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ Б. Понтекорво предположил существование осцилляций аромата нейтрино [4, 5] еще в конце 1950-х гг. Эта догадка была убедительно подтверждена в экспериментах с солнечными [6–8], атмосферными [9, 10], ускорительными [10, 11] и реакторными [12–15] нейтрино и антинейтрино. Нейтринные осцилляции, или флейворные переходы, — это квантовое явление квазипериодического изменения флейвора нейтрино $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$ со временем. Природа этого явления, нарушающего сохранение лептонных чисел, объясняется неэквивалентностью собственных состояний нейтрино с определенным флейвором $|\nu_\alpha\rangle$ и состояний с определенными массами $|\nu_k\rangle$ ($k = 1, 2, 3$), ненулевой разницей масс последних и гипотезой о том, что в процессах слабого взаимодействия нейтрино участвует как когерентная суперпозиция массовых состояний

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^3 V_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle. \quad (1)$$

Здесь $V_{\alpha k}$ — элемент унитарной вакуумной матрицы смешивания, называемой также матрицей Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты (ПМНС) [5, 16]. Временная эволюция состояния (1) приводит к осцилляторной зависимости

*Знаменитое письмо Паули опубликовано в [2] с комментариями и интересными историческими подробностями. Предварительное сообщение Ферми было опубликовано в 1933 г. [3].

вероятности обнаружения нейтрино в состоянии с определенным флейвором β спустя время t после рождения состояния $|\nu_\alpha\rangle$. Простейшая квантово-механическая теория осцилляций, основанная на плосковолновом приближении, была впервые сформулирована в работе В. Грибова и Б. Понтекорво [17]. Эта теория оказала большое влияние на исследования в области нейтринной физики и развивалась в последующие годы многими авторами (см., например, [18–20] и обзоры [21–31], обстоятельно отражающие развитие эксперимента и феноменологии нейтринных осцилляций в вакууме и веществе, а также многочисленные механизмы генерации масс и смешивания нейтрино, которые в данной работе не рассматриваются).

Несмотря на чрезвычайно успешное применение при описании экспериментальных данных, плосковолновое приближение не самосогласованно и приводит к ряду парадоксов, обсуждавшихся в многочисленных работах. Здесь мы укажем обширный, но безусловно не исчерпывающий список работ [32–65], имеющих прямое отношение к предмету данной статьи. Систематическое изложение самой теории, ее критику, обобщения и дальнейшие ссылки можно найти, например, в монографии [66].

В работах [67–72] была указана необходимость описания нейтринных осцилляций в рамках модели с нейтринными волновыми пакетами (см. также [63, 66, 73–79]). Волновой пакет (ВП) — это когерентная суперпозиция волн с импульсами, распределенными вокруг наиболее вероятного значения с определенной «шириной» или дисперсией. ВП локализован в импульсном и конфигурационном пространствах. Теория нейтринных осцилляций в модели с ВП помогает решить некоторые парадоксы плосковолнового приближения и предсказывает ряд новых явлений. После пионерских работ [67–72] развитие теории осцилляций в модели с ВП происходило в основном в двух вариантах. В первом формализм развивался в рамках релятивистской квантовой механики и постулировался вид волновой функции нейтрино (см., например, [45, 66, 80]). В втором использовался аппарат квантовой теории поля (КТП) с волновыми пакетами для всех частиц, участвующих в процессах рождения и детектирования нейтрино, кроме собственно нейтрино, которое рассматривается как виртуальная частица [32–48, 51–58, 60–65]. Вид волнового пакета нейтрино в этой парадигме следует из формализма. В обоих подходах предсказываются новые потенциально наблюдаемые эффекты, в основном связанные с потерей когерентности. Интерес к исследованию декогерентности в нейтринных осцилляциях в последние годы значительно возрос в связи с новыми действующими и планируемыми экспериментами, потенциально чувствительными к этим эффектам [81–95].

Основной целью данной работы является подробное и систематическое изучение теории вакуумных нейтринных осцилляций в рамках теории возмущений КТП с релятивистскими ВП в качестве внешних in- и out-состояний, концентрированно изложенной в наших предыдущих работах [57, 58, 96]. Мы

начнем с краткого рассмотрения стандартной квантово-механической теории нейтринных осцилляций в плосковолновом приближении. Этому посвящен разд. 1. Как уже говорилось, квантово-механическая теория нейтринных осцилляций в плосковолновом приближении неполна и противоречива. В п. 1.3 обсуждаются основные причины такого положения дел.

Часть проблем плосковолнового приближения решается в модели с волновым пакетом. Соответствующей теории посвящен разд. 2. Новым в ней является учет расплывания ВП, а также процедура макроскопического усреднения, которая позволяет корректно получить формулу для вероятности осцилляций.

Основная часть работы посвящена построению теории осцилляций нейтрино в рамках квантовой теории поля. Концептуально механизм нейтринных осцилляций в рамках КТП — это следствие интерференции макроскопических фейнмановских диаграмм с ν_i ($i = 1, 2, 3$) в промежуточном состоянии. Перечислим основные этапы и особенности нашего подхода.

1. Задача ставится следующим образом. Существуют две области пространства, разделенные макроскопически большим пространственным интервалом. В этих областях рождаются заряженные лептоны — ℓ_α^+ в «источнике» и ℓ_β^- в «детекторе». «Источник» и «детектор» активны в течение определенных временных интервалов, что отвечает наиболее общей постановке любого осцилляционного эксперимента. Необходимо вычислить число таких событий $N_{\alpha\beta}$ в рамках квантовой теории поля.

2. Очевидно, что число событий $N_{\alpha\beta}$ в детекторе не зависит от системы отсчета, т. е. является релятивистским инвариантом. Поэтому квантовые состояния, отвечающие внешним частицам, должны преобразовываться ковариантным образом при преобразованиях Лоренца. Из этого с необходимостью следует, что ВП, отвечающий любой из внешних частиц, должен быть ковариантным. В разд. 3 строится теория ковариантного ВП и детально исследуются его свойства. В п. 3.5 исследуются многопакетные состояния для фермионов и бозонов. В частности, показывается, что если ВП, отвечающие тождественным частицам, разделены достаточно большими пространственно-временными интервалами, то в такой системе отсутствует бозе-эйнштейновская конденсация для бозонов и перестает действовать принцип запрета Паули для фермионов. Этот интуитивно очевидный результат невозможно понять в рамках модели с плоскими волнами.

3. В качестве рабочей модели для дальнейших вычислений разработана модель релятивистского гауссова ВП (РВП). Соответствующая теория изложена в разд. 4. Основным результатом этого рассмотрения является демонстрация того, что традиционно используемый гауссов ВП вида $\propto e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2/4\sigma_p^2}$ является нерелятивистским приближением РВП.

4. В качестве первого применения формализма в разд. 5 решена задача о рассеянии двух ВП. Рассмотрен общий случай рассеяния ВП с ненулевым

прицельным параметром. Показано, что число взаимодействий двух ВП может быть представлено в виде произведения трех множителей: сечения с размерностью площади, светимости с размерностью обратной площади и безразмерного фактора, подавляющего число взаимодействий при больших прицельных параметрах. Этот результат, согласующийся с интуитивным ожиданием, демонстрирует предсказательную силу теории.

5. В разд. 6 и 7 рассматривается «макроскопическая» диаграмма, в которой вершины, называемые «источником» и «детектором» нейтрино, разделены макроскопическим расстоянием; начальные и конечные частицы описываются построенными ковариантными ВП, а нейтрино — пропагатором. В «источнике» и «детекторе» рождаются заряженные лептоны ℓ_α^+ и ℓ_β^- соответственно. Формулируются правила Фейнмана для диаграмм такого типа, и вычисляется амплитуда интересующего нас процесса. В таком подходе не предполагается никакого вида ВП виртуального нейтрино — вместо этого используется причинный фермионный пропагатор, возникающий автоматически в рамках КТП. Ниже показано, что асимптотическое поведение пропагатора при больших расстояниях между вершинами диаграммы воспроизводит свойства волновой функции свободного нейтрино; другими словами, на больших расстояниях от источника виртуальное нейтрино в первом приближении ведет себя как свободный волновой пакет частицы на массовой поверхности.

6. В разд. 8 вычисляется микроскопическая вероятность $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$. Поскольку каждый внешний (in или out) ВП характеризуется средней координатой \mathbf{x}_κ в момент времени x_κ^0 , средним 4-импульсом p_κ , а также дисперсией импульса σ_κ , то $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ параметрически зависит от набора всех этих параметров, $\{x_\kappa, p_\kappa, \sigma_\kappa\}$.

В разд. 9 проводится макроскопическое усреднение по параметрам $\{\mathbf{x}_\kappa, p_\kappa\}$, что позволяет найти число событий $N_{\alpha\beta}$ с ℓ_α^+ в источнике и ℓ_β^- в детекторе. Понятия «источник» и «детектор» обретают теперь свой смысл как области пространства-времени вокруг так называемых прицельных точек X_s и X_d , определяемых параметрами $\{x_\kappa, p_\kappa, \sigma_\kappa\}$, в вершинах диаграммы, в которых рождаются лептоны ℓ_α^+ и ℓ_β^- соответственно. Изучаются условия, при которых $N_{\alpha\beta}$ может быть представлено в виде интеграла по объемам источника и детектора от произведения трех сомножителей $\Phi_\nu(E_\nu, L) \times \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D}) \times \sigma(E_\nu)$. Здесь $\Phi_\nu(E_\nu, L)$ — поток безмассовых нейтрино, проходящий от источника в детектор (показывается, что он ведет себя как $1/L^2$), $\sigma(E_\nu)$ — сечение рассеяния безмассового нейтрино в детекторе, а множитель $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, зависящий от флейворных индексов α и β , энергии нейтрино, эффективного расстояния между источником и детектором и от дисперсии энергии-импульса нейтрино \mathcal{D} , является обобщением квантово-механической вероятности нейтринных осцилляций. Далее изучается полученная «вероятность» осцилляций в разных режимах постановки эксперимента. При определенных условиях полученная формула для веро-

ятности осцилляций численно близка к формуле плосковолновой квантово-механической модели. Однако квантово-полевая формула предсказывает ряд новых эффектов, таких как потеря когерентности, зависимость от временных окон активности источника и детектора и многое другое.

В разд. 10 мы отдельно останавливаемся на обсуждении функции декогерентности, подавляющей интерференционные вклады в вероятности осцилляций.

Выводы работы формулируются в разд. 12.

Для удобства читателя громоздкие математические подробности вычисления собраны в нескольких приложениях. В работе используется естественная система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Там, где это не может привести к недопониманию, применяются сокращения типа $\int dx \dots$ вместо $\int d^4x \dots$ в интегралах по пространству Минковского (всюду в работе используется метрика Фейнмана) и $\int dx \dots$ вместо $\int d^3x \dots$ в интегралах по 3-мерному евклидову пространству. Хотя дальнейшее изложение не зависит от числа активных флейворов, в конкретных примерах мы будем считать, что их три.

1. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ПЛОСКОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

1.1. Квантовые состояния. Начнем обсуждение квантово-механической теории нейтринных осцилляций с того, что напомним основные понятия квантовой механики, важные для этой задачи, введя заодно используемые далее определения. Начнем с одномерного случая и свободной теории.

В гильбертовом пространстве квантовая система описывается абстрактным состоянием $|\psi(t)\rangle$, зависящим от времени. Эволюция этого состояния во времени дается уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

где $\hat{H} = \hat{H}_0$ — гамильтониан. Пусть $|p\rangle$ есть собственное состояние свободного гамильтониана \hat{H}_0 с собственным значением E_p :

$$\hat{H}_0 |p\rangle = E_p |p\rangle. \quad (3)$$

Пусть $|x\rangle$ будет собственным состоянием оператора координаты \hat{X} с собственным значением x :

$$\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle. \quad (4)$$

Нормировки состояний: $\langle q|p\rangle = 2\pi\delta(p-q)$, $\langle y|x\rangle = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — обычная δ -функция Дирака. Квантовое состояние $|\psi(t)\rangle$ можно характеризовать либо координатным распределением $\psi_x(t, x)$ в координатном представлении, либо импульсным $\psi_p(t, p)$ в импульсном представлении для свободного

или полного гамильтониана:

$$|\psi(t)\rangle = \int dx \psi_x(t, x)|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \psi_p(t; p)|p\rangle. \quad (5)$$

Состояния $|x\rangle$, $|p\rangle$ связаны между собой таким образом:

$$|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx} |p\rangle, \quad |p\rangle = \int dx e^{+ipx} |x\rangle. \quad (6)$$

С учетом (5), (6) очевидна связь

$$\psi_x(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \psi_p(t, p), \quad \psi_p(t, p) = \int dx e^{-ipx} \psi_x(t, x). \quad (7)$$

Формальное решение (2)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle \quad (8)$$

с учетом (5) дает

$$|\psi(t)\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iE_p t} \psi_p(0, p) |0, p\rangle = \int dx \psi_x(0, x) |t; x\rangle, \quad (9)$$

где

$$|t; x\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} |x\rangle. \quad (10)$$

При выводе (9) использовали (6), (7):

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iE_p t} \psi_p(0, p) |p\rangle &= e^{-i\hat{H}_0 t} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_p(0, p) |p\rangle = \\ &= e^{-i\hat{H}_0 t} \int \frac{dp dx}{2\pi} e^{+ipx} \psi_p(0, p) |x\rangle = \int dx \psi_x(0, x) |t, x\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Если $\psi_p(0, p) = 2\pi\delta(p - k)$, где k — импульс, от которого функция $\psi_p(0, p)$ может зависеть как от параметра, то решение (9) приобретает хорошо знакомый вид:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_k t} |k\rangle = \int dx e^{-iE_k t + ikx} |x\rangle, \quad (12)$$

т. е. эволюция во времени состояния со строго определенным импульсом описывается фактором $e^{-iE_k t}$, умноженным на состояние с определенным импульсом $|k\rangle$ в импульсном представлении или суперпозицией состояний с определенной координатой $|x\rangle$ с весовым множителем $e^{-iE_k t + ikx}$. Это решение известно как плоская волна.

1.2. Плосковолновая теория нейтринных осцилляций в вакууме. Определим «ароматное» состояние (состояние с определенным флейвором) $|\nu_\alpha\rangle$ как когерентную суперпозицию массовых состояний $|\nu_i(p)\rangle$:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i(p)\rangle, \quad (13)$$

где каждое массовое состояние $|\nu_i(p)\rangle$ есть собственный вектор свободного гамильтониана с собственным значением $\sqrt{p^2 + m_i^2}$. Эволюция состояния (13) дается формулой

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i(p)\rangle, \quad (14)$$

где $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$. Предположим, что в каком-то слабом процессе родилась когерентная суперпозиция состояний со строго определенными импульсами (13). Проекция этого состояния на состояние с произвольным ароматом $|\nu_\beta\rangle$ не сводится к $\delta_{\alpha\beta}$:

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* V_{\beta i} e^{-iE_i t}. \quad (15)$$

Соответствующая вероятность флейворного перехода $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$

$$P_{\alpha\beta}(t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \sum_{ij} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j}^* e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (16)$$

Используя далее ультрарелятивистские приближения $E_i - E_j \simeq (m_i^2 - m_j^2)/2p$ и $t = L$, где L — расстояние, пройденное нейтрино за время t , получим хорошо известную формулу

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{ij} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j}^* e^{-i\Delta m_{ij}^2 L/2p} = \sum_{ij} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j}^* e^{-i2\pi L/L_{ij}^{\text{osc}}}, \quad (17)$$

в которой

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 \quad \text{и} \quad L_{ij}^{\text{osc}} = 2\pi \frac{2p}{\Delta m_{ij}^2}.$$

В более развернутом виде формулу (17) можно переписать так:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_j |V_{\alpha j}|^2 |V_{\beta j}|^2 + 2 \sum_{j>i} \left[\text{Re}(V_{\alpha j}^* V_{\beta j} V_{\alpha i} V_{\beta i}^*) \cos\left(\frac{2\pi L}{L_{ji}^{\text{osc}}}\right) + \text{Im}(V_{\alpha j}^* V_{\beta j} V_{\alpha i} V_{\beta i}^*) \sin\left(\frac{2\pi L}{L_{ji}^{\text{osc}}}\right) \right]. \quad (18)$$

В двухнейтринном случае вероятность $P_{\alpha\beta}^{2\nu}(L)$ — это периодическая функция расстояния L с периодом, равным длине L_{12}^{osc} : $P_{\alpha\beta}^{2\nu}(L + L_{12}^{\text{osc}}) = P_{\alpha\beta}^{2\nu}(L)$. В трехнейтринном случае периодичности у вероятностей осцилляций может и не оказаться, за исключением случаев, определяемых специфическими соотношениями осцилляционных длин L_{12}^{osc} , L_{23}^{osc} , L_{13}^{osc} .

Унитарность вакуумной матрицы смешивания приводит к ожидаемому закону сохранения вероятности

$$\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} P_{\alpha\beta} = 1. \quad (19)$$

Отметим, что хотя состояние с определенным ароматом (флейвором), $|\nu_{\alpha}(t)\rangle$, не имеет определенной энергии, его средняя энергия

$$\langle E_{\alpha}(t) \rangle = \langle \nu_{\alpha}(t) | \hat{H} | \nu_{\alpha}(t) \rangle \quad (20)$$

— хорошо определенная сохраняющаяся величина. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle E_{\alpha}(t) \rangle &= \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\alpha j}^* \langle \nu_i(p) | \hat{H} | \nu_j(p) \rangle = \\ &= \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\alpha j}^* \langle \nu_i(p) | E_i | \nu_j(p) \rangle = \\ &= \sum_i |V_{\alpha i}|^2 E_i \simeq p + \sum_i |V_{\alpha i}|^2 \frac{m_i^2}{2p}, \\ \sum_{\alpha} \langle E_{\alpha} \rangle &= \sum_i E_i \simeq 3 \left(p + \sum_i \frac{m_i^2}{2p} \right). \end{aligned}$$

Более того, сохраняется и средняя энергия произвольного «запутанного» состояния, характеризуемого некоторой матрицей плотности $\hat{\rho}(t)$. Действительно, пусть начальное состояние имеет вид

$$\hat{\rho}(0) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\nu_{\alpha}(0)\rangle \langle \nu_{\alpha}(0)|, \quad (21)$$

где w_{α} — вероятность встретить в этом (смешанном) состоянии чистое состояние $|\nu_{\alpha}(0)\rangle$ $\left(\sum_{\alpha} w_{\alpha} = 1 \right)$. Тогда средняя энергия смешанного состояния $\hat{\rho}(t)$

в произвольный момент времени t равна

$$\begin{aligned}\langle E(t) \rangle &= \text{Tr}(\hat{H} \hat{\rho}(t)) = \text{Tr}(\hat{H} e^{-i\hat{H}t} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t}) = \\ &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} \sum_{ij} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} e^{-i(E_i - E_j)t} E_i \text{Tr} |\nu_i(p)\rangle \langle \nu_j(p)| = \\ &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} \sum_i |V_{\alpha i}|^2 E_i = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle E_{\alpha}(t) \rangle.\end{aligned}$$

В частном случае чистого начального состояния $|\nu_{\alpha}(0)\rangle$ получаем, естественно, $\langle E(t) \rangle = \langle E_{\alpha}(t) \rangle$. Если же все чистые состояния в начальной смеси (21) были равновероятны, то средняя энергия

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{3} \sum_{\alpha} \langle E_{\alpha}(t) \rangle = \frac{1}{3} \sum_i \langle E_i \rangle \simeq p + \sum_i \frac{m_i^2}{6p}$$

не зависит от параметров смешивания.

1.3. Неполнота и парадоксы плосковолнового приближения. Обзор предлагаемых решений. Перечислим ключевые предположения и приближения, явно или неявно использованные при выводе формулы (17), описывающей вероятность осцилляций:

- 1) в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует когерентная суперпозиция состояний с определенной массой m_i ($i = 1, 2, 3$), часто называемая состоянием с определенным ароматом $|\nu_{\alpha}\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$, где $V_{\alpha i}$ — матричные элементы унитарной вакуумной матрицы смешивания;
- 2) состояния $|\nu_i\rangle$ обладают определенными импульсами \mathbf{p}_i ;
- 3) все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$);
- 4) нейтрино являются ультррелятивистскими, т. е. $\mathbf{p}^2 \gg \max(m_i^2)$;
- 5) время распространения нейтрино заменяется пройденным расстоянием: $t = L$.

Обсудим критически каждое из этих положений. Предположение 1) о том, что в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует как состояние $|\nu_{\alpha}\rangle$, представляется, на первый взгляд, вполне естественным. Более того, в литературе часто можно встретить утверждение, звучащее как мистическая парадигма, о том, что нейтрино взаимодействует с веществом как флейворное состояние $|\nu_{\alpha}\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$, но между актами взаимодействия распространяется в пространстве как массовое состояние $|\nu_i\rangle = \sum_{\alpha} V_{\alpha i}^* |\nu_{\alpha}\rangle$. Заметим, однако, что лагранжиан взаимодействия массивных нейтрино с лептонами ℓ_{α} ($\alpha = e, \mu, \tau$) в СМ можно записать в терминах как полей $\nu_i(x)$ и $\ell_{\alpha}(x)$, так и полей $\nu_{\alpha}(x)$ и $\ell_i(x) = \sum_{\alpha} V_{\alpha i}^* \ell_{\alpha}(x)$, поскольку лептонный заряженный ток $j_{\ell}^{\mu}(x) = \bar{\nu}_{\alpha}(x) O^{\mu} \ell_{\alpha}(x)$ можно представить в двух совершенно

эквивалентных формах:

$$\sum_{\alpha i} V_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x) O^\mu \ell_\alpha(x) \quad \text{и} \quad \sum_{\alpha i} V_{\alpha i}^* \bar{\nu}_\alpha(x) O^\mu \ell_i(x).$$

Тогда уместно спросить: «Может ли рождаться и взаимодействовать когерентная суперпозиция $|\ell_i\rangle = \sum_{\alpha} V_{\alpha i} |\ell_\alpha\rangle$ (массовое состояние без определенного флейвора) и, как следствие, осциллируют ли заряженные лептоны?» Поскольку экспериментальных свидетельств таких осцилляций мы пока не наблюдаем, следует признать, что заряженные лептоны рождаются, распространяются и взаимодействуют некогерентно, т. е. предположение 1) к заряженным лептонам неприменимо и это требует количественного обоснования.

Обратимся теперь к предположению 2), и рассмотрим в качестве примера распад $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Поскольку состояние $|\nu_\mu\rangle$ не имеет определенной энергии, то по крайней мере у одной из двух других участвующих в распаде частиц энергия тоже не определена. Поскольку же пион и мюон обладают определенными массами, то у одной из этих частиц (или у обеих) нет и определенного импульса. Но тогда и нейтрино не может иметь определенного импульса, что противоречит 2). Еще один аргумент против этого предположения состоит в том, что при полностью определенном импульсе пространственные координаты областей рождения и поглощения нейтрино (источника и детектора), а значит, и расстояние между этими областями, входящее в формулу для вероятности переходов ароматов, полностью неопределенны.

Здесь уместно вспомнить, что нестабильная частица не может обладать определенным 4-импульсом уже потому, что пространственная делокализация такой частицы ограничена величиной порядка ее распадного пробега. Другими словами, неопределенность 4-импульса частицы заведомо не может быть меньше ее распадной ширины. Как следствие, нейтрино, возникающие в результате распадов частиц, тоже не могут иметь определенных импульсов, т. е. предположение 2) может быть разве лишь приближением, адекватность которого может быть проверена только в рамках более общей теории.

Предположение 3), равно как и аналогичное предположение о равенстве энергий, которое встречается в литературе, противоречит релятивистской инвариантности. В самом деле, пусть предположение 3) справедливо в лабораторной системе отсчета K . Но тогда в системе отсчета K' , движущейся относительно K со скоростью \mathbf{v} , уже не только энергии E'_i , но и импульсы \mathbf{p}'_i не равны друг другу, поскольку из преобразований Лоренца следует, что

$$E'_i - E'_j = \Gamma_v (E_i - E_j) \neq 0, \quad \mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j = \Gamma_v (E_j - E_i) \mathbf{v} \neq 0, \quad \Gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (22)$$

Нетрудно видеть, в частности, что $|\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j| \geq |E_i - E_j| \approx |m_i^2 - m_j^2| / (2|\mathbf{p}|)$ при $|\mathbf{v}| \geq 1/\sqrt{2}$. Если скорость системы K' удовлетворяет условию $\Gamma_v \ll$

$\min(E'_i/m_i)$, то нейтрино все еще остаются ультрарелятивистскими в K' , т. е. условие 4) выполняется, но условие 3) нарушается. Разумеется, это нарушение ничтожно, если скорость v мала, а точнее, если $|\mathbf{vp}| \ll |\mathbf{p}|$. В общем же случае, трактуя преобразование Лоренца как активное, заключаем, что условие 3) не может одновременно выполняться для пучков нейтрино, вылетающих из одинаковых, но движущихся с разными скоростями источников.

Условие 4) констатирует: а) массы известных нейтрино чрезвычайно малы (заведомо меньше 1–2 эВ) и б) современные методы детектирования не позволяют зарегистрировать нейтрино с энергией ниже ~ 100 кэВ; так что в нейтринных экспериментах действительно имеют дело исключительно с ультрарелятивистскими нейтрино. Однако это условие не выполняется для реликтовых нейтрино и может оказаться слишком ограничительным при обнаружении (пока гипотетических) тяжелых стерильных нейтрино.

Наконец, обратимся к условию 5). Это условие не эквивалентно и не следует из условия 4), позволяющего сделать разложение $E_i \simeq p + m_i^2/2p + \dots$, поскольку в 4) сохраняется не только первый член разложения $E = p$, но и второй, а в некоторых работах и третий. В условии 5), напротив, используется только первый член разложения $t = L$. Приведем для начала элементарную выкладку, учитывающую точную связь времени t и расстояний L_k и L_j , пройденных нейтрино ν_k и ν_j , движущимися со скоростями v_k и v_j . Тождество

$$t = \frac{L_k}{v_k} = \frac{L_j}{v_j}$$

позволяет переписать осцилляционную фазу $(E_k - E_j)t$ в виде

$$(E_k - E_j)t = \frac{E_k L_k}{v_k} - \frac{E_j L_j}{v_j} = \frac{E_k^2 L_k}{p} - \frac{E_j^2 L_j}{p} \approx \frac{(E_k^2 - E_j^2)L}{p} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{p},$$

где в предпоследнем равенстве было сделано приближение $L_k \approx L_j \approx L$. В итоге получилась в два раза большая фаза осцилляций по сравнению с (17). Этот обескураживающий результат — следствие произвольного обращения с порядками малости $\Delta m_{kj}^2/p^2$, присущего как только что представленному «альтернативному выводу», так и самому условию 5).

Можно задаться и таким вопросом: «Почему разница между временами детектирования и рождения нейтрино t приравнивается расстоянию L ? В большинстве экспериментов время рождения нейтрино неизвестно, поэтому необходимо по нему проинтегрировать». Прделав такое интегрирование, мы обнаружим, что все интерференционные члены исчезают, поскольку $\int dt \exp[-i(E_k - E_j)t] \propto \delta(E_k - E_j)$, т. е. в этом случае

$$\langle P_{\alpha\beta}(t) \rangle_t \propto \sum_k |V_{\alpha k}|^2 |V_{\beta k}|^2. \quad (23)$$

Итак, суммируем: теория нейтринных осцилляций основана на гипотезах 1)–5). При этом только условие 4) выполняется для современных экспериментов, нарушаясь, однако, для низкоэнергетических (в частности реликтовых) нейтрино. Условия 2), 3) с очевидностью нефизичны. Условие 1) требует количественного обоснования. Условие 5) необоснованно. Небольшие поправки к этому условию приводят к большим изменениям в итоговой формуле вероятности нейтринных осцилляций.

2. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В МОДЕЛИ С ВОЛНОВЫМ ПАКЕТОМ

2.1. Общие свойства волнового пакета. Рассмотрим ВП при $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \psi_p(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \quad (24)$$

где $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p})$. Эволюция состояния (24) со временем определяется действием оператора эволюции

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(0)\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-iE_p t} \psi_p(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \quad (25)$$

чему в координатном пространстве соответствует волновая функция

$$\psi_x(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-iE_p t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} \psi_p(\mathbf{p}). \quad (26)$$

Состояние (25) нормируем на единицу:

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{p})|^2 = 1. \quad (27)$$

Определим средние энергию, импульс и скорость пакета следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{H}_0 | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{p})|^2 E_p, \\ \langle \mathbf{P} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{P}} | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{p})|^2 \mathbf{p}, \\ \langle \mathbf{v} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{V}} | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{p})|^2 \mathbf{v}_p, \end{aligned} \quad (28)$$

где одночастичный оператор скорости найден при помощи

$$\hat{\mathbf{V}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{v}_p |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|. \quad (29)$$

Квантовый ВП по некоторым своим свойствам похож на классический объект, в частности, его энергия и импульс сохраняются и движется он (в среднем) по классической траектории. Чтобы доказать последнее утверждение, проделаем явное вычисление.

2.2. Средняя траектория волнового пакета. По определению средняя координата ВП есть

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{X}} | \psi(t) \rangle. \quad (30)$$

Явным вычислением найдем правую часть (30), выразив $|\psi(t)\rangle$ согласно (25), воспользовавшись тем, что $|\mathbf{p}\rangle = \int d\mathbf{x} e^{+i\mathbf{p}\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle$ и очевидным свойством $\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{X}} | \psi(t) \rangle &= \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \langle \mathbf{q} | \int d\mathbf{x} \mathbf{x} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \mathbf{x} \rangle = \\ &= \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \int d\mathbf{x} \mathbf{x} e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (31)$$

где мы использовали соотношение $\langle \mathbf{q} | \mathbf{x} \rangle = e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}$. Чтобы снять интеграл по пространственной переменной, применим тождество

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \frac{1}{2i} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{1}{2i} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} = \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 v_{\mathbf{k}} t = \langle \mathbf{v} \rangle t, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ дается третьей строкой из (28). Чтобы перейти от первой строки ко второй в (33), мы воспользовались интегрированием по частям. Таким образом, доказано, что в среднем координата ВП следует классической траектории:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle t. \quad (34)$$

При выводе мы предполагали явно, что средняя координата ВП равна нулю при $t = 0$.

2.3. Расплывание волнового пакета в конфигурационном пространстве.

Покажем прямым вычислением, что ВП расплывается со временем. По определению дисперсия пространственной координаты есть

$$\sigma_x^2(t) = \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}(t) \rangle^2. \quad (35)$$

Вычислим среднее значение квадрата координаты:

$$\langle \mathbf{x}^2(t) \rangle \equiv \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{X}}^2 | \psi(t) \rangle = \int d\mathbf{x} \mathbf{x}^2 \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t + i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}}. \quad (36)$$

Воспользуемся для этого приемом, аналогичным (32):

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \mathbf{x}^2 e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \int d\mathbf{x} e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \end{aligned}$$

и проведем в (36) интегрирование по частям аналогично (33):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}^2 \rangle &= -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} = \\ &= \langle \mathbf{v}^2 \rangle t^2 - \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_x^2(t) = (\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2) t^2 - \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}.$$

Положив в этом равенстве $t = 0$, видим, что

$$\sigma_x^2(0) = -\text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}$$

есть дисперсия координаты в начальный момент времени, так что

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2(0) + (\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2) t^2 = \sigma_x^2(0) + \sigma_{\mathbf{v}}^2 t^2, \quad (37)$$

где $\sigma_{\mathbf{v}}^2 = \langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2$ — дисперсия скорости ВП. Мы получили общий закон дисперсии нерелятивистского ВП. Этот результат не является новым, см., например, [97] и ссылки в этой работе.

Исследуем теперь, как скорость расплывания ВП зависит от релятивистских эффектов. Запишем $\sigma_{\mathbf{v}}^2$ в следующем виде:

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2 = \langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2 = \langle \mathbf{v}_T^2 \rangle + \langle \mathbf{v}_L^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2 = \langle \mathbf{v}_T^2 \rangle + \langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle, \quad (38)$$

где $\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{v}_L^2 \rangle$ — средние квадраты продольной и поперечной проекций скорости ВП относительно вектора средней скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ соответственно. Перепишем $\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle$ и $\langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle$ через переменные в собственной системе отсчета (с. с. о.) ВП

$$E_{\mathbf{k}} = \bar{\Gamma}(E_{\mathbf{k}}^* + \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{k}_L^*), \quad (39)$$

$$\mathbf{k}_L = \bar{\Gamma}(\mathbf{k}_L^* + \langle \mathbf{v} \rangle E_{\mathbf{k}^*}), \quad \mathbf{k}_T = \mathbf{k}_T^*, \quad (40)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}L} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^* + \langle \mathbf{v} \rangle}{1 + \mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^* \langle \mathbf{v} \rangle}, \quad \bar{\Gamma} \equiv \Gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle \mathbf{v} \rangle^2}} \quad (41)$$

следующим образом:

$$\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 \mathbf{v}_{\mathbf{k}T}^2 = \frac{1}{\bar{\Gamma}^2} \int \frac{d\mathbf{k}^*}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k}^*)|^2 \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}T}^{*2}}{(1 + \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^*)^2} \quad (42)$$

и

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 (\mathbf{v}_{\mathbf{k}L} - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 = \\ &= \frac{1}{\bar{\Gamma}^4} \int \frac{d\mathbf{k}^*}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k}^*)|^2 \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^{*2}}{(1 + \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^*)^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Сравнивая (42) с (43), можно заметить, что в первом порядке для ВП, достаточно узких в импульсном пространстве,

$$\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle = \langle \mathbf{v}_T^{*2} \rangle / \bar{\Gamma}^2, \quad \langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle = \langle \mathbf{v}_L^{*2} \rangle / \bar{\Gamma}^4.$$

Таким образом, в режиме полного расплывания, учитывая, что в с. с. о. ВП $\langle \mathbf{v}_L^{*2} \rangle = (1/2)\langle \mathbf{v}_T^{*2} \rangle = (1/3)\langle \mathbf{v}^{*2} \rangle$, и используя (37), получаем

$$\sigma_{xL}^2(t) = \frac{1}{3}\langle \mathbf{v}^{*2} \rangle t^2 / \bar{\Gamma}^4, \quad \sigma_{xT}^2(t) = \frac{2}{3}\langle \mathbf{v}^{*2} \rangle t^2 / \bar{\Gamma}^2, \quad \sigma_{xL}^2(t) = \frac{1}{2}\sigma_{xT}^2(t) / \bar{\Gamma}^2. \quad (44)$$

Скорость продольного расплывания ВП в $\bar{\Gamma}$ раз меньше скорости его расплывания в поперечном направлении. Очевидно, что в с. с. о. ВП

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_{xL}^2(t) + \sigma_{xT}^2(t) = \langle \mathbf{v}^{*2} \rangle t^2.$$

2.4. Поперечное расплывание волнового пакета ведет к закону обратных квадратов. Любой ВП расплывается со временем. Другими словами, пространственная дисперсия ВП с течением времени растет, в то время как его амплитуда уменьшается. Это хорошо известное и неизбежное свойство ВП часто рассматривается как их «недостаток», что стимулировало попытки найти решения, стабильные во времени для ассоциации ВП с частицей.

В частности, хотя хорошо известно, что невозможно построить согласованную теорию рассеяния без ВП [98, 99], нередко встречается утверждение о том, что уменьшение со временем амплитуды ВП делает их не вполне адекватными объектами для начальных и конечных состояний, которые формально определены при $t = -\infty$ и $t = +\infty$ соответственно. Однако, как мы покажем в этом пункте (и это новый результат), расплывание ВП не критично для S -матричного формализма, поскольку оно имеет прозрачную интерпретацию. Расплывание ВП приводит к подавлению, пропорциональному фактору $1/|\mathbf{x}|^2$, для проинтегрированной по времени вероятности обнаружения частицы на расстоянии \mathbf{x} от точки ее рождения, аналогично ансамблю классических частиц. Таким образом, полученный результат ведет к простым нормировочным факторам для начальных и конечных состояний, взятых при достаточно больших, но конечных временах.

В работе [96] утверждение о природе закона обратных квадратов было доказано тремя разными способами:

— для двух явных примеров формы $\psi_p(\mathbf{p})$, а именно для гауссовой функции, инвариантной и неинвариантной относительно релятивистских преобразований;

— для ВП произвольной формы;

— исходя из уравнения непрерывности.

Здесь приводится самое простое и достаточно общее рассмотрение, основанное на уравнении непрерывности, которое согласуется как с релятивистским, так и с нерелятивистским уравнениями движения.

Запишем уравнение непрерывности для произвольного квантового состояния со скалярной функцией $\rho(t, \mathbf{x}')$, являющейся плотностью вероятности обнаружения частицы в точке \mathbf{x}' в момент времени t , и с векторной функцией $\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')$, являющейся плотностью потока:

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x}')}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') = 0. \quad (45)$$

Это уравнение можно переписать в тождественной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}') = - \int_S d\mathbf{S} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}'), \quad (46)$$

где интегрирование ограничено сферой S радиуса $|\mathbf{x}|$. Если этот радиус достаточно велик, а время, напротив, настолько мало, что ВП еще не успел расплыться (оба условия удовлетворяются, если $|\mathbf{x}| \gg \sigma_x(t)$), то следует ожидать, что интеграл равен единице из условия нормировки:

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}') \approx 1,$$

и поэтому производная по времени от интеграла в левой части этого равенства ничтожно мала. Поэтому правая часть (46) также исчезающе мала. Это означает, что плотность потока должна убывать быстрее, чем $1/|\mathbf{x}|^2$. Пример гауссова ВП, рассматриваемого далее, согласуется с этим утверждением.

Проинтегрируем теперь по времени от нуля до бесконечности правую и левую части (46):

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(\infty, \mathbf{x}') - \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(0, \mathbf{x}') = - \int_S d\mathbf{S} \Phi(\mathbf{x}'), \quad (47)$$

где $\Phi(\mathbf{x}') = \int_0^\infty dt \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')$ — интеграл по времени от плотности потока. По определению

$$P(t, |\mathbf{x}|) \equiv \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}') \quad (48)$$

дает вероятность найти частицу внутри сферы радиусом $|\mathbf{x}|$ в момент времени t . Очевидно, что из-за дисперсии ВП вероятность обнаружения частицы в любом конечном объеме стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, поскольку ВП покидает этот объем. С другой стороны, при значениях $|\mathbf{x}|$, много больших размеров ВП, значение $P(0, |\mathbf{x}|)$ очень близко к единице, поскольку изначально ВП почти полностью был локализован в достаточно большом объеме. При таких условиях (47) становится

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(0, \mathbf{x}') = \int_S d\mathbf{S} \Phi(\mathbf{x}') \simeq 1. \quad (49)$$

В с. с. о. ВП модуль вектора $\Phi(\mathbf{x}')$ не зависит от направления вектора \mathbf{x}' . Поэтому в данной системе отсчета

$$|\Phi(|\mathbf{x}|)| \simeq \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^2}.$$

Таким образом, закон обратных квадратов $1/|\mathbf{x}|^2$ справедлив для любых решений уравнений Клейна–Гордона и/или Дирака с конечными нормировками, но не для плоских волн, нормировка которых сингулярна. В любой данный момент времени плотность потока $\nabla \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')$ убывает быстрее, чем $1/|\mathbf{x}|^2$.

2.5. Нековариантный гауссов волновой пакет. Рассмотрим в качестве полезной иллюстрации широко известный нековариантный гауссов ВП с волновой функцией в импульсном пространстве вида

$$\psi_p(\mathbf{k}) = \left(\frac{2\pi}{\sigma_p^2} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{(k-p)^2}{4\sigma_p^2} \right], \quad (50)$$

где σ_p — константная дисперсия распределения Гаусса, или «ширина» импульсного распределения в ВП. Волновую функцию в координатном представлении можно получить, предполагая дисперсию σ_p достаточно малой для аккуратного вычисления интеграла с разложением

$$E_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \frac{m^2}{2E_{\mathbf{p}}^3}(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{k})^2}{2E_{\mathbf{p}}^3} + \dots, \quad (51)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$. Интегрирование сводится к гауссовой квадратуре, что позволяет вычислить

$$\psi_x(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp \left[-ipx - \frac{(\mathbf{x}_L - \mathbf{v}t)^2}{4\sigma_x^2(1 + it/\tau_L)} - \frac{\mathbf{x}_T^2}{4\sigma_x^2(1 + it/\tau_T)} \right]}{(2\pi\sigma_x^2)^{3/4} \sqrt{(1 + it/\tau_L)(1 + it/\tau_T)}}, \quad (52)$$

где $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$, $\sigma_x^2 = 1/4\sigma_p^2$ и

$$\tau_L = \Gamma_{\mathbf{p}}^3 \tau, \quad \tau_T = \Gamma_{\mathbf{p}} \tau, \quad \tau = 2\sigma_x^2 m, \quad \Gamma_{\mathbf{p}} = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}. \quad (53)$$

Здесь \mathbf{x}_L и \mathbf{x}_T — компоненты вектора \mathbf{x} , параллельные и перпендикулярные среднему вектору скорости \mathbf{v} соответственно. Как нетрудно видеть из (52), ВП расплывается со временем. Для большей ясности выпишем модуль функции (52):

$$|\psi_x(t, \mathbf{x})| = \frac{\exp \left[-\frac{(\mathbf{x}_L - \mathbf{v}t)^2}{4\sigma_x^2(1 + t^2/\tau_L^2)} - \frac{\mathbf{x}_T^2}{4\sigma_x^2(1 + t^2/\tau_T^2)} \right]}{(2\pi\sigma_x^2)^{3/4} (1 + t^2/\tau_L^2)^{1/4} \sqrt{1 + t^2/\tau_T^2}}.$$

Таким образом, гауссов ВП, описываемый при $t = 0$ волновой функцией в конфигурационном пространстве,

$$\psi_x(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{3/4}} \exp \left(i\mathbf{p}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^2}{4\sigma_x^2} \right),$$

со временем расплывается в продольном и поперечном направлениях. Квадраты продольной $\sigma_{xL}^2(t)$ и поперечной $\sigma_{xT}^2(t)$ дисперсий равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{xL}^2(t) &= \sigma_x^2 \left(1 + \frac{t^2}{\tau_L^2} \right), \\ \sigma_{xT}^2(t) &= \sigma_x^2 \left(1 + \frac{t^2}{\tau_T^2} \right), \end{aligned} \quad (54)$$

где τ_L и τ_T , даваемые (53), связаны друг с другом соотношением $\tau_L = \Gamma_{\mathbf{p}}^2 \tau_T$. Параметры τ_L и τ_T имеют физический смысл продольного и поперечного времен распывания соответственно. Параметр τ — время дисперсии ВП в его с. с. о., в которой, очевидно, $\tau_L = \tau_T = \tau$.

Обратим внимание, что нековариантный гауссов пакет распывается в $\Gamma_{\mathbf{p}}^2$ раз медленнее в продольном направлении, чем в поперечном. У гауссова ВП можно выделить два режима распывания: в поперечном ($t \gg \tau_T$) и в продольном ($t \gg \tau_L$) направлениях. В случае полного распывания по всем направлениям

$$\begin{aligned} \sigma_{xL}(t) &= \sigma_x \frac{t}{\tau} \frac{1}{\Gamma_{\mathbf{p}}^3}, & t \gg \tau_L, \\ \sigma_{xT}(t) &= \sigma_x \frac{t}{\tau} \frac{1}{\Gamma_{\mathbf{p}}}, & t \gg \tau_T. \end{aligned}$$

Сравнив полученные скорости продольного и поперечного распываний с расчетами, в которых используются релятивистские соотношения (44), обнаруживаем, что нековариантный гауссов пакет испытывает в $\Gamma_{\mathbf{p}}$ более медленное распывание. Ковариантный гауссов пакет, рассматриваемый в следующем пункте, согласуется с общей формулой (44).

Проверим, что распывание гауссова ВП ведет к формуле $1/|\mathbf{x}|^2$ в подавлении проинтегрированного по времени потока. Плотность потока вычисляется по стандартной формуле

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\frac{i}{2m} [\psi_x^*(t, \mathbf{x}) \nabla \psi_x(t, \mathbf{x}) - \psi_x(t, \mathbf{x}) \nabla \psi_x^*(t, \mathbf{x})].$$

Проведем вычисление в с. с. о. ВП. Тогда плотность потока

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}(t/\tau) \exp \left[-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_x^2(1 + (t/\tau)^2)} \right]}{(2\pi)^{3/2} 2m\sigma_x^5 [1 + (t/\tau)^2]^{5/2}}. \quad (55)$$

Интеграл по времени может быть вычислен точно:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_0^\infty dt \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_x^2}} \right) - \frac{\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{x}|^2 \sigma_x} e^{-\mathbf{x}^2/2\sigma_x^2}. \quad (56)$$

На расстояниях, много больших размера пакета, $|\mathbf{x}|^2 \gg \sigma_x^2$, получаем прозрачную формулу

$$\Phi(\mathbf{x}) \simeq \frac{\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3}. \quad (57)$$

2.6. Теория вакуумных нейтринных осцилляций в модели волнового пакета. Применим теперь развитую теорию ВП к описанию нейтринных осцилляций. В предыдущем пункте продемонстрировано, что поперечное распыливание ВП ведет к подавлению вероятности за бесконечно большое время наблюдения обнаружить частицу на расстоянии x от источника ее рождения в виде множителя $1/(4\pi|x|^2)$. Предположим, что поперечные степени свободы не оказывают существенного влияния на картину осцилляций, за исключением упомянутого фактора подавления в вероятности наблюдения (далее мы освободимся от этой гипотезы и проведем полное вычисление в трехмерном пространстве, которое в итоге подтвердит правильность сделанного предположения).

Состояние нейтрино в модели ВП и амплитуда перехода из источника в детектор. Рассмотрим одномерный ВП нейтрино со средней координатой x_s в момент времени t_s :

$$|\nu_\alpha^s\rangle = \sum_k V_{\alpha i}^* \int \frac{dk}{2\pi} \psi_p^s(k) e^{-iE_i t_s + ikx_s} |\nu_i(k)\rangle, \quad (58)$$

где $E_i = \sqrt{k^2 + m_i^2}$, состояние $|\nu_i(k)\rangle$ с нормировкой согласно $\langle \nu_j(q) | \nu_i(k) \rangle = 2\pi \delta(q - k)$ и

$$\psi_p^s(k) = \left(\frac{2\pi}{\sigma_s^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(k - p_s)^2}{4\sigma_s^2} \right]. \quad (59)$$

Состояние (58) нормированно на единицу: $\langle \nu_\alpha^s | \nu_\alpha^s \rangle = 1$. Детектируемое состояние также должно описываться ВП со средней координатой x_d в момент времени t_d . В общем, состояние в детекторе может отличаться своим ароматом:

$$|\nu_\beta^d\rangle = \sum_i V_{\beta i}^* \int \frac{dk}{2\pi} \psi_p^d(k) e^{-iE_i t_d + ikx_d} |\nu_i(k)\rangle, \quad (60)$$

где $\psi_p^d(k)$ определено так же, как в (59), с очевидными заменами $s \rightarrow d$. Проекция состояния $|\nu_\alpha^s\rangle$ на $|\nu_\beta^d\rangle$ дает амплитуду перехода

$$A_{\alpha\beta}(t, L) \equiv \langle \nu_\beta^d | \nu_\alpha^s \rangle = \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \psi_p^s(k) \psi_p^{d*}(k) e^{-iE_j t + ikL}, \quad (61)$$

где $L = |x_d - x_s|$ — расстояние между средними положениями нейтринных ВП в источнике и детекторе, а $t = (t_d - t_s)$. Произведение гауссовых формфакторов в (61) может быть представлено как гауссова функция в (59) с импульсом

$$p = \frac{p_s \sigma_d^2 + p_d \sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2} = \sigma_p^2 \left(\frac{p_s}{\sigma_s^2} + \frac{p_d}{\sigma_d^2} \right) \quad (62)$$

и дисперсией σ_p , определенной согласно

$$\frac{1}{\sigma_p^2} = \frac{1}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_d^2}. \quad (63)$$

Амплитуда в (61) принимает вид

$$A_{\alpha\beta}(t, L) = \sum_j V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_s \sigma_d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \times \\ \times \exp \left[-iE_j t + ikL - \frac{(k-p)^2}{4\sigma_p^2} - \frac{(p_s - p_d)^2}{4(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right]. \quad (64)$$

Интеграл по импульсу может быть вычислен в приближении малой ширины эффективного ВП* ($\sigma_p \ll p$) с учетом одномерного аналога разложения в (51)

$$E_{kj} \simeq E_{pj} + v_{pj} (k-p) + \frac{m_j^2}{2E_{pj}^3} (k-p)^2, \quad (65)$$

где $v_{pj} = dE_j/dp = p/E_{pj}$ — групповая скорость ВП состояния с определенной массой m_i , что позволяет вычислить амплитуду

$$A_{\alpha\beta}(t, L) = \frac{[2\pi\tilde{\delta}(p_s - p_d)]^{1/2}}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \frac{\exp \left[-iE_{pj} t - \frac{(L - v_{pj} t)^2}{4\sigma_x^2(1 + it/\tau_{Lj})} \right]}{(1 + it/\tau_{Lj})^{1/2}}, \quad (66)$$

где

$$2\pi\tilde{\delta}(p_s - p_d) = \left(\frac{2\pi}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(p_s - p_d)^2}{2(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right] \quad (67)$$

отвечает «размазанному» аналогу $2\pi\delta(p_s - p_d)$ функции, контролирующей закон сохранения импульса, $\tau_{Lj} = E_{pj}^3/2m_j^2\sigma_p^2$ — характерное время расплывания ВП нейтрино с определенной массой m_j в продольном направлении в точном соответствии с (53) и $\sigma_x = 1/2\sigma_p$.

2.7. Макроскопическое усреднение вероятности перехода. Как определить вероятность нейтринных осцилляций в модели с ВП? Плотность вероятности, отвечающая амплитуде $A_{\alpha\beta}(t, L)$ из (64), зависит не только от расстояния $L = x_d - x_s$ и разницы времен $t = (t_d - t_s)$, но и от средних импульсов нейтринного ВП в источнике и детекторе. Важно, что все эти

* ВП назван «эффективным», поскольку он включает в себя процессы рождения и детектирования нейтрино.

параметры совершенно произвольны, т. е. мы не накладываем условий типа $t = L$, а также $p_s = p_d$. Экспериментально наблюдаемой величиной является макроскопическое число «событий», усредненное по ненаблюдаемым величинам — времени рождения t_s и среднего импульса при рождении p_s :

$$\int dt_s dp_s \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} |A_{\alpha\beta}(t_d - t_s, p_s, p_d)|^2 \simeq \left\langle \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} \right\rangle P_{\alpha\beta}(L), \quad (68)$$

где $d^2 n_\nu(t_s, p_s)/dt_s dp_s$ — плотность числа нейтрино в источнике в единицу времени dt_s и единицу импульса dp_s . Скобки $\langle \dots \rangle$ означают величины, усредненные по времени и импульсу внутри интервалов, в которых $|A_{\alpha\beta}(t - t_s, p_s - p_d)|^2$ быстро убывает. Усредненная по времени и импульсу в источнике вероятность флейворного перехода $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ равна

$$P_{\alpha\beta}(L) = \int dt_s dp_s |A_{\alpha\beta}(t - t_s; p_s, p_d)|^2. \quad (69)$$

Интегрирование по импульсу p_s может быть легко произведено при помощи (67). Интегрирование по времени можно выполнить, учтя, что по сравнению с экспоненциальным подавлением, которое происходит на временах $(L - v_j t)^2/4\sigma_x^2 \gtrsim 1$, члены вида t/τ_{Lj} — медленно меняющиеся функции, поскольку соотношение

$$\frac{t}{\tau_{Lj}} \lesssim \frac{(L - 2\sigma_x)m_j^2}{p^2 E_{pj} \sigma_x^2} \ll 1 \quad (70)$$

выполняется для широкой области значений нейтринных масс $m_j \lesssim 1$ эВ и пространственных дисперсий σ_x . Таким образом, интеграл по времени t_s сводится к гауссову, что позволяет получить формулу для вероятности осцилляций в модели ВП:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} \frac{V_{\beta i} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta j}^*}{\sqrt[4]{1 + (L/L_{ij}^d)^2}} \exp[-i(\varphi_{ij} + \varphi_{ij}^d) - \mathcal{A}_{ij}^2 - \mathcal{B}_{ij}^2], \quad (71)$$

где

$$\mathcal{A}_{ij}^2 = \frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{B}_{ij}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}\pi\sigma_x}{L_{ij}^{\text{osc}}} \right)^2. \quad (72)$$

Вероятность осцилляций в (71) зависит от следующих параметров размерности длины:

$$L_{ij}^{\text{osc}} = 2\pi \frac{2p}{\Delta m_{ij}^2}, \quad (73a)$$

$$L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{2\sqrt{2}p^2}{\sigma_p \Delta m_{ij}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_{\text{rel}}} L_{ij}^{\text{osc}}, \quad (73б)$$

$$L_{ij}^d = \frac{p^3}{\sigma_p^2 \Delta m_{ij}^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma_{\text{rel}}} L_{ij}^{\text{coh}}, \quad (73в)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\sigma_p}, \quad (73г)$$

где безразмерный параметр $\sigma_{\text{rel}} \equiv \sigma_p/p$. Фаза $\varphi_{ij}(L)$ линейно зависит от расстояния L :

$$\varphi_{ij}(L) = 2\pi \frac{L}{L_{ij}^{\text{osc}}},$$

и обратно пропорциональна длине осцилляций L_{ij}^{osc} , которая оказалась в точности такой же, как и в плосковолновом случае. Однако в модели ВП в стандартной фазе появилась добавка

$$\varphi_{ij}^d(L) = -\frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{L}{L_{ij}^d} + \frac{1}{2} \arctan \frac{L}{L_{ij}^d}. \quad (74)$$

Обсудим на качественном уровне полученные результаты.

2.8. Качественное обсуждение формулы для вероятности осцилляций в модели волнового пакета. Как следует из (71), осцилляции нейтрино в модели ВП зависят от нескольких масштабов, размерности длины, длины осцилляций L_{ij}^{osc} , длины когерентности L_{ij}^{coh} , длины дисперсии L_{ij}^d и эффективного пространственного размера ВП нейтрино σ_x , которые могут отличаться друг от друга на много порядков. Обсудим физический смысл этих масштабов. Длина когерентности L_{ij}^{coh} соответствует расстоянию, на котором два ВП с массами m_i и m_j , распространяющимися с разными групповыми скоростями $v_i \simeq 1 - m_i^2/2p^2$ и $v_j \simeq 1 - m_j^2/2p^2$, перестают перекрываться в пространстве. Это происходит на временах t , когда $(v_i - v_j)t \simeq \sigma_x$, где σ_x — пространственный размер ВП нейтрино. Оценка времени $t \simeq 2\sigma_x p^2 / \Delta m_{ij}^2$ с точностью до числового множителя совпадает с определением длины когерентности L_{ij}^{coh} из (73б). Заметим, что длина когерентности пропорциональна осцилляционной длине L_{ij}^{osc} и обратно пропорциональна относительной дисперсии импульса ВП σ_{rel} . Поэтому чем меньше относительная дисперсия импульса ВП, тем дольше ВП сохраняют свою когерентность. Фактор $(L/L_{ij}^{\text{coh}})^2$ в экспоненте в (71) отвечает подавлению, связанному с длиной когерентности.

Длина дисперсии L_{ij}^d возникает в результате разложения энергии до второго порядка (см. (65)), что, как мы видели в п. 2.5, соответствует расплыванию ВП в конфигурационном пространстве. Заметим, что L_{ij}^d обратно пропорциональна квадрату σ_{rel} . Расплывание ВП увеличивает их пространственные размеры и частично компенсирует потерю перекрытия двух ВП ν_i и ν_j за счет разницы их групповых скоростей. Характерное время расплывания ВП нейтрино с определенной массой m_j в продольном направлении — параметр $\tau_{Lj} = E_{pj}^3/2m_j^2\sigma_p^2$ — оказалось в точности таким же, как в (53). Производную по времени параметра пространственной дисперсии ВП $\sigma_x(t)$, определенного согласно (54), можно интерпретировать как скорость расплывания:

$$\frac{d|\sigma_{x,j}(t)|}{dt} = \frac{\sigma_x t / (\tau_{Lj})^2}{\sqrt{1 + (t/\tau_{Lj})^2}} = \begin{cases} \frac{\sigma_x t}{(\tau_{Lj})^2}, & t \ll \tau_{Lj}, \\ \frac{\sigma_x}{\tau_{Lj}} = \frac{m_j^2 \sigma_p}{E_p^2 E_p} \ll 1, & t \gg \tau_{Lj}. \end{cases} \quad (75)$$

Как можно видеть, $d\sigma_{x,j}(t)/dt$ сначала линейно растет со временем до тех пор, пока не достигнет асимптотического значения скорости расплывания σ_x/τ_{Lj} . Скорость расплывания много меньше скорости нейтрино, но не обязательно меньше разности их групповых скоростей $v_i - v_j$. Действительно,

$$v_i - v_j = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E_p^2} \simeq \frac{\Delta m_{ij}^2}{2m_{\text{max}}^2} \frac{E_p}{\sigma_p} \frac{d\sigma_{x,j}(t)}{dt}, \quad (76)$$

где m_{max} — максимальное значение массы нейтрино. Учтя космологическое ограничение, $m_{\text{max}} \lesssim 0,2$ эВ, и взяв в качестве оценки $\Delta m_{ij}^2 = 2,45 \times 10^{-3}$ эВ², получим, что разность $v_i - v_j$ будет сравнима со скоростью расплывания ВП, $d\sigma_{x,j}(t)/dt$, при $\sigma_p \simeq 0,03E_p$. Для пакетов с много меньшими пространственными дисперсиями скорость расплывания будет много меньше разности $v_i - v_j$. Для много больших значений σ_{rel} (но по-прежнему с условием $\sigma_{\text{rel}} \ll 1$) расплывание пакетов будет эффективнее (частично) компенсировать потерю их взаимоперекрытия. Например, на расстояниях от источника $L = L_{ij}^{\text{osc}}/2$, на которых разумно устанавливать детекторы для наибольшей чувствительности к эффектам нейтринных осцилляций, максимальное подавление интерференционных членов в (71) равно $e^{-\pi/8}$ при $\sigma_{\text{rel}} = 1/\sqrt{2\pi} \simeq 0,4$.

В пределе $L \rightarrow \infty$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 = \left(\frac{L_{ij}^d}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 = \frac{p^2}{8\sigma_p^2} \gg 1, \quad (77)$$

т. е. расплывание не способно полностью компенсировать потерю когерентности в (71). Таким образом, осцилляции, распространяющиеся на расстояния, много большие длин когерентности и дисперсии, *сильно подавлены*. По-видимому, можно утверждать, что нейтрино от астрофизических и космологических источников некогерентны и не осциллируют.

Может показаться удивительным, что частичное восстановление когерентности из-за расплывания ВП чувствительно к *разности* скоростей расплывания, а не к их *сумме*, как следовало бы ожидать для ВП с увеличивающимися со временем пространственными ширинами. Действительно, для вещественных гауссовых ширин нетрудно получить, что компенсация потери когерентности зависит от суммы скоростей расплывания. Объяснение заключается в том, что эффект расплывания проявляет себя как комплекснозначная функция $\sigma_x^2(1 + it/\tau_{Lj})$, которая характеризуется как абсолютным значением, так и фазой. Поэтому эффект расплывания ВП, зависящий от it/τ_{Lj} , будет зависеть от разности фаз $\propto it(1/\tau_{Lj} - 1/\tau_{Li})$ в интерференционных членах квадрата модуля амплитуды (66) аналогично тому, как длина осцилляций зависит от разности энергий $(E_i - E_j)t$.

Поскольку пространственная ширина ВП — это комплекснозначная функция $\sigma_x^2(1 + it/\tau_{Lj})$, расплывание ВП не только оказывает влияние на их перекрытие, но и дает поправку в интерференционную фазу. Поэтому фаза осцилляций получает добавку $\varphi_{ij}^d(L)$, определенную в (74).

Дополнительный фактор подавления $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$, с функцией \mathcal{B}_{ij} , определенной в (72), не зависит от расстояния. Это подавление существенно, если пространственная ширина нейтринного ВП сопоставима по порядку величины с длиной осцилляций $L = L_{ij}^{\text{osc}}$ или превосходит ее. Математически такая ситуация отвечает плосковолновому пределу, при котором пространственная ширина нейтринного пакета стремится к бесконечности, что имеет прозрачную интерпретацию — интерференционные члены усредняются на расстояниях порядка размеров пакета. Формулу (72) можно переписать в виде

$$\mathcal{B}_{kj}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{\sigma_{m^2}} \right)^2, \quad (78)$$

из которого следует, что интерференция состояний $|\nu_i\rangle$ и $|\nu_j\rangle$ подавлена при $\Delta m_{ij}^2 \gg \sigma_{m^2}$, где $\sigma_{m^2} = 2\sqrt{2}p\sigma_p$ можно формально интерпретировать как неопределенность квадрата массы нейтрино [68]. Фактор $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$ ответствен за практическую невозможность взаимопревращений (т. е. осцилляций) заряженных лептонов. В самом деле, развитию теории формально можно применить к осцилляциям заряженных лептонов, просто заменив ν_1, ν_2, ν_3 на e, μ, τ и полагая заряженные лептоны ультрарелятивистскими. Однако в данном случае все интерференционные члены сильнеешим образом подавлены факторами $\exp[-\mathcal{B}_{ij}^2]$ из-за того, что квадраты масс мюона и τ -лептона на

много порядков превышают любые реалистичные значения величины σ_{m^2} . Заметим также, что интерференционные множители в (71) подавлены еще и числителем

$$q_{kj} = \sqrt[4]{1 + \left(\frac{L}{L_{kj}^d}\right)^2}. \quad (79)$$

В пределах $\sigma_p \rightarrow 0$ и $\sigma_p \rightarrow \infty$ интерференция в (71) исчезает и вероятность осцилляций становится некогерентной суммой

$$P_{\alpha\beta} = \sum_k |V_{\alpha k}|^2 |V_{\beta k}|^2, \quad (80)$$

которая не зависит ни от энергии, ни от расстояния, ни от масс нейтрино.

Отметим, наконец, что предел $\sigma_p \rightarrow 0$, который формально соответствует плосковолновому пределу, предсказывает (в отличие от собственно плосковолновой модели) отсутствие нейтринных осцилляций. Этот результат, хотя и является *post factum* очевидным, может показаться на первый взгляд парадоксальным, поскольку в пределе $\sigma_p \rightarrow 0$ ВП превращаются в состояния с определенным импульсом, что возвращает нас к модели с плоскими волнами. Однако в модели с ВП делается еще один необходимый шаг — интегрирование по времени испускания нейтрино, в отличие от необоснованного приравнивания t к L в плосковолновой модели. Если действовать согласованным образом и в плосковолновой модели, то следовало бы и здесь провести интегрирование по времени как по неизмеряемой величине, после чего плосковолновая модель также дала бы вероятность в виде некогерентной суммы в (80). Хорошо, что в пионерских работах по осцилляциям этот шаг был пропущен. . . Итак, мы видим, что «очевидная» подстановка $t = L$ отнюдь не безобидна.

Обсудим, наконец, выполняются ли гипотезы, сделанные при выводе формулы для вероятности флейворных переходов (17) и обсуждаемые в п. 1.3.

Гипотеза 1) о том, что в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует когерентная суперпозиция состояний с определенной массой m_i ($i = 1, 2, 3$) $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$, может нарушаться, если $\exp[-\mathcal{B}_{ij}^2] \lesssim 1$. В частности, эта гипотеза сильнее всего нарушена для заряженных лептонов, что объясняет невозможность их превращений друг в друга.

Гипотеза 2) о том, что состояния $|\nu_i\rangle$ обладают определенными импульсами \mathbf{p}_i , нарушается, поскольку она соответствует бесконечно большой пространственной ширине $\sigma_x = (2\sigma_p)^{-1}$, при которой $\exp[-\mathcal{B}_{ij}^2] \rightarrow 0$, что приводит к формуле (80).

Гипотеза 3) говорит о том, что все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$), что противоречит релятивистской инвариантности. Обсуждаемая в данном раз-

деле нековариантная теория нейтринных осцилляций в модели ВП не устранила данный недостаток.

Приближение 4) о том, что нейтрино являются ультрарелятивистскими, т. е. $\mathbf{p}^2 \gg \max(m_i^2)$, было также использовано в развитой теории нейтринных осцилляций в модели ВП.

Гипотеза 5) о том, что время распространения нейтрино равно $t = L$, не выполняется. В действительности последовательное вычисление требует интегрирования по времени, выполненного в (68). Наибольший вклад в интеграл по времени дают времена порядка L/v_{ij} , где

$$\frac{1}{v_{ij}} = \frac{v_i + v_j}{v_i^2 + v_j^2},$$

что соответствует моменту времени максимального перекрытия двух ВП, отвечающих состояниям ν_i и ν_j .

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ

3.1. Определения. Пусть $|\mathbf{k}\rangle$ — собственное состояние оператора 4-импульса $\hat{P} = (\hat{P}_0, \hat{\mathbf{P}})$ частицы с массой m :

$$\hat{P}_\mu |\mathbf{k}\rangle = k_\mu |\mathbf{k}\rangle \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (81)$$

$k \mapsto k' = \Lambda k$ переводит состояние $|\mathbf{k}\rangle$ в $|\mathbf{k}'\rangle$. Состояния $|\mathbf{k}\rangle$ нормированы релятивистски-инвариантным образом: $\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2\mathbf{E}_\mathbf{k} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{k})$. В дальнейшем будем обозначать $k_0 = E_\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Соотношение полноты имеет вид

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1.$$

Произвольное «одночастичное» бесспиновое состояние $|a\rangle$ можно представить в виде разложения по полному набору состояний $|\mathbf{k}\rangle$, т. е. в виде *волнового пакета* (ВП):

$$|a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_\mathbf{k}}} \psi_p(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \quad \psi_p(\mathbf{k}) = \frac{\langle \mathbf{k} | a \rangle}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}. \quad (82)$$

Состояние $|a\rangle$ можно разложить по собственным состояниям любого другого самосопряженного оператора, в частности оператора 3-мерной координаты $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$ ($\hat{X}_i |x\rangle = x_i |x\rangle$, $i = 1, 2, 3$). Выбрав для $|x\rangle$ нормировку $\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, при которой $\int d\mathbf{x} |x\rangle \langle x| = 1$, запишем

$$|a\rangle = \int d\mathbf{x} \psi_x(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle, \quad \psi_x(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | a \rangle. \quad (83)$$

Поскольку оператор \hat{P} при действии на состояние $\langle \mathbf{x} |$ имеет вид $-i\nabla_{\mathbf{x}}$, то

$$\mathbf{k}\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{x} | \hat{P} | \mathbf{k} \rangle = -i\nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle.$$

Отсюда с учетом выбранных нормировок находим, что $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ и, следовательно,

$$|\mathbf{x}\rangle = \int \frac{d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} |\mathbf{k}\rangle, \quad |\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \int d\mathbf{x} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle. \quad (84)$$

Таким образом, функции $\psi_p(\mathbf{k})$ и $\psi_x(\mathbf{x})$ являются фурье-образами друг друга:

$$\psi_x(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_p(\mathbf{k}), \quad \psi_p(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_x(\mathbf{x}). \quad (85)$$

Приведем еще полезные соотношения, которые понадобятся нам далее:

$$\frac{\partial |\mathbf{x}\rangle}{\partial \mathbf{x}} = -i \int \frac{d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} |\mathbf{k}\rangle, \quad \frac{\partial |\mathbf{k}\rangle}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} |\mathbf{k}\rangle + i\sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \int d\mathbf{x} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle. \quad (86)$$

Норма состояния $|a\rangle$ имеет вид

$$\langle a | a \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 = \int d\mathbf{x} |\psi_x(\mathbf{x})|^2. \quad (87)$$

Если $\psi_x(\mathbf{x})$ — вещественная функция, то ВП $|a\rangle$ имеет среднюю координату $\langle \mathbf{x}_a \rangle = 0$ при $t = 0$. Для дальнейших расчетов нам понадобится ВП, имеющий трехмерную координату $\langle \mathbf{x}_a \rangle$, в общем случае отличную от нуля, в момент времени t_a . Для этого достаточно подействовать на состояние $|a\rangle$ оператором трансляции $e^{i\hat{P}x_a}$:

$$|a\rangle \rightarrow |\mathbf{p}_a, x_a\rangle = e^{i\hat{P}x_a} |a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{ikx_a} \psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) |\mathbf{k}\rangle, \quad (88)$$

где мы указали, что волновая функция $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ зависит не только от переменной — вектора \mathbf{k} , но и от параметра — вектора среднего импульса \mathbf{p}_a . Функция $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ характеризуется также параметром дисперсии σ в импульсном пространстве. При устремлении $\sigma \rightarrow 0$ потребуем для удобства, чтобы ВП переходил в состояние с определенным импульсом: $\lim_{\sigma \rightarrow 0} |\mathbf{p}_a, x_a\rangle = |\mathbf{p}_a\rangle$. Это подразумевает, что в волновой функции $\psi_p(\mathbf{k})$ присутствует множитель $e^{-ip_a x_a}$ для компенсации множителя e^{ikx_a} . В дальнейшем будем подразумевать наличие этого множителя для существования однозначного перехода к плосковолновому пределу, однако, поскольку этот множитель постоянный,

он не оказывает никакого влияния на предсказываемое число взаимодействий. Поэтому, чтобы не загромождать формулы, будем такие множители опускать.

Для установления трансформационных свойств волновой функции $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ удобно ее переписать в виде $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) = \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$. Пользуясь трансформационными свойствами состояния $|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$ при преобразовании Лоренца

$$|\mathbf{k}\rangle \rightarrow U(\Lambda)|\mathbf{k}\rangle = |\Lambda\mathbf{k}\rangle, \quad k \rightarrow \Lambda k, \quad (89)$$

где $U(\Lambda)$ — унитарный оператор, легко видеть, что функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ — релятивистский инвариант:

$$\phi(\mathbf{k}', \mathbf{p}'_a) = \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) \quad (k' = \Lambda k, \quad p'_a = \Lambda p_a). \quad (90)$$

Состояние (88) можно выразить через лоренц-инвариантную функцию $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ (формфактор):

$$|\mathbf{p}_a, x_a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x_a} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)|\mathbf{k}\rangle. \quad (91)$$

Волновая функция в конфигурационном пространстве, соответствующая состоянию в (88), есть

$$\psi_{x,a}(\mathbf{x}) \equiv \psi_x(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i[\mathbf{k}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_a)-k^0 x_a]} \psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a). \quad (92)$$

Норму состояния

$$\langle a|a\rangle \equiv \langle \mathbf{p}_a, x_a | \mathbf{p}_a, x_a \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)|^2 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)|^2 \quad (93)$$

мы в этом и последующих пунктах предпочитаем *не* приравнять единице, хотя такая возможность естественным образом напрашивается. В этой работе обсуждается теоретическая схема с ВП в квантовой теории, в которой существует предельный переход к обычному состоянию с определенным импульсом и с нормировкой $\langle \mathbf{q}|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{k})$. Эта нормировка во многих учебниках зачастую заменяется на конструкцию $2E_{\mathbf{k}}V$, где V — «некий бесконечно большой пространственный объем». Для получения правильного предельного перехода нашего формализма в обычный плосковолновой мы определяем лоренц-инвариантную норму состояния в (93) как $\langle a|a\rangle = 2mV_*$, где V_* — конечная величина, имеющая размерность объема и однозначно заданная формфактором ВП; ее явный вид будет получен в п. 3.2.

Замечание о «скрытых переменных». Траектуя ВП $|\mathbf{p}, x\rangle$ как физическое квантовое состояние, порождаемое в столкновениях или распадах других частиц \mathcal{X} , можно ожидать, что функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ параметрически зависит от

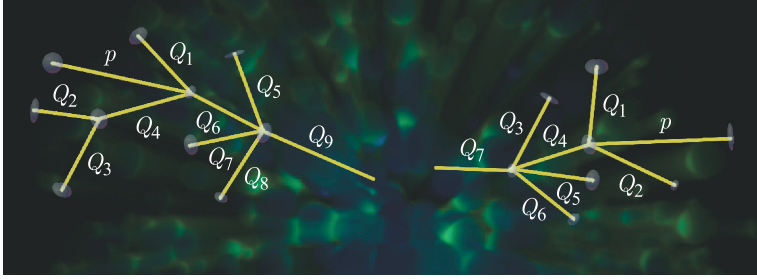


Рис. 1. Схематическая иллюстрация цепочек процессов рождения волновых пакетов

4-импульсов Q_{\varkappa} первичных и, возможно, вторичных частиц, участвующих в процессе рождения ВП*. В наиболее общем случае набор родительских и сопутствующих вторичных частиц может включать в себя частицы *всей цепочки* реакций и распадов, приводящих к рождению состояния $|\mathbf{p}, x\rangle$ (рис. 1). «Скрытые переменные» Q_{\varkappa} могут входить в скалярную функцию $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ только в виде скалярных произведений $(Q_{\varkappa}k)$, $(Q_{\varkappa}p)$ и $(Q_{\varkappa}Q_{\varkappa'})$. С учетом предполагаемых свойств функции $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ она должна быть положительно определена вблизи точки $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ и удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{\partial k_l} \right]_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} &= \left[\frac{\partial(k-p)^2}{\partial k_l} \frac{\partial \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{\partial (k-p)^2} \right]_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} + \sum_{\varkappa} \left[\frac{\partial(Q_{\varkappa}k)}{\partial k_l} \frac{\partial \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{\partial (Q_{\varkappa}k)} \right]_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} = \\ &= \sum_{\varkappa} Q_{\varkappa}^0 \left(\frac{p_l}{p^0} - \frac{Q_{\varkappa l}}{Q_{\varkappa}^0} \right) \left[\frac{\partial \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{\partial (Q_{\varkappa}k)} \right]_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} = 0 \quad (l = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Последнее равенство удовлетворяется *тождественно* только в нефизическом случае, когда наиболее вероятные скорости всех пакетов \varkappa одинаковы ($Q_{\varkappa}/Q_{\varkappa}^0 = \mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$). Из этого факта и произвольности конфигураций 4-импульсов $\{Q_{\varkappa}\}$ заключаем, что $[\partial \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})/\partial (Q_{\varkappa}k)]_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} = 0$. Совершенно аналогично находим, что $[\partial \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})/\partial (Q_{\varkappa}p)]_{\mathbf{p}=\mathbf{k}} = 0$. Таким образом, зависимость $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ от скалярных произведений $(Q_{\varkappa}k)$ и $(Q_{\varkappa}p)$ должна исчезать по крайней мере вблизи максимума функции $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$. Постулируя аналитичность функции $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ в окрестности максимума ($\mathbf{k} = \mathbf{p}$), видим, что в этой окрестности функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ может зависеть от 4-импульсов Q_{\varkappa} только через

*Эволюция пакета под действием внешних полей включена в эту картину, поскольку в S -матричном формализме КТП любое взаимодействие следует понимать как локальное взаимодействие реальных или виртуальных полей.

инварианты

$$g^{\mu\nu}(k-p)_\mu(k-p)_\nu, \quad G_2^{\mu\nu}(k-p)_\mu(k-p)_\nu, \quad (94)$$

$$G_3^{\mu\nu\lambda}(k-p)_\mu(k-p)_\nu(k-p)_\lambda, \dots,$$

где g — метрический тензор, а G_2 , G_3 и т. д. — тензоры, построенные из компонент 4-векторов $Q_{\mathcal{Z}}$. Поскольку мы рассматриваем лишь очень узкие пакеты («сглаженные» δ -функции), интерес представляет поведение $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ именно в окрестности максимума, так что эта функция должна быть комбинацией *только* «строительных блоков» (94). Оставшиеся скалярные произведения ($Q_{\mathcal{Z}}Q_{\mathcal{Z}'}$) могут быть включены в определение скалярных параметров σ_i , задающих явный вид $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$; другими словами, эти параметры могут быть в общем случае скалярными функциями 4-импульсов частиц \mathcal{Z} , участвующих в цепочке процессов, формирующих ВП, а не просто константами. В результате ВП, построенные из тождественных одночастичных состояний $|\mathbf{p}\rangle$, но рожденные в разных реакциях и распадах (или цепочках реакций и распадов), *не являются, строго говоря, тождественными*. Как следствие, квантовые статистики таких «пакетов с памятью» могут сильно отличаться от статистики своих элементарных составляющих — состояний с определенными импульсами.

Чтобы избежать излишнего (хотя отнюдь не фатального) усложнения формализма, мы пожертвуем общностью, произвольно полагая в дальнейшем, что параметры σ_i являются эффективными константами, и, более того, мы ограничимся лишь простейшими ВП «без памяти»*, т. е. не зависящими от тензоров G_i , а значит, и от скрытых переменных. Разумеется, обрисованная здесь проблема не является характерной лишь для нашего подхода, но обычно при постулировании свойств ВП на нее либо не обращают внимания, либо сознательно игнорируют.

Принцип соответствия и нормировка волнового пакета. Потребуем, чтобы состояние (91) переходило в $|\mathbf{p}\rangle$ в плосковолновом пределе. Это условие мы называем *принципом соответствия*:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}).$$

Заметим теперь, что безразмерный лоренц-инвариантный интеграл

$$\int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k}' \phi(\mathbf{k}', \mathbf{p}')}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}}$$

не зависит от \mathbf{p} и, следовательно, может зависеть лишь от параметра σ и массы m . Но согласно принципу соответствия рассматриваемый интеграл

*Более сложная модель ВП была изучена в работе [100].

стремится к единице в пределе $\sigma = 0$, так что естественно положить его равным единице и при конечном (малом) σ :

$$\int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, 0)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = 1. \quad (95)$$

Хотя это «техническое» условие не является необходимым, оно дает удобную для практических расчетов нормировку формфакторов $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$.

Некоторые общие свойства волнового пакета. Перечислим наиболее важные свойства ВП.

- Поскольку частным случаем (90) является инвариантность $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ относительно вращений $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}' = \mathbf{O}\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_a \mapsto \mathbf{p}'_a = \mathbf{O}\mathbf{p}_a$, функции $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ и $\psi_x(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)$ также вращательно инвариантны.

- Модуль функции $\psi_x(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)$ инвариантен также относительно пространственных трансляций, но не инвариантен относительно временных трансляций.

- Из (92) видно, что $|\psi_x(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)| \rightarrow 0$ при $|x_a^0| \rightarrow \infty$, т. е. в конфигурационном пространстве ВП расплывается со временем.

- Поскольку величина $|\psi_x(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)|$ не зависит от \mathbf{x}_a , заключаем, что точка \mathbf{x}_a является центром сферической симметрии пакета; в дальнейшем будем называть эту точку центром пакета.

- Из (90) следует, что функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ может зависеть только от лоренц-инвариантной величины $k\rho$. Поэтому функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ симметрична относительно перестановки своих аргументов, т. е. $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}, \mathbf{k})$.

- Кроме того, очевидно, $\phi(\mathbf{k}, 0) = \phi(0, \mathbf{k}) = \tilde{\phi}(k_0)$, где $\tilde{\phi}(k_0)$ — вращательно инвариантная функция единственной переменной $k_0 = E_{\mathbf{k}}$.

- Еще одно простое и важное следствие (90) — независимость нормы (93) не только от пространственно-временной координаты x_a , но и от импульса \mathbf{p}_a .

3.2. Средний 4-импульс. Найдем теперь средние значения компонент 4-импульса $\langle P \rangle = (\langle P_0 \rangle, \langle \mathbf{P} \rangle)$ пакета, которые определяются стандартным квантово-механическим правилом

$$\langle P_\mu \rangle = \langle P_\mu(\mathbf{p}_a) \rangle = \frac{\langle \mathbf{p}_a, x_a | \hat{P}_\mu | \mathbf{p}_a, x_a \rangle}{\langle \mathbf{p}_a, x_a | \mathbf{p}_a, x_a \rangle}.$$

Подставляя сюда (88), получаем

$$\langle P_\mu(\mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{2mV_*} \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} k_\mu, \quad (96)$$

где знаменатель $2mV_*$ равен норме состояния $|\mathbf{p}_a, x_a\rangle$:

$$2mV_* = \int \frac{d\mathbf{k}|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k}|\phi(\mathbf{k}, 0)|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dk_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2. \quad (97)$$

Здесь и далее, если это не вызывает недоразумений, индекс a у переменных \mathbf{p}_a и x_a для краткости опускается. Из (96) и (97) видно, что средний 4-импульс $\langle P \rangle$ является интегралом движения, а величина V_* , имеющая размерность пространственного объема, вообще не зависит от импульса и пространственно-временной координаты.

В силу четности функции $\phi(\mathbf{k}, 0)$ из (96) очевидно, что $\langle \mathbf{P}(0) \rangle = 0$; другими словами, средний импульс обращается в нуль в с. с. о. пакета*, определяемой условием $\mathbf{p} = 0$. Отсюда следует, что средняя (эффeктивная) масса пакета, $\langle m \rangle$, равна среднему значению его энергии, т. е. нулевой компоненты 4-вектора $\langle P \rangle$ в этой системе:

$$\langle m \rangle = \langle P_0(0) \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}|\phi(\mathbf{k}, 0)|^2}{4(2\pi)^3 mV_*} = \frac{1}{8\pi^2 mV_*} \int_m^\infty dk_0 k_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2. \quad (98)$$

Используя (97) и записав (98) в виде отношения

$$\frac{\langle m \rangle}{m} = \frac{\int_m^\infty dk_0 k_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2}{\int_m^\infty dk_0 m \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2}, \quad (99)$$

видим, что $\langle m \rangle \geq m$, причем равенство $\langle m \rangle = m$ достигается лишь в плосковолновом пределе, т. е. ВП $|\mathbf{p}, x\rangle$ «тяжелее» составляющих его состояний с определенными импульсами. Этот эффект имеет совершенно общий характер и является одним из проявлений неаддитивности массы. В данном случае он обусловлен тем, что поперечные к вектору \mathbf{p} компоненты импульсов фоковских состояний $|\mathbf{k}\rangle$, из которых построен ВП, не дают вклада в среднее значение импульса ($\mathbf{p} \times \bar{\mathbf{P}} = 0$), но дают неотрицательный вклад в среднее значение энергии пакета**. Заметим, что среднее значение квадрата массы $\langle P^2 \rangle$ равно, естественно, m^2 , так что $\langle P \rangle^2 \geq \langle P^2 \rangle = m^2$.

*Этот факт легко понять и из простых размерных соображений: поскольку 3-вектор $\bar{\mathbf{P}}$ зависит от единственной векторной величины \mathbf{p} , то $\langle \mathbf{P} \rangle \propto \mathbf{p}$.

**Здесь можно усмотреть некоторую аналогию с известным эффектом возрастания массы газа в сосуде при его (однородном) нагревании: сосуд при этом не получает дополнительного импульса, но внутренняя энергия (а значит, и масса) газа увеличивается.

Покажем, что в среднем пакет находится на массовой поверхности. Из уже упоминавшихся размерных соображений следует, что $\langle P_0 \rangle = \kappa E_p$ и $\langle \mathbf{P} \rangle = \kappa' \mathbf{p}$, где κ и κ' — некоторые безразмерные величины, не зависящие от \mathbf{p} . Тогда из (96) получаем

$$p^\mu \langle P_\mu \rangle = \kappa E_p^2 - \kappa' \mathbf{p}^2 = \kappa m^2 + (\kappa - \kappa') \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2mV_*} \int \frac{d\mathbf{k} (pk) |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}}. \quad (100)$$

Поскольку левое и правое выражения в (100) являются лоренц-инвариантами, то $\kappa = \kappa'$. Положив теперь в (100) $\mathbf{p} = 0$ и учитывая определение в (98), найдем $\kappa = \langle m \rangle / m \geq 1$. Мы доказали тем самым, что

$$\langle P \rangle = (\langle P_0 \rangle, \langle \mathbf{P} \rangle) = \left(\frac{\langle m \rangle}{m} \right) (\mathbf{p}, E_p) \quad \text{и} \quad \langle P \rangle^2 = \langle P_\mu \rangle \langle P^\mu \rangle = \langle m \rangle^2.$$

Отсюда видим, в частности, что групповая скорость пакета $\nabla_{\langle \mathbf{P} \rangle} \langle P_0 \rangle = \langle \mathbf{P} \rangle / \langle P_0 \rangle$ совпадает с его наиболее вероятной скоростью $\mathbf{v}_p = \mathbf{p} / E_p$.

3.3. Волновой пакет для фермиона. В дальнейших расчетах в рамках S -матричного формализма КТП будут использоваться волновые пакеты фермионов, являющиеся линейными суперпозициями одночастичных фоковских состояний $|\mathbf{k}, s\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}s}^\dagger |0\rangle$ с лоренц-инвариантной нормой $\langle \mathbf{q}, r | \mathbf{k}, s \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Здесь $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$ и $a_{\mathbf{k}s}$ — стандартные операторы рождения и уничтожения частицы с массой $m > 0$, 3-импульсом \mathbf{k} и проекцией спина s , удовлетворяющие антикоммутиационным соотношениям

$$\{a_{\mathbf{q}r}, a_{\mathbf{k}s}\} = \{a_{\mathbf{q}r}^\dagger, a_{\mathbf{k}s}^\dagger\} = 0, \quad \{a_{\mathbf{q}r}, a_{\mathbf{k}s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}).$$

Построим ковариантный ВП фермиона, т. е. состояние, локализованное в конфигурационном и импульсном пространствах, обладающее трансформационными свойствами, аналогичными свойствам фоковских состояний, и превращающееся в фоковское состояние в плосковолновом пределе. Следуя аналогии с квантово-механическим случаем скалярной частицы, будем характеризовать ВП наиболее вероятным значением 3-импульса \mathbf{p} и проекцией спина s . Наиболее общая конструкция такого типа для фиксированного момента времени имеет вид

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \sum_r \Phi_{sr}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \boldsymbol{\sigma}) |\mathbf{k}, r\rangle, \quad (101)$$

где функции $\Phi_{sr}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \boldsymbol{\sigma})$ зависят не только от импульсных и дискретных спиновых переменных, но также от набора (конечного или бесконечного) не зависящих от этих переменных параметров $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$, которые задают конкретные свойства пакета. По определению импульсы \mathbf{p} и \mathbf{k} лежат

на массовой поверхности, т. е. $E_{\mathbf{p}}^2 - \mathbf{p}^2 = E_{\mathbf{k}}^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$. Потребуем, чтобы состояние (101) переходило в $|\mathbf{p}, s\rangle$ в плосковолновом пределе. Поскольку параметры σ_i всегда могут быть определены таким образом, чтобы соответствовать этому пределу при $\sigma_i \rightarrow 0$ ($\forall i$), мы можем сформулировать простой принцип соответствия:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_{sr}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma) = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}).$$

Правая часть данного уравнения представляет собой релятивистский скаляр, поэтому естественно считать, что функции Φ_{sr} тоже являются скалярами, причем $|\Phi_{sr}| \ll |\Phi_{ss}|$ для $r \neq s$. Считая, что параметры σ_i достаточно малы, можно аккумулировать эти требования в следующем простейшем анзаце:

$$\Phi_{sr}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma) = \delta_{sr} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma),$$

где $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma)$ — не зависящая от спина функция, такая, что

$$\phi(\mathbf{k}', \mathbf{p}'; \sigma) = \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma) \quad (p' = \Lambda p, \quad k' = \Lambda k)$$

и

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma) = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (102)$$

Таким образом, если хотя бы некоторые параметры σ_i , образующие набор σ , отличны от нуля (но все достаточно малы), функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma)$ с точностью до множителя представляет собой «размазанную» δ -функцию в импульсном пространстве. Конкретнее, как и в квантово-механическом случае, предполагаем, что $|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma)|$ имеет пик в точке $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ и быстро убывает вдали от узкой окрестности этой точки. Чтобы упростить обозначения, в дальнейшем не будем указывать явную зависимость $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \sigma)$ от набора параметров σ и запишем выражение (101) в виде

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) |\mathbf{k}, s\rangle. \quad (103)$$

Эта конструкция описывает ВП с наиболее вероятным импульсом \mathbf{p} , проекцией спина s и средней трехмерной координатой центра пакета, совпадающей с началом системы координат в момент времени $t = 0$. Эволюция ВП во времени однозначно задается действием на состояние ВП унитарного оператора трансляции. Для того чтобы возникающие в формализме объекты имели явно трансляционно-инвариантный вид (типа $f(x - y)$, а не $f(x + y)$), удобно задать начальное условие для ВП со средней трехмерной координатой $-\mathbf{x}$ в некоторый момент времени $-\mathbf{x}^0 < 0$. Тогда, действуя на состояние (103) оператором $e^{+i\hat{P}x}$, приходим к следующему выражению для ВП в произвольной

пространственно-временной точке x :

$$|\mathbf{p}, s, x\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{+i\mathbf{k}x} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) |\mathbf{k}, s\rangle. \quad (104)$$

Очевидно $e^{-i\hat{P}x} |\mathbf{p}, s, x\rangle = |\mathbf{p}, s, 0\rangle$. Отметим, что выражение (104) отличается от используемого в наших предыдущих работах [57, 58, 100] отсутствием фазового множителя e^{-ipx} .

Координатное представление. Рассмотрим свободное фермионное поле со спином $1/2$, полевой оператор которого имеет вид

$$\Psi(y) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s [a_{\mathbf{k}s} u_s(\mathbf{k}) e^{-iky} + b_{\mathbf{k}s}^\dagger v_s(\mathbf{k}) e^{iky}].$$

Состояние $\langle 0 | \Psi(y)$ нередко называют состоянием фермиона с определенной координатой, на что наталкивает следующее элементарное вычисление:

$$\langle 0 | \Psi(y) | \mathbf{p}, s \rangle = u_s(\mathbf{p}) e^{-ipy}, \quad (105)$$

дающее нам плоскую волну e^{-ipy} , умноженную на спинор $u_s(\mathbf{p})$. Аналогично определим координатную волновую функцию

$$\langle 0 | \Psi(y) | \mathbf{p}, s, x \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} u_s(\mathbf{k}) e^{-ik(y-x)} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \simeq u_s(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}, y-x), \quad (106)$$

где приближенное равенство соответствует узким пакетам. Условие применимости этого приближения может быть записано как

$$|i\nabla_{\mathbf{y}} \ln \psi(\mathbf{p}, x-y) + \mathbf{p}| \ll 2E_{\mathbf{p}}. \quad (107)$$

Лоренц-инвариантная функция ψ определена следующим образом:

$$\psi(\mathbf{p}, x) \equiv \psi(\mathbf{p}, x_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{-ikx}. \quad (108)$$

Очевидно, что функция (108) удовлетворяет (для любого \mathbf{p}) уравнению Клейна–Гордона

$$(\partial^2 + m^2) \psi(\mathbf{p}, x) = 0,$$

т.е. представляет собой релятивистский ВП в терминах стандартной теории рассеяния КТП. Ясно также, что в рамках сделанных предположений функция $\psi(\mathbf{p}, x)$ зависит только от *двух* независимых скалярных переменных x^2 и (px) .

Скалярная функция ψ не меняется при переходе в с. с. о. пакета ($\mathbf{p}_* = 0$), т. е.

$$\psi(\mathbf{p}, x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{0}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_*} = \psi(\mathbf{0}, x_*), \quad (109)$$

где 4-вектор $x_* = (x_*^0, \mathbf{x}_*)$ связан с $x = (x^0, \mathbf{x})$ преобразованием Лоренца вдоль направления $-\mathbf{p}$ (из лабораторной системы (л. с.) в с. с. о. пакета),

$$x_*^0 = \Gamma_{\mathbf{p}}(x_0 - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{x} + \Gamma_{\mathbf{p}} \left[\frac{\Gamma_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}\mathbf{x})}{\Gamma_{\mathbf{p}} + 1} - x_0 \right] \mathbf{v}_{\mathbf{p}}, \quad (110a)$$

а $\Gamma_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{p}}/m = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^2}$ — лоренц-фактор пакета. Поскольку $\psi(\mathbf{0}, x_*)$ — четная функция переменной \mathbf{x}_* , она может зависеть только от переменных x_*^0 и $|\mathbf{x}_*|$, которые выражаются через инварианты (px) и x^2 посредством соотношений

$$x_*^0 = \frac{(px)}{m}, \quad |\mathbf{x}_*|^2 = (x_*^0)^2 - x^2 = \frac{1}{m^2} [(px)^2 - m^2 x^2]. \quad (110б)$$

С помощью (110a) и (110б) нетрудно проверить также, что

$$|\mathbf{x}_*| = \Gamma_{\mathbf{p}} \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}x_0)^2 - (\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{x})^2} = \frac{1}{m} \sqrt{(E_{\mathbf{p}}\mathbf{x} - \mathbf{p}x_0)^2 - (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2}. \quad (111)$$

Эффективный объем волнового пакета. В соответствии с принятым условием (95) безразмерная функция $\psi(\mathbf{p}, x)$ не является нормированной волновой функцией. Это позволяет дать величине

$$V(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mathbf{x} |\psi(\mathbf{p}, x)|^2 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2E_{\mathbf{k}})^2} = \frac{V(\mathbf{0})}{\Gamma_{\mathbf{p}}} \quad (112)$$

интерпретацию трехмерного объема в пространстве, занимаемого ВП. Такая интерпретация будет тем точнее, чем уже ВП в импульсном пространстве. В таком приближении норму состояния можно представить в виде

$$\langle p, x | p, x \rangle = \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \simeq 2 \langle E_{\mathbf{p}} \rangle \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 (2E_{\mathbf{k}})^2} = 2 \langle E_{\mathbf{p}} \rangle V(\mathbf{p}). \quad (113)$$

Заметим, что в общем случае $V_* \neq V(\mathbf{0})$.

3.4. Перестановочная функция. Удобно ввести вспомогательный оператор рождения ВП

$$A_{\mathbf{p}s}^\dagger(x) = \int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}} 2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{k}r}^\dagger, \quad (114)$$

с помощью которого состояние (103) можно записать в виде, аналогичном плосковолновому пределу,

$$|\mathbf{p}, s, x\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} A_{\mathbf{p}s}^{\dagger}(x)|0\rangle. \quad (115)$$

Очевидно, что $A_{\mathbf{p}s}^{\dagger}(x)$ переходит в $a_{\mathbf{p}s}^{\dagger}$ в пределе $\sigma \rightarrow 0$.

Из определения операторов $A_{\mathbf{p}s}(x)$ и $A_{\mathbf{p}s}^{\dagger}(x)$ нетрудно вывести следующие (анти)коммутиационные соотношения:

$$\{a_{\mathbf{q}r}, A_{\mathbf{p}s}^{\dagger}(x)\} = \delta_{sr}(4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}})^{-1/2} e^{iqx}\phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (116a)$$

$$\{A_{\mathbf{q}r}(y), A_{\mathbf{p}s}(x)\} = \{A_{\mathbf{q}r}^{\dagger}(y), A_{\mathbf{p}s}^{\dagger}(x)\} = 0, \quad (116b)$$

$$\{A_{\mathbf{q}r}(y), A_{\mathbf{p}s}^{\dagger}(x)\} = \delta_{sr}(4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}})^{-1/2}\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y). \quad (116в)$$

Здесь мы ввели лоренц- и трансляционно-инвариантную перестановочную функцию

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \phi^*(\mathbf{k}, \mathbf{q}) e^{ik(x-y)}. \quad (117)$$

Из (104) и (116в) следует, что

$$\langle \mathbf{q}, r, y | \mathbf{p}, s, x \rangle = \delta_{sr} \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y). \quad (118)$$

Некоторые общие свойства перестановочной функции в (117) становятся особенно прозрачными в системе центра инерции (с.ц.и.) двух пакетов. Будем обозначать величины в этой системе подстрочным или, когда это не может быть спутано со знаком комплексного сопряжения, надстрочным индексом «*». Поскольку в с.ц.и. $\mathbf{p}_* + \mathbf{q}_* = 0$, имеем

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_* - y_*) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*) \phi^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*) e^{ik(x_* - y_*)}. \quad (119)$$

Благодаря характерному поведению формфактора $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ вблизи точки $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ следует ожидать, что модуль функции $\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_* - y_*)$ имеет острый максимум при $\mathbf{p}_* = 0$ и быстро исчезает при больших значениях $|\mathbf{p}_*|$, поскольку максимумы сомножителей $|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*)|$ и $|\phi(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*)|$ в подынтегральном выражении в (119) сильно разнесены в этом случае, и, значит, их произведение мало для *любых* значений переменной интегрирования \mathbf{k} . Эта ситуация схематически показана на рис. 2. Нетрудно видеть, что интеграл в (119) становится исчезающе малым и в случае, когда точки x_* и y_* сильно разнесены в пространстве, т.е. когда значение $|x_* - y_*|$ велико. Это происходит из-за быстро осциллирующего фактора $e^{-ik(x_* - y_*)}$ в подынтегральном выражении в (119).

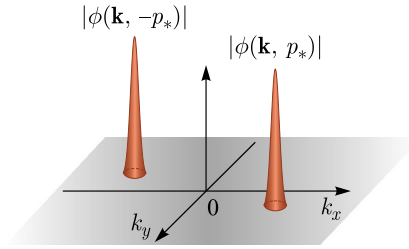


Рис. 2. Схематическая иллюстрация малости подынтегрального выражения в (119) при больших значениях импульса $|\mathbf{p}_*|$ в с. ц. и. пакетов

Для того чтобы вернуться в лабораторную (или любую другую) систему отсчета, необходимо выразить переменные в с. ц. и. через переменные в этой системе. Соответствующее преобразование Лоренца имеет вид

$$x_*^0 = \Gamma(x^0 - \mathbf{v}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{x} + \Gamma \left[\frac{\Gamma}{\Gamma + 1} (\mathbf{v}\mathbf{x}) - x^0 \right] \mathbf{v}$$

(и аналогично для y_* и $x_* - y_*$), где

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}} \quad \text{и} \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}_*} + E_{\mathbf{q}_*}}$$

означают, соответственно, скорость и лоренц-фактор с. ц. и. в л. с.; энергия и импульс в с. ц. и. даются следующими формулами:

$$E_{\mathbf{p}_*} = E_{\mathbf{q}_*} = \frac{1}{2} \sqrt{(p + q)^2} \equiv E_*, \quad |\mathbf{p}_*| = |\mathbf{q}_*| = \frac{1}{2} \sqrt{-(p - q)^2} \equiv P_*.$$

Из последнего равенства видно, что P_* убывает при $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ и возрастает с ростом $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$. Поэтому из вышеприведенных соображений следует, что функция $|\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y)|$ достигает своего максимума при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ и убывает при больших значениях $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$.

В заключение этого пункта уместно выписать кинематические тождества

$$2E_*x_*^0 = (p + q)x, \quad 2\mathbf{p}_*\mathbf{x}_* = (q - p)x, \quad \mathbf{v}\mathbf{x}_* = \Gamma(\mathbf{v}\mathbf{x} - \mathbf{v}^2x^0), \quad (120a)$$

$$\mathbf{x}_*^2 = \frac{[(p + q)x]^2}{(p + q)^2} - x^2 = \Gamma^2(|\mathbf{x} - \mathbf{v}x^0|^2 - |\mathbf{v} \times \mathbf{x}|^2), \quad (120b)$$

которые будут часто использоваться в дальнейшем изложении. Из последнего равенства следует, в частности, что

$$\mathbf{x}_* = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{v}x^0.$$

3.5. Многопакетные состояния. Эти состояния важны для построения теории нейтринных осцилляций в веществе с учетом эффектов когерентного

рассеяния нейтрино на частицах среды. Здесь мы предполагаем, что тождественные ВП, имеющие разные импульсы и проекции спинов, но отвечающие состояниям одного и того же квантового поля, характеризуются *одинаковыми* наборами параметров $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$. Поэтому ниже мы не указываем зависимость от σ в явном виде. Определим кет-состояние n тождественных ВП как

$$\begin{aligned} & |\mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n\rangle = \\ & = \left(\prod_{i=1}^n \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \right) A_{\mathbf{p}_1 s_1}^\dagger(x_1) A_{\mathbf{p}_2 s_2}^\dagger(x_2) \cdots A_{\mathbf{p}_n s_n}^\dagger(x_n) |0\rangle. \end{aligned} \quad (121)$$

Соответствующее бра-состояние получается из (121) с помощью эрмитового сопряжения. Очевидно, состояние (121) полностью симметрично (антисимметрично) для бозонов (фермионов) относительно перестановок $(\mathbf{p}_i, s_i, x_i) \leftrightarrow (\mathbf{p}_j, s_j, x_j)$ для любой пары индексов i, j ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$). Общее соотношение симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} & |\mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n\rangle = \\ & = (\pm 1)^{\eta_P} |\mathbf{p}_{i_1}, s_{i_1}, x_{i_1}; \mathbf{p}_{i_2}, s_{i_2}, x_{i_2}; \dots; \mathbf{p}_{i_n}, s_{i_n}, x_{i_n}\rangle. \end{aligned}$$

Здесь и ниже верхний знак относится к бозонам, а нижний — к фермионам, а η_P — четность перестановки

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти нормировку состояний (121), удобно ввести $n \times n$ матрицу

$$\mathbb{D}_n \equiv \mathbb{D}(\{\mathbf{q}, r, y\}_n, \{\mathbf{p}, s, x\}_n) = \|\delta_{s_i r_j} (\mp 1)^{i+j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j; x_i - y_j)\|.$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} M_n \equiv \langle \mathbf{q}_1, r_1, y_1; \mathbf{q}_2, r_2, y_2; \dots; \mathbf{q}_n, r_n, y_n | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \\ \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n \rangle = |\mathbb{D}_n|. \end{aligned} \quad (122)$$

Это соотношение тривиально в случае $n = 1$. Прямым вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} M_2 \equiv \langle \mathbf{q}_1, r_1, y_1; \mathbf{q}_2, r_2, y_2 | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2 \rangle = \\ = [\delta_{s_1 r_1} \delta_{s_2 r_2} \mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; x_1 - y_1) \mathcal{D}(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; x_2 - y_2) \pm \\ \pm \delta_{s_1 r_2} \delta_{s_2 r_1} \mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2; x_1 - y_2) \mathcal{D}(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1; x_2 - y_1)] = |\mathbb{D}_2|. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (122) справедливо и при $n = 2$. Рассмотрим теперь матричный элемент M_{n+1} для $n \geq 2$. Согласно (121) и (116б)

$$M_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n+1} 4E_{\mathbf{q}_i} E_{\mathbf{p}_i} \right)^{1/2} \langle 0 | A_{\mathbf{q}_1 r_1}(y_1) \cdots A_{\mathbf{q}_n r_n}(y_n) A_{\mathbf{q}_{n+1} r_{n+1}}(y_{n+1}) \times \\ \times A_{\mathbf{p}_{n+1} s_{n+1}}^\dagger(x_{n+1}) A_{\mathbf{p}_n s_n}^\dagger(x_n) \cdots A_{\mathbf{p}_1 s_1}^\dagger(x_1) | 0 \rangle.$$

Теперь после последовательных перестановок оператора $A_{\mathbf{p}_{n+1} s_{n+1}}^\dagger(x_{n+1})$ с операторами $A_{\mathbf{q}_n r_n}(y_n), \dots, A_{\mathbf{q}_1 r_1}(y_1)$ с применением (122) для n -пакетных матричных элементов и с учетом (анти)коммутационных соотношений (116в) находим

$$M_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n+1} 4E_{\mathbf{q}_i} E_{\mathbf{p}_i} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{n+1} (\pm 1)^{n+j+1} \delta_{s_{n+1} r_j} \times \\ \times (4E_{\mathbf{q}_j} E_{\mathbf{p}_{n+1}})^{-1/2} \mathcal{D}(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{q}_j; x_{n+1} - y_j) \times \\ \times \langle 0 | A_{\mathbf{q}_1 r_1}(y_1) \cdots A_{\mathbf{q}_{j-1} r_{j-1}}(y_{j-1}) A_{\mathbf{q}_{j+1} r_{j+1}}(y_{j+1}) \cdots \\ \cdots A_{\mathbf{q}_n r_n}(y_n) A_{\mathbf{q}_{n+1} r_{n+1}}(y_{n+1}) A_{\mathbf{p}_n s_n}^\dagger(x_n) \cdots A_{\mathbf{p}_1 s_1}^\dagger(x_1) | 0 \rangle.$$

После некоторых преобразований правая часть этого соотношения может быть переписана в компактной форме:

$$\sum_{j=1}^{n+1} (\pm 1)^{n+j+1} \delta_{s_{n+1} r_j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{q}_j; x_{n+1} - y_j) |\mathbb{D}_{n+1}^{(j)}|,$$

где $|\mathbb{D}_{n+1}^{(j)}|$ представляет собой минор порядка n определителя $|\mathbb{D}_{n+1}|$, возникающий при вычеркивании из последнего $(n+1)$ -й строки и j -го столбца. Сумма по j последнего выражения представляет собой не что иное, как минорное разложение определителя $|\mathbb{D}_{n+1}|$ по $(n+1)$ -й строке. Следовательно, $M_{n+1} = |\mathbb{D}_{n+1}|$, что завершает доказательство по индукции.

Итак, согласно (122) n -бозонный (n -фермионный) матричный элемент M_n пропорционален перманенту (детерминанту) матрицы $|\delta_{s_i r_j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j; x_i - y_j)|$. Перейдем, наконец, к проблеме нормировки. Поскольку

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y) = \mathcal{D}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}; y - x),$$

то матрица $\mathbb{D}(\{\mathbf{p}, s, x\}_n, \{\mathbf{p}, s, x\}_n)$ эрмитова. Следовательно, n -пакетный матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n \rangle \equiv \\ \equiv {}_n \langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_n \quad (123)$$

представляет собой *вещественную* полиномиальную комбинацию n -го порядка от перестановочных функций \mathcal{D} с разными аргументами. Например, для $n = 1, 2$ и 3 получаем

$$\begin{aligned} {}_1\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_1 &= 2mV_\star, \\ {}_2\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_2 &= (2mV_\star)^2 \pm \delta_{s_1 s_2} |\mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; x_1 - x_2)|^2, \\ {}_3\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_3 &= (2mV_\star)^3 \pm 2mV_\star \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \delta_{s_i s_j} |\mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j; x_i - x_j)|^2 + \\ &\quad + 2\text{Re} \prod_{1 \leq i < j \leq 3} [\delta_{s_i s_j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j; x_i - x_j)]. \end{aligned} \quad (124)$$

Свойства перестановочной функции, обсуждавшиеся в п. 3.4, позволяют проанализировать эти результаты в двух простых предельных случаях. Если все пространственно-временные точки x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) достаточно далеко разнесены или/и 3-импульсы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ сильно отличаются друг от друга по величине или направлению (*режим непересечения*), то из (122) следует, что

$${}_n\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_n \approx (2mV_\star)^n = \langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle^n.$$

В противоположной ситуации, когда пакеты, имеющие одинаковые проекции спинов, сильно пересекаются как в импульсном, так и в конфигурационном пространствах,

$${}_n\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_n \approx \begin{cases} n!(2mV_\star)^n & \text{для бозонов,} \\ 0 & \text{для фермионов.} \end{cases}$$

В обоих предельных случаях матричный элемент не зависит от импульсов, координат и проекций спина. Поведение n -пакетного матричного элемента в режиме пересечения есть просто проявление эффектов бозевского притяжения и принципа Паули для тождественных бозонов и фермионов соответственно. Гораздо менее тривиальным фактом является то, что формализм ВП подтверждает интуитивные ожидания того, что свободные тождественные бозоны (фермионы) с одинаковыми импульсами и одинаковыми проекциями спинов не конденсируются (могут прекрасно сосуществовать), если они разделены достаточно большими пространственно-временными интервалами. Этот физически прозрачный результат невозможно понять в рамках плосковолнового формализма КТП. Более того, принцип Паули иногда формулируется в категорической форме: «вероятность обнаружить два тождественных фермиона с одинаковыми импульсами и проекциями спина равна нулю». Мы видим, что это, вообще говоря, не так, если только речь идет не о частицах с определенными значениями импульсов — идеализированных математических объектах, существующих сразу во всем бесконечном пространстве-времени, а

о ВП — объектах, локализованных в конечных пространственно-временных областях и характеризующихся наиболее вероятными значениями импульсов. В п. 4.5 мы вернемся к этому концептуально важному вопросу и поясним точное значение слов «достаточно большой пространственно-временной интервал», воспользовавшись простой моделью релятивистского ВП.

4. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ГАУССОВЫ ПАКЕТЫ

4.1. Функция $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$. Здесь мы подробно исследуем простейшую, но важную для развиваемого формализма модель релятивистского гауссова пакета (РГП), применимую для описания достаточно узких (в импульсном пространстве) сферически-симметричных в собственной системе отсчета (с. с. о.) волновых пакетов с единственным максимумом*. Поскольку для таких пакетов функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ по сути представляет собой (с точностью до известного положительно определенного фактора) «размазанную» δ -функцию, мы можем без ограничения общности считать, что $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) > 0$. Предполагаем, что формфактор $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ зависит от единственной скалярной переменной $(k - p)^2$. Легко убедиться, что $(k - p)^2 \leq 0$. Действительно, переходя в с. с. о. пакета ($\mathbf{p}_* = 0$) и учитывая, что $E_{\mathbf{k}_*} \geq m$, имеем

$$(k - p)^2 = (k_* - p_*)^2 = -2m(E_{\mathbf{k}_*} - m) \leq 0.$$

Отметим также, что $(k - p)^2 \approx -(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + [\mathbf{v}_p(\mathbf{k} - \mathbf{p})]^2$ при $\mathbf{k} \sim \mathbf{p}$. Поскольку функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ имеет максимум в точке $\mathbf{k} = \mathbf{p}$, можно наложить на нее естественное дополнительное условие

$$\left. \frac{d \ln \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{d(k - p)^2} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} \equiv \frac{1}{4\sigma^2} > 0, \quad \sigma = \text{const.}$$

Тогда в достаточно малой окрестности максимума функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx N_\sigma \exp \left[\frac{(k - p)^2}{4\sigma^2} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (125)$$

*Модель РГП была предложена в работе [57]. Ее детальное математическое изучение и обобщение дано в [101]. Интересные приложения РГП (вне рамок нейтринной физики) рассмотрены в [102]. В [100] предложен другой класс моделей — ковариантный асимметричный ВП (АВП); показано, в частности, что АВП ни при каких обстоятельствах не совпадает с РГП, хотя и обладает всеми свойствами, необходимыми для ковариантного описания локализованных «частицеподобных» квантовых состояний. Также показано, что рассматриваемый ниже ВП является единственным релятивистским пакетом «без памяти», т. е. не зависящим от 4-импульсов «родительских» состояний (частиц), участвующих в реакциях или распадах, порождающих ВП (см. п. 3.1). Здесь мы следуем логике [57], достаточной для целей данной работы.

Будем называть состояния с такими формфакторами релятивистскими гауссовыми пакетами (РГП) по аналогии с нековариантными нерелятивистскими гауссовыми пакетами в (50) (НГП) с формфактором

$$\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2}\right],$$

нормированным условием

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\varphi_G(\mathbf{k})|^2 = 1.$$

Ниже будет показано, что свойства РГП существенно отличаются от свойств НГП. Нормировочная константа N_σ в (125) может быть найдена из условия (95), согласно которому

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_\sigma} &= \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{k}|}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{k}^2}{E_{\mathbf{k}}} \exp\left(\frac{m^2 - mE_{\mathbf{k}}}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \int_1^\infty d\Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1} \exp\left[-\frac{m^2}{2\sigma^2}(\Gamma - 1)\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$N_\sigma = \phi_G(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^2 \exp(-m^2/2\sigma^2)}{\sigma^2 K_1(m^2/2\sigma^2)}, \quad (126)$$

где

$$K_1(z) = z \int_1^\infty dt e^{-zt} \sqrt{t^2 - 1} \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

обозначает модифицированную функцию Бесселя 3-го рода порядка 1. Теперь можем переписать (125) в виде

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^2}{\sigma^2 K_1(m^2/2\sigma^2)} \exp\left(-\frac{E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{p}} - \mathbf{k}\mathbf{p}}{2\sigma^2}\right). \quad (127)$$

При естественном (принимаемом далее по умолчанию) требовании

$$\sigma^2 \ll m^2, \quad (128)$$

с использованием известного асимптотического разложения для функции $K_1(z)$, справедливого при больших $|z|$ [103],

$$K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{3}{8z} + \frac{15}{2(8z)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right)\right] \quad \left(|\arg z| < \frac{3\pi}{2}\right), \quad (129)$$

выражение (127) может быть переписано как

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^{3/2}}{\sigma^2} \frac{m}{\sigma} \exp \left[\frac{(k-p)^2}{4\sigma^2} \right] \left[1 + \frac{3\sigma^2}{4m^2} + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^4}{m^4} \right) \right]. \quad (130)$$

В нерелятивистском случае ($(|\mathbf{k}| + |\mathbf{p}|)^2 \ll 4m^2$) получаем из (130)

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx \frac{2\pi^{3/2}}{\sigma^2} \frac{m}{\sigma} \exp \left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2} \right] \equiv \phi_G^{\text{NR}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad (131)$$

что совпадает (с точностью до нормировки) с формфактором НГП $\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$. Однако при релятивистских импульсах разница между $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ и $\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ может быть сколь угодно большой (безотносительно разницы в нормировке). Так, в ультрарелятивистском пределе ($\mathbf{p}^2 \gg m^2$, $\mathbf{k}^2 \gg m^2$) функция (130) ведет себя следующим образом:

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx \frac{2\pi^{3/2}}{\sigma^2} \frac{m}{\sigma} \exp \left[-\frac{m^2(|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|)^2}{4\sigma^2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|} - \frac{(1 - \cos \vartheta)|\mathbf{k}||\mathbf{p}|}{2\sigma^2} \right] \equiv \phi_G^{\text{UR}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}),$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{p} . В частности, при $\vartheta = 0$ и $\pi/2$ имеем

$$\phi_G^{\text{UR}}|_{\vartheta=0} \propto \exp \left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2\Gamma_{\mathbf{k}}\Gamma_{\mathbf{p}}} \right] \quad \text{и} \quad \phi_G^{\text{UR}}|_{\vartheta=\pi/2} \propto \exp \left[-\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|}{2\sigma^2} \right].$$

В первом примере, как видим, релятивистский эффект сводится к уширению пакета (по сравнению с нерелятивистским случаем) в импульсном пространстве ($\sigma \mapsto \sigma\sqrt{\Gamma_{\mathbf{k}}\Gamma_{\mathbf{p}}}$). Этот эффект существен для всех процессов рождения и поглощения (рассеяния) нейтрино, проходящих с участием релятивистских частиц.

Чтобы проиллюстрировать важность правильной нормировки, полезно проверить в явном виде, что предел $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ при $\sigma \rightarrow 0$ в самом деле дается принципом соответствия. Для этого достаточно доказать, что для любой гладкой функции $F(\mathbf{k})$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k} \phi_G(\mathbf{k}, 0)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} F(\mathbf{k}) = F(\mathbf{0}). \quad (132)$$

Левая часть последнего равенства может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{m}{(4\pi)^{3/2} \sigma^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \int_0^{\infty} d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{E_{\mathbf{k}}} \exp \left[-\frac{m^2}{2\sigma^2} \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{m} - 1 \right) \right] F(\mathbf{k}) = \\ & = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{m^2}{4\pi\sigma^2} \right)^{3/2} \int d\Omega_{\mathbf{n}} \int_0^{\infty} dt \exp \left(-\frac{m^2 t}{2\sigma^2} \right) \sqrt{t(t+2)} F \left(m\sqrt{t(t+2)} \mathbf{n} \right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Для оценки получившегося интеграла по t можно использовать известную асимптотическую формулу (см., например, [104])

$$\int_0^{\infty} dt t^{a-1} e^{-\nu t} f(t) \sim \nu^{-a} \Gamma(a) f(0) [1 + o(1)] \quad (a > 0, \nu \rightarrow \infty), \quad (133)$$

справедливу для произвольной непрерывной функции $f(t)$, $t \in [0, \infty)$. Если принять во внимание, что в нашем случае

$$a = \frac{3}{2}, \quad \nu = \frac{m^2}{2\sigma^2} \quad \text{и} \quad f(t) = \sqrt{t+2} F\left(m\sqrt{t(t+2)}\mathbf{n}\right),$$

то тождество в (132) становится очевидным.

В результате видим, что функция $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ представляет собой простейшую модель формфактора, удовлетворяющего всем условиям, накладываемым на функцию $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ общего вида. Для лучшего понимания свойств РПП получим явные формулы для его средней и среднеквадратичной скоростей.

4.2. Средняя и среднеквадратичная скорости. Начнем с определений

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2mV_*} \int \frac{d\mathbf{k} \mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}^2}, \quad \langle \mathbf{v}^2 \rangle = \frac{1}{2mV_*} \int \frac{d\mathbf{k} \mathbf{k}^2 |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}^3}. \quad (134)$$

Очевидно, что $\langle \mathbf{v} \rangle \propto \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \propto \mathbf{p}$, поэтому достаточно найти проекцию средней скорости на направление импульса $\mathbf{n}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Интегрирование по угловым переменным дает

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{n}_{\mathbf{p}} &= \frac{\pi^2 \lambda^2}{4m^5 V_* K_1^2(\lambda/2)} \int_0^{\infty} \frac{d|\mathbf{k}||\mathbf{k}|^3}{E_{\mathbf{k}}^2} \int_{-1}^1 d \cos \theta \cos \theta \exp \left[-\frac{\lambda(pk)}{m^2} \right] = \\ &= \frac{m^2}{2\lambda |\mathbf{p}|^2 K_1(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|\mathbf{k}||\mathbf{k}|}{E_{\mathbf{k}}^2} \left(\lambda \frac{|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}{m^2} - 1 \right) \exp \left[-\frac{\lambda(E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{k}} - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|)}{m^2} \right] \end{aligned}$$

($\lambda = m^2/\sigma^2$); здесь предполагается, что $|\mathbf{p}| > 0$, так как случай $|\mathbf{p}| = 0$ тривиален. Дальнейший расчет проведем методом перевала, воспользовавшись известной теоремой об асимптотическом разложении интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp[-\lambda S(t)], \quad f(t), S(t) \in \mathbb{C}(-\infty, \infty) \quad (135)$$

(см., например, [104, с. 41]), согласно которой

$$F(\lambda) \sim \exp[-\lambda S(t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{b_{2n}(\lambda)}{(2n)!} \left[\frac{2}{\lambda S''(t_0)} \right]^{n+1/2}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (136)$$

где

$$b_n(\lambda) = \frac{d^n}{dt^n} \{f(t) \exp[\lambda h(t, t_0)]\} \Big|_{t=t_0},$$

$$h(t, t_0) = S(t_0) - S(t) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 S''(t_0),$$

t_0 — единственная стационарная точка функции $S(t)$ ($-\infty < t_0 < \infty$), $S''(t_0) > 0$ и $f(t), S(t) \in \mathbb{C}^\infty$ в окрестности t_0 . Все перечисленные условия очевидно выполнены для нашего частного случая*. Результат имеет вид

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_p \left[1 - \frac{1}{\Gamma_p^2 \lambda} + \frac{7 - 6\mathbf{v}_p^2}{2\Gamma_p^2 \lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \right]. \quad (137)$$

Как и следовало ожидать, средняя скорость всегда меньше наиболее вероятной. В нерелятивистском случае $\mathbf{v}_p - \langle \mathbf{v} \rangle \approx \mathbf{v}_p/\lambda$, а в ультрарелятивистском $\mathbf{v}_p - \langle \mathbf{v} \rangle \approx \mathbf{n}_p/(\Gamma_p^2 \lambda)$. Аналогичный расчет для среднеквадратичной скорости и ее продольной и поперечной составляющих дает

$$\langle v^2 \rangle = \mathbf{v}_p^2 + \frac{3}{\Gamma_p^4 \lambda} - \frac{3(7 - 10\mathbf{v}_p^2)}{2\Gamma_p^4 \lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}), \quad (138a)$$

$$\langle v_L^2 \rangle = \langle (\mathbf{v} \mathbf{n}_p)^2 \rangle = \mathbf{v}_p^2 + \frac{1 - 3\mathbf{v}_p^2}{\Gamma_p^2 \lambda} - \frac{7 - 39\mathbf{v}_p^2 + 30\mathbf{v}_p^4}{2\Gamma_p^2 \lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}), \quad (138b)$$

$$\langle v_T^2 \rangle = \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_p)^2 \rangle = \frac{2}{\Gamma_p^2 \lambda} - \frac{7 - 6\mathbf{v}_p^2}{\Gamma_p^2 \lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}). \quad (138b)$$

В нерелятивистском случае $\langle v^2 \rangle - \mathbf{v}_p^2 \approx 3/\lambda$, т. е. ВП испытывает «дрожания», хотя и совершенно ничтожные. При ультрарелятивистском движении даже такие «дрожания» исчезают и ВП ведет себя как классическая частица. Из (137) и (138a) получаем

$$\langle v^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2 = \frac{3}{\Gamma_p^2 \lambda} \left[1 - \frac{\mathbf{v}_p^2}{3} - \left(7 - \frac{35\mathbf{v}_p^2}{3} + \frac{16\mathbf{v}_p^4}{3} \right) \frac{1}{2\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \right], \quad (139)$$

так что в нерелятивистском пределе разность (139) равна $3/\lambda$, а в ультрарелятивистском стремится к нулю как $2/(\Gamma_p^2 \lambda)$. Модель РГП позволяет в деталях изучить свойства волновой и перестановочной функций.

*Линейная зависимость функции $f(t)$ от параметра λ не препятствует использованию теоремы.

4.3. Волновая функция $\psi_G(\mathbf{p}, x)$. Подставляя (127) в (109) и интегрируя по направлениям вектора \mathbf{k} , получаем после простых преобразований

$$\psi(\mathbf{0}, x_*) = \int_m^\infty dE \exp \left[-\frac{E}{m} \left(\frac{m^2}{2\sigma^2} + imx_*^0 \right) \right] \frac{\sin(|\mathbf{x}_*| \sqrt{E^2 - m^2})}{2\sigma^2 |\mathbf{x}_*| K_1(m^2/2\sigma^2)}.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью известного представления для функции K_1

$$\int_a^\infty dt e^{-bt} \sin(c\sqrt{t^2 - a^2}) = \frac{ac}{\sqrt{b^2 + c^2}} K_1(a\sqrt{b^2 + c^2}), \quad (140)$$

справедливого для $a > 0$ и $\text{Re } b > |\text{Im } c|$ (см., например, [105, с. 460, (2.5.42.3)]). Итак, мы приходим к компактному выражению

$$\psi(\mathbf{p}, x) = \frac{K_1(\zeta m^2/2\sigma^2)}{\zeta K_1(m^2/2\sigma^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_G(\mathbf{p}, x), \quad (141)$$

в котором фигурирует безразмерная лоренц-инвариантная переменная

$$\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma^2}{m^2} [\sigma^2 x_*^2 - imx_*^0]} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma^2}{m^2} [\sigma^2 x^2 - i(px)]}. \quad (142)$$

Здесь и в дальнейшем знак квадратного корня понимается в смысле его главного значения, а $x_*^2 = (x_*^0)^2 - \mathbf{x}_*^2$.

Полезно убедиться, что функция (141) удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона. Учитывая, что $K'_0(z) = -K_1(z)$ и $K'_1(z) = -K_0(z) - K_1(z)/z$, находим

$$\partial_\mu \left[\frac{K_1(z)}{z} \right] = - \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) \right] \frac{\partial_\mu z}{z},$$

где $z = m^2 \zeta / (2\sigma^2)$. Отсюда

$$\square \left[\frac{K_1(z)}{z} \right] = - \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) \right] \frac{\square z}{z} - \left[\frac{3}{z} K_0(z) + \left(1 + \frac{6}{z^2} \right) K_1(z) \right] \frac{(\partial_\mu z)(\partial^\mu z)}{z}. \quad (143)$$

Поскольку

$$\partial_\mu z = -\frac{m^2}{\sigma^2 z} \left(\sigma^2 x_\mu - \frac{i}{2} p_\mu \right),$$

то

$$\square z = -\partial_\mu \partial^\mu z = \frac{3m^2}{z}, \quad (\partial_\mu z)(\partial^\mu z) = -m^2.$$

Подставив эти тождества в (143) и учитывая (141), убеждаемся, что

$$(\partial^2 + m^2)\psi_G = 0.$$

Модуль и фаза переменной (142) даются следующими формулами:

$$|\zeta|^4 = \left(1 - \frac{4\sigma^4 x_\star^2}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{4\sigma^2 x_\star^0}{m}\right)^2 = 1 + \frac{8\sigma^4}{m^2}[(x_\star^0)^2 + \mathbf{x}_\star^2] + \left(\frac{4\sigma^4 x_\star^2}{m^2}\right)^2, \quad (144)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{4\sigma^2 x_\star^0}{m|\zeta|^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{m^2 - 4\sigma^4 x_\star^2}{m^2|\zeta|^2}. \quad (145)$$

Из последнего равенства в (144) видно, что для любого x_\star

$$|\zeta| \geq 1, \quad (146)$$

причем равенство имеет место только в центре пакета ($x_\star^0 = 0$, $|\mathbf{x}_\star| = 0$). Используя (145) и соображения аналитичности, нетрудно показать, что

$$|\varphi| < \pi/2. \quad (147)$$

В самом деле, из (145) следует, что $\varphi \rightarrow \mp\pi$ при $x_\star^0 \rightarrow \pm\infty$. Поскольку это единственный нуль фазы φ при $|\zeta| < \infty$, из непрерывности φ вытекает, что $2\varphi \rightarrow \mp\pi$ при $x_\star^0 \rightarrow \pm\infty$.

Рис. 3 поясняет поведение $|\zeta|$ и φ как функций двух независимых безразмерных переменных $\sigma^2 x_\star^0/m$ и $\sigma^2 |\mathbf{x}_\star|/m$. Можно показать, что функция $\psi_G(\mathbf{p}, x)$ не имеет нулей при $1 \leq |\zeta| < \infty$ и стремится к единице (нулю) при $\zeta \rightarrow 1$ ($\zeta \rightarrow \infty$) в секторе (147). Из свойств параметра ζ следует, в частности, что $\psi_G(\mathbf{0}, x_\star) \rightarrow 0$, если $|x_\star^0| \rightarrow \infty$ (при фиксированном \mathbf{x}_\star) или $|\mathbf{x}_\star| \rightarrow \infty$ (при фиксированном x_\star^0).

Поведение волновой функции $\psi_G(\mathbf{0}, x_\star)$ кардинально зависит от величины отношения σ/m . В качестве примера на рис. 4 показан профиль модуля функции $\psi_G(\mathbf{0}, x_\star)$ (рис. а) и увеличенный фрагмент этой функции в окрестности ее максимума (рис. б). Расчет сделан с $\sigma/m = 0,1$ в терминах безразмерных переменных $\sigma^2 x_\star^0/m$ и $\sigma^2 x_\star^3/m$, причем система координат выбрана так, что вектор \mathbf{x}_\star направлен вдоль третьей оси. Отметим, что такое значение отношения σ/m совершенно нереалистично и выбрано лишь для удобства графического представления, так как при $\sigma/m \ll 0,1$ детали поведения $|\psi_G(\mathbf{0}, x_\star)|$ были бы неразличимы. Разумеется, $|\psi_G(\mathbf{0}, x_\star)|$ — четная функция обеих переменных; это объясняет симметрию профиля $|\psi_G(\mathbf{0}, x_\star)|$

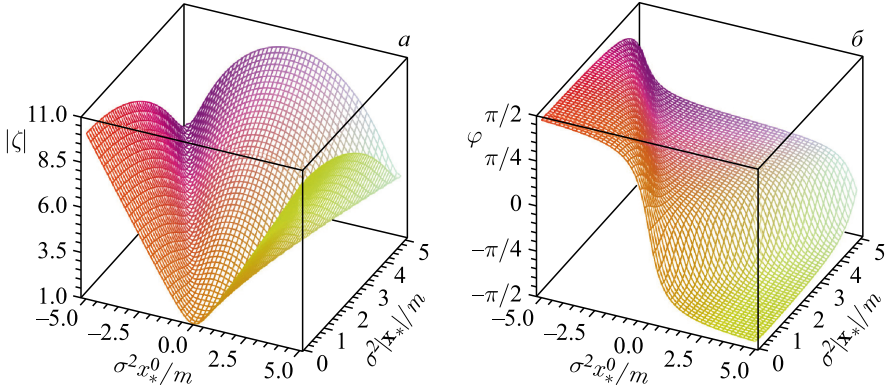


Рис. 3. 3-мерные графики функций $|\zeta|$ (а) и φ (б) в переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 |x_*|/m$

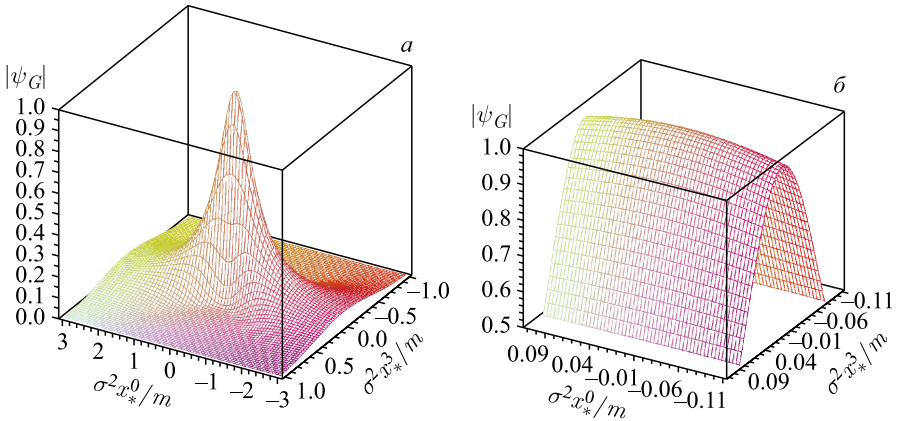


Рис. 4. 3-мерный график функции $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ (а) и ее увеличенный фрагмент в окрестности максимума (б) в переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 x_*^3/m$ (предполагается, что $x_* = (0, 0, x_*^3)$). Расчет выполнен с $\sigma = 0,1m$

на рис. 4. В достаточно малой окрестности максимума $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$, а также при уменьшении значения σ/m профиль функции $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ относительно слабо меняется вдоль временной оси, но быстро уплощается вдоль пространственной оси. Рис. 4 позволяет понять, почему эффективный объем пакета, определенный согласно (97), не зависит от времени, несмотря на то, что сама волновая функция $\psi_G(\mathbf{0}, x_*)$ асимптотически стремится к нулю при $|x_*^0| \rightarrow \infty$. Причина этого заключается в том, что со временем пакет расплывается в пространстве так, что это расплывание в точности компенсирует убывание $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$. В результате этой компенсации нормировка пакета

остается неизменной. Таким образом, распыление релятивистского ВП вовсе не означает, что пакет исчезает, как это явление иногда интерпретируется в учебниках по квантовой механике.

4.4. Перестановочная функция $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x)$. Подставляя (127) в определение перестановочной функции (117), записанной в с. с. о. пакета, и интегрируя по угловым переменным, получаем

$$\frac{\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)}{2mV_*} = \int_m^\infty dE \exp \left[-\frac{E}{m} \left(\frac{mE_*}{\sigma^2} + imx_*^0 \right) \right] \frac{\sin(|\mathbf{x}_*| \sqrt{E^2 - m^2})}{\sigma^2 |\mathbf{x}_*| K_1(m^2/\sigma^2)}.$$

Оставшийся интеграл по E легко вычислить, используя (140); получаем (ср. с (141))

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) = 2mV_* \frac{K_1(zm^2/\sigma^2)}{zK_1(m^2/\sigma^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x). \quad (148)$$

Инвариантная безразмерная переменная z определена как

$$z = \frac{E_*}{m} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{E_*^2} [\sigma^2 x_*^2 - 2iE_* x_*^0]} = \frac{1}{2m} \sqrt{(p+q)^2 - 4\sigma^2 [\sigma^2 x^2 - i(p+q)x]}. \quad (149)$$

При выводе последнего равенства мы использовали соотношения между кинематическими переменными в с. с. о. и л. с., приведенными в конце п. 3.4. Модуль и фаза переменной z даются следующими формулами:

$$|z|^4 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{pq - 2\sigma^4 x^2}{m^2} \right)^2 + \left[\frac{\sigma^2(p+q)x}{m^2} \right]^2, \\ \arg z = -\frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\sigma^2(p+q)x}{m^2 |z|^2} \right].$$

Используя эти соотношения, можно доказать, что

$$|z| \geq E_*/m \geq 1 \quad \text{и} \quad |\arg z| < \pi/2. \quad (150)$$

Найденные формулы для волновой и перестановочной функций позволяют детально изучить свойства ВП и многопакетных состояний. Однако даже в столь простой модели, как РГП, расчеты интересующих нас макроскопических фейнмановских диаграмм становятся технически довольно сложными из-за необходимости вычислять многомерные интегралы от произведений функций Бесселя, зависящих от комплексных переменных. Кроме того, для большинства практически важных случаев интересен режим, в котором можно пренебречь распылением волновых пакетов. Такой режим характерен, например, для частиц не слишком разреженного газа, если среднее время

между двумя последовательными столкновениями частицы много меньше эффективного времени расплывания пакета, описывающего ее состояние между столкновениями. Аналогичный случай представляют собой нестабильные частицы, время жизни которых мало по сравнению со временем расплывания пакета. Ниже рассмотрим соответствующее приближение в модели РГП.

4.5. Приближение нерасплывающихся пакетов. Определим физические условия, при которых допустимо пренебречь расплыванием РГП*.

Благодаря неравенствам (128), (146) и (147) можно использовать асимптотическое разложение (129), которое дает

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) = \frac{1}{\zeta^{3/2}} \exp \left[\frac{m^2(1-\zeta)}{2\sigma^2} \right] \left[1 - \frac{3\sigma^2}{4m^2} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{3\sigma^4}{32m^4} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \left(11 + \frac{5}{\zeta} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^6}{m^6} \right) \right]. \quad (151)$$

Эта формула справедлива при любых \mathbf{p} и x , но она все еще слишком сложна для наших целей. При дополнительных ограничениях выражение (151) можно значительно упростить, разлагая переменную ζ по степеням малого параметра σ^2/m^2 . В с. с. о. пакета находим

$$\ln [\psi_G(\mathbf{0}, x_*)] = -imx_*^0 \left[1 + \frac{3\sigma^2}{m^2} - \frac{\sigma^4}{m^4} \left(2m^2 \mathbf{x}_*^2 - \frac{3}{2} \right) \right] - \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 - \frac{3\sigma^4}{m^2} [(x_*^0)^2 + \mathbf{x}_*^2] + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^6}{m^6} \right). \quad (152)$$

Элементарный анализ подсказывает, что этот асимптотический ряд можно оборвать, оставив лишь лидирующие по σ^2/m^2 поправки, при выполнении следующих (необходимых и достаточных) условий:

$$\sigma^2(x_*^0)^2 \ll m^2/\sigma^2 \quad \text{и} \quad \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \ll m^2/\sigma^2. \quad (153)$$

Ясно, что пространственно-временная область, определяемая этими условиями, становится произвольно широкой при $\sigma \rightarrow 0$. При выполнении (153) формула (152) переходит в простое и физически прозрачное выражение

$$\psi_G(\mathbf{0}, x_*) = \exp(-imx_*^0 - \sigma^2 |\mathbf{x}_*|^2). \quad (154)$$

*Понятно, что нерасплывающиеся ВП проще всего ассоциировать с (квази)стабильными частицами (т. е. локализованными объектами) и использовать в качестве асимптотически свободных состояний in- и out-полей в S -матричном формализме КТП вместо обычных плоских волн, заполняющих все пространство-время и неспособных поэтому служить адекватной математической моделью частиц.

Видно, в частности, что в с. с. о. ВП

— $\psi_G(\mathbf{0}, x_*)$ ведет себя как плоская волна при $x_*^2 \ll 1/\sigma^2$, т. е. вблизи центра пакета;

— $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ не зависит от временной переменной x_*^0 , т. е., как и требовалось, РГП (154) не расплывается;

— $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ падает по гауссову закону на больших расстояниях от центра пакета, $|x_*| \gtrsim 1/\sigma$; заметим, что последнее неравенство не противоречит второму из ограничений (153).

Используя кинематические соотношения (110а) и (111), запишем функцию ψ_G в л. с.:

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) = \exp \{ -iE(x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x}) - \sigma^2 \Gamma_p^2 [(\mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0)^2 - (\mathbf{v}_p \times \mathbf{x})^2] \} = (155a)$$

$$= \exp [-iE(x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x}) - \sigma^2 \Gamma_p^2 (x_{\parallel} - \mathbf{v}_p x_0)^2 - \sigma^2 \mathbf{x}_{\perp}^2], \quad (155b)$$

где x_{\parallel} и x_{\perp} — соответственно продольная и поперечная по отношению к вектору скорости \mathbf{v}_p компоненты вектора \mathbf{x} ($\mathbf{x} = x_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$). Из (155b) видно, в частности, что РГП испытывает релятивистское сжатие вдоль направления скорости в конфигурационном пространстве. Это согласуется с вышеотмеченным релятивистским уширением пакета в импульсном пространстве для фоковских составляющих, импульсы которых сонаправлены вектору \mathbf{p} (см. п. 4.1).

Из (155a) следует, что функция $|\psi_G(\mathbf{p}, x)|$ инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований $x \mapsto x + p\theta/E_p$ с $|\theta| < \infty$ или, в покомпонентной записи, $x_0 \mapsto x_0 + \theta$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}_p \theta$. Отсюда находим, в частности, что $|\psi_G(\mathbf{p}, x_0, \mathbf{x})| = |\psi_G(\mathbf{p}, 0, \mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0)|$. Очевидно также, что $|\psi_G(\mathbf{p}, x)| = 1$ и $\arg [\psi_G(\mathbf{p}, x)] = mx_0/\Gamma_p$ вдоль классической мировой линии $\mathbf{x} = \mathbf{v}_p x_0$, но $|\psi_G(\mathbf{p}, x)| < 1$ при любом отклонении от нее. Вероятность квантового отклонения $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0$ от классического движения подавлена фактором

$$\exp \{ -2\sigma^2 [(\delta \mathbf{x})^2 + \Gamma_p^2 (\mathbf{v}_p \delta \mathbf{x})^2] \}.$$

Как видим, поперечные (по отношению к направлению вектора скорости \mathbf{v}_p) отклонения подавлены в меньшей степени, чем продольные, а для ультрарелятивистских пакетов отклонения от классических траекторий могут быть только поперечными, т. е. квантовые движения пакетов происходят внутри классических световых конусов.

Нерелятивистский предел, отвечающий приближению (131) для функции $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, дается выражением

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) \approx \exp [-im(x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x}) - \sigma^2 |\mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0|^2] \equiv \psi_G^{\text{NR}}(\mathbf{p}, x), \quad |\mathbf{v}_p|^2 \ll 1.$$

«Классическая» фаза нерелятивистской волновой функции ψ_G^{NR} не зависит от скорости ($x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x} = x_0/\Gamma^2 \approx x_0$ при $\mathbf{x} = \mathbf{v}_p x_0$ и $\mathbf{v}_p^2 \ll 1$).

С помощью соотношения (110б) можно переписать неравенства (153) и выражение (154) в явно релятивистски-инвариантной форме:

$$(px)^2 \ll \frac{m^4}{\sigma^4} \quad \text{и} \quad (px)^2 - m^2 x^2 \ll \frac{m^4}{\sigma^4}, \quad (156)$$

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) = \exp \left\{ -i(px) - \frac{\sigma^2}{m^2} [(px)^2 - m^2 x^2] \right\}. \quad (157)$$

В качестве одного из следствий (156) получаем условие $\sigma^2 |x^2| \ll m^2 / \sigma^2$. В дальнейшем будем называть рассматриваемое приближение стабильным релятивистским гауссовым пакетом (СРГП). Подействовав на (157) оператором Клейна–Гордона, получаем

$$[\partial^2 + m^2(1 - \Delta)]\psi_G(\mathbf{p}, x) = 0, \quad \Delta = 6 \frac{\sigma^2}{m^2} - \frac{4\sigma^4}{m^4} [(px)^2 - m^2 x^2].$$

Таким образом, функция ψ_G приближенно удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона (т. е. $|\Delta| \ll 1$) при выполнении условий (128) и (156), задающих область применимости СРГП-приближения. Ниже будет показано, что эта область достаточно широка для наших целей.

Отметим, что учет вкладов $\mathcal{O}(\sigma^4/m^4)$ в (152) приводит к еще более быстрому убыванию $|\psi_G|$ с расстоянием при $\sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \gtrsim m^2 / \sigma^2$, а также к убыванию $|\psi_G|$ со временем при $\sigma^2 (x_*^0)^2 \gtrsim m^2 / \sigma^2$. Одно из технических следствий такого поведения $|\psi_G|$, полезное при расчетах амплитуд, состоит в том, что СРГП-приближение можно безопасно распространить на всю пространственно-временную область интегрирования в интегралах типа

$$\int dx f(x) \prod_{\varkappa} \psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x - x_{\varkappa}),$$

в которых функции ψ_{\varkappa} соответствуют релятивистским ВП, описывающим состояния частиц \varkappa , а $f(x)$ — произвольная гладкая функция x без острых экстремумов. Именно такие интегралы входят в формулы для макроскопических амплитуд процессов рассеяния и распада релятивистских ВП.

Непосредственный (хотя и довольно громоздкий) расчет среднего положения пакета $\langle \mathbf{x} \rangle$ с использованием (157) приводит, как и следовало ожидать, к тому, что ВП следует классической траектории. Таким образом, СРГП полностью воспроизводит общие свойства релятивистского ВП.

Модель СРГП позволяет проверить выполнение условия (107), необходимого для применимости приближенной формулы (106), являющейся существенным элементом формализма. Как следует из (157),

$$i\nabla_{\mathbf{x}} \ln \psi_G(\mathbf{p}, x) = \mathbf{p} - 2i \frac{\sigma^2}{m^2} [(px)\mathbf{p} - m^2 \mathbf{x}].$$

Поэтому условие (107) можно записать в виде

$$|(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}| \ll \left(\frac{m^2}{\sigma^2}\right) E_{\mathbf{p}}, \quad (158)$$

где $X = (X_0, \mathbf{X}) = (y_0 - x_0, \mathbf{y} - \mathbf{x})$. Элементарная алгебра дает

$$\begin{aligned} |(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}|^2 &= (pX)^2\mathbf{p}^2 - 2m^2(pX)(\mathbf{p}\mathbf{X}) + m^4\mathbf{X}^2 = \\ &= (pX)^2 E_{\mathbf{p}}^2 + m^2[(\mathbf{p}\mathbf{X})^2 + m^2\mathbf{X}^2 - E_{\mathbf{p}}^2 X_0^2] \leq \\ &\leq (pX)^2 E_{\mathbf{p}}^2 + m^2(\mathbf{p}^2\mathbf{X}^2 + m^2\mathbf{X}^2 - E_{\mathbf{p}}^2 X_0^2). \end{aligned}$$

В результате мы доказали, что

$$|(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}| \leq E_{\mathbf{p}} \sqrt{(pX)^2 - m^2 X^2}.$$

Следовательно, неравенство (158) не является независимым условием, а удовлетворяется автоматически благодаря второму из ограничений (156), определяющих область применимости приближения СРГП.

Изучим теперь свойства перестановочной функции (148) в СРГП-приближении. С помощью неравенств (150) и условия (128) можно написать для нее асимптотическое разложение (ср. с (151))

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) &= \frac{2mV_*}{z^{3/2}} \exp\left[\frac{m^2(1-z)}{\sigma^2}\right] \left[1 - \frac{3\sigma^2}{8m^2} \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\sigma^4}{128m^4} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(11 + \frac{5}{z}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^6}{m^6}\right)\right]. \quad (159) \end{aligned}$$

Для самосогласованности следует переписать эту формулу в приближении, отвечающем условиям СРГП-приближения для функции $\psi_G(\mathbf{p}, x)$. Для этого воспользуемся усеченным рядом для z :

$$z = \frac{E_*}{m} \left(1 + \frac{\sigma^4 \mathbf{x}_*^2}{2E_*^2}\right) + i \frac{\sigma^2 x_*^0}{m} \left(1 - \frac{\sigma^4 \mathbf{x}_*^2}{2E_*^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^8}{m^8}\right).$$

Подставляя его в (159) и разлагая логарифм отношения $\mathcal{D}_G/(2mV_*)$ (записанного в с. ц. и.) по степеням малого параметра σ^2/m^2 , приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)}{2mV_*} \right] &= -imx_*^0 \left\{ 1 + \frac{3\sigma^2}{2mE_*} \left[1 + \frac{\sigma^2}{4mE_*} \left(1 - \frac{4}{3} m^2 \mathbf{x}_*^2 \right) \right] \right\} - \\ &- \frac{3}{2} \ln \Gamma_* - \frac{m^2(\Gamma_* - 1)}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \mathbf{x}_*^2}{2\Gamma_*} + \frac{3\sigma^2(\Gamma_* - 1)}{8mE_*} - \\ &- \frac{3\sigma^4}{4m^2 E_*^2} \left\{ m^2[(x_*^0)^2 + \mathbf{x}_*^2] - \frac{P_*^2}{4m^2} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^6}{m^6}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma_* = E_*/m$. Отсюда видно, что при условиях

$$\sigma^2(x_*^0)^2 \ll \frac{E_*^2}{\sigma^2} \quad \text{и} \quad \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \ll \frac{E_*^2}{\sigma^2} \quad (160)$$

можно ограничиться лишь четырьмя главными членами разложения по σ^2/m^2 . В таком приближении получаем окончательную формулу

$$\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*) = \frac{2mV_*}{\Gamma_*^{3/2}} \exp \left[-imx_*^0 - \frac{m^2(\Gamma_* - 1)}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \mathbf{x}_*^2}{2\Gamma_*} \right], \quad (161)$$

в которой следует положить $V_* = [\pi/(2\sigma^2)]^{3/2}$ (см. следующий пункт).

Как и ожидалось, $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)$ быстро убывает, если либо $|\mathbf{p}_*|$, либо $|\mathbf{x}_*|$ (или обе эти величины) достаточно велики. Формальные условия для этого, обсуждавшиеся на качественном уровне в п. 3.4 для ВП общего вида, становятся теперь очевидными из (161). Помимо этого перестановочная функция (161) обладает рядом неочевидных заранее свойств. Видно, например, что зависимость $|\mathcal{D}_G|$ от переменных x_0 и \mathbf{x} исчезает на классических траекториях, а отношение $|\mathcal{D}_G|/(2mV_*)$ экспоненциально мало уже при субрелятивистских энергиях ($\Gamma_* - 1 \sim 1$) и стремится к нулю при ультрарелятивистских энергиях ($\Gamma_* \gg 1$) практически независимо от $|\mathbf{x}_*|$. Нетрудно показать, что при любом значении σ

$$\frac{|\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)|}{2mV_*} \leq \exp \left[-\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\Gamma_*} \right)} m |\mathbf{x}_*| \right].$$

Преобразуя (161) в л. с. и переходя к нерелятивистским энергиям, получаем

$$\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) \approx 2mV_* \exp \left[-im(x_0 - \mathbf{v}\mathbf{x}) - \frac{m^2}{8\sigma^2} |\mathbf{v}_\mathbf{p} - \mathbf{v}_\mathbf{q}|^2 - \frac{\sigma^2}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{v}x_0|^2 \right]. \quad (162)$$

Здесь $\mathbf{v}_\mathbf{p} = \mathbf{p}/m$ и $\mathbf{v}_\mathbf{q} = \mathbf{q}/m$ — групповые скорости пакетов в л. с., $\mathbf{v} = (1/2)(\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{v}_\mathbf{q})$, и мы предполагаем, что $\mathbf{v}_\mathbf{p}^2 \ll 1$ и $\mathbf{v}_\mathbf{q}^2 \ll 1$. Отметим, что вклад $\propto (m^2/\sigma^2)$ в (162) может быть большим, если, разумеется, $\mathbf{v}_\mathbf{p} \neq \mathbf{v}_\mathbf{q}$, а параметр σ достаточно мал.

Переход к плосковолновому пределу в (161) не совсем тривиален. Чтобы найти этот предел, воспользуемся асимптотической формулой (133) (см. п. 4.1), с помощью которой можно доказать, что для произвольной гладкой функции $F(\mathbf{p})$ имеет место соотношение

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{p}_*}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_*}} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*) F(\mathbf{p}_*) = \frac{1}{8} e^{-imx_*^0} F(\mathbf{0}).$$

Следовательно,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} D_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) = (2\pi)^3 2E_* \delta(2\mathbf{p}_*) e^{-imx_*^0} = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{-ipx}.$$

С помощью кинематических соотношений (120а) неравенства (160) можно переписать в явно релятивистски-инвариантной (хотя и несколько менее прозрачной) форме:

$$[(p+q)x]^2 \ll \left[\frac{(p+q)^2}{\sigma^2} \right]^2, \quad (p+q)^2 |x^2| \ll \left[\frac{(p+q)^2}{\sigma^2} \right]^2. \quad (163)$$

Нетрудно показать, что условия (163) полностью согласуются с условиями (156), которые ограничивают область применимости СРГП. Аналогичным образом выражение (161) также может быть переписано в явно лоренц-инвариантном виде. Мы не приводим здесь соответствующую формулу, поскольку она довольно громоздка и не очень полезна на практике. Как правило, проще работать в с. ц. и. пары пакетов и переходить в л. с. лишь в окончательных выражениях.

В качестве важного приложения формулы (161) рассмотрим n -пакетные матричные элементы (123) с одинаковыми импульсами ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$, $\forall i$). Общий случай, кратко обсуждавшийся в п. 3.5, хорошо иллюстрируется простейшими примерами с $n = 2$ и 3. Переписав соотношения (124) в с. ц. и., которая в данном случае совпадает с с. с. о. (одной и той же для всех однопакетных «подсостояний»), и подставив (161), найдем

$$\begin{aligned} {}_2\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_2 &= (2mV_*)^2 [1 \pm \delta_{s_1 s_2} \exp(-\sigma^2 |\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*|^2)], \\ {}_3\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_3 &= (2mV_*)^3 \left[1 \pm \sum_{i < j} \delta_{s_i s_j} \exp(-\sigma^2 |\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*|^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_{s_1 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_3 s_1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \sum_{i < j} |\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*|^2\right) \right], \end{aligned}$$

где знак «+» относится к бозонам, а «-» — к фермионам. Из этих формул видно, что бозе-эйнштейновское притяжение и фермиевское отталкивание, имеющие место при $s_i = s_j$ для любой пары частиц (i, j) , важны лишь на коротких расстояниях между центрами пакетов i и j , удовлетворяющих условию

$$\sigma^2 |\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*|^2 \lesssim 1. \quad (164)$$

Другими словами, оба эффекта становятся существенными, когда пространственное расстояние между тождественными пакетами (измеряемое в их общей системе покоя) становится сравнимо по величине с размерами пакетов,

т. е. именно тогда, когда уже необходимо учитывать динамическое взаимодействие пакетов. При достаточно больших расстояниях между пакетами различие квантовых статистик уже не играет роли. Этот вывод остается в силе для состояний с произвольным числом невзаимодействующих тождественных пакетов и чрезвычайно важен для построения квантовой статистики ВП.

4.6. Эффективные размеры и масса пакета. Нетрудно найти явный вид объема V_* , определяемого соотношением (97), в РГП-приближении:

$$V_* = \frac{\pi^2 \lambda K_1(\lambda)}{2m^3 [K_1(\lambda/2)]^2} = \left(\frac{\pi}{2\sigma^2}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{9}{8\lambda} + \frac{249}{128\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right], \quad \lambda = \frac{m^2}{\sigma^2}. \quad (165)$$

Явная формула для средней массы $\langle m \rangle$ также может быть найдена в виде асимптотического разложения по параметру $1/\lambda$. Для этого удобно воспользоваться леммой Ватсона, которая утверждает, что почленное преобразование Лапласа для степенного разложения функции $f(t)$ является разложением преобразования Лапласа этой функции. В нашем случае

$$\int_0^\infty dt t^{a-1} e^{-\lambda t} f(t) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+a) f^{(n)}(0)}{n! \lambda^{n+a}} \quad (a > 0, \lambda \gg 1).$$

Применяя эту асимптотическую формулу к числителю и знаменателю в (99) и подставляя разложение для нормировочной константы из (126)

$$N_\sigma = \frac{2(\pi\lambda)^{3/2}}{m^2} \left[1 - \frac{3}{4\lambda} + \frac{33}{32\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right],$$

найдем отношение средней массы пакета к массе поля:

$$\frac{\langle m \rangle}{m} = 1 + \frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Итак, средняя (эффективная) масса ВП превышает массу составляющих его фокковских состояний на величину $\delta m \approx 1,5\sigma^2/m$.

Перейдем теперь к СРГП-модели:

$$V_* \approx \left(\frac{\pi}{2\sigma^2}\right)^{3/2} \approx \frac{1,969}{\sigma^3}. \quad (166)$$

С той же точностью можно определить эффективный размер ВП в с. с. о. как диаметр d_* шара, имеющего объем V_* , т. е.

$$d_* = \left(\frac{6V_*}{\pi}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/6} \frac{1}{\sigma} \approx \frac{1,555}{\sigma}. \quad (167)$$

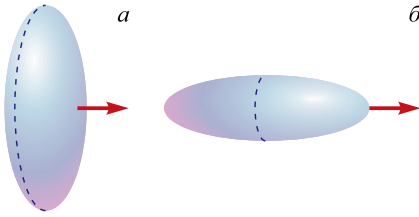


Рис. 5. Наглядное изображение СРГП в конфигурационном пространстве (а) и импульсном пространстве (б). Стрелки указывают направление импульса пакета

Ясно, что в л. с. эффективный размер пакета вдоль направления его импульса \mathbf{p} равен $d_{\parallel} = d_{\star}/\Gamma_{\mathbf{p}}$. Наглядным изображением пакета в конфигурационном пространстве может служить сплюснутый эллипсоид вращения с поперечным диаметром, примерно равным $1,555/\sigma$, и угловым эксцентриситетом, равным $\arccos(\Gamma_{\mathbf{p}})$ (см. рис. 5, а). Объемная плотность пакета $\rho(\mathbf{p}, x)$ в его центре превышает плотность на (условной) границе более чем втрое. Точнее, соответствующее отношение плотностей в с. с. о. равно

$$\exp\left(\frac{\sigma^2 d_{\star}^2}{2}\right) = \exp\left[\left(\frac{9\pi}{16}\right)^{1/3}\right] \approx e^{1,21} \approx 3,35.$$

4.7. Неопределенности энергии и импульса пакета. Проанализируем связь параметра σ с квантовыми неопределенностями энергии и импульса ВП в СРГП-приближении. Воспользовавшись теоремой о среднем и условиями (95), можем написать тождество

$$2mV_{\star} = \phi_G(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{p}) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \phi_G(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{p}),$$

где $\delta\mathbf{p}$ — подлежащий определению вектор с малым абсолютным значением, имеющий очевидный физический смысл неопределенности импульса пакета. Разумно предположить, что $|\delta\mathbf{p}| \ll E_{\mathbf{p}}^*$. Это условие позволяет сделать разложение

$$E_{\mathbf{p}+\delta\mathbf{p}} \approx E_{\mathbf{p}} \left[1 + \frac{\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}^2} + \frac{|\delta\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}^2} - \frac{(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^2}{2E_{\mathbf{p}}^4} \right],$$

из которого находим, что

$$E_{\mathbf{p}+\delta\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} - (\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})\mathbf{p} \approx m^2 + \frac{|\delta\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^2}{2E_{\mathbf{p}}^2} = m^2 + \frac{|\delta\mathbf{p}_{\parallel}|^2}{2\Gamma_{\mathbf{p}}^2} + \frac{|\delta\mathbf{p}_{\perp}|^2}{2},$$

*Это предположение подтверждается *a posteriori* соотношением (171).

где $\delta\mathbf{p}_{\parallel}$ и $\delta\mathbf{p}_{\perp}$ есть, соответственно, продольная и поперечная (по отношению к вектору импульса \mathbf{p}) компоненты искомого вектора $\delta\mathbf{p}$. Далее согласно (130) имеем

$$V_{*} \approx \left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|\delta\mathbf{p}_{\parallel}|^2 + \Gamma_{\mathbf{p}}^2 |\delta\mathbf{p}_{\perp}|^2}{4\sigma^2 \Gamma_{\mathbf{p}}^2}\right) = \left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|\delta\mathbf{p}_{*}|^2}{4\sigma^2}\right), \quad (168)$$

где $\delta\mathbf{p}_{*}$ обозначает вектор $\delta\mathbf{p}$, записанный в с. с. о. пакета. Сравнивая соотношения (168) и (166) (выведенные в одном и том же приближении), найдем

$$|\delta\mathbf{p}_{*}|^2 \approx 6 \ln 2 \sigma^2 \approx 4,159 \sigma^2. \quad (169)$$

Из (167) и (169) следует «соотношение неопределенностей»

$$d_{*} |\delta\mathbf{p}_{*}| \approx 3 \sqrt{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \ln 2} \approx 3,171. \quad (170)$$

Для иллюстрации этого результата рассмотрим адронный ВП, эффективный размер которого, очевидно, не может быть меньше естественного размера самого адрона, т. е. $d_{*} \gtrsim 1$ фм. Тогда из (169) и (170) следует, что $|\delta\mathbf{p}_{*}| \lesssim 600$ МэВ, а значит, $\sigma \approx 0,5 |\delta\mathbf{p}_{*}| \lesssim 300$ МэВ. Таким образом, 300 МэВ — это максимально возможное значение параметра σ для адронного ВП. В п. 4.8 мы обсудим вопрос о предельно допустимых значениях σ в СРПП-модели.

Благодаря сферической симметрии пакета в с. с. о.

$$|\delta\mathbf{p}_{\perp}|^2 = \frac{2}{3} |\delta\mathbf{p}_{*}|^2 \approx 4 \ln 2 \sigma^2 \quad \text{и} \quad |\delta\mathbf{p}_{\parallel}|^2 = \frac{1}{3} |\delta\mathbf{p}_{*}|^2 \Gamma_{\mathbf{p}}^2 \approx 2 \ln 2 \sigma^2 \Gamma_{\mathbf{p}}^2, \quad (171a)$$

откуда следует, что

$$|\delta\mathbf{p}| \approx \sqrt{2 \ln 2 (\Gamma_{\mathbf{p}}^2 + 2)} \sigma, \quad |\delta\mathbf{p}_{\parallel}| / |\delta\mathbf{p}_{\perp}| \approx \Gamma_{\mathbf{p}} / \sqrt{2}. \quad (171b)$$

Соотношения (171) позволяют оценить неопределенность импульса и эффективную (полу)ширину ВП в импульсном пространстве. Как видим, относительная неопределенность импульса, $|\delta\mathbf{p}|/|\mathbf{p}|$, мала при ультрарелятивистских импульсах, но становится сколь угодно большой при $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$:

$$\frac{|\delta\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2 \ln 2} \sigma / m & \text{при } |\mathbf{p}| \rightarrow \infty, \\ \sqrt{6 \ln 2} \sigma / |\mathbf{p}| & \text{при } |\mathbf{p}| \rightarrow 0. \end{cases}$$

Соответствующая неопределенность энергии имеет вид

$$\delta E_{\mathbf{p}} \approx \delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} / E_{\mathbf{p}} \approx |\delta\mathbf{p}_{\parallel}| |\mathbf{v}_{\mathbf{p}}| \approx \sqrt{2 \ln 2} |\mathbf{p}| \sigma / m.$$

Следовательно, относительная неопределенность энергии всегда мала, причем ультрарелятивистская асимптотика, $\delta E_p/E_p \approx |\delta \mathbf{p}|/|\mathbf{p}| \approx \sqrt{2 \ln 2} \sigma/m$, дает верхний предел этого отношения.

4.8. Область применимости СРГП. В зависимости от способа приготовления ВП (т. е. от цепочки порождающих его реакций) его эффективные размеры могут быть как микроскопически малы, так и макроскопически велики. Последняя возможность не должна вызвать удивления, если вспомнить, что «размер» плоской волны и вовсе бесконечен. Подчеркнем еще раз, что эффективный размер ВП — это не внутреннее свойство поля, а характеристика его квантового состояния, зависящая, конечно, от свойств поля, но не только от них. «Естественный» и, вероятно, недостижимый на практике верхний предел, d_*^{\max} , для эффективного размера ВП, описывающего нестабильную частицу, должен быть порядка ее собственного времени жизни τ (макроскопического для долгоживущих частиц, таких как нейтрон или мюон), а «нижний предел», d_*^{\min} , задается естественным размером частицы, т. е. величиной порядка 1 фм для адронов (составных частиц) и величиной порядка комптоновской длины волны ($\sim 1/m$) для лептонов и калибровочных бозонов (бесструктурных частиц). В любом случае в силу общего ограничения $\sigma^2 \ll m^2$ допустимые формализмом размеры пакетов должны быть много больше d_*^{\min} .

В случае нестабильных частиц условия применимости СРГП-приближения (153) накладывают дополнительное жесткое ограничение на предельно допустимое значение параметра σ . Действительно, для того чтобы эти условия выполнялись при $0 \leq |x_*^0| \lesssim \tau$ (т. е. чтобы ВП не успел существенно расплыться за время жизни состояния), необходимо выполнение неравенства $\sigma^4 \tau^2 \ll m^2$. Поэтому величина $\sigma_{\max} = \sqrt{m/\tau}$ задает абсолютный верхний предел* допустимых в СРГП-модели значений параметра σ . Соответственно, величина

$$d_*^{\min} = \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/6} \frac{1}{\sigma_{\max}} = \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{\tau}{m}\right)^{1/2}$$

определяет нижний предел для эффективного пространственного размера ВП, описывающего нестабильную частицу в СРГП-приближении.

Поскольку в рамках обсуждаемого формализма ВП никак не связаны с естественной распадной шириной частицы $\Gamma = 1/\tau$, он применим лишь для описания состояний с $\sigma \gg \Gamma$ (а точнее, $\sigma^2 \gg \Gamma^2$), т. е. для пакетов с пространственными размерами $d_* \ll d_*^{\max} \sim \tau$. Для согласования этого ограничения с условиями (153) время жизни частицы должно быть достаточно большим. Поскольку для всех известных долгоживущих элементарных

*Разумеется, в физическом, а не в формально математическом смысле.

частиц и атомных ядер $\Gamma \ll m$, то $\sigma_{\max} = \sqrt{m/\tau} = \sqrt{\Gamma m} \gg \Gamma$ и, разумеется, $\sigma_{\max} \ll m$. Поэтому следует ожидать, что СРПП-приближение применимо как для стабильных, так и для нестабильных, но долгоживущих частиц (нейтронов, мюонов, τ -лептонов, заряженных пионов, ...) и ядер, но заведомо неприменимо для широких адронных резонансов, калибровочных бозонов и других частиц, для которых условие $\sigma_{\max} \gg \Gamma$ не выполняется. Заметим также, что максимально допустимое в СРПП значение $\delta m = \langle m \rangle - m$ равно $\delta m_{\max} \approx 1,5\sigma_{\max}^2/m = 1,5\Gamma$, так что поправка к полевой массе резонансов может быть значительной, но для долгоживущих частиц в данном приближении ею можно (и нужно) пренебречь.

Для количественной иллюстрации в табл. 1 приведены значения σ_{\max} , Γ/σ_{\max} и d_*^{\min} для ряда нестабильных элементарных частиц. Массы и времена жизни частиц, использованные в расчете, взяты из обзора [106]. Выбор частиц в табл. 1 обусловлен тем, что распады π^\pm , K^\pm , K_L^0 и μ^\pm являются основными источниками атмосферных и ускорительных нейтрино и антинейтрино с энергиями $E_\nu \lesssim 1$ ТэВ; распады короткоживущих K_S^0 -, D -, D_s -, B - и B_s -мезонов, а также Λ - и Λ_c -гиперонов становятся доминирующими источ-

Таблица 1. Предельно допустимые в СРПП-приближении значения параметра σ ($\sigma_{\max} = \sqrt{m\Gamma}$), отношения $\Gamma/\sigma_{\max} = \sqrt{\Gamma/m}$ и минимальные допустимые эффективные размеры волновых пакетов ($d_*^{\min} \approx 1,55/\sqrt{m\Gamma}$) для некоторых нестабильных частиц

Частица	σ_{\max} , эВ	Γ/σ_{\max}	d_*^{\min} , см
μ^\pm	$1,78 \cdot 10^{-1}$	$1,68 \cdot 10^{-9}$	$1,72 \cdot 10^{-4}$
τ^\pm	$2,01 \cdot 10^3$	$1,13 \cdot 10^{-6}$	$1,53 \cdot 10^{-8}$
π^\pm	1,88	$1,35 \cdot 10^{-8}$	$1,63 \cdot 10^{-5}$
π^0	$3,25 \cdot 10^4$	$2,41 \cdot 10^{-4}$	$0,94 \cdot 10^{-9}$
K^\pm	5,12	$1,04 \cdot 10^{-8}$	$5,99 \cdot 10^{-6}$
K_S^0	$6,05 \cdot 10^1$	$1,22 \cdot 10^{-7}$	$5,07 \cdot 10^{-7}$
K_L^0	2,53	$5,08 \cdot 10^{-9}$	$1,21 \cdot 10^{-5}$
D^\pm	$1,09 \cdot 10^3$	$5,82 \cdot 10^{-7}$	$2,82 \cdot 10^{-8}$
D^0	$1,73 \cdot 10^3$	$9,28 \cdot 10^{-7}$	$1,77 \cdot 10^{-8}$
D_s^\pm	$1,61 \cdot 10^3$	$8,18 \cdot 10^{-7}$	$1,91 \cdot 10^{-8}$
B^\pm	$1,46 \cdot 10^3$	$2,76 \cdot 10^{-7}$	$2,11 \cdot 10^{-8}$
B^0	$1,51 \cdot 10^3$	$2,86 \cdot 10^{-7}$	$2,03 \cdot 10^{-8}$
B_s^0	$1,55 \cdot 10^3$	$2,89 \cdot 10^{-7}$	$1,98 \cdot 10^{-8}$
n	$2,64 \cdot 10^{-5}$	$2,81 \cdot 10^{-14}$	1,16
Λ	$5,28 \cdot 10^1$	$4,74 \cdot 10^{-7}$	$5,81 \cdot 10^{-7}$
Λ_c^\pm	$2,74 \cdot 10^3$	$1,87 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-8}$

никами (анти)нейтрино при $E_\nu \gg 1$ ТэВ (см., например, [107]); τ -лептоны, возникающие (как редкие события) во взаимодействиях (анти)нейтринных пучков с веществом, важны для осцилляционных экспериментов в качестве «индикаторов» флейворных переходов $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. Нейтральный пион и нейтрон приведены для демонстрации двух крайних случаев — очень большого и очень маленького значений σ_{\max} соответственно. Кроме того, распады свободных нейтронов играют важную роль в качестве источника астрофизических электронных антинейтрино низких энергий [108].

В табл. 1 не представлены многочисленные β^\pm -активные радионуклиды, распады которых являются источниками ν_e и $\bar{\nu}_e$ в реакторных экспериментах и в будущих экспериментах с β -пучками [109–111], тяжелые ионы, способные излучать ν_e при захвате орбитальных электронов с низколежащих электронных оболочек и представляющие потенциальный интерес в качестве источников монохроматических нейтринных пучков [112], а также движущиеся по круговым орбитам возбужденные ионы, когерентно излучающие пары $\nu\bar{\nu}$ всех флейворов [113, 114]. Для всех таких ядер и ионов d_*^{\min} по порядку величины определяется либо размером ядра, либо диаметром K -орбиты, а период полураспада $T_{1/2}$ велик. Поэтому $\Gamma/\sigma_{\max} \sim d_*^{\min}/T_{1/2} \lll 1$, т. е. ограничения СРПП-приближения выполняются «с большим запасом».

Как видно из табл. 1, типичные значения d_*^{\min} «мезоскопические», т. е. простирающиеся от ангстрема до микрометра, что много меньше ширины треков заряженных частиц в детекторах. Огромный «размер» нейтрона может показаться бессмыслицей. Заметим, однако, что в задачах, связанных с антинейтрино от распада свободных нейтронов, макроскопический размер ВП нейтрона не приводит к каким-либо парадоксам. В других же проблемах нейтронной физики СРПП-приближение и даже сама модель РПП могут оказаться неадекватными. Отношения Γ/σ_{\max} не превышают $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ для всех перечисленных частиц, за исключением нейтрального пиона, что допускает достаточно широкий «спектр» значений параметра σ , удовлетворяющих условиям применимости СРПП:

$$\Gamma^2 \lll \sigma^2 \lll \sigma_{\max}^2 \lll m^2.$$

Следует отметить, что адронные резонансы и другие короткоживущие частицы также представляют большой интерес в контексте проблемы нейтринных осцилляций, поскольку нейтрино и антинейтрино могут рождаться в распадах таких частиц и (что, пожалуй, более важно) порождать короткоживущие частицы при взаимодействиях с веществом. Неприменимость приближения СРПП для короткоживущих частиц отнюдь не означает, что процессы с их участием невозможно учесть в рамках S -матричного формализма, поскольку резонансы всегда можно рассматривать как виртуальные частицы, т. е. внутренние линии фейнмановских диаграмм. При таком подходе отпадает необходимость построения ВП для резонансов. Тот же подход применим,

в принципе, и для процессов с участием нейтральных пионов, для которых отношение Γ/σ_{\max} сравнительно велико, поскольку в нейтринных экспериментах события рождения π^0 -мезонов идентифицируются по γ -квантам, возникающим в их распадах*. Тем не менее обобщение формализма на частицы с произвольными распадными ширинами представляет методический интерес уже потому, что более общий подход позволил бы уточнить область применимости излагаемой здесь теории и предоставил бы полезный инструмент, помогающий существенно упростить расчеты конкретных процессов, используя, в частности, известные феноменологические модели для резонансного нейтринорождения мезонов.

5. РАССЕЯНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Применим развитый формализм для вычисления вероятности взаимодействия ковариантных ВП. Хотя в ряде случаев мы приходим к результатам, аналогичным обсуждаемым в книге М. Пескина и Д. Шредера [117], мы получаем также некоторые новые интересные результаты. Например, вычислен явный вид подавления вероятности взаимодействия ВП (в СРГП-модели), рассеивающихся с ненулевым прицельным параметром. Этот результат представляет интерес как с концептуальной, так и с практической точек зрения.

Действительно, для некоторых процессов, например $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, сечение, вычисленное в плосковолновом приближении, противоречит экспериментальным данным. Впервые этот эффект был обнаружен на коллайдере ВЭПП-4 в Новосибирске в данных детектора МД-1 [118]. Измеренное сечение оказалось меньше расчетного примерно на 30% в области малых энергий фотона. В кандидатской диссертации Ю. А. Тихонова [119] было показано, что заметный вклад в сечение процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, вычисленного в плосковолновом приближении, дают прицельные параметры ρ вплоть до 5 см, в то время как поперечные размеры сталкивающихся пучков не превышают $a \simeq 10^{-3}$ см. Ограничение прицельных параметров величиной $\rho \leq a$ приводит к уменьшению наблюдаемого числа фотонов. Соответствующая теория, учитывающая конечные размеры сталкивающихся пучков, была развита в работе [120].

Наше вычисление приводит к результатам, аналогичным полученным в пионерской работе [120]. Однако развитый нами формализм существенно отличается от формализма этой работы. Обсудим кратко эти отличия. В работе [120] используются нековариантные ВП, что видно из их определения

*Здесь же уместно отметить, что состояния γ -квантов, возникающих в процессах, проходящих с участием (анти)нейтрино (реальных или виртуальных), допустимо рассматривать в плосковолновом пределе, хотя строгое обоснование этого утверждения выходит за рамки данной работы. Для детального экскурса в теорию фотонных ВП см. работы [115, 116].

(уравнение (4.1)) и условия нормировки (4.2). Статистическое усреднение по состояниям частиц (4.7) осуществляется для перехода к матрице плотности в импульсном представлении, которая есть фурье-образ функции Вигнера $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ (хорошее педагогическое введение в теорию функций Вигнера и преобразований Вейля можно прочесть в работе [121]). Интегралы от функции Вигнера $\int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{p}, t)$ и $\int d\mathbf{p}/(2\pi)^3 n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{r}, t)$ дают плотности числа частиц в импульсном и координатном представлениях соответственно. В итоговой формуле для числа взаимодействий (например, в (4.23)) относительная скорость двух частиц вводится «руками». Наконец, используется упрощение — частицы в конечном состоянии рассматриваются как плоские волны.

В нашем подходе мы имеем дело с ковариантными ВП в начальном и конечном состояниях и не используем формализм функций Вигнера, делая вычисления для столкновения ВП, заданных произвольными средними 4-координатами x_a , x_b и 4-импульсами p_a , p_b . Этот более простой подход оказывается возможным в результате предположения о слабой зависимости матричного элемента при изменении импульса в интервале порядка импульсной дисперсии ВП. Такое приближение, впрочем, не всегда оправданно. Например, для некоторых задач, таких как pp -рассеяние, интерес представляет не только модуль матричного элемента, но и его фаза. В этом случае не следует пренебрегать вариацией матричного элемента на масштабах вариации импульса в ВП. Учитывая такую вариацию как поправку на уровне σ/p , можно вычислить и поправку к плосковолновому сечению в зависимости от фазы матричного элемента, что предоставляет новый и потенциально интересный метод измерения этой фазы при помощи вариации прицельного параметра, с которым сталкиваются частицы [122]. Другим важнейшим исключением является случай сильной зависимости матричного элемента от импульсов. Сильная зависимость ожидается в случае существования промежуточного состояния, связывающего наборы начальных и конечных частиц, с 4-импульсом на массовой поверхности. Тогда в силу сингулярного пропагатора промежуточного состояния очевидна сильная зависимость матричного элемента от комбинации импульсов, соответствующей 4-импульсу промежуточного состояния. Именно этот случай отвечает виртуальному нейтрино в квантово-полевой теории нейтринных осцилляций, обсуждаемой в следующем пункте.

Таким образом, ограничиваясь случаем слабой вариации матричного элемента на масштабах вариации импульса в ВП, мы вычисляем вероятность взаимодействия двух ВП. Полученная формула позволяет обнаружить подавление вероятности взаимодействий при ненулевом прицельном параметре сталкивающихся пакетов. Также мы демонстрируем явным образом, как безразмерная вероятность взаимодействия выражается через произведение плосковолнового сечения размерности площади и микроскопической светимости размерности обратной площади. Макроскопическое усреднение по прицель-

ному параметру приводит к известной формуле для числа событий, выражаемого через произведение плосковолнового сечения и потока.

5.1. Амплитуда рассеяния. Рассмотрим взаимодействие двух сталкивающихся частиц a и b . Конечное состояние X , а также динамика процесса могут быть любыми. Для определенности каждое начальное и конечное состояния будем считать ВП фермиона. Квантовая статистика частицы в данном случае не играет никакой роли. Запишем амплитуду процесса $\mathcal{A} = \langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \mathbb{S} - 1 | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle$, где фигурная скобка обозначает набор ВП со средними импульсами \mathbf{p}_i , средними координатами \mathbf{x}_i в моменты времени x_i^0 для начального состояния (индекс i) и аналогично для конечного состояния с заменой $i \rightarrow f$. Амплитуда процесса имеет вид

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\prod_{i,f} \int \frac{d\mathbf{q}_i \phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) e^{iq_i x_i}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}_i}} \frac{d\mathbf{k}_f \phi^*(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}_f) e^{-ik_f x_f}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right] \times \\ \times i\widetilde{\mathcal{M}}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}), \quad (172)$$

где

$$i\widetilde{\mathcal{M}}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}) = \langle \mathbf{k}_1, s_1, \dots = \mathbf{k}_{n_f}, s_{n_f} | \mathbb{S} - 1 | \mathbf{q}_1, r_1, \dots = \mathbf{q}_{n_f}, r_{n_f} \rangle = \\ = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i q_i - \sum_f k_f \right) i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}) \quad (173)$$

— стандартный плосковолновой S -матричный элемент, включающий в себя сингулярный множитель $(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i q_i - \sum_f k_f \right)$, отвечающий за закон сохранения энергии-импульса, и регулярный матричный элемент $i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\})$.

\mathcal{N} — множитель, отвечающий нормировке начальных и конечных состояний, дается

$$\mathcal{N}^2 = \langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \{\mathbf{p}_f, x_f\} \rangle \cdot \langle \{\mathbf{p}_i, x_i\} | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle = \\ = \prod_i 2m_i V_{*,i} \prod_i 2m_f V_{*,f} \simeq \prod_i 2\overline{E}_{\mathbf{p}_i} V(\mathbf{p}_i) \prod_i 2\overline{E}_{\mathbf{p}_f} V(\mathbf{p}_f). \quad (174)$$

Перепишем δ -функцию в виде интеграла по четырехмерному пространству:

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i q_i - \sum_f k_f \right) = \int d^4 x \exp \left[-i \left(\sum_i q_i - \sum_f k_f \right) x \right],$$

что позволяет записать (172) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int d^4x \left[\prod_{i,f} \int \frac{d\mathbf{q}_i \phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) e^{+iq_i(x_i-x)} d\mathbf{k}_f \phi^*(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}_f) e^{-ik_f(x_f-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}_i} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right] \times \\ &\quad \times i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\int d^4x \prod_{i,f} \psi(\mathbf{p}_i, x-x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x-x_f) \right] i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, r_i, s_f\}), \end{aligned}$$

откуда

$$\mathcal{A} \simeq \frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{V}(0) i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, r_i, s_f\}). \quad (175)$$

Приближенное равенство справедливо для ВП, достаточно узких в импульсном пространстве, при условии, что можно пренебречь изменением матричного элемента $\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\})$ на масштабах изменения формфактора $\phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$. В этом приближении интегралы по импульсам превращаются в функции ψ , определенные согласно (108). В последней строке мы ввели интеграл перекрытия $\mathbb{V}(0) = \int d^4x \prod_{i,f} \psi(\mathbf{p}_i, x-x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x-x_f)$. В тео-

рии нейтринных осцилляций с ВП возникает более общий интеграл $\mathbb{V}(q) = \int d^4x \prod_{i,f} e^{iqx} \psi(\mathbf{p}_i, x-x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x-x_f)$, зависящий от внешнего импульса q , поэтому мы используем такое же обозначение при $q=0$. В этом пункте мы вычислим такой интеграл для СРПП-модели. В следующем пункте мы докажем важное соотношение, справедливое для СРПП-модели:

$$|\mathbb{V}(0)|^2 = (2\pi)^4 \delta_G(P_i - P_f) V, \quad (176)$$

где $P_i = \sum_i p_i$, $P_f = \sum_f p_f$ и $\delta_G(K)$ — это функция Гаусса с плосковолновым пределом, равным четырехмерной δ -функции Дирака. Явный вид этой функции уточним в следующем пункте. Здесь мы будем использовать ее плосковолновой предел. Четырехмерный объем перекрытия V можно представить в виде

$$V = \int d^4x \prod_{i,f} |\psi(\mathbf{p}_i, x-x_i)|^2 |\psi(\mathbf{p}_f, x-x_f)|^2.$$

5.2. Число взаимодействий для неколлинеарных столкновений волновых пакетов. Используя (176), запишем квадрат модуля амплитуды (175):

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{M}|^2}{\prod_i 2\bar{E}_{\mathbf{p}_i} V(\mathbf{p}_i) \prod_f 2\bar{E}_{\mathbf{p}_f} V(\mathbf{p}_f)} \int d^4x \prod_{i,f} |\psi(\mathbf{p}_i, x-x_i)|^2 |\psi(\mathbf{p}_f, x-x_f)|^2. \quad (177)$$

Микроскопическая вероятность взаимодействия $a + b \rightarrow X$, даваемая $|\mathcal{A}|^2$ в (177), пропорциональна интегралу по четырехмерному пространству-времени от произведения плотностей вероятностей начальных $|\psi(\mathbf{p}_i, x - x_i)|^2/V(\mathbf{p}_i)$ и конечных $|\psi(\mathbf{p}_f, x - x_f)|^2/V(\mathbf{p}_f)$ ВП пересечься в точке x . Умножим (177) на лоренц-инвариантную плотность числа конечных состояний $\prod_f \frac{d\mathbf{p}_f dx_f}{(2\pi)^3}$ и проинтегрируем по пространственным координатам пакетов, что отвечает постановке многих современных экспериментов, измеряющих импульсы частиц лучше, чем их координаты. Воспользовавшись тем, что в соответствии с формулой (112) $\int d\mathbf{x}_f |\psi(\mathbf{p}_f, \mathbf{x}_f)|^2 = V(\mathbf{p}_f)$, получаем число взаимодействий

$$dN = \left(\prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x}_f \right) |\mathcal{A}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{M}|^2}{2\bar{E}_{\mathbf{p}_a} 2\bar{E}_{\mathbf{p}_b}} \times \\ \times \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2\bar{E}_{\mathbf{p}_f}} \int d^4x \frac{|\psi(\mathbf{p}_a, x - x_a)|^2}{V(\mathbf{p}_a)} \frac{|\psi(\mathbf{p}_b, x - x_b)|^2}{V(\mathbf{p}_b)}. \quad (178)$$

Вычисление последнего множителя в (178), представляющего собой четырехмерный интеграл перекрытия двух рассеивающихся ВП a и b , дает

$$\int d^4x \frac{|\psi(\mathbf{p}_a, x - x_a)|^2}{V(\mathbf{p}_a)} \frac{|\psi(\mathbf{p}_b, x - x_b)|^2}{V(\mathbf{p}_b)} = \frac{\exp \left[-\frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2}{2\sigma_{x,ab}^2} \right]}{2\pi\sigma_{x,ab}^2 v_{ab}} = \frac{L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|)}{v_{ab}}, \quad (179)$$

где $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b$ — скорости частиц a и b , $v_{ab} = \sqrt{(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)^2 - (\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b)^2}$; $\mathbf{b} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, $\mathbf{n} = \mathbf{v}_{ab}/|\mathbf{v}_{ab}|$ — единичный вектор вдоль относительной скорости (явные формулы для относительных скоростей приведены в п. 5.3) и $\sigma_{x,ab}^2 = \sigma_{x,a}^2 + \sigma_{x,b}^2$, где $\sigma_{x,i}^2 = 1/2\sigma_i^2$, $i = a, b$. В итоге (178) можно представить в виде

$$dN = d\sigma L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|) = d\sigma L(0) \exp \left[\frac{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2}{2\sigma_{x,ab}^2} \right]. \quad (180)$$

В (180) $d\sigma$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния в плосковолновом приближении:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \prod_b \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f},$$

где мы использовали тождество $\bar{E}_{\mathbf{p}_a} \bar{E}_{\mathbf{p}_b} v_{ab}^2 = (p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2$. Физический смысл множителя $L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|)$ в (180) — *светимость* рассеяния двух ВП в

определении, используемом в теории рассеяния и ускорительной физике. $L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|)$ определен согласно (179) с $L(0) = 1/2\pi\sigma_{x,ab}^2$.

Число взаимодействий двух ВП a и b дается (180). В случае неколлинеарного рассеяния число таких столкновений подавлено множителем $e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2/2\sigma_{x,ab}^2}$, где величину $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ следует интерпретировать как прицельный параметр рассеивающихся ВП.

В экспериментах с рассеянием пучков частиц a и b распределение прицельного параметра $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ задается способом приготовления пучков. В случае гауссова распределения число пар частиц a и b с прицельным параметром $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ есть

$$n_{ab}(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|) = \frac{n_a n_b}{2\pi\Sigma_{x,ab}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|^2}{2\Sigma_{x,ab}^2}\right), \quad (181)$$

где $\Sigma_{x,ab}$ — дисперсия прицельного параметра $|\mathbf{b}_T| = |\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ пучков частиц a и b в предположении фиксированного направления их относительной скорости \mathbf{n} ; n_a, n_b — числа частиц a и b .

Усреднение по прицельному параметру приводит к следующему выражению для числа взаимодействий частиц a и b :

$$dN = d\sigma \int d\mathbf{b}_T n_{ab}(|\mathbf{b}_T|) L(|\mathbf{b}_T|) = d\sigma L, \quad (182)$$

где светимость L определяется эффективными пространственными дисперсиями ВП пучков частиц a и b :

$$L = \frac{1}{2\pi(\sigma_{x,ab}^2 + \Sigma_{x,ab}^2)}. \quad (183)$$

Для реалистичных конфигураций эксперимента $\sigma_{x,ab}^2 \ll \Sigma_{x,ab}^2$. В этом приближении светимость L , даваемая (183), определяется пространственной дисперсией пучков частиц a и b , $L \simeq 1/(2\pi\Sigma_{x,ab}^2)$, в согласии с плосковолновым приближением.

5.3. Релятивистская инвариантность квадрата прицельного параметра.

Четырехмерный объем перекрытия

$$V = \int d^4x |\psi(\mathbf{p}_a, x - x_a)|^2 |\psi(\mathbf{p}_b, x - x_b)|^2$$

лоренц-инвариантен в силу релятивистской инвариантности функции $\psi(x)$. Лоренц-инвариантное число событий в (180) требует лоренц-инвариантности модуля вектора $\mathbf{b} \times \mathbf{n}$. Покажем явным вычислением, что, несмотря на то, что \mathbf{b} , \mathbf{n} и $\mathbf{b} \times \mathbf{n}$ не инвариантны, модуль $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ является лоренц-инвариантом.

Обозначим вектор $\mathbf{b} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ в системах покоя (с.п.) частиц a и b символами $\mathbf{b}^{(a)}$ и $\mathbf{b}^{(b)}$. Их явный вид

$$\mathbf{b}^{(a)} = \mathbf{b} + \frac{\Gamma_a^2}{\Gamma_a + 1} (\mathbf{b}\mathbf{v}_a)\mathbf{v}_a \quad \text{и} \quad \mathbf{b}^{(b)} = \mathbf{b} + \frac{\Gamma_b^2}{\Gamma_b + 1} (\mathbf{b}\mathbf{v}_b)\mathbf{v}_b,$$

где $\Gamma_i = (1 - \mathbf{v}_i^2)^{-1/2}$, $i = (a, b)$.

В тех же обозначениях относительные скорости имеют следующий вид:

$$\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{v}_b^{(a)} = \frac{\mathbf{p}_b^{(a)}}{E_b^{(a)}} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_a}\mathbf{v}_b - \frac{\Gamma_a(1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_a + 1}\mathbf{v}_a \right],$$

$$\mathbf{v}_{ba} = \mathbf{v}_a^{(b)} = \frac{\mathbf{p}_a^{(b)}}{E_a^{(b)}} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_b}\mathbf{v}_a - \frac{\Gamma_b(1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_b + 1}\mathbf{v}_b \right].$$

Таким образом,

$$\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{v}_{ab} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_a}(\mathbf{b} \times \mathbf{v}_b) - \frac{\Gamma_a(1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_a + 1}(\mathbf{b} \times \mathbf{v}_a) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a + 1}(\mathbf{b}\mathbf{v}_a)(\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b) \right],$$

$$\mathbf{b}^{(b)} \times \mathbf{v}_{ba} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_b}(\mathbf{b} \times \mathbf{v}_a) - \frac{\Gamma_b(1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_b + 1}(\mathbf{b} \times \mathbf{v}_b) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma_b}{\Gamma_b + 1}(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)(\mathbf{v}_b \times \mathbf{v}_a) \right].$$

Полезная формула

$$\mathbf{v}_{ab} \times \mathbf{v}_{ba} = \frac{(\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b)}{(1 - \mathbf{v}_a\mathbf{v}_b)^2} \left[1 - \frac{1}{\Gamma_a\Gamma_b} - \left(\frac{\Gamma_a}{\Gamma_a + 1} + \frac{\Gamma_b}{\Gamma_b + 1} \right) (\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma_a\Gamma_b(\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b)^2}{(\Gamma_a + 1)(\Gamma_b + 1)} \right]$$

демонстрирует, что $\mathbf{v}_{ab} \neq \mathbf{v}_{ba}$, хотя $|\mathbf{v}_{ab}| = |\mathbf{v}_{ba}|$. Также эта формула показывает, что угол между относительными скоростями в с.п. частиц отличается от нуля, что является чисто релятивистским эффектом. В нерелятивистском приближении относительные скорости \mathbf{v}_{ab} и \mathbf{v}_{ba} коллинеарны.

Докажем, что $|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2$ с $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{v}_{ab}/|\mathbf{v}_{ab}|$ — релятивистский инвариант. Для этого заметим, что

$$|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{v}_{ab}|^2 = |\mathbf{b}^{(a)}|^2 |\mathbf{v}_{ab}|^2 - (\mathbf{b}^{(a)}\mathbf{v}_{ab})^2.$$

Вычислим сначала $|\mathbf{b}^{(a)}|^2 = (bu_a)^2 - b^2$, где $u_i = \Gamma_i(1, \mathbf{v}_i)$ и $b = (0, \mathbf{b})$ в лабораторной системе отсчета с квадратом $b^2 = -\mathbf{b}^2$. В с. п. частицы a 4-вектор прицельного параметра $b = (b_0^{(a)}, \mathbf{b}^{(a)})$ с компонентами

$$b_0^{(a)} = (bu_a), \quad \mathbf{b}^{(a)} = \mathbf{b} - \frac{\Gamma_a(bu_a)\mathbf{v}_a}{\Gamma_a + 1},$$

где мы учли соотношение $\Gamma_a(\mathbf{b}\mathbf{v}_a) = -(bu_a)$. Затем вычислим

$$(\mathbf{b}^{(a)}\mathbf{v}_{ab}) = \frac{(bu_a)(u_a u_b) - (bu_b)}{(u_a u_b)} \quad \text{и} \quad |\mathbf{v}_{ab}|^2 = \frac{(u_a u_b)^2 - 1}{(u_a u_b)^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2 &= (bu_a)^2 + \frac{[(bu_a)(u_a u_b) - (bu_b)]^2}{1 - (u_a u_b)^2} - b^2 = \\ &= \frac{[b(u_a - u_b)]^2}{1 - (u_a u_b)^2} + \frac{(bu_a)(bu_b)}{(u_a u_b) + 1} - b^2 = |\mathbf{b}^{(b)} \times \mathbf{n}_{ba}|^2. \end{aligned} \quad (184)$$

Поскольку (184) записано в инвариантном виде, мы можем вычислить векторное произведение $|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2$ в с. п. любой из частиц a или b . Например, вычислив в с. п. частицы a , получаем

$$|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2 = \mathbf{b}^2 - \frac{\Gamma_b^2(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)^2}{\Gamma_b^2 - 1},$$

где мы узнаем квадрат вектора, поперечного вектору \mathbf{v}_b :

$$\mathbf{b}_T^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{b}_L^2 = \mathbf{b}^2 - \left[\frac{(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)\mathbf{v}_b}{v_b^2} \right]^2 = \mathbf{b}^2 - \frac{\Gamma_b^2(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)^2}{\Gamma_b^2 - 1}.$$

Таким образом, мы доказали релятивистскую инвариантность выражения $|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}| = |\mathbf{b}^{(b)} \times \mathbf{n}_{ba}|$.

6. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ

В данном разделе обсуждается модификация правил Фейнмана, необходимых для расчета амплитуд рассеяния, соответствующих макроскопическим фейнмановским диаграммам, чьи внешние линии описываются релятивистскими ВП, а не фоковскими одночастичными состояниями.

6.1. Макроскопическая диаграмма общего вида.

Мы будем иметь дело с одночастично-приводимыми связными диаграммами, общая структура которых показана на рис. 6. Внешние линии таких диаграмм соответствуют асимптотически свободным начальным («in») и конечным («out») ВП $|\mathbf{p}_a, s_a, x_a\rangle$ и $|\mathbf{p}_b, s_b, x_b\rangle$ в координатном представлении, т.е. волновым функциям $\psi_a(\mathbf{p}_a, x_a)$ и $\psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b)$, характеризующимся наиболее вероятными импульсами $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b$ и пространственно-временными координатами x_a, x_b , а также массами m_a, m_b и параметрами* σ_a, σ_b («дисперсиями»), характеризующими неопределенности импульсов. Здесь и далее используются следующие обозначения: $I_s (F_s)$ — совокупность in (out) пакетов в блоке X_s («источнике»), $I_d (F_d)$ — совокупность in (out) пакетов в блоке X_d («детекторе»). Блоки X_s и X_d обозначают области взаимодействия полей и могут содержать произвольные внутренние линии и петли. Внутренняя линия, соединяющая блоки X_s и X_d , обозначает причинную функцию Грина массивного нейтрино ν_i с массой m_i ($i = 1, 2, 3, \dots$). В дальнейшем предполагается, что вершины x и y описываются лагранжианом СМ, феноменологически дополненным дираковским или майорановским массовым членом и соответствующим кинетическим вкладом, поэтому либо начальные, либо конечные состояния (либо те и другие) должны содержать заряженный лептон или (анти)нейтрино**. Блоки X_s и X_d считаются макроскопически разделенными в пространстве-времени, что объясняет смысл термина «макроскопическая диаграмма».

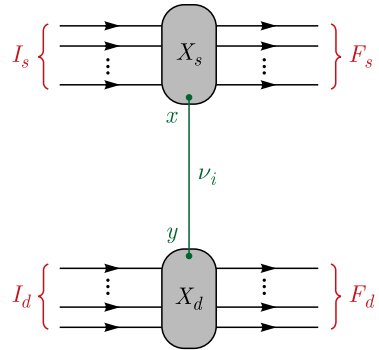


Рис. 6. Макроскопическая фейнмановская диаграмма общего вида с обменом массивным нейтрино

6.2. Примеры макродиаграмм.

Простейший пример макродиаграммы (см. рис. 6) приведен на рис. 7. Сумма таких диаграмм (по индексу i) дает амплитуду процесса

$$\pi^+ \oplus n \rightarrow \mu^+ \oplus \tau^- p, \tag{185}$$

где символ \oplus используется для указания того, что вершины диаграммы макроскопически разделены в пространстве-времени. Процессы типа (185) нарушают два лептонных числа, но сохраняют их сумму. Обычно именно подобные простые реакции дают основной вклад в числа событий в экспери-

* А в более общем случае — наборами параметров σ_a, σ_b .

** Чтобы избежать излишних усложнений, мы исключаем возможность того, что в число внешних однопакетных состояний входят калибровочные или хиггсовские бозоны.



Рис. 7. Пример макроскопической фейнмановской диаграммы, описывающей $\pi_{\mu 2}$ -распад в пространственно-временной точке x_1 и последующее квазиупругое нейтринорождение τ -лептона в точке x_2 . Точки x_1 и x_2 могут быть разделены макроскопически большим пространственно-временным интервалом

ментах по исследованию нейтринных осцилляций с атмосферными и ускорительными (анти)нейтрино. В стандартном квантово-механическом подходе процесс (185) рассматривается как последовательность трех независимых подпроцессов:

- распад пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_{\mu}$ в источнике (в точке x_1),
- распространение нейтрино с «превращением» ν_{μ} в ν_{τ} ,
- квазиупругое взаимодействие $\nu_{\tau} n \rightarrow \tau^+ p$ в детекторе (в точке x_2).

Напротив, в диаграммном подходе КТП мы имеем дело с единым процессом (185), а довольно загадочное квантово-механическое явление флейворного перехода («осцилляции») $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$ сводится к банальной интерференции диаграмм с виртуальными полями нейтрино ν_i определенной массы; при этом даже не возникает необходимости в использовании состояний или полей нейтрино с определенными флейворами ν_{μ} и ν_{τ} .

Рассмотрим еще несколько примеров макродиаграмм, представляющих потенциальный интерес. На рис. 8 показаны четыре диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие μ_{e3} -распад в источнике, сопровождаемый квазиупругим рассеянием виртуального нейтрино (антинейтрино) на нейтроне (протоне) с рождением τ -лептона в детекторной вершине. Разумеется, в СМ с безмассовыми нейтрино все эти процессы строго запрещены законом сохранения лептонных чисел, но становятся возможными при наличии в лагранжиане дираковского или майорановского мас-

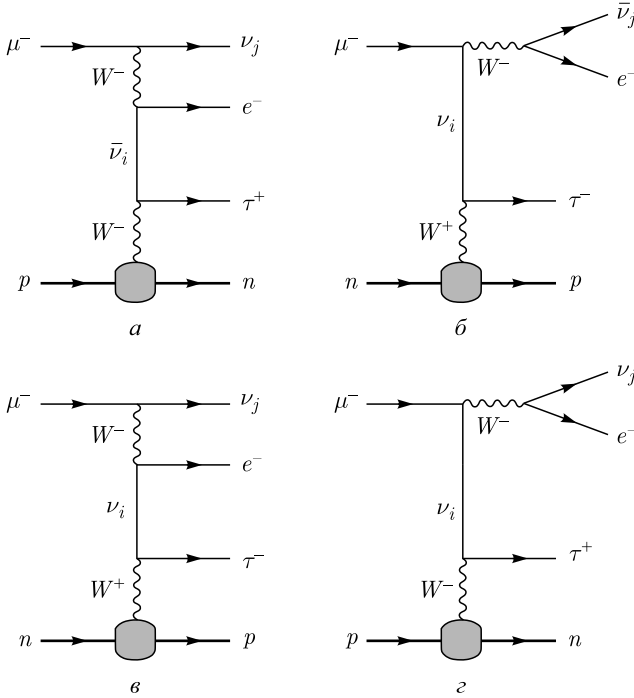
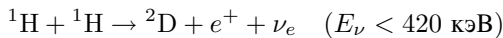


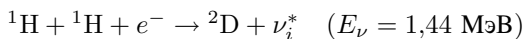
Рис. 8. Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие μ_{e3} -распад в источнике и квазиупругое рождение τ -лептона в детекторе

сового члена. При этом диаграммы *a* и *б* относятся к случаю как дираковских, так и майорановских (анти)нейтрино, а диаграммы *в* и *г* возникают только для майорановских нейтрино (совпадающих с антинейтрино). В последнем случае диаграммы *a*, *г* и *б*, *в* попарно интерферируют друг с другом. В рамках нашего формализма массивные нейтрино во внешних линиях диаграмм рис. 8 должны описываться ВП того же типа, что и для всех других массивных полей.

Диаграммы на рис. 9 описывают основную реакцию *pp*-цикла в Солнце



и детектирование нейтрино в Ga-Ge-детекторе и в детекторе на свободных электронах. Диаграммы *б* и *в* интерферируют. Диаграммы, изображенные на рис. 10, описывают (в низшем порядке по электрослабому взаимодействию) синтез ядра дейтерия в так называемой *pep*-реакции



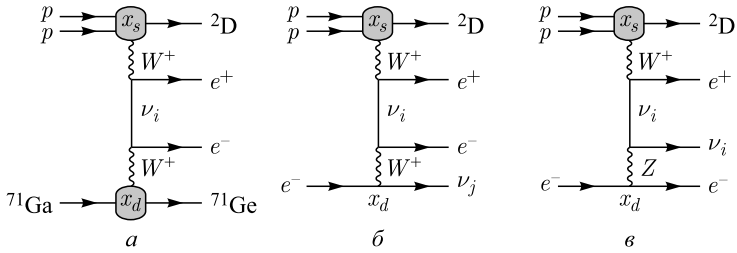


Рис. 9. Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие синтез дейтрона в pp -реакции в источнике и нейтринорождение электрона на ядре галлия (а) и на свободном электроне (б, в) в детекторе

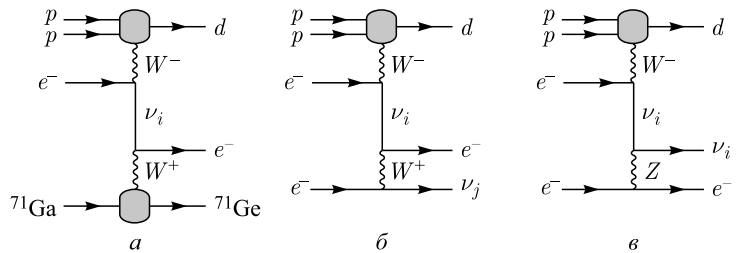


Рис. 10. Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие синтез дейтрона в pep -реакции в источнике и нейтринорождение электрона на ядре галлия (а) и на свободном электроне (б, в) в детекторе

в источнике (Солнце) и последующее взаимодействие виртуального нейтрино ν_i^* с галлиевой мишенью (а) и электронной мишенью (б, в). Чрезвычайно «медленная» pep -реакция ответственна за образование примерно 0,25 % дейтерия в Солнце и проявляется в одной из ветвей протон-протонной цепочки превращения водорода в гелий. Несмотря на ничтожный вклад pep -реакции в энергетику Солнца, она дает хотя и малый, но измеримый вклад в число событий, детектируемых в галлий-германиевых экспериментах (SAGE, GALLEX, GNO). К сожалению, пороги детектирования солнечных нейтрино в современных водно-черенковских подземных детекторах Super-Kamiokande и SNO существенно превышают ожидаемую среднюю энергию нейтрино ($\approx 1,44$ МэВ) от pep -реакции в Солнце, и поэтому процессы, отвечающие диаграммам б и в, пока недоступны для экспериментального изучения. Как и в предыдущем примере, диаграммы б и в интерферируют.

Экзотические процессы, показанные на рис. 10, иллюстрируют целесообразность изучения макродиаграмм с более чем двумя in -пакетами в каждом из макроскопически разделенных блоков. Такого рода диаграммы также представляют интерес для изучения реакций с участием нейтрино в плотной горя-

чей плазме ранней Вселенной и в сверхплотных астрофизических объектах, таких как нейтронные или кварковые звезды. В контексте теории нейтринных осцилляций главная причина для рассмотрения диаграмм с произвольным числом in- и out-пакетов во внешних линиях несколько прозаичнее — как будет видно из дальнейшего, дополнительная симметрия формул для амплитуд общего вида позволяет несколько упростить их анализ за счет унификации обозначений.

6.3. Правила Фейнмана. Формальное определение начального и конечного состояний для диаграммы, показанной на рис. 6, можно написать в виде

$$|\text{in}\rangle = \{|\mathbf{p}_a, x_a, s_a\rangle, a \in I_s \oplus I_d\}, \quad |\text{out}\rangle = \{|\mathbf{p}_b, x_b, s_b\rangle, b \in F_s \oplus F_d\}. \quad (186)$$

Здесь, как и в рассмотренном выше примере (185), символ \oplus подчеркивает, что ВП из I_s и I_d , а также из F_s и F_d макроскопически разделены. Предполагается, кроме того, что все входящие пакеты (a) находятся в отдаленном прошлом, а все выходящие (b) — в отдаленном будущем по отношению к моменту (или временному интервалу) взаимодействия в блоках X_s и X_d . Чтобы использовать стандартную диаграммную технику, основанную на теоремах Вика, мы должны рассматривать лишь такие конфигурации координат x_a и x_b , для которых пакеты в каждом из «подсостояний» I_s , I_d , F_s и F_d не взаимодействуют друг с другом, т. е. пространственные координаты центров пакетов должны быть настолько далеки друг от друга, чтобы состояния (186) можно было с хорошей точностью аппроксимировать прямыми произведениями *асимптотически свободных* однопакетных состояний $|\mathbf{p}_a, s_a, x_a\rangle$, $|\mathbf{p}_b, s_b, x_b\rangle$, т. е.

$$|\text{in}\rangle = \left(\prod_{a \in I_s \oplus I_d} \int \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a) e^{ik_a x_a}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}_a}} a_{\mathbf{k}_a s_a}^{(a)\dagger} \right) |0\rangle, \quad (187)$$

$$|\text{out}\rangle = \left(\prod_{b \in F_s \oplus F_d} \int \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b) e^{ik_b x_b}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}_b}} a_{\mathbf{k}_b s_b}^{(b)\dagger} \right) |0\rangle.$$

Порядок следования операторов рождения в (187) не существен, даже если они соответствуют тождественным полям, поскольку, как было показано в п. 3.5, квантовыми корреляциями между тождественными ВП, достаточно хорошо разделенными в пространстве-времени, можно пренебречь, а общий знак амплитуды рассеяния не важен. Перечисленные требования (включая понятие макроскопического разделения областей взаимодействия X_s и X_d) феноменологически мотивированы и интуитивно ясны, но довольно «размыты» в математическом смысле. Математически четкие условия будут сформулированы в п. 6.9 после получения всех необходимых для этого промежуточных результатов.

Нормировку in- и out-состояний можно написать в виде

$$\langle \text{in} | \text{in} \rangle = \prod_{a \in I_s \oplus I_d} 2\bar{E}_a V_a, \quad \langle \text{out} | \text{out} \rangle = \prod_{b \in F_s \oplus F_d} 2\bar{E}_b V_b, \quad (188)$$

где $\bar{E}_\varkappa \equiv \bar{E}_{\mathbf{p}_\varkappa} \approx E_{\mathbf{p}_\varkappa}$ и $V_\varkappa = V_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa)$ есть, соответственно, средняя энергия и эффективный объем пакета \varkappa ; здесь и в дальнейшем индекс \varkappa используется для обозначения как начальных (a), так и конечных (b) пакетов. Внешние входящие и выходящие линии диаграмм, ассоциированные со свободными полями $\Phi_a(y_a)$ ($a \in I_s \oplus I_d$) и $\Phi_b(y_b)$ ($b \in F_s \oplus F_d$), дают факторы

$$\langle 0 | \Phi_a(y_a) | \mathbf{p}_a, s_a, x_a \rangle \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{p}_b, s_b, x_b | \Phi_b^\dagger(y_b) | 0 \rangle$$

в амплитуде рассеяния. Поэтому в соответствии с принятым нами приближением узких в импульсном пространстве пакетов стандартный (плосковолновой) фейнмановский фактор, соответствующий внешней линии, должен быть умножен на

$$\begin{cases} \psi_a(\mathbf{p}_a, y_a - x_a) & \text{для } a \in I_s \oplus I_d, \\ \psi_b^*(\mathbf{p}_b, y_b - x_b) & \text{для } b \in F_s \oplus F_d, \end{cases} \quad (189)$$

где каждая волновая функция дается (108) и определяется формфактором $\phi_\varkappa(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\varkappa)$, зависящим от массы m_\varkappa и дисперсии σ_\varkappa , а 4-вектор y_\varkappa (переменная интегрирования) есть координата внутренней точки (элементарной вершины взаимодействия) внешней линии \varkappa с определенной внутренней линией диаграммы. Поэтому амплитуда, соответствующая любой макродиаграмме, должна содержать множители

$$\int dy_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, y_\varkappa - x_\varkappa) f_{(\varkappa)}(z_\varkappa - y_\varkappa), \quad (190)$$

в которых $f_{(\varkappa)}(y_\varkappa - z_\varkappa)$ — структурный фактор, соответствующий взаимодействию внутренней линии диаграммы с внешним (входящим) полем $\Phi_\varkappa(y_\varkappa)$ в точке y_\varkappa (для краткости мы опускаем возможные тензорные или спинорные индексы и все аргументы функции $f_{(\varkappa)}$, кроме $z_\varkappa - y_\varkappa$). С учетом определения функции ψ_\varkappa интеграл (190) может быть тождественно переписан в виде

$$\begin{aligned} \int dy_\varkappa \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(y_\varkappa - x_\varkappa)} \phi_\varkappa(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\varkappa) \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ik(z_\varkappa - y_\varkappa)} \tilde{f}_{(\varkappa)}(k) = \\ = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(z_\varkappa - y_\varkappa)} \phi_\varkappa(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\varkappa) \tilde{f}_{(\varkappa)}(p), \end{aligned}$$

где $\tilde{f}_{(\varkappa)}(p)$ есть фурье-образ функции $f_{(\varkappa)}(x)$. Благодаря предполагаемому « δ -образному» поведению формфактора $\phi_\varkappa(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\varkappa)$ аргумент p у функции

$\tilde{f}_{(\mathcal{X})}(p)$ можно заменить на $p_{\mathcal{X}} = (E_{\mathbf{p}_{\mathcal{X}}}, \mathbf{p}_{\mathcal{X}})$, после чего интеграл (190) перепишем в виде

$$\int dy_{\mathcal{X}} \psi_{\mathcal{X}}(\mathbf{p}_{\mathcal{X}}, y_{\mathcal{X}} - x_{\mathcal{X}}) f_{(\mathcal{X})}(z_{\mathcal{X}} - y_{\mathcal{X}}) \approx \psi_{\mathcal{X}}(\mathbf{p}_{\mathcal{X}}, z_{\mathcal{X}} - x_{\mathcal{X}}) \tilde{f}_{(\mathcal{X})}(p_{\mathcal{X}}). \quad (191)$$

Этот результат справедлив для узких ВП общего вида, но в реальных расчетах мы будем использовать приближение СРГП. Соотношение, аналогичное (191), можно получить и для выходящих линий диаграммы. Поскольку в плосковолновом пределе правая часть (191) представляет собой стандартный фейнмановский фактор, то из (189) заключаем, что фейнмановские правила для внутренних линий диаграммы не видоизменяются.

6.4. Интегралы перекрытия. В дальнейшем мы ограничимся простым случаем, когда взаимодействия в блоках X_s и X_d можно описать локальными лептонными или адронными токами (явные формулы будут получены в следующем пункте для специального класса диаграмм). Тогда, принимая во внимание, что фурье-представление нейтринного пропагатора содержит фазовый фактор $\exp[iq(x - y)]$ (где q — 4-импульс виртуального нейтрино ν_i), все функции $\psi_{\mathcal{X}}$ и $\psi_{\mathcal{X}}^*$ могут быть отфакторизованы от «динамической» части диаграммы в виде следующих двух общих множителей в подынтегральном выражении для амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_s(q) &= \int dx e^{+iqx} \left[\prod_{a \in I_s} \psi_a(\mathbf{p}_a, x - x_a) \right] \left[\prod_{b \in F_s} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x - x_b) \right], \\ \mathbb{V}_d(q) &= \int dy e^{-iqy} \left[\prod_{a \in I_d} \psi_a(\mathbf{p}_a, y - x_a) \right] \left[\prod_{b \in F_d} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, y - x_b) \right]. \end{aligned} \quad (192)$$

Лоренц-инвариантные функции (192) характеризуют пространственно-временное перекрытие in- и out-пакетов в источнике и детекторе, усредненное по всему пространству-времени*, и в дальнейшем мы будем называть их интегралами перекрытия. Разумеется, $\mathbb{V}_s(q)$ и $\mathbb{V}_d(q)$ являются функциями не только 4-импульса q , но также 4-импульсов и 4-координат всех внешних пакетов, участвующих в реакции; эти параметры опущены для краткости. Изучим основные свойства интегралов перекрытия, необходимые для дальнейшего анализа.

6.5. Плосковолновой предел. Нетрудно видеть, что в плосковолновом пределе ($\sigma_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$, $\forall \mathcal{X}$) интегралы перекрытия (192) переходят в обычные сингулярные факторы

$$\mathbb{V}_s(q) \rightarrow (2\pi)^4 \delta(q - q_s), \quad \mathbb{V}_d(q) \rightarrow (2\pi)^4 \delta(q + q_d), \quad (193)$$

*Фазовые множители e^{+iqx} и e^{-iqy} в (192) можно интерпретировать как ВП выходящего и входящего нейтрино.

где q_s и q_d — переданные 4-импульсы в источнике и детекторе, определяемые как

$$q_s = \sum_{a \in I_s} p_a - \sum_{b \in F_s} p_b \quad \text{и} \quad q_d = \sum_{a \in I_d} p_a - \sum_{b \in F_d} p_b. \quad (194)$$

δ -функции в (193) обеспечивают точное сохранение энергии-импульса в вершинах X_s и X_d (т. е. в «подпроцессах» $I_s \rightarrow F_s + \nu_i$ и $\nu_i + I_d \rightarrow F_d$) и в результате сохранение энергии-импульса в процессе $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$ в целом:

$$\sum_{a \in I_s \oplus I_d} p_a = \sum_{b \in F_s \oplus F_d} p_b.$$

Отметим, что информация о пространственно-временных координатах внешних пакетов полностью теряется в плосковолновом пределе.

6.6. Тензоры перекрытия. При $\sigma_{\varkappa} \neq 0$ интегралы перекрытия несингулярны и можно ожидать не более чем приближенного сохранения энергии и импульса в вершинах. Для количественного описания перейдем к модели СРГП и введем тензоры

$$T_{\varkappa}^{\mu\nu} = \sigma_{\varkappa}^2 (u_{\varkappa}^{\mu} u_{\varkappa}^{\nu} - g^{\mu\nu}), \quad (195)$$

где $u_{\varkappa} = p_{\varkappa}/m_{\varkappa} = \Gamma_{\varkappa}(1, \mathbf{v}_{\varkappa})$ — 4-скорость пакета \varkappa . Тогда интегралы перекрытия (192) принимают вид

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = \int dx \exp [i(\pm qx - q_{s,d}x) - \Upsilon_{s,d}(x)], \quad (196)$$

где

$$\Upsilon_{s,d}(x) = \sum_{\varkappa \in S,D} T_{\varkappa}^{\mu\nu} (x_{\varkappa} - x)_{\mu} (x_{\varkappa} - x)_{\nu}, \quad S = I_s \oplus F_s, \quad D = I_d \oplus F_d.$$

Определим также тензоры

$$\mathfrak{R}_s^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa \in S} T_{\varkappa}^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_d^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa \in D} T_{\varkappa}^{\mu\nu}. \quad (197)$$

Поскольку лоренц-инвариантная квадратичная форма

$$T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} = \sigma_{\varkappa}^2 [(u_{\varkappa} x)^2 - x^2] = \sigma_{\varkappa}^2 \mathbf{x}_{\varkappa}^2$$

(в которой \mathbf{x}_{\varkappa} обозначает переменную \mathbf{x} в с. с. о. пакета \varkappa) неотрицательна, то квадратичные формы $\mathfrak{R}_s^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ и $\mathfrak{R}_d^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ также неотрицательны. Более того, они *положительно определены* почти всюду, поскольку могут обращаться в нуль, только если 3-скорости \mathbf{v}_{\varkappa} *всех* входящих и выходящих пакетов одинаковы или, другими словами, если существует система отсчета, в

которой 3-импульсы \mathbf{p}_\varkappa всех пакетов в источнике или детекторе обращаются в нуль. Последнее означало бы, что эффективно 3-импульс виртуального нейтрино мал по величине*; в частности, в пределе точного сохранения энергии-импульса вклад в амплитуду процесса с нулевыми импульсами всех внешних частиц может быть отличен от нуля лишь при $|\mathbf{q}| \equiv 0$. За исключением этого физически малоинтересного случая можно считать тензоры $\mathfrak{R}_s^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{R}_d^{\mu\nu}$ *положительно-определенными*, что эквивалентно положительности собственных значений матриц $\|\mathfrak{R}_s^{\mu\nu}\|$ и $\|\mathfrak{R}_d^{\mu\nu}\|$. Поэтому существуют положительно-определенные тензоры $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}$ такие, что

$$\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\lambda}(\mathfrak{R}_s)_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu \quad \text{и} \quad \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\lambda}(\mathfrak{R}_d)_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (198a)$$

или, в матричной форме,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d} = \|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}\| = g\mathfrak{R}_{s,d}^{-1}g, \quad \mathfrak{R}_{s,d} = \|\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}\|, \quad (198b)$$

где $g = \|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Разумеется, $|\mathfrak{R}_{s,d}| > 0$ и $|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}| = |\mathfrak{R}_{s,d}|^{-1}$. Мы будем называть $\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}$ тензорами перекрытия и обратными тензорами перекрытия соответственно. Явный вид этих тензоров как для общего случая, так и для конкретных процессов в источнике и детекторе довольно громоздок, и соответствующие расчеты весьма трудоемки. Поэтому технические результаты вынесены в приложение 1. Там же изучаются свойства некоторых других величин, которые строятся из тензоров перекрытия и 4-импульсов, участвующих в расчетах макроскопических диаграмм.

Интеграл (196) может быть вычислен в явном виде с помощью хорошо известной формулы для 4-мерной гауссовой квадратуры в пространстве Минковского (см. (349), приложение 2):

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = (2\pi)^4 \tilde{\delta}_{s,d}(q \mp q_{s,d}) \exp[-\mathfrak{S}_{s,d} \pm i(q \mp q_{s,d})X_{s,d}]. \quad (199)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\tilde{\delta}_{s,d}(K) = \frac{1}{(4\pi)^2 \sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}} \exp\left(-\frac{1}{4}\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}K_\mu K_\nu\right), \quad (200)$$

$$X_{s,d}^\mu = \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} \sum_\varkappa T_{\varkappa\nu}^\lambda x_{\varkappa\lambda} = \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} \sum_\varkappa \sigma_\varkappa^2 [(u_\varkappa x_\varkappa)u_{\varkappa\nu} - x_{\varkappa\nu}], \quad (201)$$

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa, \varkappa'} W_{\varkappa\varkappa'}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa'\nu}, \quad \varkappa, \varkappa' \in S \quad \text{или} \quad D. \quad (202)$$

*Вообще говоря, 4-импульс q в (196) произволен и в отсутствие точного сохранения энергии-импульса в вершинах диаграммы одновременное обращение в нуль импульсов \mathbf{p}_\varkappa означает лишь то, что *наиболее вероятное* значение $|\mathbf{q}|$ мало, причем степень малости $|\mathbf{q}|$ определяется малостью отношений $\sigma_\varkappa/m_\varkappa$. Ниже мы уточним это утверждение.

Тензоры $W_{\varkappa\varkappa'}^{\mu\nu}$ имеют вид

$$W_{\varkappa\varkappa'}^{\mu\nu} = \delta_{\varkappa\varkappa'} T_{\varkappa}^{\mu\nu} - T_{\varkappa\mu'}^{\mu} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu'\nu'} T_{\varkappa'\nu'}^{\nu}, \quad W_{\varkappa\varkappa'}^{\nu\mu} = W_{\varkappa'\varkappa}^{\nu\mu}, \quad (203)$$

где индексы s, d не выписаны явно, но подразумеваются. Выясним физический смысл величин (200)–(202).

6.7. Факторы, ответственные за баланс энергии-импульса. Как нетрудно видеть из интегрального представления для функций (200)

$$\tilde{\delta}_{s,d}(K) = \int \frac{dx}{(2\pi)^4} \exp(iKx - \mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}),$$

в плосковолновом пределе факторы $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$ в (199) превращаются в обычные δ -функции $\delta(q - q_s)$ и $\delta(q + q_d)$. При малых, но ненулевых значениях σ_{\varkappa} вероятность процесса $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$ будет сильно подавлена при малом отклонении от точного сохранения 4-импульса, т. е. при небольшом дисбалансе между передачами 4-импульсов q_s и q_d в вершинах макродиаграммы и 4-импульсом виртуального нейтрино. В реальных экспериментах измеряются вероятности процессов, тем или иным образом усредненные по конфигурациям внешних импульсов, включая, вообще говоря, импульсы детектируемых вторичных частиц, для которых усреднение производится по конечным интервалам, задаваемым условиями эксперимента. Поэтому факторы $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$ отвечают за приближенное *в статистическом смысле* сохранение энергии и импульса в подпроцессах рождения и поглощения нейтрино, причем допустимая «разбалансировка» определяется обратными тензорами перекрытия, т. е., в конечном счете, величинами «размазок» 4-импульсов in- и out-пакетов. В дальнейшем, говоря о приближенном сохранении энергии-импульса в вершинах, мы будем подразумевать, что речь идет лишь о тех конфигурациях внешних импульсов, которые вносят существенный вклад в полную вероятность процесса, усредненную по всем возможным конфигурациям. Конкретная реализация такого усреднения была рассмотрена в [58].

6.8. Прицельные точки, геометрические факторы подавления, симметрии и все такое. Преобразуем квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d , воспользовавшись определениями (197), (202) и (203):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{s,d} &= \sum_{\varkappa,\varkappa'} T_{\varkappa}^{\mu\mu'} (\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d})_{\mu'\nu'} T_{\varkappa'}^{\nu'\nu} x_{\varkappa\mu} (x_{\varkappa} - x_{\varkappa'})_{\nu} = \\ &= \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa\nu} - \sum_{\varkappa,\varkappa'} T_{\varkappa}^{\mu\mu'} (\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d})_{\mu'\nu'} T_{\varkappa'}^{\nu'\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa'\nu}. \end{aligned}$$

Вставив в последнее слагаемое единичную матрицу и учитывая (201) и (202), находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{s,d} &= \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa\nu} - \left(\sum_{\varkappa} T_{\varkappa\mu'}^{\mu} x_{\varkappa\mu} \right) \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu'\lambda} (\mathfrak{R}_{s,d})_{\lambda\rho} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\rho\nu'} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{\varkappa'} T_{\varkappa'\nu'}^{\nu} x_{\varkappa'\nu'} \right) = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa\nu} - (\mathfrak{R}_{s,d})_{\mu\nu} X_{s,d}^{\mu} X_{s,d}^{\nu}, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\mu\nu} (x_{\varkappa}^{\mu} x_{\varkappa}^{\nu} - X_{s,d}^{\mu} X_{s,d}^{\nu}). \quad (204)$$

Полученное выражение представляет собой средневзвешенное (по всем внешним пакетам в соответствующей вершине диаграммы) квадратичных отклонений компонент 4-векторов x_{\varkappa} ($\varkappa \in S, D$) от соответствующих компонент пространственно-временной точки $X_{s,d}$, причем роль «весов» играют тензорные компоненты $T_{\varkappa}^{\mu\nu}$. Таким образом, точки X_s и X_d являются центрами пространственно-временных областей, в которых происходят взаимодействия пакетов в источнике и детекторе. Чтобы полностью прояснить физический и геометрический смыслы этого результата, полезно детально изучить свойства симметрии величин $X_{s,d}$ и $\mathfrak{S}_{s,d}$.

6.8.1. Группа трансляций. Нетрудно доказать, что квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d инвариантны относительно трансляций всех координат x_{\varkappa} на один и тот же произвольный 4-вектор y ,

$$x_{\varkappa} \mapsto x'_{\varkappa} = x_{\varkappa} + y. \quad (205)$$

В самом деле, при таком преобразовании $X_{s,d} \mapsto X'_{s,d} = X_{s,d} + y$ и поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{s,d} \mapsto \mathfrak{S}'_{s,d} &= \mathfrak{S}_{s,d} + \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\mu\nu} (y^{\mu} x_{\varkappa}^{\nu} + x_{\varkappa}^{\mu} y^{\nu} - y^{\mu} X_{s,d}^{\nu} - X_{s,d}^{\mu} y^{\nu}) = \\ &= \mathfrak{S}_{s,d} + 2y_{\mu} \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu}^{\mu} (x_{\varkappa}^{\nu} - X_{s,d}^{\nu}). \end{aligned}$$

Поскольку же, согласно определению (201),

$$\sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu}^{\mu} X_{s,d}^{\nu} = (\mathfrak{R}_{s,d})_{\nu}^{\mu} X_{s,d}^{\nu} = (\mathfrak{R}_{s,d})_{\nu}^{\mu} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\nu\nu'} \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu'}^{\lambda} x_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\nu},$$

видим, как и утверждалось, что

$$\mathfrak{S}'_{s,d} = \mathfrak{S}_{s,d}.$$

Следует отметить, что квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d инвариантны также относительно инверсии пространственно-временных координат, $x_{\varkappa} \mapsto -x_{\varkappa}$.

Сделаем теперь в (204) преобразование (205) с $y = -X_{s,d}$, получаем следующее представление для функций $\mathfrak{S}_{s,d}$:

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} (x_{\varkappa} - X_{s,d})_{\mu} (x_{\varkappa} - X_{s,d})_{\nu}, \quad (206a)$$

из которого немедленно следует, что квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d неотрицательны и, следовательно, факторы $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ и $\exp(-\mathfrak{S}_d)$ в (199) подавляют амплитуду при определенных конфигурациях импульсов и координат in- и out-пакетов. Используя определение (195), запишем (206a) в виде

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 \{ [u_{\varkappa}(x_{\varkappa} - X_{s,d})]^2 - (x_{\varkappa} - X_{s,d})^2 \} = \quad (206б)$$

$$= \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 | \mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)} |^2. \quad (206в)$$

Здесь и далее индекс « (\varkappa) » означает, что соответствующий вектор записан в с. с. о. пакета \varkappa . Из (206в) следует, что подавление мало (т. е. $\mathfrak{S}_{s,d} \ll 1$) при таких конфигурациях координат и импульсов, для которых величины $\sigma_{\varkappa}^2 | \mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)} |^2$ малы при всех $\varkappa \in S, D$.

6.8.2. Группа равномерных прямолинейных движений. Очевидно, $\mathfrak{S}_{s,d} = 0$, когда все 4-координаты x_{\varkappa} совпадают друг с другом (при этом из равенства $x_{\varkappa} = x_{s,d}$, $\forall \varkappa \in S, D$ следует, что $X_{s,d} = x_{s,d}$). Но является ли это условие необходимым для обращения $\mathfrak{S}_{s,d}$ в нуль? К счастью, ответ на этот вопрос отрицателен*. Чтобы увидеть это, заметим, что 4-вектор $X_{\varkappa} = (u_{\varkappa} x_{\varkappa}) u_{\varkappa} - x_{\varkappa}$ (а следовательно, и его квадрат $X_{\varkappa}^2 = x_{\varkappa}^2 - (u_{\varkappa} x_{\varkappa})^2$) инвариантен по отношению к преобразованию

$$x_{\varkappa}^0 \mapsto \tilde{x}_{\varkappa}^0 = x_{\varkappa}^0 + \theta_{\varkappa}, \quad \mathbf{x}_{\varkappa} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}_{\varkappa} = \mathbf{x}_{\varkappa} + \mathbf{v}_{\varkappa} \theta_{\varkappa}, \quad (207)$$

в котором θ_{\varkappa} — произвольный вещественный параметр размерности времени. Следовательно, 4-векторы $X_{s,d}$ и, как легко видеть из представления (204), квадратичные формы $\mathfrak{S}_{s,d}$ инвариантны по отношению к $N_{s,d}$ -параметрическому множеству преобразований (207), где N_s (N_d) есть число однопакетных состояний, содержащихся в начальном и конечном состояниях в источнике (детекторе). Совокупность всех преобразований вида (207) образует группу, описывающую равномерные прямолинейные движения пакетов, т. е. сдвиги вдоль классических мировых линий центров пакетов. Поэтому как $X_{s,d}$, так и $\mathfrak{S}_{s,d}$ однозначно задаются фиксацией скоростей \mathbf{v}_{\varkappa} и произвольных пространственно-временных точек \tilde{x}_{\varkappa} на этих мировых линиях.

* «К счастью», так как в противном случае не могло бы быть и речи об асимптотически свободных ВП, без чего невозможно было бы использовать теорию возмущений.

Если, в частности, классические траектории всех in- и out-пакетов пересекаются в прицельной точке, то $\mathfrak{S}_{s,d} = 0$ в любой точке каждой из этих траекторий. Таким образом, пакеты могут быть макроскопически разделены в пространстве-времени до и после взаимодействия и считаться асимптотически свободными, но если векторы скоростей \mathbf{v}_a in-пакетов и векторы $-\mathbf{v}_b$, противоположенные скоростям асимптотически свободных out-пакетов, все «нацелены» в точку X_s (в источнике) или X_d (в детекторе), то \mathfrak{S}_s или \mathfrak{S}_d обращаются в нуль. На основании этого свойства естественно назвать 4-векторы X_s и X_d прицельными точками in- и out-пакетов в источнике и детекторе соответственно.

Чтобы сделать картину взаимодействия пакетов более наглядной, полезно ввести понятие мировой трубки ВП, определяемой как пространственно-временной цилиндрический объем, заметаемый движущимся по классической траектории сплюснутым эллипсоидом, который служит образной моделью ВП*. Понятно, что подавление интеграла перекрытия (и амплитуды), обусловленное фактором $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ ($\exp(-\mathfrak{S}_d)$), мало, если *все* мировые трубки in- и out-пакетов в источнике (детекторе) пересекаются друг с другом (рис. 11). В определенном смысле ВП ведут себя подобно взаимопроникающим облачкам. Для иллюстрации этого образа представим функции \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d в виде отношений интегралов перекрытия специального вида:

$$\exp(-\mathfrak{S}_{s,d}) = \frac{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x_{\varkappa} - x)|}{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x)|}. \quad (208a)$$

В силу инвариантности функций $|\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x_{\varkappa} - x)|$ относительно преобразований (207) можно заменить координаты x_{\varkappa} в (208a) на y_{\varkappa} , где

$$y_{\varkappa}^0 = X_{s,d}^0, \quad \mathbf{y}_{\varkappa} = \mathbf{x}_{\varkappa} + (X_{s,d}^0 - x_{\varkappa}^0)\mathbf{v}_{\varkappa}, \quad \varkappa \in S \text{ или } D,$$

и переписать (208a) в виде

$$\exp(-\mathfrak{S}_{s,d}) = \frac{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, y_{\varkappa} - x)|}{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x)|}. \quad (208b)$$

Тогда из геометрических соображений становится очевидным, что $\exp(-\mathfrak{S}_{s,d}) < 1$ при несовпадении любой пары координат y_{\varkappa} и y_{\varkappa}' в один

Напомним, что диаметр такого эллипсоида, перпендикулярный вектору наиболее вероятного импульса ВП \mathbf{p} (а значит, и диаметр классической мировой трубки), равен $d_ \propto 1/\sigma$, тогда как параллельный вектору \mathbf{p} диаметр сжат фактором $\Gamma_{\mathbf{p}}$, возникающим в результате лоренцева сокращения.

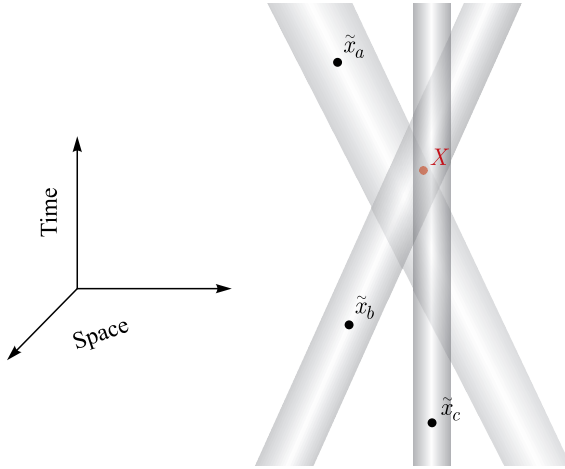


Рис. 11. Условный образ «классических мировых трубок» сталкивающихся ВП. Трубки изображают пространственно-временные цилиндрические объемы, заметаемые классически движущимися эллипсоидами, служащими наглядными моделями ВП. Прицельная точка X однозначно определяется скоростями \mathbf{v}_x пакетов и пространственно-временными точками $\tilde{x}_x = \tilde{x}_x(\theta_x)$, произвольно выбранными на осях симметрии трубок (по которым в среднем движутся центры пакетов). Эти оси отнюдь не обязаны пересекать точку X , но если конфигурация координат и скоростей in- и out-пакетов такова, что прицельная точка оказывается внутри области пересечения *всех* мировых трубок пакетов, то подавление такой конфигурации мало (отсутствует в случае точного пересечения осей в точке X); в противном же случае оно велико

и тот же («прицельный») момент времени, поскольку подынтегральное выражение в числителе отношения (208б) не превосходит такового в знаменателе. Это утверждение схематически иллюстрирует рис. 12 на примере пары перекрывающихся пакетов 1 и 2. Пакеты изображены на рисунке в системе их центра инерции ($\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0$), в которой они выглядят как эллипсоиды с эффективными объемами $(\pi/2)^{3/2}/(\Gamma_*\sigma_{1,2}^3)$, сплюснутые вдоль направления вектора \mathbf{p}_1^* . Из рис. 12 видно, что для любых значений x^* (а значит, и для любых значений переменной интегрирования в (208б)) справедливо неравенство

$$|\psi_1(\mathbf{p}_1^*, y_1^* - x^*)\psi_2(\mathbf{p}_2^*, y_2^* - x^*)| < |\psi_1(\mathbf{p}_1^*, x^*)\psi_2(\mathbf{p}_2^*, x^*)| \quad \text{при } y_1^* \neq y_2^*.$$

Понятно, что отношение (208б) мало, если 4-координаты y_x^* и $y_{x'}^*$ *любой* пары пакетов x и x' существенно отличаются друг от друга.

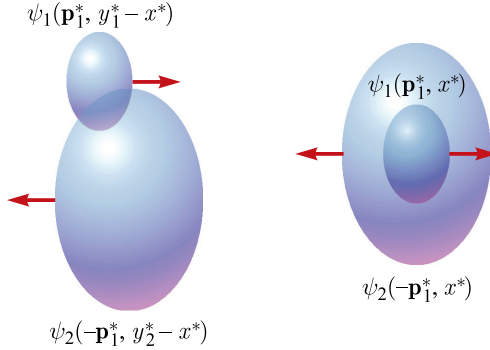


Рис. 12. Схематическая иллюстрация двух конфигураций пары перекрывающихся ВП в системе их центра инерции. Конфигурация слева соответствует фактору $|\psi_1(\mathbf{p}_1, y_1 - x)\psi_2(\mathbf{p}_2, y_2 - x)| = |\psi_1(\mathbf{p}_1^*, y_1^* - x^*)\psi_2(-\mathbf{p}_1^*, y_2^* - x^*)|$ в подынтегральном выражении числителя, а справа — фактору $|\psi_1(\mathbf{p}_1, x)\psi_2(\mathbf{p}_2, x)| = |\psi_1(\mathbf{p}_1^*, x^*)\psi_2(-\mathbf{p}_1^*, x^*)|$ в подынтегральном выражении знаменателя в (208). Стрелками показаны импульсы $\pm\mathbf{p}_1^*$

Тождество (2086) можно переписать также в следующей эквивалентной форме:

$$\exp(-2\mathfrak{S}_{s,d}) = \frac{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, y_{\varkappa} - x)|^2}{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x)|^2}. \quad (209)$$

Фактор $\exp[-2(\mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d)]$ входит в квадрированную амплитуду рассеяния.

6.8.3. Прицельные векторы. Найдем пространственное расстояние между прицельной точкой и классической мировой линией пакета $\tilde{\mathbf{x}}_{\varkappa}(\theta_{\varkappa}) = \mathbf{x}_{\varkappa} + \mathbf{v}_{\varkappa}\theta_{\varkappa}$, т. е. классический прицельный параметр

$$|\mathbf{b}_{\varkappa}| = \min_{-\infty < \theta_{\varkappa} < \infty} |\tilde{\mathbf{x}}_{\varkappa}(\theta_{\varkappa}) - \mathbf{X}_{s,d}|.$$

Очевидно, что $|\mathbf{b}_{\varkappa}| = |\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}|$ для неподвижного пакета \varkappa . Прицельный параметр для движущегося пакета определяется условием

$$|\mathbf{v}_{\varkappa}\theta_{\varkappa} = \mathbf{n}_{\varkappa}(\mathbf{X}_{s,d} - \mathbf{x}_{\varkappa}), \quad \mathbf{n}_{\varkappa} = \mathbf{v}_{\varkappa}/|\mathbf{v}_{\varkappa}|.$$

Исходя из этого условия и временно предполагая, что $\mathbf{v}_{\varkappa} \neq 0$, построим 4-вектор b_{\varkappa} , компоненты которого равны

$$\begin{aligned} b_{\varkappa}^0 &= (x_{\varkappa}^0 - X_{s,d}^0) - |\mathbf{v}_{\varkappa}|^{-1} \mathbf{n}_{\varkappa}(\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}), \\ \mathbf{b}_{\varkappa} &= (\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}) - [\mathbf{n}_{\varkappa}(\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d})\mathbf{n}_{\varkappa}]. \end{aligned} \quad (210)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\mathbf{n}_\varkappa \mathbf{b}_\varkappa = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_\varkappa \times \mathbf{b}_\varkappa = \mathbf{n}_\varkappa \times (\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d}), \quad (211)$$

откуда получаем

$$|\mathbf{b}_\varkappa| = |\mathbf{n}_\varkappa \times (\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d})|.$$

Таким образом, $|\mathbf{b}_\varkappa| = 0$, если вектор скорости \mathbf{v}_\varkappa коллинеарен вектору $\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d}$ при любом значении $|\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d}| < \infty$, т. е. если классическая мировая линия центра пакета \varkappa пересекает прицельную точку. Кроме того, $b_\varkappa^0 = |\mathbf{b}_\varkappa| = 0$, если $\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d} = \mathbf{v}_\varkappa(x_\varkappa^0 - X_{s,d}^0)$. Поскольку 4-вектор $b_\varkappa = (b_\varkappa^0, \mathbf{b}_\varkappa)$ (определенный с точностью до знака) является очевидным релятивистским обобщением обычного нерелятивистского прицельного параметра, естественно назвать его прицельным вектором. Учитывая (211), получаем

$$(u_\varkappa b_\varkappa)^2 - b_\varkappa^2 = \Gamma_\varkappa^2 (b_\varkappa^0)^2 - b_\varkappa^2 = (\Gamma_\varkappa^2 - 1)(b_\varkappa^0)^2 + \mathbf{b}_\varkappa^2. \quad (212)$$

Подставив теперь в (206б) b_\varkappa вместо $x_\varkappa - X_{s,d}$ (величина $\mathfrak{S}_{s,d}$ при этом не изменится) и учитывая (212), найдем

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa \in S,D} \sigma_\varkappa^2 [(\Gamma_\varkappa^2 - 1)(b_\varkappa^0)^2 + \mathbf{b}_\varkappa^2] = \sum_{\varkappa \in S,D} \sigma_\varkappa^2 |\mathbf{b}_\varkappa^{(\varkappa)}|^2. \quad (213)$$

В последнем выражении вклад каждого пакета записан в его собственной системе отсчета, в которой, естественно, $|\mathbf{b}_\varkappa^{(\varkappa)}| = |\mathbf{x}_\varkappa^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)}|$; так что, как и следовало ожидать, (213) совпадает с (206в). Оба равенства в (213) остаются справедливыми и в случае, когда некоторые пакеты покоятся в л. с., поскольку, как следует из (210),

$$\lim_{\mathbf{v}_\varkappa \rightarrow 0} [(\Gamma_\varkappa^2 - 1)(b_\varkappa^0)^2 + \mathbf{b}_\varkappa^2] = |\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d}|^2. \quad (214)$$

Поэтому временное ограничение $\mathbf{v}_\varkappa \neq 0$, использованное при выводе (213), можно снять.

Физический смысл полученного результата вполне прозрачен: взаимодействие in- и out-пакетов не будет подавлено (т. е. величина $\mathfrak{S}_{s,d}$ будет мала), если *все* прицельные параметры малы по сравнению с эффективными размерами пакетов ($\sim 1/\sigma_\varkappa$) в их собственных системах отсчета. Если все прицельные параметры $|\mathbf{b}_\varkappa^{(\varkappa)}|$ одинаковы по порядку величины, то наибольшие вклады в $\mathfrak{S}_{s,d}$ обусловлены пакетами с наибольшими значениями «размазок» импульсов, следовательно, имеют наименьшие эффективные размеры*. Если

* При этом становится очевидной физическая несостоятельность понятий точечных частиц (предельно локализованных состояний) и плоских волн (состояний с определенными импульсами) в рамках теории возмущений КТП: первые вообще не могут взаимодействовать (амплитуда обращается в нуль при наличии «точечной частицы» в любом из подсостояний $I_{s,d}$ или $F_{s,d}$), а вторые взаимодействуют на любых расстояниях.

отвлечься от возможного влияния динамики взаимодействия на величину «размазок» импульсов вторичных пакетов, а также от эффектов фазового объема реакции или распада, то геометрическое подавление амплитуды тем сильнее, чем больше частиц (на практике — вторичных) участвует в процессе. Фактор подавления «неправильных» конфигураций мировых линий пакетов определяется в л.с. как временными, так и пространственными компонентами прицельных 4-векторов $b_{\mathcal{X}}$. При этом вклады нерелятивистских и ультрарелятивистских пакетов в $\mathfrak{S}_{s,d}$ имеют вид

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 \{ [(\mathbf{x}_{\mathcal{X}} - \mathbf{X}_{s,d}) - \mathbf{v}_{\mathcal{X}}(x_{\mathcal{X}}^0 - X_{s,d}^0)]^2 + [\mathbf{v}_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_{\mathcal{X}} - \mathbf{X}_{s,d})]^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{v}_{\mathcal{X}}|^3) \} \quad (|\mathbf{v}_{\mathcal{X}}| \ll 1) \quad (215a)$$

и

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 \{ \Gamma_{\mathcal{X}}^2 [(x_{\mathcal{X}}^0 - X_{s,d}^0) - \mathbf{n}_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_{\mathcal{X}} - \mathbf{X}_{s,d})]^2 + [\mathbf{n}_{\mathcal{X}} \times (\mathbf{x}_{\mathcal{X}} - \mathbf{X}_{s,d})]^2 - (x_{\mathcal{X}}^0 - X_{s,d}^0)[(x_{\mathcal{X}}^0 - X_{s,d}^0) - \mathbf{n}_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_{\mathcal{X}} - \mathbf{X}_{s,d})] + \mathcal{O}(\Gamma_{\mathcal{X}}^{-2}) \} \quad (\Gamma_{\mathcal{X}}^2 \gg 1) \quad (215b)$$

соответственно. Из (215a) видно, что для нерелятивистских ВП подавление слабо зависит от вектора скорости и временного интервала $x_{\mathcal{X}}^0 - X_{s,d}^0$ и определяется в основном пространственным расстоянием между центром пакета и прицельной точкой. Для ультрарелятивистских пакетов, напротив, подавление сильно зависит от величины и направления скорости, а также от разности времен $x_{\mathcal{X}}^0$ и $X_{s,d}^0$. Появление большого фактора $\Gamma_{\mathcal{X}}^2$ в главном слагаемом в (215b) связано с лоренцевым сокращением эффективного объема пакета, приводящим к тому, что область его перекрытия с остальными пакетами сильно уменьшается. С этим же связана сильная зависимость от направления вектора скорости: чтобы попасть в маленькую мишень, нужно «хорошо прицелиться».

Из представленного анализа следует, что прицельные точки X_s и X_d характеризуют пространственно-временное положение эффективных областей взаимодействия пакетов в источнике и детекторе. Взаимодействие пакетов тем интенсивнее, чем ближе от этих точек проходят мировые линии их геометрических центров. Конфигурация мировых линий и координаты прицельных точек никак не связаны с динамикой (т. е. с лагранжианом взаимодействия), так как однозначно задаются координатами и групповыми скоростями асимптотически свободных in- и out-пакетов, а также их эффективными размерами. Но, разумеется, амплитуду процесса $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$, описываемого макроскопической диаграммой рис. 6, можно вычислить только с учетом динамики взаимодействия.

6.9. Асимптотические условия. Теперь мы можем, наконец, вернуться к физическим требованиям, сформулированным в начале п. 6.3, и конкретизировать условия, при которых in- и out-пакеты можно считать свободными.

Если геометрические факторы подавления не слишком малы (а только такие конфигурации координат и импульсов дают вклад в наблюдаемые величины), то условие того, что эффективные области взаимодействия ВП в источнике и детекторе макроскопически разделены в пространстве-времени, эквивалентно требованию макроскопической разделенности прицельных точек X_s и X_d . Будем считать, что временной и пространственный интервалы $X_d^0 - X_s^0$ и $|X_d - X_s|$ велики по сравнению с временными и пространственными интервалами $|x_{\mathcal{X}}^0 - x_{\mathcal{X}'}^0|$ и $|x_{\mathcal{X}} - x_{\mathcal{X}'}|$ для $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in S$ и $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in D$, т. е. пакеты из S и D заведомо не перекрываются. Тогда искомые условия для пакетов из S и D должны быть независимы друг от друга. Мы предполагаем, что эффективные размеры пакетов велики по сравнению с характерным радиусом взаимодействия в вершинах диаграммы, и поэтому наш анализ проблемы будет основан исключительно на свойствах геометрических факторов подавления $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ и $\exp(-\mathfrak{S}_d)$, не зависящих от динамики взаимодействия.

Прежде всего необходимо потребовать, чтобы были достаточно велики временные интервалы $X_{s,d}^0 - x_a^0$ ($a \in I_{s,d}$) и $x_b^0 - X_{s,d}^0$ ($b \in F_{s,d}$). Они, однако, не могут быть произвольно велики, поскольку пакеты \mathcal{X} остаются стабильными (т. е. не расплываются) в течение времени $|X_{s,d}^0 - x_{\mathcal{X}}^0|$ лишь при условии

$$|X_{s,d}^{0(\mathcal{X})} - x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}|^2 \ll m_{\mathcal{X}}^2 / \sigma_{\mathcal{X}}^4, \quad \forall \mathcal{X} \in S, D. \quad (216)$$

Учитывая, что геометрические факторы подавления не зависят от $X_{s,d}^{0(\mathcal{X})}$ и $x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}$, допустимо потребовать, чтобы левая часть (216) была велика по сравнению с квадратом эффективного размера пакета, т. е.

$$|X_{s,d}^{0(\mathcal{X})} - x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}|^2 \gg 1 / \sigma_{\mathcal{X}}^2. \quad (217)$$

Это требование не противоречит условию стационарности пакета (216), поскольку $\sigma_{\mathcal{X}}^2 \ll m_{\mathcal{X}}^2$. Если, кроме того, \mathcal{X} — нестабильная частица, то следует ожидать, что

$$|X_{s,d}^{0(\mathcal{X})} - x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}| \sim \tau_{\mathcal{X}}, \quad (218)$$

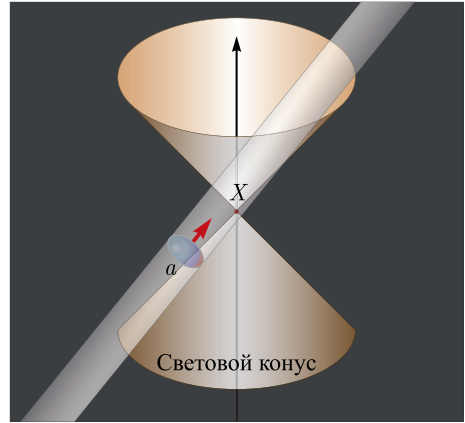
где $\tau_{\mathcal{X}}$ — время жизни \mathcal{X} . Условия (217) и (218) не противоречат друг другу, если $\sigma_{\mathcal{X}}^2 \tau_{\mathcal{X}}^2 \gg 1$, что является одним из условий применимости СРПП, «полный набор» которых был получен в п. 4.8 и имеет вид

$$1 / \tau_{\mathcal{X}}^2 \ll \sigma_{\mathcal{X}}^2 \ll m_{\mathcal{X}} / \tau_{\mathcal{X}} \ll m_{\mathcal{X}}^2. \quad (219)$$

Поскольку для всех известных долгоживущих элементарных частиц и атомных ядер $m_{\mathcal{X}} \tau_{\mathcal{X}} \gg 1$, допустимые этими условиями значения параметров $\sigma_{\mathcal{X}}$ могут варьироваться в весьма широких пределах (см. табл. 1).

Итак, асимптотические условия для временных параметров $x_{\mathcal{X}}^0$, полностью согласующиеся с условиями применимости приближения СРПП (219),

Рис. 13. Схематическая иллюстрация события, в котором начальная 4-координата центра in-пакета a разделена с прицельной точкой X пространственноподобным интервалом, но часть эффективного объема пакета находится внутри светового конуса с центром в точке X . Остальные in- и out-пакеты, координаты и скорости которых определяют (вместе с x_a и \mathbf{v}_a) положение прицельной точки, не показаны



имеют вид (217), а правильная временная последовательность в л. с. задается неравенствами

$$x_a^0 < X_{s,d}^0 < x_b^0 \quad (a \in I_{s,d}, \quad b \in F_{s,d}). \quad (220)$$

Эти неравенства лоренц-инвариантны, если точки $x_{a,b}$ и $X_{s,d}$ разделены времениподобными интервалами. Если же для некоторых \varkappa интервалы $(x_\varkappa - X_{s,d})^2$ пространственноподобны, то неравенства (220) имеют смысл только в лабораторной системе отсчета, так как временная последовательность двух событий, разделенных пространственноподобным интервалом, не является лоренц-инвариантным понятием.

Это обстоятельство следует иметь в виду, поскольку пакет (например, для определенности, пакет a в источнике) может участвовать во взаимодействии (т.е. не давать большого подавляющего вклада в \mathfrak{S}_s), даже если $(x_a - X_s)^2 < 0$, при условии, что точки внутри части его эффективного объема разделены с соответствующей прицельной точкой времениподобными интервалами, так как при этом прицельная точка может находиться внутри классической мировой трубки пакета a (рис. 13)*. Нарушения условия микропричинности здесь, конечно же, не происходит — все «сигналы» распространяются строго внутри световых конусов. Однако, в принципе, такого рода взаимодействия могут приводить к наблюдаемым эффектам, имитирующим нарушение причинности.

Требование пространственной удаленности пакетов от прицельных точек не является, вообще говоря, необходимым. Действительно, некоторые

Из геометрических соображений понятно, что для таких событий $0 < |\mathbf{b}_a^| < d_a^*/2$ (где d_a^* — эффективный поперечный размер пакета). Следовательно, $\sigma_a^2 |\mathbf{b}_a^*|^2 < 0,605$ и $\exp(-\sigma_a^2 |\mathbf{b}_a^*|^2) \gtrsim 0,546$.

пакеты (например, распадающийся мезон или образовавшийся при его распаде заряженный лептон в источнике, ядро-мишень в детекторе и т. д.) могут покоиться в л. с. до или после взаимодействия. Но тогда они *должны* быть пространственно близки к соответствующим прицельным точкам; в противном случае, согласно (214), амплитуда рассеяния будет мала из-за малости факторов $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ или $\exp(-\mathfrak{S}_d)$. Ясно, однако, что все пакеты в in- и out-состояниях должны быть пространственно удалены друг от друга, т. е. разности пространственных координат каждой пары пакетов $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ должны быть велики по сравнению с размерами этих пакетов. Как подсказывает представление (208б) и иллюстрирующий его рис. 12, наиболее просто это требование формулируется в с. ц. и. пары. Поскольку импульсы пакетов в с. ц. и. коллинеарны ($\mathbf{p}_{\mathcal{X}}^* = -\mathbf{p}_{\mathcal{X}'}^* = \mathbf{n}_* |\mathbf{p}_{\mathcal{X}}^*|$), а интерес представляет лишь случай, когда классический прицельный параметр $|\mathbf{n}_* \times (\mathbf{x}_{\mathcal{X}}^* - \mathbf{x}_{\mathcal{X}'}^*)|$ не превосходит существенно поперечные размеры каждого из пакетов, то расстояние между пакетами должно быть велико по сравнению с их продольными размерами. Опуская постоянный общий множитель порядка единицы, запишем это условие в виде

$$|\mathbf{x}_{\mathcal{X}}^* - \mathbf{x}_{\mathcal{X}'}^*|^2 \gg \frac{1}{(\sigma_{\mathcal{X}} \Gamma_{\mathcal{X}}^*)^2} + \frac{1}{(\sigma_{\mathcal{X}'} \Gamma_{\mathcal{X}'}^*)^2}, \quad (221)$$

где $\Gamma_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}^* = E_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}^* / m_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'}$. Если, в частности, пакеты \mathcal{X} и \mathcal{X}' являются состояниями тождественных частиц с одинаковыми импульсами (так что $\Gamma_{\mathcal{X}}^* = \Gamma_{\mathcal{X}'}^* = 1$) и проекциями спинов, то условие (217) совпадает с условием исчезновения квантовых корреляций на больших расстояниях между пакетами тождественных бозонов или фермионов. Прицельные параметры таких пакетов могут быть сколь угодно малы, если один из них находится в in-, а другой — в out-состоянии, т. е. пара пакетов описывает, по сути, состояние одной частицы-спектора. Если же оба тождественных пакета принадлежат in- или out-состоянию одной из вершин диаграммы, то соответствующая амплитуда будет подавлена, поскольку расстояние между ними не меняется со временем*. Из (221) следует, что пара ультрарелятивистских (в с. ц. и.) пакетов не взаимодействуют друг с другом даже на относительно малых расстояниях.

В общем случае условия (217) и (221) не обязательно независимы одно от другого (это будет видно в рассматриваемом ниже простом примере); важно

* Это подавление никак не связано с принципом исключения Паули: если любые два пакета (не обязательно описывающие состояния тождественных фермионов) имеют одинаковые скорости и далеки друг от друга в один какой-то момент времени, то их классические мировые трубки не пересекаются. К этому следует добавить, что параметры $\sigma_{\mathcal{X}}$ и $\sigma_{\mathcal{X}'}$ для пакетов тождественных частиц не являются фундаментальными характеристиками соответствующего квантового поля и могут, вообще говоря, не совпадать друг с другом.

лишь, что они не являются взаимоисключающими. Неравенства (221) должны быть согласованы с условиями нерасплывания пакетов, т. е. с (216) и с аналогичными неравенствами для пространственных координат

$$|\mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)} - \mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)}|^2 \ll m_{\varkappa}^2 / \sigma_{\varkappa}^4. \quad (222)$$

Если (как предполагается) $|\mathbf{n}_{\varkappa} \times (\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{x}_{\varkappa'}^*)|^2 \lesssim 1/\sigma_{\varkappa}^2 + 1/\sigma_{\varkappa'}^2$ для каждой пары \varkappa, \varkappa' из S или D , то в с. ц. и. *любой* такой пары прицельная точка $\mathbf{X}_{s,d}^*$ расположена между пакетами \varkappa и \varkappa' на небольшом расстоянии от их мировых трубок*. Поэтому с учетом (217) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{x}_{\varkappa'}^*| &= |(\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{X}_{s,d}^*) + (\mathbf{X}_{s,d}^* - \mathbf{x}_{\varkappa'}^*)| \simeq |\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{X}_{s,d}^*| + |\mathbf{x}_{\varkappa'}^* - \mathbf{X}_{s,d}^*| = \\ &= \Gamma_{\varkappa}^* \sqrt{[\mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)} + \mathbf{v}_{\varkappa}^* (x_{\varkappa}^{0(\varkappa)} - X_{s,d}^{0(\varkappa)})]^2 - [\mathbf{v}_{\varkappa}^* \times (\mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)})]^2} + \\ &+ \Gamma_{\varkappa'}^* \sqrt{[\mathbf{x}_{\varkappa'}^{(\varkappa')} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa')} + \mathbf{v}_{\varkappa'}^* (x_{\varkappa'}^{0(\varkappa')} - X_{s,d}^{0(\varkappa')})]^2 - [\mathbf{v}_{\varkappa'}^* \times (\mathbf{x}_{\varkappa'}^{(\varkappa')} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa')})]^2}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_{\varkappa}^* = \mathbf{p}_{\varkappa}^* / E_{\varkappa}^*$ и $\mathbf{v}_{\varkappa'}^* = \mathbf{p}_{\varkappa'}^* / E_{\varkappa'}^*$ — скорости пакетов \varkappa и \varkappa' в с. ц. и. Поскольку, как следует из преобразований Лоренца, $\mathbf{v}_{\varkappa}^* \times (\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{X}_{s,d}^*) = \mathbf{v}_{\varkappa}^* \times (\mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)})$ (и аналогично для \varkappa'), то справедливо приближенное неравенство

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{x}_{\varkappa'}^*| &\lesssim \Gamma_{\varkappa}^* (|\mathbf{x}_{\varkappa}^{(\varkappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa)}| + |\mathbf{v}_{\varkappa}^*| |x_{\varkappa}^{0(\varkappa)} - X_{s,d}^{0(\varkappa)}|) + \\ &+ \Gamma_{\varkappa'}^* (|\mathbf{x}_{\varkappa'}^{(\varkappa')} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\varkappa')}| + |\mathbf{v}_{\varkappa'}^*| |x_{\varkappa'}^{0(\varkappa')} - X_{s,d}^{0(\varkappa')}|), \end{aligned}$$

в котором приняты во внимание взаимные ориентации пространственных векторов и скоростей в разных системах отсчета. Таким образом, учитывая условия (216) и (222), можно утверждать, что при любых скоростях $\mathbf{v}_{\varkappa, \varkappa'}^*$

$$|\mathbf{x}_{\varkappa}^* - \mathbf{x}_{\varkappa'}^*|^2 \ll 4 \left(\frac{E_{\varkappa}^*}{\sigma_{\varkappa}^2} + \frac{E_{\varkappa'}^*}{\sigma_{\varkappa'}^2} \right)^2. \quad (223)$$

Сравнивая (223) с (221), заключаем, что условия применимости приближения СРП (216) и (222) не противоречат требованию пространственной разделенности пакетов, т. е. никаких дополнительных ограничений на параметры $\sigma_{\varkappa, \varkappa'}$ не возникает.

Проиллюстрируем условие (221) на простейшем, но важном для осцилляционных экспериментов примере, когда состояния I_s и F_s содержат лишь

Точнее говоря, расстояние от $\mathbf{X}_{s,d}^$ до классических траекторий центров пакетов \varkappa и \varkappa' в с. ц. и. много меньше расстояния между этими центрами.

по одному пакету. Для определенности рассмотрим двухчастичный распад $\pi \rightarrow \mu\nu$ в источнике (см. рис. 7) и запишем соответствующий этому процессу двухпакетный интеграл*

$$V_{\pi\mu} = \int dx |\psi_\pi(\mathbf{p}_\pi, x_\pi - x)| |\psi_\mu(\mathbf{p}_\mu, x_\mu - x)|$$

в с.ц.и. пиона и мюона ($\mathbf{p}_\pi^* = -\mathbf{p}_\mu^* \equiv \mathbf{p}_*$). После замены переменной интегрирования $x \mapsto x + (x_\pi^* + x_\mu^*)/2$ имеем

$$V_{\pi\mu} = \int dx \left| \psi_\pi \left(\mathbf{p}_*, x + \frac{x_\mu^* - x_\pi^*}{2} \right) \psi_\mu \left(-\mathbf{p}_*, x + \frac{x_\pi^* - x_\mu^*}{2} \right) \right|.$$

Расчет этого интеграла в модели СРГП сводится в последовательному вычислению четырех стандартных гауссовых квадратур, которое в результате дает

$$V_{\pi\mu} = \frac{\pi^2 m_\pi m_\mu}{\sigma_\pi \sigma_\mu (\sigma_\pi^2 + \sigma_\mu^2) (E_\pi^* + E_\mu^*) |\mathbf{p}_*|} \exp \left(-\frac{\sigma_\pi^2 \sigma_\mu^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma_\mu^2} |\mathbf{b}_{\pi\mu}^*|^2 \right), \quad (224)$$

где $E_\pi^* = \sqrt{\mathbf{p}_*^2 + m_\pi^2}$ и $E_\mu^* = \sqrt{\mathbf{p}_*^2 + m_\mu^2}$ — энергии пиона и мюона, $\mathbf{n}_* = \mathbf{p}_*/|\mathbf{p}_*|$ — единичный вектор, а

$$|\mathbf{b}_{\pi\mu}^*| = |\mathbf{n}_* \times (\mathbf{x}_\mu^* - \mathbf{x}_\pi^*)|$$

— классический прицельный параметр в с.ц.и. пиона и мюона. Подставив выражение (224) в (208б), находим**

$$\mathfrak{S}_s = \left(\frac{1}{\sigma_\pi^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \right)^{-1} |\mathbf{b}_{\pi\mu}^*|^2. \quad (225)$$

Если векторы \mathbf{n}_* и $\mathbf{x}_\mu^* - \mathbf{x}_\pi^*$ коллинеарны, то, как видно из (225), $\mathfrak{S}_s = 0$ при *любом* расстоянии между центрами волновых пакетов пиона и мюона. Если это расстояние достаточно велико, например, $|\mathbf{x}_\mu^* - \mathbf{x}_\pi^*|^2 \gg 1/\sigma_\pi^2 + 1/\sigma_\mu^2$ (так что условие (221) заведомо выполняется), то функция \mathfrak{S}_s мала по величине

* Здесь и до конца данного раздела π и μ — не лоренцевы индексы, а метки частиц.

** Сравнивая (225) с (213), получаем также связь прицельных параметров

$$|\mathbf{b}_{\pi\mu}^*|^2 = \left(1 + \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\mu^2} \right) |\mathbf{b}_\pi^{(\pi)}|^2 + \left(1 + \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\pi^2} \right) |\mathbf{b}_\mu^{(\mu)}|^2,$$

из которой следует, в частности, что $|\mathbf{b}_\pi^{(\pi)}| = |\mathbf{b}_\mu^{(\mu)}| = 0$ при $|\mathbf{b}_{\pi\mu}^*| = 0$.

лишь при достаточно малых углах α_* между векторами \mathbf{n}_* и $\mathbf{x}_\mu^* - \mathbf{x}_\pi^*$, а именно при $\alpha_*^2 \ll \rho_*^{-2}$, где

$$\rho_* = \left(\frac{1}{\sigma_\pi^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \right)^{-1/2} |\mathbf{x}_\mu^* - \mathbf{x}_\pi^*|;$$

с ростом α_* функция \mathfrak{S}_s быстро возрастает, а фактор $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ уменьшается, что исключает возможность $\pi_{\mu 2}$ -распада с $\alpha_*^2 \gg \rho_*^{-2}$. Зависимость $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ от ρ_* и α_* показана на рис. 14 для интервалов $10^2 \lesssim \rho_* \lesssim 10^4$ и $|\alpha_*| \lesssim 10^{-4}$. В эксперименте мы всегда видим, что рожденный в $\pi_{\mu 2}$ -распаде мюон вылетает из той самой точки (точнее, пространственной области, ограниченной разрешением прибора), в которой исчез пион. В с.ц.и. пиона и мюона это как раз и означает, что прицельный параметр $|\mathbf{b}_{\pi\mu}^*| \approx \alpha_* \rho_*$ равен нулю или очень мал. Тем самым мы получаем объяснение «очевидного» экспериментального факта, необъяснимого в рамках теории с плоскими волнами*.

Понятно, что условия типа (217) и (221) не могут быть даже сформулированы для одночастичных фоковских состояний стандартной теории возмущений КТП, использующей довольно бессодержательное условие асимптотической свободы «на бесконечности». Такое условие неприменимо, в частности, к нестабильным частицам, которые являются основным источником (анти)нейтрино во многих экспериментах по исследованию нейтринных осцилляций.

В вышеизложенном анализе мы пренебрегали размерами области взаимодействия r_I в вершинах, что допустимо, если эффективные размеры волновых пакетов существенно превышают r_I . Это требование заведомо выполняется, когда речь идет о слабых и сильных взаимодействиях. При учете электромагнитных взаимодействий представленный здесь анализ (как и стандартный подход КТП) не является, вероятно, исчерпывающим и тогда сформулированные здесь условия могут быть недостаточными.

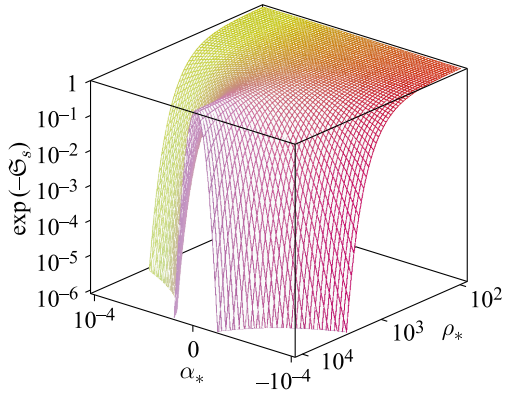


Рис. 14. Геометрический фактор подавления $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ для двухчастичного распада в зависимости от ρ_* и α_*

Мы оставляем открытым вопрос о возможности экспериментального измерения прицельного параметра $|\mathbf{b}_{\pi\mu}^|$, которое позволило бы проверить вышеизложенные построения.

6.10. Фазовые факторы. Интегралы перекрытия (199) не являются трансляционно-инвариантными из-за наличия фазовых факторов $\exp[\pm i(q \mp q_{s,d})X_{s,d}]$. Заметим, однако, что q -зависимый множитель в произведении $\mathbb{V}_s(q)\mathbb{V}_d(q)$ пропорционален трансляционно-инвариантному фазовому фактору

$$\exp[iq(X_s - X_d)]. \quad (226)$$

В результате (см. следующий пункт) квадрат модуля амплитуды оказывается трансляционно-инвариантным. Как показано в [58], именно фактор (226) ответствен за осцилляционное поведение квадратов амплитуды (как функции $X_s - X_d$) при условии, что прицельные точки X_s и X_d макроскопически разделены.

6.11. Объемы перекрытия. При анализе измеряемых характеристик (таких как скорость счета нейтринных событий в установке) полезно использовать представление для величин $|\mathbb{V}_s(q)|^2$ и $|\mathbb{V}_d(q)|^2$, несколько отличающееся от того, которое может быть получено в результате непосредственного применения формулы (199). Удобнее возвратиться к определению (196) и записать $|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2$ в следующем виде:

$$|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2 = \int dx \int dy \exp[i(q_{s,d} \pm q)(x - y) - \Upsilon_{s,d}(x) - \Upsilon_{s,d}(y)].$$

После замены переменных интегрирования $x = x' + y'/2$ и $y = x' - y'/2$ (с единичным якобианом) последний интеграл можно переписать как

$$|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2 = \int dy' \exp\left[i(q_{s,d} \pm q)y' - \frac{1}{2}\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}y'_\mu y'_\nu\right] \int dx' \exp[-2\Upsilon_{s,d}(x')]. \quad (227)$$

Вводя обозначения

$$\delta_{s,d}(K) = \int \frac{dx}{(2\pi)^4} \exp\left(iKx - \frac{1}{2}\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}x_\mu x_\nu\right) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}K_\mu K_\nu\right)}{(2\pi)^2 \sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}}, \quad (228)$$

$$V_{s,d} = \int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x_{\varkappa} - x)|^2 = \frac{\pi^2 \exp(-2\mathfrak{S}_{s,d})}{4\sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}}, \quad (229)$$

представим (227) в следующей компактной форме:

$$|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2 = (2\pi)^4 \delta_{s,d}(q \mp q_{s,d}) V_{s,d}. \quad (230)$$

Функции $\delta_s(K)$ и $\delta_d(K)$, конечно, не совпадают с использовавшимися ранее функциями $\tilde{\delta}_s(K)$ и $\tilde{\delta}_d(K)$, но имеют тот же самый плосковолновой предел

(т.е. в этом пределе $\delta_{s,d}(K) = \tilde{\delta}_{s,d}(K) = \delta(K)$) и подобные же свойства. Физический смысл и свойства симметрии функций (229) очевидны из предыдущего рассмотрения, а их интегральное представление подсказывает, что величины V_s и V_d можно трактовать как 4-мерные объемы перекрытия in- и out-пакетов в источнике и детекторе. Из явного вида этих функций следует, что они принимают максимальные значения, $V_{s,d}^0 = \pi^2 / (4\sqrt{|\Re_{s,d}|})$, когда классические мировые линии пакетов пересекаются в прицельных точках.

7. АМПЛИТУДА ПРОЦЕССА С РОЖДЕНИЕМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНОВ В ИСТОЧНИКЕ И ДЕТЕКТОРЕ И ВИРТУАЛЬНЫМ НЕЙТРИНО

В качестве практически важного приложения формализма рассмотрим класс процессов*

$$I_s \oplus I_d \rightarrow F'_s + \ell_\alpha^+ \oplus F'_d + \ell_\beta^-, \quad (231)$$

идущих за счет слабого заряженного тока. Здесь I_s , I_d , F'_s и F'_d обозначают совокупности асимптотически свободных ВП, описывающих состояния адронов, а ℓ_α^+ и ℓ_β^- — пакеты заряженных лептонов ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$). Если $\alpha \neq \beta$, то процесс (231) идет с нарушением лептонных чисел L_α и L_β , что возможно только за счет обмена массивными (дираковскими или майорановскими) нейтрино. В главном неисчезающем порядке по электрослабому взаимодействию процесс (231) описывается суммой диаграмм, показанных на рис. 15. Пусть X_s и X_d — прицельные точки, определяемые формулой (201) (в которой $F_s = F'_s + \ell_\alpha^+$ и $F_d = F'_d + \ell_\beta^-$). Предполагается, что они (а значит, и эффективные области взаимодействия в источнике и детекторе, условно отмеченные на рис. 15 штриховыми кривыми) макроскопически разделены в пространстве-времени и что выполнены все асимптотические условия, обсуждавшиеся в п. 6.9. Тогда начальные и конечные состояния можно считать прямыми произведениями свободных однопакетных состояний и использовать нормировку (188).

В рамках СМ (минимально расширенной добавлением массовой матрицы нейтрино) кварк-лептонные блоки диаграммы в низшем неисчезающем порядке описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}_W(x) = -\frac{g}{2\sqrt{2}} [j_\ell(x)W(x) + j_q(x)W(x) + \text{э. с.}],$$

* Отметим, что примеры, показанные на рис. 8 и 10 (п. 6.2), к этому классу не относятся, но техника расчета соответствующих амплитуд не требует существенных изменений по сравнению с развиваемой ниже.

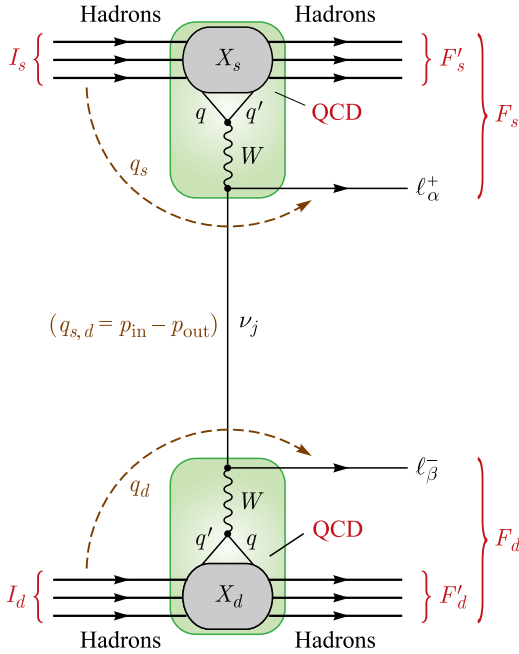


Рис. 15. Макроскопическая диаграмма, описывающая процесс (231)

в котором g — $SU(2)$ константа связи; j_ℓ и j_q — лептонный и кварковый заряженные токи,

$$j_\ell^\mu(x) = \sum_{\alpha i} V_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x) O^\mu \ell_\alpha(x),$$

$$j_q^\mu(x) = \sum_{qq'} V_{qq'}^* \bar{q}(x) O^\mu q'(x);$$

$V_{\alpha i}$ ($\alpha = e, \mu, \tau, i = 1, 2, 3$) и $V_{qq'}$ ($q = u, c, t, q' = d, s, b$) — элементы матриц смешивания нейтрино и кварков ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{PMNS}}$ и $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{\text{CKM}}$) соответственно; $O^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma_5)$; $\ell_{\alpha, \beta}(x)$ — поля заряженных лептонов, а для остальных полей и γ -матриц Дирака использованы стандартные обозначения. Адронные блоки (закрашенные области на диаграмме рис. 15), которые не могут быть рассчитаны по теории возмущений, будут описываться феноменологическими адронными токами. Нормированная безразмерная амплитуда процесса (231)

$$\langle \text{out} | \mathbb{S} | \text{in} \rangle (\langle \text{in} | \text{in} \rangle \langle \text{out} | \text{out} \rangle)^{-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

дается четвертым порядком теории возмущений по константе g :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta\alpha} = & \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right)^4 \times \\ & \times \langle F_s \oplus F_d | T \int dx dx' dy dy' : j_\ell(x) W(x) :: j_q(x') W^\dagger(x') : \times \\ & \times : j_\ell^\dagger(y) W^\dagger(y) :: j_q^\dagger(y') W(y') : \mathbb{S}_h | I_s \oplus I_d \rangle. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbb{S}_h = T \exp \left[i \int dz \mathcal{L}_h(z) \right],$$

а $\mathcal{L}_h(z)$ — лагранжиан сильных и электромагнитных взаимодействий СМ, ответственный за непертурбативные процессы фрагментации и адронизации; T и $:\dots:$ — обычные символы хронологического и нормального упорядочения локальных операторов. Нормировочный множитель \mathcal{N} в приближении СРГП определяется формулой

$$\mathcal{N}^2 = \langle \text{in} | \text{in} \rangle \langle \text{out} | \text{out} \rangle = \prod_{\varkappa \in I_s \oplus I_d \oplus F_s \oplus F_d} 2\bar{E}_\varkappa V_\varkappa. \quad (232)$$

Рассмотрим адронный матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T[: j_q^\mu(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | I_s \oplus I_d \rangle = & \int \left[\prod_a \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a) e^{ik_a x_a}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} \right] \times \\ & \times \int \left[\prod_b \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b^*(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b) e^{-ik_b x_b}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} \right] \langle \{k_b\} | T[: j_q^\mu(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | \{k_a\} \rangle. \end{aligned} \quad (233)$$

Здесь мы воспользовались определением ВП

$$|\mathbf{p}_\varkappa, s_\varkappa, x_\varkappa\rangle_\varkappa = \int \frac{d\mathbf{k} \phi_\varkappa(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\varkappa) e^{i(k-p_\varkappa)x_\varkappa}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} |\mathbf{k}, s_\varkappa\rangle_\varkappa \quad (234)$$

и ввели сокращенное обозначение для многочастичных фоковских состояний

$$|\dots, \mathbf{k}_a, s_a, \dots; a \in I_s \oplus I_d\rangle = |\{k_a\}\rangle, \quad |\dots, \mathbf{k}_b, s_b, \dots; b \in F'_s \oplus F'_d\rangle = |\{k_b\}\rangle.$$

Для стабильных относительно сильных и электромагнитных взаимодействий начальных и конечных адронов, разнесенных на макроскопическое расстояние между источником и детектором, матричный элемент (233) может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T[: j_q^\mu(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | I_s \oplus I_d \rangle = \\ = \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{p_a, p_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{p_a, p_b\}), \end{aligned} \quad (235)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) = & \\ = & \left[\prod_{a \in I_s} e^{-ip_a x_a} \psi_a(\mathbf{p}_a, x_a - x) \right] \left[\prod_{b \in F'_s} e^{ip_b x_b} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b - x) \right] \times \\ & \times \left[\prod_{a \in I_d} e^{-ip_a x_a} \psi_a(\mathbf{p}_a, x_a - y) \right] \left[\prod_{b \in F'_d} e^{ip_b x_b} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b - y) \right], \end{aligned}$$

а \mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d — соответствующие c -числовые адронные токи в источнике и детекторе. Доказательство «факторизационной формулы» (235) дано в приложении 3. Явный вид адронных токов для наших целей не потребуется.

Введем причинные функции Грина для нейтрино и W -бозона:

$$\begin{aligned} G^j(x-y) &= \langle T[\nu_j(x) \bar{\nu}_j(y)] \rangle_0 = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta^j(q) e^{-iq(x-y)}, \\ G_{\mu\nu}^W(x-y) &= \langle T[W_\mu(x) W_\nu^\dagger(y)] \rangle_0 = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \Delta_{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (236)$$

Здесь

$$\Delta^j(q) = \frac{i}{\hat{q} - m_j + i0} = \frac{i(\hat{q} + m_j)}{q^2 - m_j^2 + i0} \quad (\hat{q} = q^\mu \gamma_\mu) \quad (237)$$

и

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2}{k^2 - m_W^2 + i0} \quad (238)$$

— голые пропагаторы j -го нейтрино (с массой m_j) и W -бозона (с массой m_W) соответственно, причем последний записан в унитарной калибровке. Теперь, после стандартных преобразований, приходим к следующему выражению для амплитуды:

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{g^4}{64N} \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \int dx dx' dy dy' \mathcal{A}^j(x, x', y, y'), \quad (239)$$

в котором

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^j(x, x', y, y') &= \mathcal{J}_d^{\nu*} G_{\nu\nu'}^W(y-y') \bar{u}(\mathbf{p}_\beta) O^{\nu'} G^j(y'-x') O^{\mu'} G_{\mu'\mu}^W(x'-x) v(\mathbf{p}_\alpha) \times \\ &\times \mathcal{J}_s^\mu \psi_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha, x' - x_\alpha) \psi_\beta^*(\mathbf{p}_\beta, y' - x_\beta) \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}); \end{aligned}$$

спиновые индексы и аргументы функций \mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d не выписаны для краткости. Интегрирование функции $\mathcal{A}^j(x, x', y, y')$ по переменной y' приводит к фактору

$$\begin{aligned} I_{\nu\nu'}^j &= \int dy' \psi_{\beta}^*(\mathbf{p}_{\beta}, y' - x_{\beta}) G_{\nu\nu'}^W(y - y') G^j(y' - x') = \\ &= \int \frac{d\mathbf{p} e^{-ipx_{\beta}} \phi_{\beta}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\beta})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \int \frac{dk e^{-iky} \Delta_{\nu\nu'}(k)}{(2\pi)^4} \int \frac{dq e^{iqx'} \Delta^j(q)}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \int dy' e^{i(k-q+p)y'} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \phi_{\beta}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\beta}) e^{-ip(x_{\beta}-y)} \times \\ &\times \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta_{\nu\nu'}(q-p) \Delta^j(q) e^{iq(x'-y)}. \end{aligned}$$

Пользуясь определениями (236) и нашим стандартным приближением, можем переписать этот интеграл в виде

$$I_{\nu\nu'}^j = \psi_{\beta}^*(\mathbf{p}_{\beta}, y - x_{\beta}) \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta_{\nu\nu'}(q - p_{\beta}) \Delta^j(q) e^{iq(x'-y)}.$$

Интегрирование по переменной x' проводится совершенно аналогично, вводя к фактору

$$\psi_{\beta}^*(\mathbf{p}_{\beta}, y - x_{\beta}) \psi_{\alpha}^*(\mathbf{p}_{\alpha}, x - x_{\alpha}) \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta_{\nu\nu'}(q - p_{\beta}) \Delta^j(q) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_{\alpha}) e^{iq(x-y)}$$

в подынтегральном выражении для амплитуды (239). Собирая все множители, учитывая определение интегралов перекрытия (192) и вводя тензорную функцию

$$\mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_{\varkappa}, x_{\varkappa}\}) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \mathbb{V}_d(q) \mathbb{V}_s(q) \Delta_{\nu\nu'}(q - p_{\beta}) \Delta^j(q) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_{\alpha}), \quad (240)$$

приходим к следующему выражению для амплитуды (239):

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{g^4}{64\mathcal{N}} \sum_j V_{\beta j} \mathcal{J}_d^{\nu*} \bar{u}(\mathbf{p}_{\beta}) O^{\nu'} \mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_{\varkappa}, x_{\varkappa}\}) O^{\mu'} v(\mathbf{p}_{\alpha}) \mathcal{J}_s^{\mu} V_{\alpha j}^*. \quad (241)$$

7.1. Асимптотика амплитуды при больших L . Для наших целей представляет интерес изучить асимптотическое поведение функции (240) при большом пространственном расстоянии между прицельными точками \mathbf{X}_s и \mathbf{X}_d .

Это можно сделать с помощью теоремы Гримуса–Стокингера (ГС) [33], которая утверждает следующее*.

Пусть $\Phi(\mathbf{q}) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ — функция, убывающая вместе со своими первой и второй производными не медленнее, чем $|\mathbf{q}|^{-2}$ при $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$, $\kappa^2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l} = \mathbf{L}/L$, $L = |\mathbf{L}|$ и

$$J(\mathbf{L}, \kappa) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\Phi(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{L}}}{\mathbf{q}^2 - \kappa^2 - i\epsilon}. \quad (243)$$

Тогда в асимптотическом пределе $L \rightarrow \infty$ при $\kappa > 0$

$$J(\mathbf{L}, \kappa) = \frac{e^{i\kappa L} \Phi(-\kappa \mathbf{l})}{4\pi L} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^{1/2}}\right) \right], \quad (244)$$

тогда как при $\kappa^2 < 0$ интеграл (243) убывает как L^{-2} .

Принимая во внимание определение (240) и явный вид интегралов в (199) и пропагатора нейтрино в (237), видим, что в нашем случае

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s, \quad T = X_d^0 - X_s^0, \quad \kappa^2 = q_0^2 - m_j^2.$$

Функция, соответствующая $\Phi(\mathbf{q})$ в теореме ГС, с точностью до несущественного (не зависящего от q) множителя имеет вид**

$$\tilde{\delta}_s(q - q_s) \tilde{\delta}_d(q + q_d) \Delta_{\nu\nu'}(q - p_\beta) (\hat{q} + m_j) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_\alpha). \quad (245)$$

Первое требование теоремы может формально нарушаться полюсами голых бозонных пропагаторов (238). Чтобы исключить эту возможность, будем использовать вместо (238) перенормированный (полный) пропагатор, у которого нет сингулярности в резонансной области, для чего достаточно сделать в знаменателе (238) стандартную замену $m_W^2 \mapsto m_W^2 - im_W \Gamma_W$, где Γ_W — полная ширина W -бозона***.

*В работе [123] доказано, что при несколько более жестких условиях, налагаемых на функцию $\Phi(\mathbf{q})$, асимптотика интеграла (243) имеет вид

$$J(\mathbf{L}, \kappa) = \frac{e^{i\kappa L}}{4\pi L} \left\{ 1 - \frac{i}{L} \left[(1 \nabla_{\mathbf{q}}) + \frac{\kappa}{2} (1 \times \nabla_{\mathbf{q}})^2 \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) \right\} \Phi(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=-\kappa \mathbf{l}}. \quad (242)$$

Если же $\Phi(\mathbf{q}) \in S(\mathbb{R}^3)$ (что имеет место во всех практически интересных случаях), то интеграл (243) представляет собой асимптотический ряд по обратным степеням L , а $|J(\mathbf{L}, \kappa)|^2$ — асимптотический ряд по обратным степеням L^2 . Свойства этих рядов детально изучены в работах [123–125], а некоторые физические приложения этих результатов рассматриваются в [126–129].

**Заметим, что слагаемое $\propto m_j$ в выражении (245) не дает вклада в амплитуду (241) из-за матричных множителей $O^{\mu'}$ и $O^{\nu'}$.

***Более аккуратная модификация этого рецепта обсуждается, например, в [130, 131]; см. также ссылки в этих работах.

Поскольку при $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ функции $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$ убывают быстрее любой степени $|\mathbf{q}|^{-1}$, заключаем, что функция (245) удовлетворяет условиям теоремы ГС. Поэтому в главном по $1/L$ порядке функция (240) ведет себя как

$$\mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\kappa, x_\kappa\}) = \frac{e^{-\mathfrak{S} - i\Theta}}{8\pi^2 L} \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 e^{-i(q_0 T - |\mathbf{q}_j| L)} \tilde{\delta}_s(q_j - q_s) \tilde{\delta}_d(q_j + q_d) \times \\ \times \Delta_{\nu\nu'}(q_j - p_\beta)(\hat{q}_j + m_j) \Delta_{\mu'\mu}(q_j + p_\alpha), \quad (246)$$

где

$$q_j = (q_0, \mathbf{q}_j), \quad \mathbf{q}_j = \sqrt{q_0^2 - m_j^2} \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{L}/L, \\ \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d \quad \text{и} \quad \Theta = X_s q_s + X_d q_d.$$

Поскольку факторы $\tilde{\delta}_s(q_j - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q_j + q_d)$ под знаком интеграла в правой части (246) имеют как функции переменной q_0 острые, близкие друг к другу максимумы, интеграл насыщается узкой окрестностью этих максимумов, и его оценку можно сделать стандартным методом перевала. Ниже все вычисления будут проводиться в рамках модели СРГП.

Поправки к теореме ГС обсуждаются в работе [123].

7.2. Интегрирование по q_0 . Согласно (200)

$$\tilde{\delta}_s(q_j - q_s) \tilde{\delta}_d(q_j + q_d) = \frac{1}{(4\pi)^4 \sqrt{|\mathfrak{R}_s| |\mathfrak{R}_d|}} \exp \left[-\frac{1}{4} F_j(q_0) \right], \\ F_j(q_0) = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu}(q_j - q_s)_\mu (q_j - q_s)_\nu + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}(q_j + q_d)_\mu (q_j + q_d)_\nu.$$

Вводя обозначения

$$F_0 = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_{s\mu} q_{s\nu} + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_{d\mu} q_{d\nu}, \quad Y^\mu = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_{s\nu} - \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_{d\nu}, \\ R^{\mu\nu} = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}, \quad (247)$$

перепишем выражение для $F_j(q_0)$ в виде

$$F_j(q_0) = F_0 - 2Y_\mu q_j^\mu + R_{\mu\nu} q_j^\mu q_j^\nu. \quad (248)$$

Экстремум этой функции определяется уравнением

$$\frac{dF_j(q_0)}{dq_0} = \frac{2}{|\mathbf{q}_j|} [R q_0 |\mathbf{q}_j| - (\mathbf{R}\mathbf{l})(q_0 - |\mathbf{q}_j|)^2 - Y_0 |\mathbf{q}_j| + (\mathbf{Y}\mathbf{l}) q_0] = 0, \quad (249)$$

в котором

$$R = R^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = R_{00} - 2(\mathbf{R}\mathbf{l}) + \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = R_{kn} l_k l_n, \\ \mathbf{R} = (R_{01}, R_{02}, R_{03}), \quad \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3) \quad \text{и} \quad l = (1, 1). \quad (250)$$

Здесь, как и всюду далее, предполагается суммирование по повторяющимся латинским индексам ($k, n = 1, 2, 3$). Корень (249), $q_0 = E_j$, будет точкой перевала, если вторая производная

$$\frac{d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} = 2R + \frac{2(q_0 - |\mathbf{q}_j|)}{|\mathbf{q}_j|^3} [(\mathbf{R}\mathbf{1})(q_0 + 2|\mathbf{q}_j|)(q_0 - |\mathbf{q}_j|) - (\mathbf{Y}\mathbf{1})(q_0 + |\mathbf{q}_j|)] = \quad (251a)$$

$$= 2R + \frac{2}{v_j^3} \left[(\mathbf{R}\mathbf{1})(1 + 2v_j)(1 - v_j)^2 - \frac{(\mathbf{Y}\mathbf{1})}{m_j \Gamma_j^3} \right] \quad (251b)$$

(где $v_j = |\mathbf{q}_j|/q_0$ и $\Gamma_j = q_0/m_j$) положительна в этой точке. Ниже рассмотрим два наиболее интересных частных случая, для которых можно получить относительно простые приближенные решения (249). Общее решение изучается в приложении 4.

7.2.1. Ультррелятивистский случай. Рассмотрим конфигурации импульсов внешних пакетов, для которых выполняются условия

$$q_s^0 \sim -q_d^0 \sim |\mathbf{q}_s| \sim |\mathbf{q}_d|. \quad (252)$$

Этот частный случай реализуется во всех без исключения современных нейтринных экспериментах и поэтому представляет наибольший практический интерес.

В плосковолновом пределе ($\sigma_{\varkappa} = 0, \forall \varkappa$) и в предположении, что $m_j = 0$ (в дальнейшем будем называть этот специальный случай «ПВ₀-пределом»), точное сохранение энергии-импульса в каждой вершине диаграммы требует выполнения строгих равенств

$$q_s^0 = -q_d^0, \quad \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_d = q_s^0 \mathbf{1}.$$

При этом согласно (247) и (250) корень уравнения (249) равен

$$q_0 = \lim_{\sigma_{\varkappa}=0, \forall \varkappa} \frac{Y_0 - (\mathbf{Y}\mathbf{1})}{R} = q_s^0 \quad (253)$$

и есть не что иное, как энергия реального безмассового нейтрино ($q_j = E_0 l$, $q_j^2 = 0$).

В общем случае $\sigma_{\varkappa} \neq 0$, при выполнении условий (252) и при естественном дополнительном предположении, что массы нейтрино m_j малы по сравнению с минимальными абсолютными значениями передач энергии q_s^0 и q_d^0 в вершинах диаграммы*, решение (249) может быть найдено в виде ряда

*Подразумевается, что минимум берется по всему множеству наиболее вероятных импульсов \mathbf{p}_{\varkappa} внешних пакетов в источнике и детекторе, которое определяется условиями конкретного эксперимента.

по степеням малого безразмерного параметра

$$r_j = \frac{m_j^2}{2E_\nu^2}. \quad (254)$$

В определении в (254) фигурирует «репрезентативная» энергия виртуального нейтрино*

$$E_\nu = \frac{(Yl)}{R}, \quad (255)$$

которая совпадает с передачей энергии q_s^0 в ПВ₀-пределе и близка к ней по величине при достаточно малых σ_\varkappa (ниже мы уточним это утверждение). Согласно определению в (255) E_ν является вращательно-инвариантной функцией импульсов, масс и дисперсий импульсов всех внешних пакетов. Благодаря приближенному сохранению энергии-импульса эта величина неотрицательна и преобразуется как нулевая компонента 4-импульса.

Итак, запишем величины q_0 и $|\mathbf{q}_j| = \sqrt{q_0 - m_j^2}$ в виде степенных рядов

$$q_0 \equiv E_j = E_\nu \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^E r_j^n \right), \quad |\mathbf{q}_j| \equiv P_j = E_\nu \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^P r_j^n \right). \quad (256)$$

Удобно переписать (249) в следующей форме:

$$q_0|\mathbf{q}_j| - m (q_0 - |\mathbf{q}_j|)^2 - E_\nu[(n+1)|\mathbf{q}_j| - nq_0] = 0, \quad (257)$$

где фигурируют безразмерные вращательно-инвариантные функции

$$n = \frac{(Yl)}{(Yl)} \quad \text{и} \quad m = \frac{(Rl)}{R}.$$

Из (257) видно, что коэффициенты C_n^E и C_n^P для всех $n \geq 1$ выражаются только через эти две функции. Коэффициенты легко найти с помощью стандартной рекуррентной процедуры, т. е. подстановкой рядов (256) в (257), разложением получающегося выражения в ряд по параметру r_j и приравниванием нулю множителей при степенях r_j . Выпишем здесь первые три пары:

$$\begin{aligned} C_1^E &= n, \\ C_2^E &= n \left(2n + \frac{3}{2} \right) - m, \\ C_3^E &= n \left(7n^2 + 9n + \frac{5}{2} \right) - (5n + 2)m; \end{aligned} \quad (258)$$

*Здесь ν — не лоренцев индекс.

$$\begin{aligned}
C_1^P &= n + 1, \\
C_2^P &= (n + 1) \left(2n + \frac{1}{2} \right) - m, \\
C_3^P &= (n + 1) \left(7n^2 + 5n + \frac{1}{2} \right) - (5n + 3)m.
\end{aligned} \tag{259}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты удовлетворяют соотношению симметрии

$$C_n^P = (-1)^n C_n^E \Big|_{n \rightarrow -(n+1)}.$$

Из (257) следует, что это свойство справедливо для всех n . Величины E_j и $\mathbf{p}_j = P_j \mathbf{l}$ естественно интерпретировать как, соответственно, эффективные (или наиболее вероятные) энергию и 3-импульс виртуального массивного нейтрино ν_j . С их помощью можно определить также эффективную скорость нейтрино $\mathbf{v}_j = v_j \mathbf{l} = \mathbf{p}_j / E_j$, для которой находим

$$v_j = 1 - r_j - \left(2n + \frac{1}{2} \right) r_j^2 - \left(7n^2 + 5n + \frac{1}{2} - 2m \right) r_j^3 + \mathcal{O}(r_j^4). \tag{260}$$

Как и следовало ожидать, $0 < 1 - v_j \ll 1$, т. е. нейтрино ультрарелятивистские. Поскольку, кроме того*,

$$R = R^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = \mathfrak{F} E_\nu^{-2}, \tag{261}$$

где

$$\mathfrak{F} \equiv [R^{\mu\nu} q_\mu q_\nu]_{q=E_\nu l} > 0, \tag{262}$$

видим, что вторая производная в (251) в точке $q_0 = E_j$ и $r_j \ll 1$ положительна,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} \Big|_{q_0=E_j} &= 2R \{ 1 - 2nr_j - 3[2n(n+1) - m]r_j^2 - \\
&\quad - [3n(n+1)(8n+5) - 2(9n+5)m]r_j^3 + \mathcal{O}(r_j^4) \}, \tag{263}
\end{aligned}$$

и, следовательно, функция $F_j(q_0)$ имеет в этой точке *абсолютный минимум*. Отметим еще раз, что величины E_j , \mathbf{p}_j и \mathbf{v}_j однозначно определяются не только наиболее вероятными импульсами \mathbf{p}_\times внешних пакетов в источнике и детекторе, но также их массами и дисперсиями импульсов.

* Напомним, что квадратичные формы $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ положительны для произвольного 4-вектора $q \neq 0$.

Частный случай конфигурации внешних импульсов. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим специальную конфигурацию внешних импульсов

$$q_s^0 = -q_d^0 \equiv \mathcal{E} > 0, \quad \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_d \equiv \mathcal{P}\mathbf{l}, \quad \mathcal{P} > 0, \quad (264)$$

отвечающую точному сохранению энергии и импульса, «перетекающих» из S в D . Будем называть величину $Q^2 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{P}^2$ виртуальностью нейтрино. Ультрарелятивистский случай определяется условиями $|Q^2| \ll \mathcal{E}^2$ и $m_j^2 \ll \mathcal{E}^2$, но виртуальность, конечно, не обязана совпадать с m_j^2 даже по порядку величины. Нетрудно показать, что для конфигурации в (264)

$$E_\nu = \mathcal{E} \left[1 + \mathbf{n}_0 \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} \right) \right],$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 - \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} \right) \left(\mathbf{n}_0^2 - \frac{\mathcal{R}}{R} \right) \left[1 + \mathbf{n}_0 \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} \right) \right]^{-1},$$

где

$$\mathbf{n}_0 = \frac{(\mathbf{R}\mathbf{l}) - \mathcal{R}}{R} = \mathbf{m} - \frac{\mathcal{R}}{R}. \quad (265)$$

Разложив E_ν и \mathbf{n} по малому параметру Q^2/\mathcal{E}^2 , получим

$$E_\nu = \mathcal{E} \left[1 + \mathbf{n}_0 \frac{Q^2}{2\mathcal{E}^2} \left(1 + \frac{Q^2}{2\mathcal{E}^2} + \frac{Q^4}{8\mathcal{E}^4} + \dots \right) \right],$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + (\mathbf{m} - \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_0^2) \frac{Q^2}{2\mathcal{E}^2} \left[1 - (2\mathbf{n}_0 - 1) \frac{Q^2}{4\mathcal{E}^2} + (2\mathbf{n}_0^2 - 2\mathbf{n}_0 + 1) \frac{Q^4}{8\mathcal{E}^4} + \dots \right],$$

где, как обычно, точками обозначены поправки высших порядков. Таким образом, $E_\nu \rightarrow \mathcal{E}$ и $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0$ при $Q^2 \rightarrow 0$. Переразлагая полученные выше выражения для E_j и P_j по двум малым (независимым) параметрам Q^2/\mathcal{E}^2 и m_j^2/\mathcal{E}^2 , найдем

$$E_j = \mathcal{E} + \frac{Q^2 - m_j^2}{2\mathcal{E}} \left[\mathbf{n}_0 \left(1 + \frac{Q^2}{4\mathcal{E}^2} \right) + (4\mathbf{n}_0^2 + 3\mathbf{n}_0 - 2\mathbf{m}) \frac{m_j^2}{4\mathcal{E}^2} + \dots \right],$$

$$P_j = \mathcal{P} + \frac{Q^2 - m_j^2}{2\mathcal{E}} \left[(\mathbf{n}_0 + 1) \left(1 + \frac{Q^2}{4\mathcal{E}^2} \right) + (4\mathbf{n}_0^2 + 5\mathbf{n}_0 - 2\mathbf{m} + 1) \frac{m_j^2}{4\mathcal{E}^2} + \dots \right].$$

Отсюда видно, в частности, что эффективная энергия (импульс) нейтрино может быть как меньше, так и больше переданной энергии \mathcal{E} (переданного импульса \mathcal{P}); естественно, $E_j = \mathcal{E}$ и $P_j = \mathcal{P}$ при $Q^2 = m_j^2$ (и только

в этом случае). Другими словами, даже при точном балансе переданных 4-импульсов в вершинах диаграммы эффективный 4-импульс виртуального нейтрино $(E_j, P_j \mathbf{1})$, вообще говоря, не совпадает с $(\mathcal{E}, \mathcal{P} \mathbf{1})$. Разложение для эффективной скорости нейтрино имеет вид

$$v_j = 1 - \frac{m_j^2}{2\mathcal{E}^2} \left[1 - n_0 \frac{Q^2}{\mathcal{E}^2} + (4n_0 + 1) \frac{m_j^2}{4\mathcal{E}^2} + \dots \right],$$

так что главная поправка к ультрарелятивистскому пределу $v_j = 1$ не зависит от виртуальности нейтрино.

7.2.2. Нерелятивистский случай. Рассмотрим теперь противоположный случай, отвечающий следующей конфигурации внешних импульсов:

$$q_s^0 \sim -q_d^0 \sim m_j \gg |\mathbf{q}_s| \sim |\mathbf{q}_d|. \quad (266)$$

Этот случай представляет потенциальный интерес для будущих экспериментов по изучению (пока гипотетических) тяжелых нейтрино, а также для космологических приложений. Удобно переписать (249) в терминах скорости виртуального нейтрино $v_j = |\mathbf{q}_j|/q_0$:

$$\frac{m_j}{\sqrt{1 - v_j^2}} \left[R - (\mathbf{R} \mathbf{1}) \frac{(1 - v_j)^2}{v_j} \right] = Y_0 - \frac{(\mathbf{Y} \mathbf{1})}{v_j}. \quad (267)$$

Введем безразмерный 4-вектор $\varrho_j = (\varrho_j^0, \boldsymbol{\varrho}_j)$ с компонентами

$$\varrho_j^\mu = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(R_0^\mu - \frac{1}{m_j} Y^\mu \right). \quad (268)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий в (266) эти компоненты малы по абсолютной величине. В самом деле, подставив в определение в (268) выражение для 4-вектора Y , которое в покомпонентной записи имеет вид

$$Y^\mu = \tilde{\mathfrak{A}}_s^{\mu 0} q_s^0 - \tilde{\mathfrak{A}}_d^{\mu 0} q_d^0 + \tilde{\mathfrak{A}}_s^{\mu k} q_s^k - \tilde{\mathfrak{A}}_d^{\mu k} q_d^k,$$

найдем

$$\varrho_j^\mu = \frac{1}{m_j \mathcal{R}} [\tilde{\mathfrak{A}}_s^{\mu 0} (m_j - q_s^0) + \tilde{\mathfrak{A}}_d^{\mu 0} (m_j + q_d^0) - \tilde{\mathfrak{A}}_s^{\mu k} q_s^k + \tilde{\mathfrak{A}}_d^{\mu k} q_d^k]. \quad (269)$$

Поскольку все слагаемые в (269) содержат малые множители $(1 - q_s^0/m_j, q_s^k/m_j$ и т. д.), можно заключить, что $|\varrho_{j\mu}| \ll 1$. Учитывая это, будем искать решение уравнения (267) в виде двойного степенного ряда

$$v_j = \bar{v}_j \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{(v)} (\boldsymbol{\varrho}_j \mathbf{1})^n \varrho_{j0}^m \right], \quad (270)$$

где

$$\bar{v}_j = \frac{(\varrho_j \mathbf{1})}{1 + \varrho_{j0}}.$$

Выпишем первые шесть безразмерных коэффициентных функций $C_{nm}^{(v)}$:

$$\begin{aligned} C_{10}^{(v)} &= -\frac{1}{2}C_{11}^{(v)} = 3C_{12}^{(v)} = \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{1})}{2\mathcal{R}}, \\ C_{20}^{(v)} &= \frac{9(\mathbf{R}\mathbf{1})^2}{2\mathcal{R}^2} - \frac{R_{00}}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{2}, \\ C_{21}^{(v)} &= -\frac{18(\mathbf{R}\mathbf{1})^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{3R_{00}}{2\mathcal{R}} + \frac{3}{2}, \\ C_{30}^{(v)} &= \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{1})}{8\mathcal{R}} \left[\frac{45(\mathbf{R}\mathbf{1})^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{10R_{00}}{\mathcal{R}} - \frac{23}{3} \right]. \end{aligned} \quad (271)$$

Из (270) и (271) получаем

$$\begin{aligned} E_j &= m_j + \frac{m_j v_j^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\delta_j + \dots \right), \\ P_j &= m_j v_j \left(1 + \frac{1}{2}\delta_j + \dots \right). \end{aligned} \quad (272)$$

Здесь функция

$$\delta_j = (\varrho_j \mathbf{1})^2 \left[1 + \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{1})}{\mathcal{R}} (\varrho_j \mathbf{1}) - \varrho_{j0} \right]$$

определяет величину главных релятивистских поправок, а точками обозначены поправки высших порядков по $(\varrho_j \mathbf{1})$ и ϱ_{j0} . Как видим, нерелятивистское соотношение между эффективными скоростью, энергией и импульсом остается справедливым вплоть до второго порядка по $(\varrho_j \mathbf{1})$ и релятивистские поправки к E_j и P_j положительны. Можно показать, что функция \mathcal{R} положительна. Учитывая этот факт, легко увидеть, что вторая производная в (251б) положительна в стационарной точке. Действительно, подставив (270) и (271) в (251б), получим

$$\left. \frac{d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} \right|_{q_0=E_j} = 2R + \frac{2\mathcal{R}}{\bar{v}_j^2} \left[1 - \frac{6(\mathbf{R}\mathbf{1})}{\mathcal{R}} (\varrho_j \mathbf{1}) + \varrho_{j0} + \dots \right] > 0. \quad (273)$$

Возникающая здесь особенность при $\bar{v}_j = 0$ не должна вызывать недоумения, поскольку она лишь подтверждает интуитивное ожидание того, что амплитуда процесса с «покоящимся» нейтрино в промежуточном состоянии должна равняться нулю. Тем не менее этот случай требует более детального изучения условий применимости метода перевала и теоремы ГС. Эти вопросы будут обсуждаться в отдельной работе.

Обратимся к специальному случаю точного баланса передачи энергии и импульса в вершинах макродиаграммы. Будем использовать обозначения (264), и в соответствии с (266) примем, что

$$0 \leq \frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \ll 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \frac{\mathcal{P}}{m_j} \ll 1.$$

Имеем

$$q_j^\mu = \frac{1}{\mathcal{R}} \left[R_k^\mu l_k \frac{\mathcal{P}}{m_j} - R_0^\mu \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right) \right]$$

и, следовательно,

$$q_{j0} = \frac{(\mathbf{R}\mathbf{l})}{\mathcal{R}} \frac{\mathcal{P}}{m_j} - \frac{R_{00}}{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right), \quad (\mathbf{q}_j\mathbf{l}) = \frac{\mathcal{P}}{m_j} - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{l})}{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right).$$

Подставив найденные соотношения в (270), учитывая (271) и переразложив полученное выражение по степеням двух малых независимых параметров \mathcal{P}/m_j и $\mathcal{E}/m_j - 1$, приходим к следующему выражению для эффективной скорости виртуального нейтрино:

$$v_j = \bar{v}_j \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{R}\mathbf{l})}{2\mathcal{R}} \frac{\mathcal{P}}{m_j} + \left[\frac{R_{00}}{\mathcal{R}} - \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{l})^2}{2\mathcal{R}^2} \right] \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right) + \dots \right\}, \quad \bar{v}_j = (\mathbf{q}_j\mathbf{l}). \quad (274)$$

Из (274) находим эффективную энергию и импульс виртуального нейтрино в лидирующем порядке по \mathcal{P}/m_j и $\mathcal{E}/m_j - 1$:

$$E_j \approx m_j + \frac{m_j \bar{v}_j^2}{2}, \quad P_j \approx m_j \bar{v}_j.$$

Эти простые формулы полностью отвечают интуитивным ожиданиям лишь при $|\mathcal{E}/m_j - 1| \lesssim \mathcal{P}^2/m_j^2$. В этом (и только в этом) частном случае

$$\bar{v}_j \approx \frac{\mathcal{P}}{m_j}, \quad E_j \approx m_j + \frac{\mathcal{P}^2}{2m_j} \quad \text{и} \quad P_j \approx \mathcal{P}.$$

7.3. Окончательная формула для амплитуды. Выше было доказано, что как в ультрарелятивистском, так и в нерелятивистском случаях функция $F_j(q_0)$ имеет абсолютный минимум при $q_0 = E_j$; в окрестности минимума она может быть аппроксимирована параболой:

$$F_j(q_0) \simeq F_j(E_j) + \frac{(q_0 - E_j)^2}{4\mathfrak{D}_j^2}. \quad (275)$$

Здесь введена положительно определенная функция

$$\frac{1}{\mathfrak{D}_j} = \sqrt{\left[\frac{2d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} \right]_{q_0=E_j}}, \quad (276)$$

которую, как мы увидим ниже, можно интерпретировать как неопределенность эффективной энергии виртуального нейтрино. В ультрарелятивистском случае, рассмотрением которого мы ограничимся в дальнейшем,

$$\mathfrak{D}_j = \frac{1 + nr_j + \mathcal{O}(r_j^2)}{2\sqrt{R}} \simeq \frac{\mathfrak{D}}{v_j} \simeq \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{2\sqrt{R}} = \frac{E_\nu}{2\sqrt{3}}. \quad (277)$$

В рамках сделанных нами приближений функцию \mathfrak{D}_j можно с большой точностью считать не зависящей от j , т. е. универсальной для всех нейтрино ν_j , поскольку $r_j \ll 1$, а функция \mathfrak{D} сама по себе мала по сравнению с энергиями нейтрино, доступными в современных экспериментах. Примем теперь во внимание, что в окрестности стационарной точки E_j все множители подынтегрального выражения в правой части (246), за исключением экспоненты

$$\exp \left[-\frac{1}{4}F_j(q_0) - i \left(q_0 T - \sqrt{q_0^2 - m_j^2} L \right) \right],$$

являются слабо меняющимися функциями переменной интегрирования q_0 и могут быть поэтому вынесены из-под интеграла в точке $q_0 = E_j$. Используя (275) и разложение

$$\sqrt{q_0^2 - m_j^2} = P_j + \frac{1}{v_j}(q_0 - E_j) - \frac{m_j^2}{2P_j^3}(q_0 - E_j)^2 + \dots,$$

приходим к следующему простому интегралу:

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \exp \left[-i(E_j T - P_j L) + i \left(\frac{L}{v_j} - T \right) (q_0 - E_j) - \frac{1}{4}F_j(E_j) - \left(\frac{1}{4\mathfrak{D}_j^2} + \frac{im_j^2 L}{2P_j^3} \right) (q_0 - E_j)^2 \right].$$

Вводя комплекснозначную фазовую функцию

$$\Omega_j(T, L) = i(E_j T - P_j L) + \tilde{\mathfrak{D}}_j^2 \left(\frac{L}{v_j} - T \right)^2, \quad (278)$$

в которой

$$\tilde{\mathfrak{D}}_j^2 = \frac{\mathfrak{D}_j^2}{1 + i\tau_j} \simeq \frac{\mathfrak{D}^2}{1 + i\tau_j}, \quad \tau_j = \frac{2m_j^2 \mathfrak{D}_j^2 L}{P_j^3} \simeq \frac{2m_j^2 \mathfrak{D}^2 L}{E_\nu^3} = \frac{L}{\tau_{Lj}}, \quad (279)$$

где параметр $\tau_{j,L}$ оказывается в точности таким же, как в квантово-механическом случае (53), получаем

$$I_j = 2\sqrt{\pi}\tilde{\mathfrak{D}}_j \exp\left[-\frac{1}{4}F_j(E_j) - \Omega_j(T, L)\right].$$

Комплексная «дисперсия» $\tilde{\mathfrak{D}}_j$ зависит от эффективной энергии нейтрино и от пространственного расстояния L между прицельными точками в источнике и детекторе; ее модуль и аргумент даются следующими формулами:

$$|\tilde{\mathfrak{D}}_j| \simeq \mathfrak{D}(1 + \tau_j^2)^{-1/4}, \quad \arg(\tilde{\mathfrak{D}}_j) \simeq \frac{1}{2} \arctan(\tau_j).$$

Собрав все множители, мы получаем следующее окончательное выражение для функции в (246):

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\kappa, x_\kappa\}) = \\ = \Delta_{\nu\nu'}(p_j - p_\beta)\hat{p}_j\Delta_{\mu'\mu}(p_j + p_\alpha)|\mathbb{V}_d(p_j)\mathbb{V}_s(p_j)|\frac{\tilde{\mathfrak{D}}_j e^{-\Omega_j - i\Theta}}{i4\pi^{3/2}L}. \end{aligned} \quad (280)$$

Здесь введен 4-вектор $p_j = (E_j, P_j\mathbf{1})$ и опущен вклад, пропорциональный m_j (см. вторую сноску на с. 106). Фазовый фактор $-i e^{-i\Theta}$ в (280) несуществен, поскольку он исчезает в квадрате модуля амплитуды.

Благодаря наличию «размазанных» δ -функций $\tilde{\delta}_s(p_j - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(p_j + q_d)$, входящих в выражения для интегралов перекрытия $\mathbb{V}_s(p_j)$ и $\mathbb{V}_d(p_j)$ и ответственных за приближенное сохранение энергии-импульса ($p_j \approx q_s \approx -q_d$), а также предполагаемой малости масс нейтрино по сравнению с репрезентативной энергией E_ν , мы можем положить $m_j = 0$ во всем предэкспоненциальном факторе в правой части (280). Применим теперь тождество

$$P_- \hat{\mathbf{p}}_\nu P_+ = P_- u_-(\mathbf{p}_\nu) \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) P_+$$

(в котором $P_\pm = (1/2)(1 \pm \gamma_5)$, $\mathbf{p}_\nu = E_\nu \mathbf{1}$, и $u_-(\mathbf{p}_\nu)$ — обычный дираковский биспинор для свободного безмассового левоспирального нейтрино ν) и определим с его помощью матричные элементы

$$M_s = \frac{g^2}{8} \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) \mathcal{J}_s^\mu \Delta_{\mu\mu'}(p_\nu + p_\alpha) O^{\mu'} u(\mathbf{p}_\alpha), \quad (281)$$

$$M_d^* = \frac{g^2}{8} \bar{v}(\mathbf{p}_\beta) O^{\mu'} \Delta_{\mu'\mu}(p_\nu - p_\beta) \mathcal{J}_d^{*\mu} u_-(\mathbf{p}_\nu),$$

описывающие рождение и поглощение *реального* безмассового нейтрино в реакциях $I_s \rightarrow F'_s \ell_\alpha^+ \nu$ и $\nu I_d \rightarrow F'_d \ell_\beta^-$ соответственно*. Тогда с учетом вышеприведенных результатов мы получаем окончательное выражение для амплитуды в (241):

$$A_{\beta\alpha} = \sum_j \mathcal{A}_{\beta\alpha}^j, \quad (282)$$

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha}^j = \frac{|\mathbb{V}_s(p_j)\mathbb{V}_d(p_j)|M_s M_d^*}{i4\pi^{3/2}\mathcal{N}L} V_{\alpha j}^* \tilde{\mathcal{D}}_j V_{\beta j} e^{-\Omega_j - i\Theta}.$$

Полезно выделить в этой формуле не зависящий от j общий множитель, ответственный за приближенное сохранение энергии-импульса в вершинах. Для этого, используя (200) и определения в (247), запишем

$$\tilde{\delta}_s(p_j - q_s) \tilde{\delta}_d(p_j + q_d) = \tilde{\delta}_s(p_\nu - q_s) \tilde{\delta}_d(p_\nu + q_d) e^{-\Theta_j},$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_j &= \frac{1}{4}[2(Y_\mu - R_{\mu\mu'} p_\nu^{\mu'}) + R_{\mu\mu'}(p_\nu - p_j)^{\mu'}](p_\nu - p_j)^\mu = \\ &= \frac{1}{2}\{E_\nu[(\mathbf{R}\mathbf{I}) - R_{00}] + Y_0\}(E_\nu - E_j) + \frac{1}{2}\{E_\nu[(\mathbf{R}\mathbf{I}) - \mathcal{R}] - (\mathbf{Y}\mathbf{I})\}(E_\nu - P_j) + \\ &\quad + \frac{1}{4}[R_{00}(E_\nu - E_j)^2 - 2(\mathbf{R}\mathbf{I})(E_\nu - E_j)(E_\nu - P_j) + \mathcal{R}(E_\nu - P_j)^2]. \end{aligned}$$

Тогда амплитуду (282) можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{|\mathbb{V}_s(p_\nu)\mathbb{V}_d(p_\nu)|M_s M_d^*}{i4\pi^{3/2}\mathcal{N}L} \sum_j V_{\alpha j}^* \tilde{\mathcal{D}}_j V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j - i\Theta}. \quad (283)$$

Используя (256), можно представить функцию Θ_j в виде разложения по r_j :

$$\begin{aligned} \Theta_j &= m_j^2 R \left[(n_0 - n) + \frac{1}{2}(m - n - n^2)r_j + \right. \\ &\quad \left. + \left(n + \frac{1}{2} \right) (m - n - n^2)r_j^2 + \mathcal{O}(r_j^3) \right]. \end{aligned}$$

*При дополнительных условиях $|(p_\nu + p_\alpha)^2| \ll m_W^2$ и $|(p_\nu - p_\beta)^2| \ll m_W^2$ пропагатор W -бозона можно приближенно записать как $-ig_{\mu\nu}/m_W^2$, что соответствует четырехфермионной теории слабого взаимодействия. Тогда, воспользовавшись известным тождеством $SMg^2/8 = G_F m_W^2/\sqrt{2}$, можно переписать матричные элементы (281) в виде

$$M_s \approx -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) \mathcal{J}_s^\mu O_\mu v(\mathbf{p}_\alpha), \quad M_d^* \approx -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{J}_d^{\mu*} O_\mu u_-(\mathbf{p}_\nu).$$

Однако это несколько ограничительное упрощение (неприменимое, в частности, при сверхвысоких энергиях) не является необходимым и не будет использоваться в дальнейшем анализе.

Напомним, что функция n_0 определяется согласно (265) и совпадает с n в случае точного сохранения энергии-импульса в вершинах (см. п. 7.2.1). При выполнении

$$|n|r_j \ll 1 \quad \text{и} \quad |m|r_j \ll |n|, \quad \forall j, \quad (284)$$

можно написать приближенно

$$\Theta_j \approx m_j^2 R \left[(n_0 - n) + \frac{1}{2}(m - n - n^2)r_j \right],$$

а в окрестности максимума произведения $\tilde{\delta}_s(p_\nu - q_s)\tilde{\delta}_d(p_\nu + q_d)$ (т. е. при $q_s \approx -q_d \approx p_\nu$) можно пренебречь и знаконеопределенной разностью $n_0 - n$. Тогда

$$\Theta_j \approx \frac{m_j^4 R(m - n_0 - n_0^2)}{4E_\nu^2} = \frac{m_j^4 [R_{00}\mathcal{R} - (\mathbf{R}\mathbf{I})^2]}{4RE_\nu^2}. \quad (285)$$

Можно доказать, что эта величина положительна.

Из вывода формулы (283) и ее структуры видно, что она справедлива не только для рассмотренного класса процессов, но, при соответствующем переопределении матричных элементов (281), и для любых других процессов, идущих за счет обмена виртуальными нейтрино между вершинами макродиаграммы. Нетрудно обобщить результат (282) и на случай реакций с обменом антинейтрино, для чего следует сделать в ней замену $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}^\dagger$ (т. е. $V_{\alpha j}^* \mapsto V_{\alpha j}$, $V_{\beta j} \mapsto V_{\beta j}^*$) и должным образом модифицировать матричные элементы (281).

7.4. Эффективный волновой пакет ультрарелятивистского нейтрино.

Вернемся к выражению (282). Входящая в него фазовая функция (278) может быть тождественно переписана в приближенно* лоренц-инвариантной форме:

$$\Omega_j(T, L) = i(p_j X) + \frac{2\tilde{\mathcal{D}}_j^2}{E_\nu^2} [(p_j X)^2 - m_j^2 X^2], \quad (286)$$

где $X = X_d - X_s$. Очевидно $(p_j X)^2 - m_j^2 X^2 = 0$ при $\mathbf{L} = \mathbf{v}_j T$. Понятно, однако, что при невырожденном спектре масс нейтрино величины $(p_j X)^2 - m_j^2 X^2$ не могут обращаться в нуль сразу при всех значениях j . Поэтому отношение $L/T = |\mathbf{X}|/X_0$, которое задается пространственно-временными конфигурациями и скоростями внешних волновых пакетов и никак не связано с эффективными скоростями виртуальных нейтрино, нельзя интерпретировать как некоторую среднюю скорость нейтрино. Итак, при фиксированных значениях j и T вектор $\delta\mathbf{x} = \mathbf{L} - \mathbf{v}_j T$, вообще говоря, отличен от нуля,

* Функция $\tilde{\mathcal{D}}_j^2/E_\nu^2$ инвариантна с точностью до поправок $\mathcal{O}(\tau_j)$.

но коллинеарен вектору скорости $\mathbf{v}_j = v_j \mathbf{l}$. Нетрудно убедиться, что при произвольно направленном векторе $\delta \mathbf{x}$ имеет место тождество

$$(p_j X)^2 - m_j^2 X^2 = E_j^2 (\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{l})^2 + (\delta \mathbf{x} \times \mathbf{l})^2 = E_j^2 \delta x_{\parallel}^2 + m_j^2 \delta x_{\perp}^2, \quad (287)$$

где δx_{\parallel} и δx_{\perp} — составляющие $\delta \mathbf{x}$, направленные параллельно и перпендикулярно вектору \mathbf{l} . Тогда из (287) следует, что при

$$2|\tilde{\mathcal{D}}_j|^2 (\delta x_{\parallel}^2 + \Gamma_j^{-2} \delta x_{\perp}^2) < 1 \quad (288)$$

(где, разумеется, $\Gamma_j = E_j/m_j \simeq E_\nu/m_j$) фактор $\exp(-|\Omega_j|)$ уменьшается не более чем в ϵ раз по сравнению со своим максимальным значением, реализующимся при $\delta \mathbf{x} = 0$. Область, заданная условием (288), представляет собой внутренность эллипсоида вращения с радиусом $1/(\sqrt{2}|\tilde{\mathcal{D}}_j|)$, сплюснутого в Γ_j раз вдоль направления \mathbf{l} .

Рассмотрим теперь преобразование, при котором положения центров всех внешних пакетов в источнике, величина T и единичный вектор \mathbf{l} остаются неизменными, а все пакеты $\varkappa \in F_d$ смещены на величину $\delta \mathbf{x}$; для простоты положим $\delta \mathbf{x} = \delta x_{\perp}$. При таком преобразовании прицельная точка \mathbf{X}_d и вектор \mathbf{L} сдвигаются на ту же величину,

$$\mathbf{X}_d \mapsto \mathbf{X}'_d = \mathbf{X}_d + \delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}' = \mathbf{L} + \delta \mathbf{x}.$$

Поскольку содержащийся в (282) фактор подавления $\exp(-\mathfrak{S}_d)$ инвариантен относительно пространственных трансляций $\mathbf{x}_{\varkappa} \mapsto \mathbf{x}_{\varkappa} + \delta \mathbf{x}$ и все внешние импульсы процесса не меняются, то величину $\mathcal{A}'_{\beta\alpha}{}^j = \mathcal{A}^j_{\beta\alpha}|_{\mathbf{x}_d \mapsto \mathbf{x}'_d}$ можно интерпретировать как амплитуду вероятности взаимодействия j -го нейтрино с 4-импульсом $p_j = (E_j, P_j \mathbf{l})$ в точке \mathbf{X}'_d (рис. 16). Хотя такая интерпретация может показаться искусственной, ниже, при изучении выражения для скорости счета нейтринных событий, мы приведем аргументы в ее пользу. Если расстояние L достаточно велико, а именно $4|\tilde{\mathcal{D}}_j|^2 L^2 \gg 1$, то его относительное изменение за счет смещений $\delta \mathbf{x}$, удовлетворяющих условию (288), незначительно,

$$L'/L - 1 \approx \frac{\delta x_{\perp}^2}{2L^2} \ll 1,$$

и подавление амплитуды $\mathcal{A}^j_{\beta\alpha}$ определяется только фактором $\exp(-|\Omega_j|)$, который близок к единице при $2|\tilde{\mathcal{D}}_j|^2 \delta x_{\perp}^2 \ll \Gamma_j^2$. При этом абсолютные величины поперечного смещения δx_{\perp} и разности длин $L' - L \approx \delta x_{\perp}^2/(2L)$ могут оказаться настолько велики, что отношение L'/L превысит единицу. Если ошибочно интерпретировать это отношение как скорость точечного нейтрино, то можно прийти к неправильному выводу о нарушении специальной теории относительности.

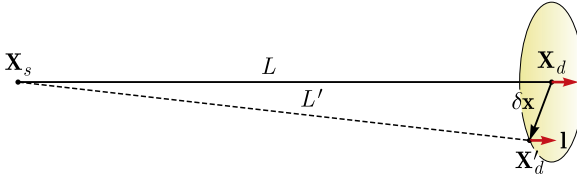


Рис. 16. Схема, иллюстрирующая эффект смещения центров всех пакетов в детекторе на величину δx

Полезно пояснить этот чисто квантовый эффект на более наглядном примере, введя в рассмотрение эффективный ВП нейтрино. Для этого выделим из амплитуды (282) следующий фактор:

$$\bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) \frac{1}{L} e^{-\Omega_j(T,L)} u_-(\mathbf{p}_\nu) \approx \bar{u}_-(\mathbf{p}_j) \frac{1}{L} e^{-\Omega_j(T,L)} u_-(\mathbf{p}_j) \quad (289)$$

(напомним, что спиноры $u_-(\mathbf{p}_\nu)$ и $\bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu)$ содержатся в матричных элементах (281)). Пренебрегая мнимой частью функции $\tilde{\mathfrak{D}}_j^2$, выражение (289) можно переписать в виде произведения

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s|} \bar{\psi}_{X_s}^j(\mathbf{p}_j, X_d - X_s) \psi_{X_d}^j(\mathbf{p}_j, X_s - X_d), \quad (290)$$

в котором

$$\psi_y^j(\mathbf{p}_j, x) = \exp \left\{ -i(p_j y) - \frac{\mathfrak{D}_j^2}{E_j^2} [(p_j x)^2 - m_j^2 x^2] \right\} u_-(\mathbf{p}_j)$$

и

$$\bar{\psi}_y^j(\mathbf{p}_j, x) = [\psi_y^j(\mathbf{p}_j, x)]^\dagger \gamma_0 = \bar{u}_-(\mathbf{p}_j) \exp \left\{ i(p_j y) - \frac{\mathfrak{D}_j^2}{E_j^2} [(p_j x)^2 - m_j^2 x^2] \right\}.$$

Сравнивая спинорную функцию $\psi_y(\mathbf{p}_j, x)$ с волновой функцией фермионного пакета общего вида в приближении СРГП

$$\begin{aligned} \psi_y(\mathbf{p}, s, x) &= e^{-ipx} u_s(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}, x - y) = \\ &= u_s(\mathbf{p}) \exp \left\{ -i(py) - \frac{\sigma^2}{m^2} [(px)^2 - m^2 x^2] \right\}, \end{aligned}$$

видим, что спинорную функцию $\psi_{X_d}^j(\mathbf{p}_j, X_s - X_d)$ можно интерпретировать как волновую функцию в x -представлении, описывающую *входящий* ВП

реального массивного нейтрино ν_j , роль параметра σ в которой играет величина $\sigma_j = \mathfrak{D}_j/\Gamma_j$. Второй спинорный сомножитель в (290), $\bar{\psi}_{X_s}^j(\mathbf{p}_j, X_d - X_s)/|\mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s|$, естественно интерпретировать как *выходящую* из источника сферическую нейтринную волну на расстоянии $|\mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s|$ от точки рождения \mathbf{X}_s .

Полезно пояснить полученный результат на более простом квантово-механическом языке, проведя вычисления, аналогичные расчету амплитуды перехода в КМ-подходе (см. (61)). Найдем амплитуду перехода из состояния ВП ν_j в источнике, заданного наиболее вероятным импульсом \mathbf{p}_j , дисперсией импульса σ_{sj} и 4-координатой X_s , в состояние ВП ν_j в детекторе с тем же импульсом, но с дисперсией σ_{dj} и 4-координатой X_d (пренебрегаем расплыванием ВП в конфигурационном пространстве, т. е. работаем в режиме СРПП-приближения):

$$\frac{1}{\mathcal{N}_{sd}} \langle \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} | \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} \rangle = \left(\frac{2\sigma_{sj}\sigma_{dj}}{\sigma_{sj}^2 + \sigma_{dj}^2} \right)^{3/2} \psi(\mathbf{p}_j, X_d - X_s, \sigma_j). \quad (291)$$

Здесь

$$\frac{1}{\sigma_j^2} = \frac{1}{\sigma_{sj}^2} + \frac{1}{\sigma_{dj}^2} \quad (292)$$

и $\mathcal{N}_{sd} = \sqrt{\langle \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} | \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} \rangle \langle \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} | \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} \rangle}$. Мы получили выражение, пропорциональное функции $\psi(\mathbf{p}, x)$ в СРПП-приближении, которое следует сравнить с $e^{-\Omega_j(T,L)}$. В результате получаем $\sigma_j = \mathfrak{D}_j/\Gamma_j$. Соответственно, \mathfrak{D}_j — эффективная неопределенность энергии нейтрино с учетом взаимодействий в источнике и детекторе, которую следует сравнить с величиной σ_p , определенной согласно (63). Поскольку σ_{sj} и σ_{dj} — дисперсии нейтринного ВП в источнике и детекторе соответственно, то легко найти их явный вид, переписав первую формулу в (250) в виде $R = \sigma_{xs}^2 + \sigma_{xd}^2$, где $\sigma_{xs}^2 = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} l_\mu l_\nu$, $\sigma_{xd}^2 = \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} l_\mu l_\nu$. Нетрудно понять физический смысл величин σ_{xs} и σ_{xd} как соответствующих пространственных дисперсий ВП нейтрино в источнике и детекторе, которые связаны с дисперсиями импульсов стандартными для гауссова пакета соотношениями

$$\sigma_{sj}^{-2} = 4\sigma_{xs}^2 = 4\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} l_\mu l_\nu, \quad \sigma_{dj}^{-2} = 4\sigma_{xd}^2 = 4\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} l_\mu l_\nu. \quad (293)$$

Действительно, прямая подстановка σ_{sj} и σ_{dj} , определенных в (293) и (292) для вычисления амплитуды в (291), дает, с точностью до безразмерного множителя порядка единицы, $e^{-\Omega_j(T,L)}$ с функцией \mathfrak{D}_j , определенной согласно (276).

Поскольку $\tilde{\mathcal{D}}_j$ — комплекснозначная функция, факторизация вида (290) в общем случае становится невозможной, но соответствующую поправку, представляющую очевидный интерес для нейтринной астрофизики, можно интерпретировать как результат своеобразной интерференции расплывающихся in- и out-пакетов нейтрино. Эта поправка становится существенной на очень больших расстояниях L и приводит к общему подавлению амплитуды (241) и к модификации осцилляционных факторов $\propto \exp[i \operatorname{Im} \Omega_j(T, L)]$. Детальное изучение этих эффектов возможно только посредством анализа наблюдаемых величин (таких как скорость счета событий данного типа в установке), которые получаются после надлежащего усреднения квадрата модуля амплитуды по всем неизмеряемым переменным, от которых зависит амплитуда (241). Такое усреднение зависит от статистических распределений (в более общем случае — от кинетики) ансамблей in-пакетов и от процедуры детектирования [57, 58]. Здесь мы ограничимся случаем, когда мнимой частью $\tilde{\mathcal{D}}_j$ можно пренебречь, и найдем условия применимости этого приближения. Используя (277) и (279), запишем

$$\tau_j \simeq \frac{10^5}{\mathfrak{F}} \left(\frac{m_j}{1 \text{ эВ}} \right)^2 \left(\frac{1 \text{ ГэВ}}{E_\nu} \right) \left(\frac{L}{10^4 \text{ км}} \right). \quad (294)$$

Отсюда видно, что $\tau_j \ll 1$ для всех современных экспериментов с реакторными ($E_\nu \gtrsim 1$ МэВ, $L \lesssim 10^3$ км), ускорительными ($E_\nu \gtrsim 100$ МэВ, $L \lesssim 10^3$ км) и атмосферными ($E_\nu \gtrsim 100$ МэВ, $L \lesssim 1,3 \cdot 10^4$ км) (анти)нейтрино при условии, что $m_j \lesssim 1$ эВ и $\mathfrak{F} \gg 10^7$. В п. П1.3.2 мы продемонстрируем на типичных примерах, что в области применимости модели СРГП условие $\mathfrak{F} \gg 10^7$ выполняется «с большим запасом»*. При этом $\hat{\mathcal{D}}_j^2 \simeq \mathcal{D}_j^2 \simeq \mathcal{D}^2$ и, следовательно,

$$\frac{\sigma_j^2}{m_j^2} \simeq \frac{\mathcal{D}^2}{E_\nu^2} = \frac{1}{2E_\nu^2 R} \simeq \frac{1}{2\mathfrak{F}}. \quad (295)$$

Отсюда с учетом принятых нами условий узости внешних пакетов в импульсном пространстве, $\sigma_x^2 \ll m_x^2$, автоматически следует, что $\sigma_j^2/m_j^2 \ll 10^{-7}$ и $\sigma_j^2 L^2 \ll m_j^2/\sigma_j^2$ (условие стабильности пакета).

Как показано в п. 4.7, неопределенности энергии и компонент импульса ультрарелятивистского волнового пакета в приближении СРГП есть

$$\delta E_{\mathbf{p}} \approx |\delta \mathbf{p}| \approx |\delta \mathbf{p}_{\parallel}| \approx \sqrt{2 \ln 2} \Gamma_{\mathbf{p}} \sigma, \quad |\delta \mathbf{p}_{\perp}| \approx 2\sqrt{\ln 2} \sigma$$

*В частности, учитывая современные космологические ограничения на сумму масс нейтрино (см., например, [132]).

($\delta \mathbf{p}_{\parallel} \times \mathbf{p} = 0$, $\delta \mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{p} = 0$), так что соответствующие неопределенности для ультрарелятивистского нейтринного пакета равны

$$\delta E_j \approx |\delta \mathbf{p}_j| \approx |\delta \mathbf{p}_{j\parallel}| \approx 2\sqrt{\ln 2} \mathfrak{D}, \quad |\delta \mathbf{p}_{j\perp}| \approx 2\sqrt{2 \ln 2} \mathfrak{D} / \Gamma_j \ll |\delta \mathbf{p}_{j\parallel}|,$$

т. е. функция \mathfrak{D} , зависящая от масс, импульсов и «размазок» импульсов внешних in- и out-пакетов, характеризует неопределенность энергии нейтрино, а $1/\mathfrak{D}$ определяет (с точностью до числового множителя порядка единицы) эффективный размер нейтринного волнового пакета, поперечный к импульсу \mathbf{p}_j . Наглядным образом волнового пакета ультрарелятивистского нейтрино может служить огромный, но чрезвычайно тонкий диск, отношение поперечного и продольного размеров которого равно $\Gamma_j \gg 1$. Относительная неопределенность энергии и импульса нейтрино

$$\frac{\delta E_j}{E_j} \simeq \frac{\delta P_j}{P_j} \sim \frac{\mathfrak{D}}{E_\nu} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}}}$$

всегда очень мала и не зависит от энергии и массы нейтрино. Именно в этом смысле следует понимать стандартное квантово-механическое предположение о том, что состояния нейтрино с определенными массами $|\nu_i\rangle$ (а следовательно, и состояния с определенными флейворами $|\nu_\alpha\rangle$) обладают определенными 4-импульсами.

Как и всякий СРГП, нейтринный ВП в среднем движется по «классической траектории» $\bar{\mathbf{L}}_j = \mathbf{v}_j T$, квантовые отклонения от которой, $\delta \mathbf{L}_j$, подавлены (в амплитуде) фактором

$$\exp \left\{ -2\mathfrak{D}^2 \left[\frac{(\delta \mathbf{L}_j)^2}{\Gamma_j^2} + \frac{(\mathbf{L} \delta \mathbf{L}_j)^2}{L^2} \right] \right\}.$$

Из-за малости отношения $\mathfrak{D}^2 / \Gamma_j^2 \sim m_j^2 / \mathfrak{F}$ поперечные отклонения могут быть макроскопически велики (бесконечно велики в случае безмассового нейтрино). Этот вывод совпадает с результатом, сформулированным в начале данного пункта без апелляции к понятию нейтринного волнового пакета.

Итак, мы убедились, что эффективный ВП ультрарелятивистского нейтрино воспроизводит все свойства СРГП общего вида с той лишь существенной оговоркой, что параметр σ_j зависит, вообще говоря, от импульсов (а также масс и дисперсий импульсов) всех внешних пакетов. Здесь необходимо отметить, что эта зависимость отнюдь не является специфическим свойством нейтрино или ковариантного формализма, поскольку, как обсуждалось в п. 3.3, ВП, описывающий состояние *любой* массивной частицы, должен зависеть от импульсов частиц, участвовавших как в ее образовании, так и, вообще говоря, поглощении, а использованное нами соглашение $\sigma_{\neq} = \text{const}$ является не более чем приближением, принятым для упрощения теории.

8. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКИ РАЗНЕСЕННЫХ СОБЫТИЙ

Теперь с помощью (282) и формул для четырехмерных объемов перекрытия $V_{s,d}$, выведенных в п. 6.11, мы получаем выражение для микроскопической вероятности процесса (231):

$$|A_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) V_s |M_s|^2 (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) V_d |M_d|^2}{\prod_{x \in S} 2E_x V_x \prod_{x \in D} 2E_x V_x} \times \\ \times \frac{1}{2(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j \tilde{\mathfrak{D}}_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \right|^2. \quad (296)$$

Это выражение зависит от координат x_x и средних импульсов \mathbf{p}_x всех участвующих в реакции ВП, а также от параметров σ_x . Вероятность (296) исчезающе мала, если мало произведение объемов перекрытия

$$V_s V_d = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 (|\mathfrak{R}_s| |\mathfrak{R}_d|)^{-1/2} \exp[-2(\mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d)],$$

т. е. если in- и out-пакеты в источнике и детекторе не пересекаются в пространственно-временных областях, окружающих прицельные точки X_s и X_d .

Отметим, что и 4-вектор p_ν является функцией p_x и σ_x , причем $p_\nu = q_s = -q_d$ в пределе $\sigma_x = 0$, $\forall x$. Поэтому при достаточно малых σ_x

$$\delta_s(p_\nu - q_s) \delta_d(p_\nu + q_d) \approx \delta_s(0) \delta_d(0) = (2\pi)^{-4} (|\mathfrak{R}_s| |\mathfrak{R}_d|)^{-1/2}.$$

Чем же определяется приближенное равенство q_s и q_d ? Для ответа на этот вопрос преобразуем выражение (296) способом, предложенным Кардаллом [42]. Используя явный вид функций $\delta_{s,d}$ и \mathfrak{D} , нетрудно вывести следующее приближенное соотношение*:

$$\sqrt{2\pi} \mathfrak{D} \delta_s(p_\nu - q_s) \delta_d(p_\nu + q_d) F(p_\nu) = \int dE'_\nu \delta_s(p'_\nu - q_s) \delta_d(p'_\nu + q_d) F(p'_\nu),$$

*Это соотношение справедливо с той же точностью, с какой была получена формула (282) для амплитуды, а именно, с точностью использованного при выводе метода перевала.

в котором $F(p_\nu)$ — произвольная медленно меняющаяся функция p_ν , а $p'_\nu = (E'_\nu, \mathbf{p}'_\nu) = E'_\nu l$. С помощью этого соотношения получаем

$$|A_{\beta\alpha}|^2 = \int dE_\nu \frac{(2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) V_s |M_s|^2 (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) V_d |M_d|^2}{\prod_{\kappa \in S} 2E_\kappa V_\kappa \prod_{\kappa \in D} 2E_\kappa V_\kappa} \times \\ \times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{2\pi}(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \frac{1}{1 + i\tau_j} \right|^2, \quad (297)$$

где штрих у «немой» переменной интегрирования E_ν опущен, но теперь она (как и вектор $\mathbf{p}_\nu = E_\nu \mathbf{l}$) уже никак не связана с параметрами внешних пакетов. В рамках сделанных приближений формулы (296) и (297) эквивалентны, но из (297) видно, что закон сохранения энергии-импульса регулируется подынтегральными факторами $\delta_s(p_\nu - q_s)$ и $\delta_d(p_\nu + q_d)$, которые при достаточно малых σ_κ можно заменить обычными δ -функциями. Полученный результат послужит основой для расчета величин, измеряемых в современных экспериментах по нейтринным осцилляциям.

9. ВЕРОЯТНОСТЬ И СКОРОСТЬ СЧЕТА

Выражение (297) является наиболее общим результатом нашей теории. В то же время оно слишком абстрактно для непосредственной обработки и анализа данных современных нейтринных экспериментов. В большинстве этих экспериментов информация о координатах частиц в источнике, а чаще всего и в детекторе недоступна или не используется при обработке данных. Более того, измеряются, как правило, лишь импульсы вторичных частиц в детекторе. Для получения реально наблюдаемой величины вероятность (297) следует должным образом усреднить (просуммировать) по всем неизмеряемым или неиспользуемым в анализе переменным входящих (выходящих) состояний частиц. Мы будем называть такую процедуру макроскопическим усреднением. Для каждого конкретного эксперимента макроскопическое усреднение можно провести только с учетом реальных физических условий, построив для этого адекватную математическую модель реального эксперимента. По этой причине (и в этом смысле) дальнейший анализ становится модельно-зависимым.

9.1. Макроскопическое усреднение. В дальнейшем мы будем использовать простую, но достаточно реалистичную модель, в которой предполагается, что распределения ВП ip -частиц по средним импульсам, проекциям спинов и координатам в источнике и детекторе (рассматриваемых сейчас как

физические макроскопические объекты) можно описать классическими од-ночастичными функциями распределения $f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)$, нормированными в каждый момент времени согласно условию

$$\sum_{s_a} \int \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a) = N_a(x_a^0) \quad (a \in I_{s,d}),$$

где $N_a(x_a^0)$ — полное число частиц a в момент времени x_a^0 . Мы можем теперь уточнить (а вернее, переопределить) термины «источник» и «детектор», использовавшиеся при расчете амплитуды для обозначения блоков макроскопических фейнмановских диаграмм. В дальнейшем мы будем называть «источником» и «детектором» соответствующие экспериментальные устройства и (в абстрактном, но математически более точном смысле) носители \mathcal{S} и \mathcal{D} произведений функций распределения по пространственно-временным переменным (т. е. $\mathcal{S} = \supp_{\{x_a\}} \prod_a f_a$, $a \in I_s$ и аналогично для \mathcal{D}), которые будем считать ограниченными и непересекающимися. Положим, что характерные пространственные размеры \mathcal{S} и \mathcal{D} малы по сравнению с расстоянием между ними, но очень велики по сравнению с эффективными размерами всех движущихся в них волновых пакетов. Для определенности предположим, что в нашем эксперименте подлежат измерению только средние импульсы вторичных частиц в \mathcal{D} , причем (благодаря большому расстоянию между \mathcal{S} и \mathcal{D}) можно пренебречь фоном от вторичных частиц, попадающих в \mathcal{D} из \mathcal{S} . В этих предположениях макроскопически усредненная вероятность процесса (231) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle\langle |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \rangle\rangle &= \sum_{\text{spins}} \int \prod_{a \in I_s} \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)}{(2\pi)^3 2E_a V_a} \int \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b V_b} V_s \times \\ &\times \int \prod_{a \in I_d} \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)}{(2\pi)^3 2E_a V_a} \int \prod_{b \in F_d} \frac{d\mathbf{x}_b [d\mathbf{p}_b]}{(2\pi)^3 2E_b V_b} V_d \times \\ &\times \int dE_\nu (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2 \times \\ &\times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{\pi} (2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \right|^2. \quad (298) \end{aligned}$$

Здесь и далее символ \sum_{spins} обозначает усреднение по спинам всех in-частиц и суммирование по спинам всех out-частиц в \mathcal{S} и \mathcal{D} , а символ $[d\mathbf{p}_b]$ означает, что по переменной \mathbf{p}_b интегрирование не производится, т. е. $\int [d\mathbf{p}_b] = d\mathbf{p}_b$. Тем самым в (298) неявно подразумевается, что импульсы всех вторичных

частиц в детекторе могут измеряться*. Нетрудно видеть, что (298) представляет собой полное число, $dN_{\alpha\beta}$, регистрируемых в \mathcal{D} событий с частицами $b \in F_d$, импульсы которых находятся в интервалах от \mathbf{p}_b до $\mathbf{p}_b + d\mathbf{p}_b$, т.е. $\langle\langle |A_{\beta\alpha}|^2 \rangle\rangle = dN_{\alpha\beta}^{**}$. Для простоты мы пренебрегаем эффектами порядка L/τ_{Lj} (см. (279)), которые связаны с распылением эффективного ВП нейтрино на очень больших расстояниях. Эти эффекты потенциально интересны для экспериментов с астрофизическими нейтрино, но, как правило, несущественны в наземных осцилляционных экспериментах, включая эксперименты с солнечными нейтрино. Некоторые результаты, относящиеся к «сверхдлинным базам», приведены в приложении 5.

Интегрирование по координатам пакетов в (298) можно выполнить в явном виде, если воспользоваться интегральным представлением (229) для объемов перекрытия $V_{s,d}$ и учесть, что функции распределения f_a в S и \mathcal{D} , равно как и фактор $e^{-\Omega_j - \Omega_i^*} / L^2$, заметно меняются во времени и пространстве лишь на макроскопических масштабах, тогда как подынтегральные факторы в V_s и V_d существенно отличны от нуля лишь в малой окрестности соответствующей переменной интегрирования.

Поясним это на более формальном языке. А именно, покажем, что при любых конфигурациях внешних импульсов и произвольном значении x найдется такая конфигурация пространственно удаленных друг от друга точек x_\varkappa , при которой

$$\mathcal{P}_{s,d} \equiv \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa - x)|^2 = 1,$$

т.е. \mathcal{P}_s и \mathcal{P}_d достигают своих максимальных значений. Пусть для определенности $\varkappa \in S$. В силу инвариантности функций $|\psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa - x)|$ относительно сдвигов вдоль мировых линий центров пакетов можно заменить координаты x_\varkappa на y_\varkappa , где

$$y_\varkappa^0 = X_s^0, \quad \mathbf{y}_\varkappa = \mathbf{x}_\varkappa + (X_s^0 - x_\varkappa^0) \mathbf{v}_\varkappa.$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_s = \prod_\varkappa |\psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, y_\varkappa - x)|^2 = 1$ при $y_\varkappa = x$, т.е. *в один и тот же момент времени*, но при несовпадающих пространственных координатах $\mathbf{x}_\varkappa = \mathbf{x} + (x_\varkappa^0 - x^0) \mathbf{v}_\varkappa$, которые *по построению* достаточно удалены

*Разумеется, это допущение совершенно не обязательно; «расстановка квадратных скобок» в (298) диктуется условиями конкретного эксперимента. Так, в пока гипотетическом эксперименте с «мечеными» нейтрино измерению подлежат импульсы *всех* вторичных частиц не только в детекторе, но и в источнике.

**Для простоты мы рассматриваем «идеальный» эксперимент, эффективность регистрации в котором равна 1, хотя формализм, очевидно, позволяет легко учесть реальные эффективность и акцептанс детектора, а также тригерные условия и критерии отбора событий.

друг от друга, ибо переменные x_\varkappa^0 — внешние, и мы задали для них нужные условия. При этом, естественно, $X_s = x$ (поскольку X_s не меняется при замене x_\varkappa на y_\varkappa). Здесь неявно предполагается, что не более чем один пакет может иметь нулевую скорость. Но понятно, что вклады в интеграл от конфигураций, в которых пара (или большее число) пакетов имеет нулевые скорости, несущественны. Пренебрегая ими и краевыми эффектами, мы можем записать (298) в виде

$$dN_{\alpha\beta} = \sum_{\text{spins}} \int dx \int dy \int d\mathfrak{P}_s \int d\mathfrak{P}_d \int dE_\nu \frac{\mathfrak{D} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \right|^2}{16\pi^{7/2} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}, \quad (299)$$

где дифференциальные формы $d\mathfrak{P}_{s,d}$ определены следующим образом:

$$d\mathfrak{P}_s = \prod_{a \in I_s} \frac{d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x)}{(2\pi)^3 2E_a} \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2, \quad (300a)$$

$$d\mathfrak{P}_d = \prod_{a \in I_d} \frac{d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, y)}{(2\pi)^3 2E_a} \prod_{b \in F_d} \frac{[d\mathbf{p}_b]}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2. \quad (300b)$$

Для комплексной фазы Ω_j в (299) по-прежнему справедливо определение (278) и его лоренц-инвариантная форма (286), в которых теперь

$$T = X_0 = y_0 - x_0, \quad \mathbf{X} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad L = |\mathbf{X}|, \quad X = (X_0, \mathbf{X}),$$

а остальные обозначения такие же, как раньше. Следует подчеркнуть, что соображения, использованные при выводе (299), основаны на свойствах принятой нами математической модели, которая может не отвечать условиям реальных экспериментов по исследованию нейтринных осцилляций. Мы также неявно использовали экспериментальные ограничения на нейтринные массы, позволяющие считать, что $\text{Im}(\Omega_j + \Omega_i^*)$ существенно меняется лишь на макроскопически больших пространственных масштабах L_{ij} , а $\text{Re}(\Omega_j + \Omega_i^*)$ — на масштабах много больших L_{ij} . Напомним, однако, что такая интерпретация основана на квантово-механическом анализе экспериментальных данных. Поэтому сравнительно простая, но приближенная формула (299) не эквивалентна, вообще говоря, более общему выражению (298) и тем более (297).

В (299) интегрирование по переменным x^0 и y^0 в источнике и детекторе формально производится по интервалам времен, для которых определены функции f_a . Таким образом, (299) можно применять к широкому кругу экспериментов как со стационарными, так и нестационарными источниками и детекторами. С целью дальнейшего упрощения анализа проведем в (299) интегрирование по этим переменным. Мы сделаем это для простой модели,

которая, однако, легко обобщается на более реалистичный случай. Именно, предположим, что функции распределения f_a в \mathcal{S} и \mathcal{D} слабо зависят от времени в течение эксперимента, так что их можно с хорошей точностью заменить «прямоугольными» зависимостями вида

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{p}_a, s_a; x) &= \theta(x^0 - x_1^0)\theta(x_2^0 - x^0)\bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{x}) \quad \text{для } a \in I_s, \\ f_a(\mathbf{p}_a, s_a; y) &= \theta(y^0 - y_1^0)\theta(y_2^0 - y^0)\bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{y}) \quad \text{для } a \in I_d, \end{aligned} \quad (301)$$

где функции \bar{f}_a от времени не зависят. Ступенчатые функции для распределений частиц в детекторе следует понимать как аппаратные или программные триггерные условия. Периоды стационарности $\tau_s = x_2^0 - x_1^0$ и $\tau_d = y_2^0 - y_1^0$ могут быть очень велики (как в экспериментах с солнечными и атмосферными нейтрино, в которых, понятно, $\tau_s \gg \tau_d$) или очень малы (как в экспериментах с импульсными пучками от ускорителя, в которых обычно $\tau_s \lesssim \tau_d$). В любом случае модель (301) предполагает, что интервалы времени «включения» и времени «выключения» источника (детектора) пренебрежимо малы по сравнению с τ_s (τ_d). При использовании модели (301) единственный множитель в подынтегральном выражении (299), зависящий от переменных x^0 и y^0 , — это $e^{-\Omega_j - \Omega_i^*}$, так что задача сводится к расчету относительно простого интеграла

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \int_{y_1^0}^{y_2^0} dy^0 \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \exp[-\Omega_j(y^0 - x^0, L) - \Omega_i^*(y^0 - x^0, L)] \equiv \\ &\equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2\mathfrak{D}} \tau_d \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2) S_{ij}. \end{aligned} \quad (302)$$

В (302) использованы следующие обозначения:

$$S_{ij} = \frac{\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)}{4\tau_d \mathfrak{D}} \sum_{l, l'=1}^2 (-1)^{l+l'+1} \text{Ierf} \left[2\mathfrak{D} \left(x_1^0 - y_l^0 + \frac{\mathbf{L}}{v_{ij}} \right) - i\mathcal{B}_{ij} \right], \quad (303)$$

$$\varphi_{ij} = \frac{2\pi L}{L_{ij}}, \quad \mathcal{A}_{ij} = (v_j - v_i)\mathfrak{D}L = \frac{2\pi \mathfrak{D}L}{E_\nu L_{ij}}, \quad \mathcal{B}_{ij} = \frac{\Delta E_{ij}}{4\mathfrak{D}} = \frac{\pi \mathbf{n}}{2\mathfrak{D}L_{ij}}, \quad (304)$$

$$L_{ij} = \frac{4\pi E_\nu}{\Delta m_{ij}^2}, \quad \Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2, \quad \Delta E_{ij} = E_i - E_j, \quad \frac{2}{v_{ij}} = \frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j}, \quad (305)$$

$$\text{Ierf}(z) = \int_0^z dz' \text{erf}(z') + \frac{1}{\sqrt{\pi}} = z \text{erf}(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad (306)$$

а $\text{erf}(z)$ — интеграл ошибок. Для более реалистичного описания экспериментальной ситуации с импульсным пучком частиц в источнике (например,

мезонов в распадном канале) модель (301) нетрудно обобщить, например, включив в нее серию прямоугольных (или более сложных) импульсов, перемежающихся паузами, в течение которых $f_a = 0$. Мы, однако, остановимся на простейшем случае (301), который воспроизводит наиболее существенные эффекты. С учетом (302) вместо (299) получаем

$$dN_{\alpha\beta} = \tau_d \sum_{\text{spins}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int d\mathfrak{P}_s \int d\mathfrak{P}_d \int dE_\nu \frac{\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)}{4(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}, \quad (307a)$$

$$= \frac{\tau_d}{V_D V_S} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int d\Phi_\nu \int d\sigma_{\nu D} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|). \quad (307b)$$

Напомним, что основная формула (297), из которой получено выражение (307a), была выведена без учета расплывания эффективного волнового пакета нейтрино. Как было показано, это приближение хорошо работает для расстояний L , удовлетворяющих условию (294), из которого видно, что формула (297) применима для всех современных экспериментов с реакторными ($E_\nu \gtrsim 1$ МэВ, $L \lesssim 10^3$ км), ускорительными ($E_\nu \gtrsim 100$ МэВ, $L \lesssim 10^3$ км) и атмосферными ($E_\nu \gtrsim 100$ МэВ, $L \lesssim 1,3 \cdot 10^4$ км) (анти)нейтрино при условии, что $m_j \lesssim 1$ эВ и $\mathfrak{F} \gg 10^7$; оба последних условия выполняются с большим запасом. В приложении 5 рассматривается более общая ситуация, когда расплывание нейтринного пакета становится существенным. Такой режим представляет потенциальный интерес для экспериментов с астрофизическими нейтрино. Ниже мы ограничимся условиями «земных» экспериментов.

Дифференциальные формы $d\mathfrak{P}_{s,d}$ в (307a) определены согласно (300), где функции f_a следует заменить на \bar{f}_a , а выражение (307b) записано с учетом тождества

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} \frac{d\mathfrak{P}_s d\mathfrak{P}_d dE_\nu}{4(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} &= \sum_{\text{spins} \in S} \frac{d\mathfrak{P}_s d\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 d\Omega_\nu} \sum_{\text{spins} \in D} \frac{d\mathfrak{P}_d}{2E_\nu} \equiv \\ &\equiv \frac{d\Phi_\nu d\sigma_{\nu D}}{V_D V_S}, \end{aligned}$$

где V_S и V_D — пространственные объемы источника и детектора. Дифференциальная форма $d\Phi_\nu$ определена таким образом, что интеграл

$$\frac{d\mathbf{x}}{V_S} \int \frac{d\Phi_\nu}{dE_\nu} = d\mathbf{x} \sum_{\text{spins} \in S} \int \frac{d\mathfrak{P}_s E_\nu}{2(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} \quad (308)$$

представляет собой не что иное, как плотность потока нейтрино в \mathcal{D} , которые возникают в \mathcal{S} за счет реакций* $I_s \rightarrow F'_s \ell_\alpha^+ \nu$. Величина $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$ определена так, что

$$\frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int dy d\sigma_{\nu\mathcal{D}} = \sum_{\text{spins} \in \mathcal{D}} \int \frac{dy d\mathfrak{F}_d}{2E_\nu} \quad (309)$$

представляет собой дифференциальное поперечное сечение рассеяния нейтрино на детекторе \mathcal{D} как целом. В частном (и важнейшем на практике) случае рассеяния нейтрино в реакции $\nu a \rightarrow F'_d \ell_\beta^-$ и при достаточно узком распределении частиц-мишеней a по импульсам дифференциальная форма $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$ превращается в элементарное дифференциальное поперечное сечение этой реакции, умноженное на число частиц сорта a в детекторе.

Обратимся, наконец, к подынтегральному фактору

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2 - \Theta_{ij}), \quad (310)$$

где

$$\Theta_{ij} = \Theta_i + \Theta_j, \quad (311)$$

$$\Theta_j = \frac{m_j^2}{2\mathcal{D}^2} \left[(n_0 - n) + \frac{1}{2}(m - n - n^2)r_j + \left(n + \frac{1}{2} \right) (m - n - n^2)r_j^2 + \mathcal{O}(r_j^3) \right]. \quad (312)$$

Напомним, что функция n_0 совпадает с n в случае точного сохранения энергии-импульса в вершинах диаграммы рис. 15. Поэтому в окрестности максимума произведения $\tilde{\delta}_s(p_\nu - q_s)\tilde{\delta}_d(p_\nu + q_d)$ (т. е. при $q_s \approx -q_d \approx p_\nu$), дающей основной вклад в скорость счета, можно пренебречь знакопеременной разностью $n_0 - n$ в (312). Учитывая свойства функции n , можно также пренебречь в (312) вкладами порядка $\mathcal{O}(r_j^2)$ и выше. Как было показано, в этом приближении $\Theta_j > 0$. При $S_{ij} = 1$, $\Theta_{ij} = 0$ и $\mathcal{A}_{ij} = 0$ фактор (310) совпадает с известным квантово-механическим выражением для вероятности нейтринных флейворных переходов

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(\text{QM})}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* \exp(i\varphi_{ij}). \quad (313)$$

Естественно поэтому считать (310) обобщением квантово-механического результата.

*Говоря точнее, интеграл (308) есть число нейтрино, возникающих за единицу времени в объеме dx с центром в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, распространяющихся внутри телесного угла $d\Omega_\nu$ в направлении $\mathbf{l} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ и пересекающих перпендикулярную к \mathbf{l} единичную площадку с центром в точке $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$.

В п. 10.3 будет показано, что $|S_{ij}| < 1$, так что (в рамках использованных приближений) все квантово-полевые поправки приводят к *уменьшению* величины (310) по отношению к ее квантово-механическому аналогу (313). Помимо этой количественной разницы важно иметь в виду и тот принципиальный факт, что вероятностная интерпретация величины $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ становится, строго говоря, невозможной, поскольку входящие в нее функции \mathcal{D} , n и m (последние две, напомним, содержатся в факторах S_{ij} и в фазах Θ_{ij}) зависят от импульсов внешних пакетов \varkappa и энергии нейтрино, причем импульсы \mathbf{p}_\varkappa с $\varkappa \in I_s \oplus I_d \oplus F_s$ и E_ν являются переменными интегрирования. Действительно, фазовые объемы процессов (231) и поведение функций \mathcal{D} , n и m внутри этих объемов различны для разных пар лептонов $(\ell_\alpha, \ell_\beta)$, что обусловлено как кинематикой реакций в \mathcal{S} и \mathcal{D} (в частности, их порогами), так и неопределенностями импульсов лептонных пакетов σ_e , σ_μ и σ_τ , которые вовсе не обязаны быть одинаковыми даже по порядку величины. Таким образом, величина $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ не удовлетворяет, вообще говоря, ожидаемым «стандартным» соотношениям типа (19), являющимся в квантово-механической теории нейтринных осцилляций простым следствием унитарности матрицы смешивания $\mathbf{V} = \|V_{\alpha i}\|$.

В реальных экспериментах ситуация осложняется еще и тем, что скорость счета нейтринных событий (в нашем конкретном случае — событий с рождением лептона ℓ_β) в них обычно определяется реакциями не одного какого-либо типа, а большим числом процессов разного типа, например (как в экспериментах с атмосферными и ускорительными нейтрино), распадами мезонов ($\pi_{\mu 2}$, $K_{\mu 2}$, $K_{\mu 3}$, $K_{e 3}$ и т. д.) и мюонов в источнике (атмосфера, распадный канал ускорителя), а также всевозможными взаимодействиями нейтрино в детекторе — от (квази)упругих до глубоконеупругих. Фазовые объемы и функции \mathcal{D} и n будут существенно разными для разных комбинаций таких «подпроцессов» в \mathcal{S} и \mathcal{D} . Для лучшего восприятия этих фактов полезно мысленно снабдить функции \mathcal{D} , n и m , а также все зависящие от этих функций величины индексами α и β .

Еще одно «техническое», но весьма нетривиальное затруднение при интерпретации формулы (310) и анализе экспериментальных данных связано с зависимостью факторов S_{ij} (которые мы будем называть в дальнейшем факторами декогерентности) от «инструментальных» параметров $x_{1,2}^0$ и $y_{1,2}^0$. Формула (303) была получена без каких-либо предположений о «синхронизации» временных интервалов (x_1^0, x_2^0) и (y_1^0, y_2^0) . Неудивительно поэтому, что факторы декогерентности могут оказаться сколь угодно малы по модулю, если эти интервалы не согласованы с учетом того очевидного факта, что характерное время прихода ультрарелятивистских нейтрино из \mathcal{S} в \mathcal{D} примерно равно среднему расстоянию \bar{L} между \mathcal{S} и \mathcal{D} . Пример несинхронизованного измерения показан на рис. 17, где $t' = L + t$ и предполагается, что $|t| \gg \tau$ (для простоты полагаем $\tau_s = \tau_d$). Принцип причинности КТП и здравый смысл подсказывают, что фактор S_{ij} должен стремиться к нулю при таких

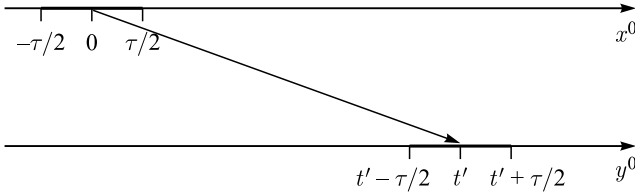


Рис. 17. Упрощенная (симметризованная) разметка несинхронизированного измерения. Выделены временные «окна» испускания и поглощения нейтрино. Предполагается, что $t' = L + t$ и $|t| \gg \tau$

условиях. Общая формула для S_{ij} не только подтверждает эти ожидания, но и позволяет получить закон, по которому происходит подавление скорости счета. Мы не будем останавливаться на этом вопросе подробнее, так как наибольший интерес представляют синхронизированные измерения.

Перед обсуждением роли факторов декогерентности сделаем еще одно, последнее, упрощение формулы для числа событий, снова воспользовавшись предположением о том, что характерные размеры S и D (по крайней мере характерные линейные размеры вдоль нейтринного пучка) достаточно малы по сравнению с \bar{L} . Это существенное для дальнейшего условие неприменимо для ряда ускорительных и реакторных экспериментов с короткой базой; для таких экспериментов анализ существенно усложняется*. Тогда в (307б) можно заменить $|y - x|$ на \bar{L} , а дифференциальные формы $d\Phi_\nu$ и $d\sigma_{\nu D}$ — на их усредненные (соответственно по S и D) значения $d\bar{\Phi}_\nu$ и $d\bar{\sigma}_{\nu D}$. В результате получаем

$$dN_{\alpha\beta} = \tau_d \int d\bar{\Phi}_\nu \int d\bar{\sigma}_{\nu D} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, \bar{L}). \quad (314)$$

Понятно, что область применимости приближения (314) существенно уже, чем у (307), что связано с дополнительными ограничениями на функции распределения \bar{f}_a , а также на абсолютные размеры и геометрию S и D , неявно использованные при переходе от (307) к (314). В режиме «без расплывания» нейтринного ВП имеем

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2). \quad (315)$$

Обсудим входящие в (315) функции. Функция \mathcal{A}_{ij} отвечает за подавление интерференции на расстояниях, превышающих длину когерентности в режиме

*Разумеется, это усложнение не следует относить к недостатку нашего формализма, поскольку квантово-механические формулы в такой ситуации просто не работают.

пренебрежимо малого вклада эффекта пространственной дисперсии ВП:

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{(v_j - v_i)\mathcal{D}L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi\mathcal{D}L}{E_\nu L_{ij}} = \frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}}, \quad (316)$$

где величина

$$L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{E_\nu L_{ij}^{\text{osc}}}{\sqrt{2}\pi\mathcal{D}} \quad (317)$$

является квантово-полевым обобщением квантово-механической длины когерентности в (73б), формально совпадая с ней при замене $\sigma_p \rightarrow \mathcal{D}$. Новый по сравнению с квантово-механическим рассмотрением безразмерный фактор S_{ij} (назовем его функцией декогерентности) учитывает конечные интервалы интегрирования по временам работы источника и детектора, а также возможное отсутствие синхронизации времен испускания и детектирования нейтрино. Изучим его подробнее.

10. ФУНКЦИЯ ДЕКОГЕРЕНТНОСТИ

В данном разделе мы анализируем факторы декогерентности и методику их измерения в нейтринных экспериментах. Некоторые дополнительные результаты содержатся в приложении 6. До сих пор наше рассмотрение процессов взаимодействия в источнике и детекторе было весьма общим, в частности, не предполагалось, что интервалы времени испускания и детектирования нейтрино каким-либо образом синхронизированы друг с другом. Нетрудно показать, что в случае отсутствия синхронизации эффективных времен испускания и детектирования нейтрино X_s^0 и X_d^0 (точное условие будет сформулировано чуть ниже) факторы S_{ij} могут быть сколь угодно малы. Уже одно это важное обстоятельство объясняет, почему «вероятность осцилляций» заключается нами в кавычки. Очевидно, что величины $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ вообще не являются вероятностями флейворных переходов, поскольку не удовлетворяют соотношениям унитарности (19). Причина этого заключается в том, что факторы S_{ij} и \mathcal{A}_{ij} зависят от импульсов, масс и дисперсий внешних ВП, т. е. (формально) зависят от индексов α и β . Соотношения унитарности приближенно выполняются, только если эти зависимости достаточно слабые или сами факторы декогерентности несутельственны ($S_{ij} \approx \delta_{ij}$, $\mathcal{A}_{ij} \ll 1$). Этот эффект является прямым и довольно нетривиальным следствием квантово-полевого подхода. Как мы увидим ниже, диагональные функции S_{ii} не зависят от масс нейтрино, а значит, и от индекса i . Универсальная функция $S_0 = S_{ii}$ описывает подавление числа событий в случаях несинхронизированных процессов излучения и детектирования нейтрино, а также если время экспозиции детектора либо существенно больше времени работы источника, либо много

меньше пространственно-временной «ширины» эффективного нейтринного ВП. Эти эффекты не связаны с интерференцией нейтринных состояний, поэтому представляется оправданным переопределить «вероятность осцилляций» нейтрино, выделив множитель S_0 :

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = S_0 P_{\alpha\beta}(E_\nu, L),$$

где

$$P_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \frac{1}{S_0} \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2). \quad (318)$$

Такое переопределение, однако, непринципиально и является делом вкуса, поскольку в общем случае для величин $P_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$ соотношения (19) также не выполняются.

Далее будем предполагать, что времена испускания и детектирования нейтрино синхронизированы, и изучим новые эффекты, связанные с конечностью интервалов испускания и детектирования нейтрино.

10.1. Синхронизированные измерения. Заметим, что минимум общего фактора подавления

$$\exp \left\{ -2 \left[\frac{\mathfrak{D}_i^2}{v_i^2} (L - v_i T)^2 + \frac{\mathfrak{D}_j^2}{v_j^2} (L - v_j T)^2 \right] \right\}$$

в подынтегральном выражении (302) реализуется при $T = L/v_{ij}$. Поэтому время L/v_{ij} можно трактовать как эффективное (или наиболее вероятное) время задержки между созданием и поглощением виртуальных нейтрино ν_i и ν_j . Поскольку

$$v_{ij} \approx \frac{v_i + v_j}{2} \approx 1 - \frac{m_i^2 + m_j^2}{4E_\nu^2},$$

то это время задержки практически равно L . Можно ожидать поэтому, что скорость счета будет максимальной, если периоды, в течение которых источник и детектор «включены», должным образом сдвинуты друг относительно друга таким образом, что временные окна $[x_1^0, x_2^0]$ и $[y_1^0 - L, y_2^0 - L]$ пересекаются. Для таких «синхронизированных измерений» можно изучать зависимость скорости счета от временных интервалов $x_1^0 - y_1^0$, фигурирующих в функции $\text{Ierf}(\dots)$ в (303). Чтобы уменьшить число независимых переменных в факторах декогерентности, зададим (без существенной потери общности) определенную симметрию «хронометража», а именно положим

$$x_1^0 = -\frac{\tau_s}{2}, \quad x_2^0 = \frac{\tau_s}{2}, \quad y_1^0 = L - \frac{\tau_d}{2}, \quad y_2^0 = L + \frac{\tau_d}{2},$$

где, разумеется, $\tau_{s,d} > 0$. Такая временная «разметка» схематически показана на рис. 18.

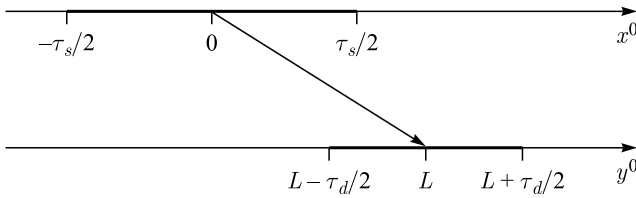


Рис. 18. Упрощенная (симметризованная) разметка синхронизированного измерения. Выделены временные «окна» испускания и поглощения нейтрино

Учитывая, что $\text{Ierf}(z)$ — четная функция, факторы декогерентности (303) можно записать в виде

$$S_{ij} = \frac{\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)}{4\tau_d \mathfrak{D}} \left\{ \text{Ierf}[\mathfrak{D}(\tau_s + \tau_d + \varrho_{ij}L) - i\mathcal{B}_{ij}] + \right. \\ \left. + \text{Ierf}[\mathfrak{D}(\tau_s + \tau_d - \varrho_{ij}L) + i\mathcal{B}_{ij}] - \text{Ierf}[\mathfrak{D}(\tau_s - \tau_d + \varrho_{ij}L) - i\mathcal{B}_{ij}] - \right. \\ \left. - \text{Ierf}[\mathfrak{D}(\tau_s - \tau_d - \varrho_{ij}L) + i\mathcal{B}_{ij}] \right\}, \quad (319)$$

где

$$\varrho_{ij} = 2(r_i + r_j) = \frac{m_i^2 + m_j^2}{E_\nu^2}.$$

Для большинства современных нейтринных экспериментов, включая астрофизические, допустимо пренебречь слагаемыми $\varrho_{ij}L$ в аргументах функций $\text{Ierf}[\dots]$, фигурирующих в (319). В самом деле, используя современное (модельно-зависимое*) космологическое ограничение [132] $\sum_i m_i \lesssim 0,12$ эВ, получаем следующую оценку:

$$\varrho_{ij}L \lesssim 5 \cdot 10^{-22} \left(\frac{1 \text{ ГэВ}}{E_\nu} \right)^2 \left(\frac{L}{10^4 \text{ км}} \right) \text{ с}.$$

Для земных расстояний эта величина фантастически мала по сравнению с длительностью самых коротких нейтринных импульсов в ускорительных экспериментах. Более того, при не слишком низких энергиях нейтрино члены $\varrho_{ij}L$ остаются пренебрежимо малыми даже для расстояний, превышающих размеры Галактики. Например, для (анти)нейтринного сигнала, прошедшего от взрыва сверхновой SN1987A в Большом Магеллановом Облаке

* Имеющиеся оценки верхней границы $\sum_i m_i$, основанные на анализе космологических данных в рамках модели $\Lambda\text{CDM} + \sum m_\nu$ и ее расширений, простираются (грубо) от 0,07 до 0,30 эВ.

($\langle E_\nu \rangle \simeq 20$ МэВ, $L \simeq 51,4$ кпс), величина $\varrho_{ij}L$ не превышает примерно $2 \cdot 10^{-4}$ с. Эту оценку следует сравнить с типичной продолжительностью нейтринной вспышки при коллапсе, составляющей ≈ 10 с. Приведем еще один аргумент, требующий пренебречь величинами $\varrho_{ij}L$. Формальное достаточное условие для этого имеет вид

$$|\tau_s - \tau_d| \gg \varrho_{ij}L.$$

В рамках нашей идеализированной модели это неравенство должно выполняться уже потому, что временные интервалы τ_s и τ_d нельзя выбрать с разрешением лучшим, чем длительности «включения/выключения» источника и детектора, которыми мы пренебрегаем. Итак, после сделанных оговорок* факторы декогерентности (319) выражаются через универсальную (не зависящую от индексов i, j) вещественнозначную функцию $S(t, t', b)$ трех безразмерных вещественных переменных, а именно:

$$S_{ij} = S(\mathfrak{D}\tau_s, \mathfrak{D}\tau_d, \mathfrak{B}_{ij}),$$

$$S(t, t', b) = \frac{e^{-b^2}}{2t'} \operatorname{Re} [\operatorname{Ierf}(t + t' + ib) - \operatorname{Ierf}(t - t' + ib)]. \quad (320)$$

Изучим свойства функции $S(t, t', b)$, которые необходимо знать для экспериментального анализа эффектов декогерентности.

10.2. Диагональная функция декогерентности. Средняя скорость счета событий в детекторе, $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$, пропорциональна функции двух безразмерных переменных $S_0(\mathfrak{D}\tau_s, \mathfrak{D}\tau_d)$, определенной как

$$S_0(t, t') = S(t, t', 0) = \frac{1}{2t'} [\operatorname{Ierf}(t + t') - \operatorname{Ierf}(t - t')]. \quad (321)$$

Нетрудно убедиться, что эта функция, соответствующая неинтерференционным (не зависящим от массы нейтрино) факторам декогерентности S_{ii} , изменяется между нулем и единицей. Действительно,

$$2t' \frac{\partial S_0(t, t')}{\partial t} = \operatorname{erf}(t + t') - \operatorname{erf}(t - t') > 0 \quad (t, t' > 0)$$

и, следовательно, $S_0(t, t')$ — монотонно возрастающая функция t . Из (388а) (см. приложение 7) следует, что $S_0(t, t') \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ для любого $t' > 0$, так

* Отметим, что все эти оговорки не имеют никакого отношения к области применимости нашего формализма, а всего лишь очерчивают рамки применимости упрощенной модели, используемой для качественного анализа простейших следствий теории. Более реалистичные модели просто потребуют более громоздких вычислений.

что $S_0(t, t') > 0$ при $t, t' > 0$. Как видно из асимптотической формулы (389), $S_0(t, t') \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ и $0 < t' < \infty$. Это доказывает, что

$$0 < S_0(t, t') < 1$$

для всех положительных значений t и t' .

Формулы (388) и (389) определяют асимптотическое поведение $S_0(t, t')$ в различных режимах. В частности, при малых t и t'

$$S_0(t, t') \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} t \left[1 - \frac{1}{3}(t^2 + t'^2) + \frac{1}{30}(t^2 + 3t'^2)(t'^2 + 3t^2) \right].$$

При больших, но конечных t , а именно, при $t - t' \gg 1$, получаем

$$S_0(t, t') \approx 1 - \frac{1}{4\sqrt{\pi}t'} \left[\frac{e^{-(t-t')^2}}{(t-t')^2} - \frac{e^{-(t+t')^2}}{(t+t')^2} \right] \approx 1$$

и, в частности,

$$S_0(t, t') \approx 1 - \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}t} \rightarrow 1,$$

если $t' \ll 1$. В противоположном предельном случае, $t' - t \gg 1$, имеем

$$S_0(t, t') \approx \frac{t}{t'} \left\{ 1 - \frac{1}{4\sqrt{\pi}t} \left[\frac{e^{-(t'-t)^2}}{(t'-t)^2} - \frac{e^{-(t'+t)^2}}{(t'+t)^2} \right] \right\} \ll 1.$$

На рис. 19 показано поведение функции $S_0(t, t')$ и ее плотности распределения в плоскости (t, t') . Нетрудно доказать следующие важные неравенства:

$$S_0(t, t') < t/t' \quad \text{при} \quad t' \geq t \quad \text{и} \quad S_0(t+\delta t, t) > \operatorname{erf}(\delta t) \quad \text{при} \quad \delta t > 0. \quad (322)$$

Они помогают отделить области большого и малого подавления полного числа событий, обусловленного декогерентными эффектами*. Эти неравенства иллюстрирует рис. 19, б, показывающий двумерную плотность распределения $S_0(t, t')$ (чем темнее плотность распределения, тем меньше значение функции $S_0(t, t')$). Достаточно четко видны области, описывающие переходы между вышеприведенными асимптотическими режимами.

Из анализа рис. 19 следует, что средняя скорость счета событий в детекторе $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$ (но, конечно, не полное число событий) уменьшается с ростом

* Например, подавление не превышает 10^{-4} ($S_0(t, t') > 0,999$), если $t > t' + 2,3273$, т. е. $\tau_s > \tau_d + 2,3273/\mathcal{D}$.

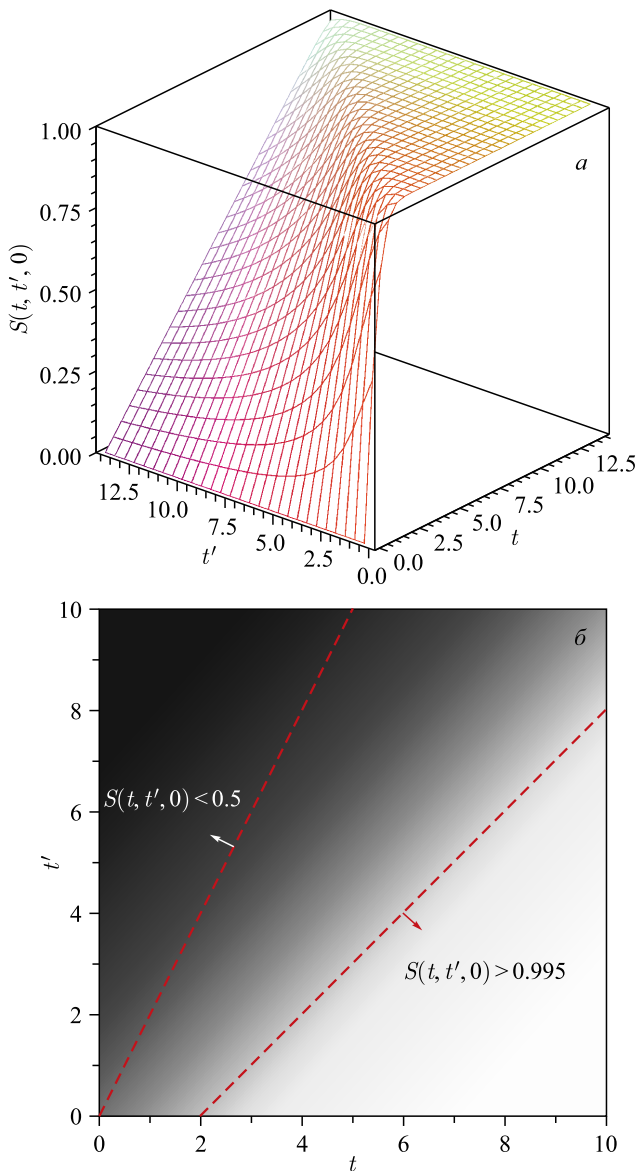


Рис. 19. Функция декогерентности $S_0(t, t') = S(t, t', 0)$ (а) и график ее плотности распределения в плоскости (t, t') (б). Темные области на рис. б отвечают меньшим, а светлые — большим значениям $S_0(t, t')$

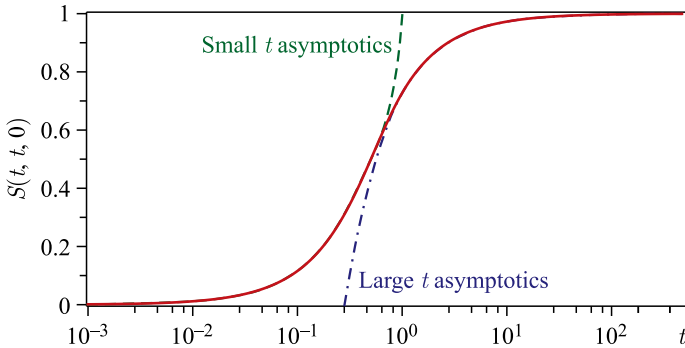


Рис. 20. Функция $S_0(t, t)$ (сплошная кривая) и ее асимптотики при малых и больших значениях аргумента t (штриховая и штрихпунктирная кривые) согласно (323)

отношения $\tau_d/\tau_s > 1$. Причина этого понятна: детектор не может зарегистрировать больше нейтрино, чем их было испущено источником. Менее очевидное заключение следует из второго неравенства в (322): общее подавление $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$ отсутствует при достаточно большом отношении τ_s/τ_d^* . Две штриховые прямые на рис. 19, б отделяют области, в которых $S_0 < 0,5$ ($\tau_s < 2\tau_d$) и $S_0 > 0,995$ ($\tau_s > \tau_d + 2/\mathfrak{D}$). Таким образом, чтобы положить $S_0(t, t') = 1$, необходимо (но все еще не достаточно), чтобы время экспозиции детектора τ_d было либо мало по сравнению с τ_s , либо (при $\tau_d \approx \tau_s$) было много больше эффективного масштаба времени $\tau_\nu = 1/\min(\mathfrak{D})$, где минимум берется по тем областям фазового объема реакций в \mathcal{S} и \mathcal{D} , которые дают существенный вклад в скорость счета. В промежуточной области фактор декогерентности приводит к умеренному подавлению неинтерференционных членов в подынтегральном выражении для скорости счета.

В важном специальном случае $t' = t$ (представляющем особый интерес для экспериментов с ускорительными нейтрино) получаем

$$S_0(t, t) = \operatorname{erf}(2t) - \frac{1 - e^{-4t^2}}{2\sqrt{\pi}t} \approx \begin{cases} \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{2t^2}{3} + \frac{8t^4}{15}\right) & \text{при } t \ll 1, \\ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} & \text{при } t \gg 1. \end{cases} \quad (323)$$

На рис. 20 показана функция $S_0(t, t)$. Для сравнения отмечены также асимптотики (323) при малых и больших значениях переменной t . Как видно из

*Это условие «с большим запасом» выполняется в экспериментах с солнечными и атмосферными и геофизическими (анти)нейтрино, но может не выполняться в ускорительных экспериментах.

рисунка, эти асимптотики хорошо работают всюду, за исключением относительно узкой области $0,5 \lesssim t \lesssim 0,8$. Видно также, что $S_0(t, t)$ приближается к единице лишь при $t \gg 1$ (на практике при $t \gtrsim 100$).

10.3. Недиagonalная функция декогерентности. Поведение функции $S(t, t', b)$ при $b \neq 0$ значительно сложнее, чем в случае $b = 0$, и полное аналитическое изучение этой функции трех независимых переменных затруднительно и, более того, нецелесообразно, поскольку при реальной обработке данных, учитывающей детали конкретного эксперимента, невозможно обойтись без моделирования методом Монте-Карло. Мы провели детальный численный анализ и аналитическое исследование наиболее существенных частных случаев, которые показывают, что $S(t, t', b) < S_0(t, t')$ при $b \neq 0$. Рассмотрим несколько типичных примеров, поясняющих этот основной результат.

На рис. 21 и 22 показаны профили функции $S(t, t', b)$, вычисленные при 18 значениях параметра b . Численные расчеты сделаны с использованием

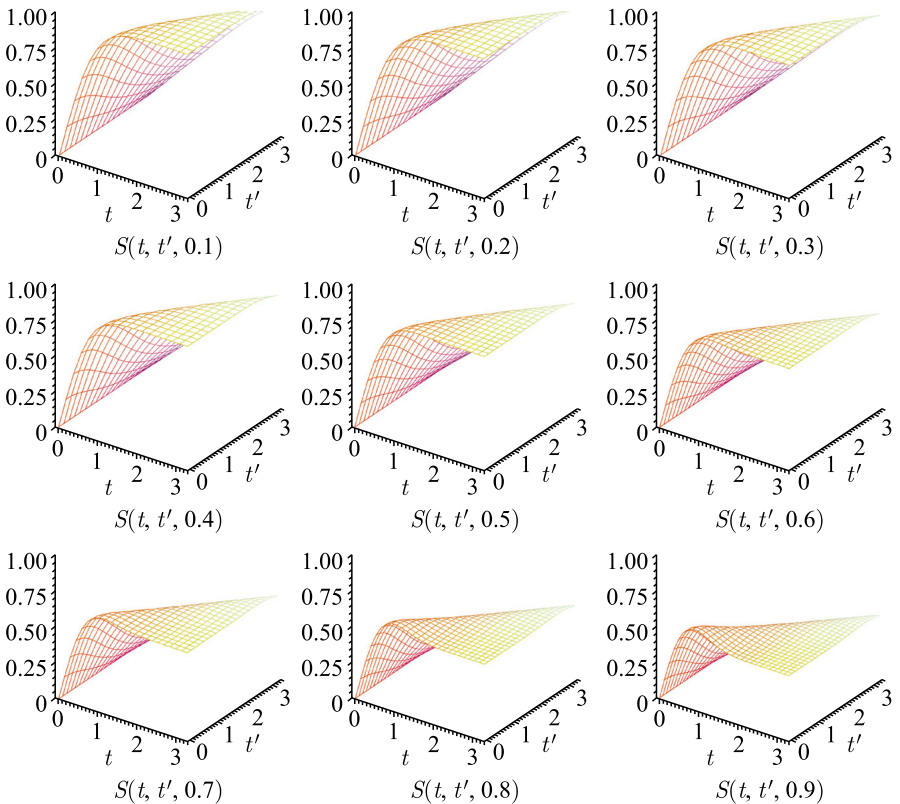


Рис. 21. Профили функции декогерентности $S(t, t', b)$, вычисленные при девяти значениях параметра b от 0,1 до 0,9

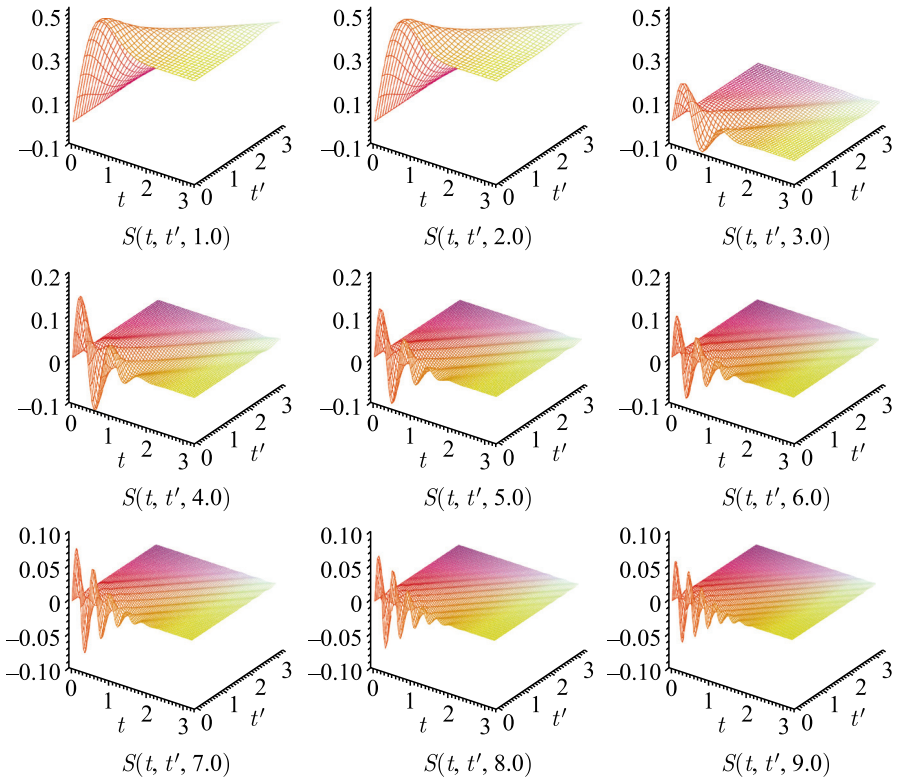


Рис. 22. Профили функции декогерентности $S(t, t', b)$, вычисленные при девяти значениях параметра b от 1,0 до 9,0

формул из приложения 7. Из рисунков видно, что с ростом параметра b поведение $S(t, t', b)$ как функции t и t' становится все более сложным. Так, при $b > 3 - 4$ функция $S(t, t', b)$ быстро осциллирует вблизи нуля даже при относительно небольших вариациях переменных t и t' . Такое поведение приводит к сильному подавлению «недиагональных» (с $i \neq j$) вкладов в $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, \bar{L})$.

На рис. 23 показана функция $S(t, t, b)$ в зависимости от b , вычисленная при фиксированных значениях t . При небольших t эта зависимость имеет квазипериодический характер, проявляющийся на фоне быстрого падения $S(t, t, b)$ с ростом b . Функция $S(t, t', b)$ сильно зависит от соотношения параметров t и t' . При очень больших значениях $t = t'$ функция $S(t, t', b)$ перестает зависеть от t , очень медленно приближаясь к своему асимптотическому виду $\exp(-b^2)$. В таком асимптотическом режиме «вероятность» (310) принимает вид, уже известный из литературы (см., например, [45, 46, 66] и

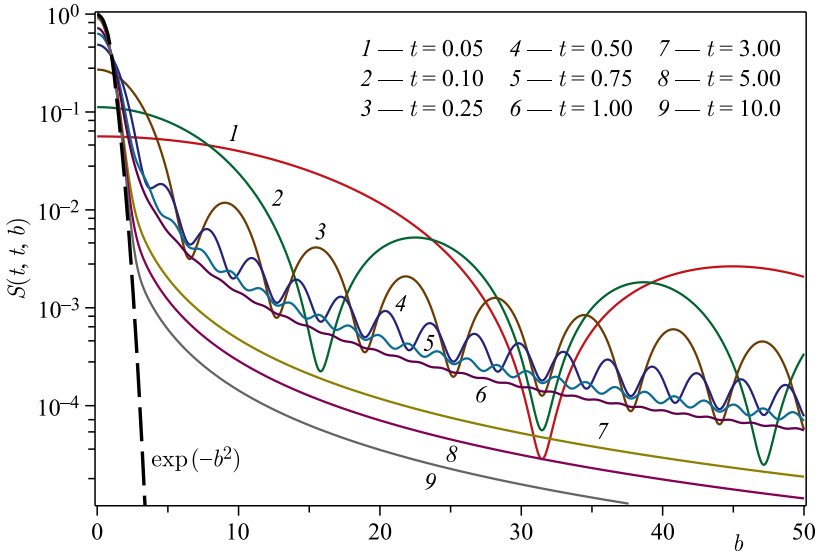


Рис. 23. Функция $S(t, t, b)$ в зависимости от b при фиксированных значениях t , указанных в легенде. Для сравнения штриховой кривой показана асимптотика функции $S(t, t, b)$ при $t \rightarrow \infty$

ссылки в этих работах),

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2 - \mathcal{B}_{ij}^2 - \Theta_{ij}), \quad (324)$$

с той существенной разницей, что входящие в \mathcal{A}_{ij} , \mathcal{B}_{ij} и Θ_{ij} функции \mathcal{Q} , n и m зависят от импульсов внешних пакетов и энергии нейтрино. Эта зависимость качественно изменяет поведение факторов подавления «осцилляций», если хотя бы некоторые из внешних ВП имеют релятивистские средние импульсы. Поскольку $\Theta_{ij} \geq 0$, то $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) \leq \mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(QM)}(E_\nu, L)$. Поясним физический смысл остальных факторов подавления.

Фактор $\exp(-\mathcal{A}_{ij}^2)$ в (324) подавляет интерференцию вкладов с $i \neq j$ на расстояниях, превышающих «длину когерентности»

$$L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{1}{\Delta v_{ij} \mathcal{Q}} \gg |L_{ij}| \quad (\Delta v_{ij} = |v_j - v_i|),$$

на которой нейтринные ВП ψ_i^* и ψ_j^* уже сильно разделены в пространстве из-за разницы их групповых скоростей и перестают интерферировать. Понятно, что в плосковолновом пределе $L_{ij}^{\text{coh}} \rightarrow \infty$. Фактор $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$ подавляет интерференционные вклады в прямо противоположной ситуации, т. е.

в случае, когда внешние ВП в \mathcal{S} или в \mathcal{D} (или в \mathcal{S} и \mathcal{D}) сильно делокализованы (в плосковолновом пределе — «размазаны» по всему пространству). Суммарный размер областей рождения и поглощения нейтрино в \mathcal{S} и \mathcal{D} по порядку величины равен $1/\mathfrak{D}$. Интерференционные вклады исчезают, если этот размер велик по сравнению с «длиной интерференции»

$$L_{ij}^{\text{int}} = \frac{1}{4\Delta E_{ij}} = \frac{2L_{ij}}{\pi n}.$$

Другими словами, в плосковолновом пределе квантово-полевая теория предсказывает исчезновение нейтринных осцилляций. Вероятность флейворных переходов при этом не зависит от L и становится равной

$$\sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\beta i}|^2.$$

Таким образом, нетривиальная (зависящая от L) интерференция амплитуд с промежуточными нейтрино разных масс возможна лишь при $\mathfrak{D} \neq 0$. Детальный анализ процессов $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 2$ (см. приложение 1) показывает, что функция \mathfrak{D} отлична от нуля, если в обеих вершинах диаграммы рис. 15, описывающей процесс (231), взаимодействуют *не менее двух* (не важно in или out) ВП χ с $\sigma_\chi \neq 0$. Эти же условия с неизбежностью приводят к тому, что недиагональные вклады исчезают на достаточно больших расстояниях между \mathcal{S} и \mathcal{D} ($L \gg \max L_{ij}^{\text{coh}}$). Таким образом, область применимости стандартной квантово-механической формулы для вероятности нейтринных флейворных переходов (принятой по умолчанию во всех программах обработки данных современных осцилляционных экспериментов) ограничена довольно жесткими условиями:

$$\left\langle \left(\frac{2\pi \mathfrak{D} L}{E_\nu L_{ij}} \right)^2 \right\rangle \ll 1, \quad \left\langle \left(\frac{\pi n}{2\mathfrak{D} L_{ij}} \right)^2 \right\rangle \ll 1, \quad \langle |\Theta_{ij}| \rangle \ll 1. \quad (325)$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ символизируют тот факт, что значения функций \mathfrak{D} , n и m определяются областями фазового объема процесса (231), дающими основной вклад в измеряемое число нейтринных событий.

10.4. Дополнительные методические замечания. Как следует из вышеприведенного анализа, довольно сильная зависимость фактора $S_0(t, t')$ от своих аргументов при $t \lesssim t'$ предоставляет потенциальную возможность экспериментальной оценки функции \mathfrak{D} (точнее, ее средних значений внутри вышеупомянутых областей фазового объема), основанной на измерении скорости счета как функции переменных τ_d и τ_s (при фиксированном расстоянии \bar{L}) и сравнении данных с результатами монте-карловского моделирования. Понятно, что оптимальная стратегия подобного эксперимента должна

быть предметом специального исследования при планировании каждого конкретного эксперимента. Здесь мы рассмотрим наиболее общую методику без использования специфики конкретных экспериментов.

Для экспериментов с ускорительными пучками нейтрино, испускаемыми во временном окне τ_s и детектируемыми за время τ_d , удобно измерять следующее отношение:

$$W(\tau_d) = \frac{\sum_i N(y_i^0 \in \tau_d)}{\sum_i N(y_i^0 \in \tau_d^{\max})}.$$

Здесь $N(y_i^0 \in \tau_d)$ — число событий, зарегистрированных в момент времени y_i^0 внутри временного окна τ_d , а τ_d^{\max} — временное окно, увеличенное до максимального значения*. Очевидно, что $W(\tau_d)$ линейно растет с ростом τ_d от нуля (при $\tau_d \lesssim \tau_s$) практически до единицы при $\tau_d \approx \tau_s$. Наиболее интересная область — это узкий интервал около значения $\tau_d = \tau_s$, в котором линейный рост функции $W(\tau_d)$ сменяется выходом на плато $W \approx 1$ при $\Delta\tau_d \geq \tau_d$. Поскольку выход из линейного роста происходит не скачкообразно, а плавно, то измерение производной $dW(\tau_d)/d\tau_d$ в этой области позволило бы измерить величину \mathfrak{D} , потому что

$$\left. \frac{dW(\tau_d)}{d\tau_d} \right|_{\tau_d=\tau_s} = \frac{1}{2\tau_s} \operatorname{erf}(2\tau_s\mathfrak{D}).$$

Такое измерение было бы очень важно, так как функция \mathfrak{D} входит в вероятность флейворных переходов (см. ниже) и ее совершенно необходимо знать для аккуратного извлечения параметров нейтринных осцилляций (т. е. разностей квадратов масс и углов смешивания). Поскольку функция \mathfrak{D} зависит как от энергии нейтрино, так и от внешних импульсов, то величину $dW(\tau_d)/d\tau_d$ следует измерить по крайней мере на нескольких кинематических интервалах, доступных в эксперименте.

Напомним, что условия (325), как и формула (324), были получены с использованием ряда упрощающих предположений и приближений, справедливость которых в реальных экспериментах далеко не всегда очевидна. Из проведенного анализа (включая результаты, изложенные в приложении б) следует, что при обработке и интерпретации данных реальных нейтринных экспериментов наряду с условиями (325) необходимо учитывать периоды работы источника и детектора, их конечные размеры и геометрию, явный вид функций распределения *in*-частиц в источнике и детекторе и другие технические детали.

*Эта величина должна быть компромиссной в том смысле, что для надежной регистрации сигнала она должна заметно превышать τ_s , но не должна быть слишком большой, чтобы не привести к превышению фона над полезным сигналом.

11. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

11.1. Как виртуальное нейтрино становится реальным. Нейтрино в макроскопической диаграмме, отвечающей рождению в «источнике» и «детекторе» заряженных лептонов ℓ_α^+ и ℓ_β^- , описывается как виртуальная частица. С другой стороны, интуитивно ожидается, что любая виртуальная частица, распространяющаяся на достаточно большое расстояние, должна быть «похожа» на реальную частицу, с 4-импульсом на массовой поверхности. Например, свет, излученный лампочкой и попавший на светочувствительные колбочки нашего глаза, можно рассматривать в рамках двух подходов. В первом распространяется реальный фотон с 4-импульсом на массовой поверхности. Во втором оба акта — излучение света и его детектирование глазом — можно описывать на языке квантовой теории поля как единую макроскопическую диаграмму с двумя вершинами — в источнике (лампочка) и в детекторе (глаз). Разумеется, никакого противоречия в этих описаниях нет.

В конфигурационном пространстве виртуальная частица* с массой m описывается причинной функцией Грина [133]

$$D^c(x) = \frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda + i\epsilon})}{\sqrt{-\lambda + i\epsilon}},$$

где $\lambda = x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ и $\sqrt{-\lambda + i\epsilon} = i\sqrt{\lambda}$ при $\lambda > 0$. $K_\nu(x)$ — функция Ханкеля (функция Бесселя третьего рода). Функция $D^c(x)$ убывает на пространственной бесконечности (в причинно-несвязанной области) как $|\lambda|^{-3/4} e^{-m\sqrt{|\lambda|}}$, а на временной бесконечности (в причинно-связанной области) как $|\lambda|^{-3/4}$. $D^c(x)$ сосредоточена вблизи светового конуса $\lambda = 0$ и имеет там особенности.

Диаграммный подход с источником и детектором, описываемыми в координатном пространстве некоторыми функциями $\psi_s(x - x_s)$ и $\psi_d(x - x_d)$ соответственно, приводит к амплитуде вида

$$\mathcal{A}(x_d - x_s) \propto \int dx dy \psi_s(x - x_s) \psi_d(y - x_d) D^c(y - x),$$

где x_s, x_d — точки, в которых $|\psi_s(x - x_s)|$ и $|\psi_d(x - x_d)|$ имеют максимумы.

Таким образом, поскольку $D^c(x)$ существенно отлична от нуля только вблизи светового конуса, а функции $\psi_s(x - x_s)$ и $\psi_d(x - x_d)$ сосредоточены около точек x_s, x_d , то для достаточно больших** $|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_s|$ амплитуда $\mathcal{A}(x_d - x_s)$ с хорошей точностью соответствует ВП, описывающему частицу с массой m , распространяющуюся по классической траектории $\mathbf{x} =$

*Для простоты ограничимся в этом обсуждении случаем скалярной частицы.

**По сравнению с пространственными дисперсиями функций $\psi_{s,d}(x)$.

$\mathbf{x}_s + \mathbf{v}(t - t_s)$ из точки \mathbf{x}_s в точку \mathbf{x}_d с экспоненциально малым отклонением от нее. Скорость $\mathbf{v} = \mathbf{np}/E$, где $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_s)/|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_s|$ и модуль импульса p — эффективный импульс, при котором насыщается интеграл $\mathcal{A}(p) \propto \int dk \mathcal{A}(x) e^{-ikx}$, соответствующей амплитуде в импульсном представлении.

Поэтому для макроскопических расстояний виртуальная частица практически становится реальной, и тем самым устраняется кажущееся противоречие.

11.2. Волновая функция нейтрино и амплитуда процесса. Амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ (282) допускает естественную интерпретацию в терминах волновой функции виртуального нейтрино (см. п. 7.4). Волновая функция состояния ν_j , рожденного в точке X_s в источнике, в произвольной точке x представляет собой ВП в СРПП-приближении $\psi^*(\mathbf{p}, x - X_s)/|x - \mathbf{X}_s|$, где $\psi(\mathbf{p}, x) = e^{-\Omega_j(T, L)}$ и $\Omega_j(T, L)$ дается выражением (286). Дисперсия импульса нейтрино ν_j , рожденного в источнике, определяется 4-импульсами и дисперсиями импульсов всех in- и out-пакетов в источнике (см. σ_{sj} в (293)). Аналогично волновая функция состояния ν_j , взаимодействующего в точке X_d в детекторе, представляет собой ВП $\psi(\mathbf{p}, X_d - x)$ с дисперсией импульса σ_{dj} , определяемой 4-импульсами и дисперсиями всех in- и out-пакетов в детекторе (293). Проекция состояния $|\mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj}\rangle$ в источнике на состояние $|\mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj}\rangle$ в детекторе определяет амплитуду $\mathcal{A}_{\alpha\beta} \propto \langle \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} | \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} \rangle$.

11.3. Усреднение по ансамблю и роль релятивистской ковариантности.

В соответствии с интуитивным ожиданием интерференция диаграмм, отвечающих внешним состояниям с хорошо определенными импульсами, оказывается подавлена. Действительно, в таком случае промежуточные нейтрино с разными массами m_i отвечают внешним состояниям с *разными* импульсами. В пределе точно определенных импульсов такие состояния ортогональны друг другу, и в соответствии с правилами КТП диаграммы с разными внешними состояниями необходимо складывать на уровне квадратов модулей матричных элементов, что уничтожает интерференцию между ними. Вычисление с ВП, отвечающими внешним состояниям, воспроизводит это правило. Для этого необходимо *всегда* складывать амплитуды. Интерференционные вклады в квадрате модуля амплитуды исчезают в плосковолновом пределе автоматически.

Корректное определение вероятности нейтринных осцилляций в рамках КТП-формализма возможно в результате факторизации ожидаемого числа событий $N_{\alpha\beta}$ (с появлением заряженных лептонов ℓ_α^+ и ℓ_β^- в источнике и детекторе) на три множителя $\Phi_\nu(E_\nu, L) \times \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D}) \times \sigma(E_\nu)$. В свою очередь, вычисление ожидаемого числа событий возможно после процедуры усреднения по ансамблю начальных частиц и интегрирования по координатам и импульсам конечных. Лоренц-инвариантность $N_{\alpha\beta}$ требует ковариантности ВП, отвечающих внешним частицам. По построению это требование удовле-

творено в рамках нашего формализма. Кроме того, ковариантность ВП играет фундаментальную роль при определении прицельных 4-векторов. Ненулевые прицельные 4-векторы рассеивающихся ВП приводят к подавлению вероятности взаимодействия. В рамках модели с нековариантным ВП $\propto e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2/4\sigma_p^2}$ было бы крайне сложно, если вообще возможно, определить правильную формулу подавления, связанного с ненулевыми прицельными 4-векторами, в силу того, что объект σ_p преобразуется при лоренцевских преобразованиях очень сложным образом.

Лоренц-инвариантность вероятности нейтринных осцилляций является прямым следствием ковариантности формализма. В связи с этим поучительно рассмотреть кажущийся парадокс, связанный с интерференцией нейтринных состояний. Пусть имеются два состояния нейтрино с массами $m_i = 0$ и $m_j = m > 0$. Перейдем в систему покоя тяжелого нейтрино. В этой системе отсчета безмассовое нейтрино удаляется от покоящегося тяжелого нейтрино в сторону мишени со скоростью света. Могут ли эти два массовых состояния находиться в когерентной суперпозиции, чтобы привести к нейтринным осцилляциям? Действительно, безмассовое нейтрино попадает в детектор намного раньше тяжелого и, казалось бы, может перестать с ним перекрываться, что должно приводить к демпфированию осцилляций. Решение кажущегося парадокса очень просто: при лоренцевых бустах форма ВП преобразуется таким образом, что два перекрывающихся ВП в одной системе отсчета останутся перекрывающимися в любой другой. Так что осцилляции никуда не денутся в любой системе отсчета, хотя их «паттерн» может измениться неузнаваемо. Ковариантность формализма гарантирует, что мы можем однозначно восстановить этот «паттерн» при переходе из одной системы отсчета в любую другую.

Следует, однако, обратить внимание на важный нюанс: поскольку на известном этапе расчетов было сделано ультрарелятивистское приближение, лоренц-инвариантность окончательных формул стала, строго говоря, «приближенной». Это по-прежнему прекрасное приближение с учетом того, что скорость даже не слишком «энергичного» (анти)нейтрино практически световая:

$$1 - |\mathbf{v}_p| \approx 0,5 \cdot 10^{-14} \left(\frac{m}{0,1 \text{ эВ}} \right)^2 \left(\frac{1 \text{ МэВ}}{E_p} \right)^2.$$

Тем не менее приближенная лоренц-инвариантность, оставаясь справедливой при лоренцевых бустах с гамма-факторами $\Gamma \ll E_\nu / \max(m_j)$, конечно разрушается при формальном переходе в с. п. нейтрино*. Однако же сам формализм отнюдь не требует применения ультрарелятивистского приближения

*Поэтому имеющиеся в литературе «доказательства» лоренц-инвариантности стандартной формулы для вероятности нейтринных осцилляций являются заблуждением.

и может быть использован для любого процесса с любой самой экзотической конфигурацией импульсов внешних in- и out-пакетов*. Ультрарелятивистское же приближение (наряду с другими упрощающими предположениями) использовано нами лишь для облегчения расчетов и удобства сопоставления результатов с другими подходами и экспериментом.

11.4. Вероятность флейворных переходов. Функция $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$ — это еще не вероятность нейтринных осцилляций в квантово-механическом смысле. Эта величина зависит от энергии нейтрино, от расстояния между источником и детектором, от эффективной дисперсии нейтринного ВП \mathcal{D} , от ширин временных интервалов работы источника (τ_s) и детектора (τ_d). В силу общности нашего рассмотрения времена излучения и детектирования нейтрино не обязаны быть синхронизированными.

Синхронизированные и несинхронизированные измерения. В случае несинхронизированных процессов рождения и детектирования величина $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$ экспоненциально подавлена в согласии с интуитивными ожиданиями. Уже одно это обстоятельство поясняет, почему не следует ожидать выполнения соотношений унитарности (19). В случае синхронизированных измерений формула (315) (или (318)) предсказывает ряд интересных явлений, обусловленных иерархией временных масштабов τ_s , τ_d и $\tau_\nu = 1/\min \mathcal{D}$.

Стационарный источник. В формальном пределе $\tau_s \rightarrow \infty$ (или в приближении $\tau_s \gg \tau_d$) мы приходим к случаю стационарного источника, обсуждавшемуся в п. 2.8. Важное отличие от квантово-механического рассмотрения заключается в том, что функции \mathcal{D} и \mathcal{B}_{ij} зависят от кинематики события, а следовательно, и от 4-импульсов ℓ_α^+ и ℓ_β^- , т. е. от индексов α, β . Поэтому соотношения унитарности для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$ могут выполняться только в случае слабой зависимости функций \mathcal{D} и \mathcal{B}_{ij} от своих переменных и параметров, т. е. от индексов α, β . За исключением этих важных обстоятельств квантово-полевой результат аналогичен квантово-механическому (см. (71)). В частности, предсказывается исчезновение интерференционных членов на расстояниях, превышающих длину когерентности. Экспоненциальная потеря когерентности частично компенсируется продольным распылением ВП нейтрино. Эффект распыления проявляется также в степенном подавлении интерференционных членов.

Фактор $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$ приводит к экспоненциальному подавлению интерференционных членов в $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$, не зависящему от расстояния. Подавление будет тем больше, чем меньше дисперсия энергии-импульса нейтрино \mathcal{D} . Таким образом, в плосковолновом пределе, $\mathcal{D} \rightarrow 0$, вероятность флейворных переходов перестает зависеть от расстояния и нейтринные осцил-

*Для таких потенциально интересных задач (а также в педагогических целях) были сделаны соответствующие «заготовки», см. п. 7.2.2 и приложение 4.

ляции пропадают. Формальной причиной подавления осцилляций является уже отмеченное нами выше правило сложения квадратов амплитуд, соответствующих диаграммам с ортогональными друг другу внешними состояниями. Хорошей физической иллюстрацией этого явления может служить квантово-механический эксперимент с двумя щелями и электроном, проходящим через них на экран, на котором можно наблюдать появление электрона. Как только экспериментатор может указать щель, через которую прошел электрон, интерференционная картина на экране исчезает. Аналогично случай $\mathcal{D} \rightarrow 0$ эквивалентен тому, что мы однозначно можем указать массу промежуточного нейтрино, разрушая тем самым интерференцию диаграмм с обменом ν_i и ν_j ($m_i \neq m_j$). Функция \mathcal{B}_{ij}^2 иллюстрирует, почему не осциллируют заряженные лептоны. Впервые ответ на этот вопрос был дан в работе [134]; здесь мы воспроизвели его другим методом.

Потеря когерентности нейтрино зависит от величины \mathcal{D} или от относительной дисперсии $\sigma_{\text{rel}} = \mathcal{D}/E_\nu$. Существующие оценки этой величины, например для реакторных антинейтрино, варьируются в пределах нескольких порядков. Так, полагая σ_x равным размеру ядра урана ($\sigma_x \sim 10^{-12}$ см), получаем оценку сверху: $\mathcal{D} \sim 10$ МэВ. Атомные или межатомные расстояния приводят к оценке $\sigma_x \simeq 10^{-8} - 10^{-7}$ см, $\mathcal{D} \sim 10^3 - 10^2$ эВ. Уширение линий при ненулевой температуре среды позволяет оценить $\sigma_x \sim 10^{-4}$ см, $\mathcal{D} \sim 0,1$ эВ и т. д. Не исключено, что декогерентность в нейтринных осцилляциях может проявить себя в планируемых экспериментах с большим числом осцилляционных циклов, как, например, в реакторном эксперименте

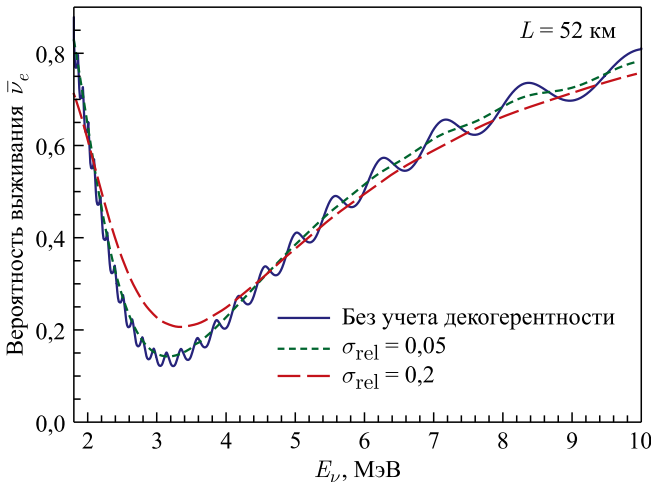


Рис. 24. Вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ (на расстоянии $L = 52$ км) как функция энергии антинейтрино в плосковолновой модели и в модели с нейтринным ВП при двух значениях параметра σ_{rel}

JUNO [135]. На рис. 24 приведена вероятность выживания \bar{P}_e для расстояния $L = 52$ км (отвечающего планируемой базе эксперимента) в зависимости от энергии антинейтрино. Расчет выполнен в стандартной (плосковолновой) модели нейтринных осцилляций и в модели с ВП нейтрино для двух (не очень реалистичных, но формально не исключенных существующими экспериментальными ограничениями) значений параметра $\sigma_{\text{rel}} = \sigma/p_\nu$. Видно, что эффект декогерентности может играть заметную роль в возможности определения иерархии масс нейтрино при достаточно больших значениях параметра σ_{rel} . Отметим, что полученная в [135] область разрешенных значений параметра σ_{rel} , $10^{-16} \ll \sigma_{\text{rel}} \ll 10^{-1}$, отвечает ситуации, в которой эффекты ВП нейтрино для расстояний $L \lesssim 52$ км пренебрежимо малы и формула для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$ становится численно эквивалентной формуле для вероятности флейворного перехода в плосковолновом приближении.

Нестационарный источник. При условии $\tau_s \lesssim \tau_d$, характерном для некоторых ускорительных экспериментов, появляется дополнительная возможность измерить дисперсию \mathcal{D} , сравнивая скорость счета с полученной из формулы для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$. Отметим также важное новое обстоятельство. При конечных τ_s и τ_d интерференционные члены подавляются (множителем $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$) несколько слабее, чем в случае стационарного источника. Функциональная зависимость соответствующего фактора подавления, не зависящего от расстояния L , но зависящего от временных интервалов работы источника τ_s и детектора τ_d , подробно изучена в разд. 10. Обсудим на качественном уровне вопрос о том, почему при конечных τ_s и τ_d подавление $S(t, t, b)$ меньше асимптотического предела $\exp(-b^2)$, где $b = \mathcal{B}_{ij}$ зависит от дисперсии энергии нейтрино. Интерпретация обнаруженного эффекта может быть найдена в квантово-механической аналогии: измерение энергии импульса при конечных временах эквивалентно привнесению дополнительной неопределенности в их измерение, что делает нейтринные состояния более когерентными.

Предложенная в данной работе теория флейворных переходов исчерпывающе решает все парадоксы наивного плосковолнового приближения квантово-механической теории. Помимо этого предсказывается ряд новых эффектов, которые можно исследовать в экспериментах с ускорительными, атмосферными, реакторными нейтрино и нейтрино от искусственных радиоактивных источников. Первое такое исследование было выполнено в работе [88]. Потенциальное влияние эффектов декогерентности на точность определения угла смешивания θ_{23} в ускорительных экспериментах было исследовано в работе [91]. Но возможная потеря когерентности связана здесь не с природой ВП, а с вероятными эффектами взаимодействия с окружающей средой.

11.5. Наблюдаемость волнового пакета. Несмотря на очевидный успех теоретического описания нейтринных осцилляций в модели с ВП, читатель,

знакомый с классическими работами (см., например, монографии [98, 117]) по теории рассеяния, вправе задать следующий вопрос: «В учебниках по теории рассеяния, действительно, демонстрируется, что последовательное теоретическое описание процессов рассеяния невозможно без использования ВП. Однако в результате усреднения сечения взаимодействия по ансамблю рассеивающихся частиц никакой информации о свойствах ВП в усредненном сечении не остается. С другой стороны, в теории нейтринных осцилляций с ВП число событий $N_{\alpha\beta}$, полученное после усреднения по ансамблю частиц, явным образом зависит от дисперсий всех ВП посредством функций \mathcal{Q} , n и др. Нет ли здесь противоречия?» Попробуем ответить на этот интересный вопрос. Напомним основные шаги вычисления Тейлора [98], используя наши обозначения. Амплитуда рассеяния ВП

$$\mathcal{A} = \langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \mathbb{S} - 1 | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle$$

может быть представлена в виде (см. разд. 5)

$$\mathcal{A} = \frac{i}{\mathcal{N}} \int d^4x \times \left[\prod_{i,f} \int \frac{d\mathbf{q}_i \phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) e^{iq_i(x_i-x)} d\mathbf{k}_f \phi^*(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}_f) e^{-ik_f(x_f-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}_i} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right] \mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\}),$$

где $\mathcal{N} = \sqrt{\langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \{\mathbf{p}_f, x_f\} \rangle \langle \{\mathbf{p}_i, x_i\} | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle}$ — нормировка состояний, а \mathcal{M} — матричный элемент в плосковолновом приближении. Вычисление Тейлора [98] (повторенное позднее в книге М. Е. Пескина и Д. В. Шредера [117]) предполагает, что зависимость матричного элемента процесса $i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ от импульсов $(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ более слабая, чем импульсная зависимость ВП $\phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$. В таком приближении возможна факторизация

$$\mathcal{A} \simeq \frac{i}{\mathcal{N}} \left(\int d^4x \prod_{i,f} \psi(\mathbf{p}_i, x - x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x - x_f) \right) \mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f\}),$$

а макроскопически усредненная величина $\langle |\mathcal{A}|^2 \rangle$ действительно не зависит от вида ВП [98].

Однако приближение Тейлора не всегда адекватно. Приведем несколько контрпримеров.

- Зависимость $i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f\})$ от импульсов $(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ может быть сильная (например, адронные резонансы).

- В пучках с закрученными электронами (разновидность ВП) [136, 137] предлагается возможность измерения фазы матричного элемента в линейном приближении к плосковолновому сечению. Учет квадратичных поправок

к приближению Тейлора также позволяет измерить фазу матричного элемента [122]. Такие измерения невозможны в рамках плосковолнового приближения.

- Для некоторых процессов, например $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, сечение, вычисленное в плосковолновом приближении, противоречит экспериментальным данным [118]. Как отмечено в разд. 5, измеренное сечение оказалось меньше вычисленного примерно на 30 % в области малых энергий фотона. Это объясняется тем, что заметный вклад в сечение этого с малыми энергиями фотона дают прицельные параметры ρ вплоть до 5 см, в то время как поперечные размеры сталкивающихся пучков не превышают $a \simeq 10^{-3}$ см. Ограничение прицельных параметров величиной $\rho \leq a$ приводит к уменьшению наблюдаемого числа фотонов. Соответствующая теория, учитывающая конечные размеры сталкивающихся пучков, была разработана в работе [120].

- В случае, когда матричный элемент представляет собой сумму сингулярных матричных элементов, например

$$i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\}) \sim \sum_k V_{\alpha k} V_{\beta k}^* \mathcal{M}'_d \frac{1}{q^2 - m_k^2} \mathcal{M}'_s,$$

форму ВП невозможно «расфакторизовать» в одной точке по передаче 4-импульса q , если массы m_k разные. Матричный элемент именно такого вида отвечает интерференции диаграмм с виртуальными нейтрино в квантово-полевой теории нейтринных осцилляций, или, более правильно, флейворных переходов. Таким образом, рассмотрение нейтринных осцилляций в квантовой теории поля с ВП действительно является важным исключением, не описываемым приближением Тейлора.

12. ВЫВОДЫ

Подведем основные итоги данной работы.

Как многократно обсуждалось в литературе начиная с 1970-х гг., плосковолновая квантово-механическая теория нейтринных осцилляций неполна и внутренне противоречива. Мы еще раз критически обсудили гипотезы и приближения, используемые в этой теории, и попытались очертить область их применимости с помощью одного из простейших расширений плосковолновой теории, основанного на модели нейтринного волнового пакета (ВП). Были изучены общие свойства ВП в рамках нековариантного квантово-механического формализма. Воспроизведены такие хорошо известные свойства ВП, как квазиклассичность его траектории и общий закон распыливания в конфигурационном пространстве. Новым результатом является доказательство того, что распыливание ВП приводит к закону обратных квадратов $\sim 1/|\mathbf{x}|^2$ для вероятности обнаружения состояния на расстоянии x от источника за достаточно большое время наблюдения. В рамках модели нековариантного

гауссова ВП построена теория нейтринных осцилляций. Предложен корректный способ вывода формулы для вероятностей флейворных переходов посредством макроскопического усреднения квадрата модуля амплитуды перехода. В итоге получена общая формула для вероятностей, зависящая от осцилляционных длин (L_{ij}^{osc}), длин когерентности (L_{ij}^{coh}) и дисперсии (L_{ij}^d), а также от эффективного пространственного размера ВП нейтрино σ_x (см. определения (73)). Формула, в частности, предсказывает следующее.

- Потерю когерентности для пары состояний ν_i и ν_j на расстояниях $L \gg L_{ij}^{\text{coh}}$. В результате вероятность осцилляций на очень больших (астрономических) расстояниях сводится к некогерентной сумме $P_{\alpha\beta} = \sum_k |V_{\alpha k}|^2 |V_{\beta k}|^2$, не зависящей ни от энергии, ни от расстояния*.

- Некогерентное рождение или детектирование нейтрино, что определяется фактором $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2) = \exp[-\Delta m_{kj}^2 / (8\sqrt{2}p\sigma_p)]$ (см. (78)). Именно этот фактор объясняет, почему не осциллируют заряженные лептоны.

- Поправки к фазе осцилляций за счет эффекта дисперсии ВП нейтрино.

- Частичную компенсацию потери когерентности для пары состояний ν_i и ν_j за счет распыливания пакетов.

- Дополнительное подавление интерференционных членов факторами вида $1/q_{kj}$ (см. (79)).

Построенная модель позволяет понять, какие из гипотез 1)–5), перечисленные в п. 1.3, справедливы, а какие нет. Выяснилось, что гипотеза 4) не вызывает возражений при описании данных современных экспериментов. Модель с ВП не противоречит также гипотезе 3) о том, что все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы, что связано, естественно, с нековариантностью использованного формализма. Остальные же три гипотезы нарушаются. Несмотря на то, что обсуждаемая модель относительно проста, справляется с некоторыми концептуальными проблемами плосковолновой теории и предсказывает новые эффекты, она все же не вполне удовлетворительна и может рассматриваться лишь как промежуточный этап в построении полностью ковариантной квантово-полевой теории. Этому более радикальному подходу и посвящена основная часть данной работы.

Предложена ковариантная теория релятивистских волновых пакетов, которые строятся в виде линейных суперпозиций одночастичных фоковских состояний с определенными импульсами и переходят в них в плосковолновом пределе. Исследованы свойства таких пакетов. Показано, например, что

*Этот результат воспроизводится и в квантово-полевой теории. Именно он, а вовсе не бессмысленное «усреднение по источникам», фигурирующее во многих работах, объясняет истинную причину того, что астрофизические нейтрино не осциллируют. . . с важнейшей оговоркой, связанной с пренебрежением взаимодействиями нейтрино с веществом астрофизического источника.

средний 4-импульс релятивистского пакета $\langle P \rangle$ и его эффективный объем V являются точными интегралами движения. При этом $\langle P \rangle^2 = \langle m \rangle^2$, где $\langle m \rangle$ — эффективная масса ВП, всегда превышающая массу квантов соответствующего свободного поля. Релятивистский пакет в среднем движется по классической траектории со скоростью $\mathbf{v}_p = \mathbf{p}/E_p$ (где \mathbf{p} и E_p — его наиболее вероятные 3-импульс и энергия соответственно), а квантовые флуктуации вокруг этой траектории затухают на расстояниях, больших эффективных размеров пакета. Поперечные к вектору \mathbf{v}_p флуктуации подавлены в меньшей степени, чем продольные, а для ультрарелятивистских пакетов флуктуации могут быть только поперечными, т. е. пакеты движутся внутри классических световых конусов. Изучены многопакетные состояния, описывающие системы из n свободных тождественных бозонов или фермионов. Показано, что эффекты бозе-эйнштейновского притяжения и фермиевского отталкивания важны лишь на расстояниях, сравнимых с эффективными размерами пакетов, и становятся несущественными на гораздо больших расстояниях.

В качестве простейшей рабочей модели релятивистского волнового пакета «без памяти», удовлетворяющей всем требованиям формализма, детально изучен релятивистский гауссов пакет (РГП), характеризуемый единственным феноменологическим параметром σ , который определяет масштаб квантовых флуктуаций 4-импульса и эффективные размеры пакета. Подробно исследован режим, в котором можно пренебречь распылением РГП (модель СРГП). Именно этот режим позволяет использовать РГП в S -матричном формализме КТП для описания асимптотически свободных состояний стабильных и нестабильных, но относительно долгоживущих частиц. Показано, что для всех нестабильных долгоживущих частиц и атомных ядер, распады которых важны как источники пучков нейтрино и антинейтрино, существуют достаточно широкие области допустимых значений параметра σ , удовлетворяющих всем ограничениям модели СРГП, при выполнении которых волновой пакет не распыляется за время жизни частицы.

Развитая теория применяется для описания рассеяния релятивистских ВП. Вычислена амплитуда произвольного процесса $a + b \rightarrow X$ в S -матричном формализме КТП с ВП. Найдена общая формула для скорости такого процесса (180):

$$dN = d\sigma L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|) = d\sigma L(0) \exp \left[-\frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2}{2\sigma_{x,ab}^2} \right],$$

где $d\sigma$ — стандартное плосковолновое сечение; $L(0) = 1/2\pi\sigma_{x,ab}^2$ — *светимость* рассеяния двух ВП в определении, используемом в теории рассеяния и ускорительной физике. Множитель $e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2/2\sigma_{x,ab}^2}$ отвечает геометрическому подавлению вероятности взаимодействия двух ВП, рассеивающихся с ненулевым прицельным параметром $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$, где \mathbf{b} — прицельный

вектор, $\mathbf{n} = \mathbf{v}_{ab}/|\mathbf{v}_{ab}|$ — единичный вектор вдоль относительной скорости \mathbf{v}_{ab} ; $\sigma_{x,ab}^2 = \sigma_{x,a}^2 + \sigma_{x,b}^2$ — эффективная пространственная дисперсия области перекрытия двух гауссовых ВП с пространственными дисперсиями $\sigma_{x,a}^2$ и $\sigma_{x,b}^2$ и прицельным параметром $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$. Впервые этот результат был получен в работе [120] с использованием функции Вигнера. В нашей работе он воспроизведен в рамках формализма ковариантных ВП. Макроскопическое усреднение вероятности взаимодействия сталкивающихся пакетов по прицельному параметру приводит к стандартной формуле $dN = d\sigma L$, где светимость L определяется эффективными пространственными дисперсиями ВП и пучков частиц a и b . Доказана лоренц-инвариантность прицельного параметра $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$.

Развита техника расчета макроскопических фейнмановских диаграмм с обменом массивными нейтрино, основанная на ковариантной теории волновых пакетов, в которой состояния свободных полей (внешних линий макродиаграмм) строятся как линейные суперпозиции одночастичных фоковских состояний, переходящих в эти состояния в плосковолновом пределе. Детально изучены интегралы перекрытия пакетов, характеризующие пространственно-временное перекрытие in- и out-пакетов в источнике и детекторе и определяющие основные отличия нашего подхода от стандартного формализма квантовой теории поля, использующего состояния с определенными импульсами и, следовательно, «размазанные» по всему пространству-времени. Показано, в частности, что интегралы перекрытия малы по модулю, если классические мировые трубки пакетов проходят вдали от прицельных точек (4-векторов X_s и X_d), определяющих положение эффективных областей взаимодействия пакетов в вершинах вблизи вершин макродиаграммы. Сформулированы условия, при выполнении которых in- и out-пакеты можно считать асимптотически свободными.

Вычислена амплитуда процесса (231) общего вида с рождением двух разнозаряженных лептонов ℓ_α и ℓ_β в макроскопически разнесенных вершинах диаграммы при произвольном числе других частиц (все внешние линии являются волновыми пакетами). Показано, что блоки диаграммы, описывающие взаимодействия адронов, можно представить в виде произведения двух адронных токов, относящихся к вершине-источнику и вершине-детектору и зависящих только от соответствующих наборов переменных (импульсов, спинов и координат внешних пакетов). Благодаря этому амплитуда представлена в виде суммы произведений матричных элементов подпроцессов рождения и поглощения реального безмассового нейтрино и фактора ψ_j^*/L , который можно интерпретировать как сферическую волну нейтрино массы m_j с амплитудой ψ_j^* , имеющей вид релятивистского гауссова пакета, «дисперсия» которого является релятивистски-инвариантной функцией эффективной энергии нейтрино, а также импульсов, масс и дисперсий импульсов всех внешних

пакетов. В качестве общих множителей амплитуда содержит геометрические факторы подавления, обусловленные неполным перекрытием внешних пакетов в вершинах диаграммы, а также несингулярные факторы, ответственные за приближенное сохранение энергии-импульса в этих вершинах.

Поскольку процесс типа (231) идет, вообще говоря, с нарушением лептонных чисел, его экспериментальное изучение является важным источником информации о параметрах смешивания и разностях квадратов масс нейтрино. Получена лоренц-инвариантная формула для вероятности процесса (231), и проведено ее статистическое усреднение, приводящее к экспериментально измеримой величине — дифференциальному числу событий в детекторе ($dN_{\alpha\beta}$), где термины «источник» и «детектор» используются на данном этапе для обозначения математических моделей, описывающих условия реального эксперимента. С учетом ряда упрощающих предположений формула для $dN_{\alpha\beta}$ может быть представлена в виде многомерного интеграла от произведения дифференциальных форм $d\Phi_\nu$ и $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$, описывающих поток (энергетический спектр) *безмассовых* нейтрино и дифференциальное сечение их взаимодействия с детектором, а также фактора $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, служащего обобщением стандартного квантово-механического выражения, описывающего флейворные переходы $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$. Показано, что квантово-полевая функция $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ не обладает, вообще говоря, свойствами вероятности, поскольку содержит, помимо стандартного «осцилляционного» множителя, факторы декогерентности, зависящие от энергии нейтрино E_ν и импульсов внешних пакетов \mathbf{p}_κ — переменных интегрирования по фазовому объему процесса (231), а также от масс m_κ и параметров σ_κ — неопределенностей импульсов внешних пакетов, включая пакеты лептонов $\ell_{\alpha,\beta}$.

В рамках простой модели для функций распределения ip-пакетов в источнике и детекторе величина общего фактора декогерентности S_0 , приводящего к подавлению средней скорости счета событий при синхронизированных измерениях, определяется соотношением времени функционирования источника τ_s и времени экспозиции детектора τ_d , а также пространственно-временной шириной эффективного ВП нейтрино $\tau_\nu \sim 1/\mathcal{D}$, где \mathcal{D} — функция E_ν и \mathbf{p}_κ . Подавление мало, если $\tau_s \gg \tau_d$ или $\tau_s \sim \tau_d \gg \tau_\nu$. Сильная зависимость S_0 от параметров τ_s и τ_d предоставляет возможность измерения усредненного значения функции \mathcal{D} в специальном ускорительном или реакторном эксперименте*, допускающем вариацию этих параметров (или хотя бы одного из них). Такое измерение, пусть даже грубое, было бы очень полезно для планирования и обработки данных будущих прецизионных экспе-

* На сегодня был проведен единственный эксперимент такого рода [88], в котором использовалась наша модель (в ее предельно упрощенном виде) при анализе данных по исчезновению реакторных $\bar{\nu}_e$.

риментов на нейтринных фабриках, а также экспериментов с β -пучками или «сверхпучками» и т. д. Недиagonальные факторы декогерентности S_{ij} ($i \neq j$) имеют более сложное поведение, что иллюстрируют приведенные в работе аналитические и численные оценки. Показано, в частности, что в асимптотическом режиме $\tau_s \gtrsim \tau_d \gg \tau_\nu$ фактор S_{ij} перестает зависеть от τ_s и τ_d и может приводить к сильному подавлению «осцилляционных» вкладов в $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$. Сформулированы условия, при которых эффекты декогерентности малы и, следовательно, применима стандартная квантово-механическая формула для вероятности флейворных переходов. Показано, что эффекты декогерентности необходимо учитывать в современных ускорительных экспериментах, в которых используются короткоимпульсные нейтринные пучки. Эти эффекты важны также для астрофизических нейтринных экспериментов (из-за расплывания нейтринного волнового пакета на больших расстояниях). В работе обсуждается возможная методика измерения факторов декогерентности в будущих экспериментах.

В заключение кратко сформулируем наиболее важные результаты нашей работы.

1. Развита ковариантная формализм волновых пакетов, устраняющий искусственные сингулярные нормировки состояний, присущие стандартному S -матричному подходу КТП.

2. Предложена новая модель релятивистского гауссова ВП (РГП). Обобщение формализма с учетом ВП более общего вида представляет лишь технические, но не принципиальные трудности.

3. Точки взаимодействия in- и out-пакетов произвольны. Это приводит к четырехмерному обобщению прицельного параметра. Из формализма автоматически следует корректное определение точек x_S и x_D , характеризующих рождение и поглощение нейтрино. Эти точки не задаются «руками», как во всех других известных нам подходах. Напротив, они автоматически возникают в формализме как эффективные точки, содержащиеся в фазе комплекснозначного четырехмерного объема перекрытия пакетов с произвольными начальными или конечными координатами x_κ и скоростями v_κ , однозначно задающими классические мировые трубки пакетов. Вычислены факторы геометрического подавления вероятности взаимодействия ВП для неколлинеарных столкновений и объемы перекрытия с учетом ненулевых прицельных параметров.

4. Формализм автоматически учитывает продольную дисперсию эффективного ВП нейтрино.

5. Разработан и применен корректный метод макроскопического усреднения. Метод включает учет произвольных (конечных или бесконечных, синхронизированных или несинхронизированных) временных интервалов работы «источника» и «детектора». Получена формула для числа событий, соответствующего макроскопической фейнмановской диаграмме весьма общего вида.

Обобщение на другие типы макродиаграмм достаточно очевидно. Получено выражение, обобщающее вероятность флейворного перехода, $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, с учетом всех вышеупомянутых эффектов.

6. Во всех физически осмысленных предельных случаях формулы для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ либо согласуются с известными и проверенными экспериментально, либо предсказывают новые нетривиальные эффекты.

Примеры новых эффектов.

- Зависимость «вероятностей флейворных переходов» (а точнее, скорости счета событий с нарушением лептонных чисел) от конечных временных интервалов работы «источника» и «детектора». Это важно, в частности, для экспериментов с ускорительными нейтрино.

- Экспоненциальное подавление числа несинхронизированных событий.

- Расплывание эффективного ВП нейтрино на больших расстояниях.

- Зависимость дисперсии импульса нейтрино от кинематики событий в источнике и детекторе. Явные формулы, описывающие эту зависимость, получены в самом общем случае (т.е. для произвольных реакций в источнике и детекторе) и детально проанализированы для наиболее простых и важных процессов (двух- и трехчастичных распадов, квазиупругого рассеяния) в плосковолновом пределе.

Благодарности. Мы благодарим Е. К. Ахмедова, В. А. Беднякова, С. М. Биленького, З. Г. Бережиани, Ф. Виссани, М. И. Высоцкого, А. З. Газизова, М. О. Гончара, Д. С. Горбунова, К. Джунти, И. П. Иванова, И. Д. Какорина, А. Е. Калошина, Д. И. Казакова, С. Э. Коренблита, К. С. Кузьмина, В. А. Ли, В. Потцеля, В. А. Рубакова, Д. В. Тайченачева, О. В. Теряева, К. А. Трескова, А. И. Франка, А. С. Шешукова, М. И. Широкова и Д. С. Шкирманова за стимулирующие обсуждения и критику.

Приложение 1 СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ ПЕРЕКРЫТИЯ

П1.1. Общие формулы для $\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}$. Рассмотрим общие свойства тензоров перекрытия

$$\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 (u_{\varkappa}^{\mu} u_{\varkappa}^{\nu} - g^{\mu\nu}).$$

Для этого полезно написать матрицы $\mathfrak{R}_{s,d} = \|\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}\|$ в явном виде:

$$\mathfrak{R}_{s,d} = \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{\varkappa}^2 - 1 & -\Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa 1} & -\Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa 2} & -\Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa 3} \\ -\Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa 1} & 1 + u_{\varkappa 1}^2 & u_{\varkappa 1} u_{\varkappa 2} & u_{\varkappa 1} u_{\varkappa 3} \\ -\Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa 2} & u_{\varkappa 2} u_{\varkappa 1} & 1 + u_{\varkappa 2}^2 & u_{\varkappa 2} u_{\varkappa 3} \\ -\Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa 3} & u_{\varkappa 3} u_{\varkappa 1} & u_{\varkappa 3} u_{\varkappa 2} & 1 + u_{\varkappa 3}^2 \end{pmatrix},$$

или, эквивалентно,

$$\mathfrak{R}_{s,d} = \sum_{\varkappa} (\sigma_{\varkappa} \Gamma_{\varkappa})^2 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\varkappa}^2 & -v_{\varkappa 1} & -v_{\varkappa 2} & -v_{\varkappa 3} \\ -v_{\varkappa 1} & 1 - v_{\varkappa 2}^2 - v_{\varkappa 3}^2 & v_{\varkappa 1} v_{\varkappa 2} & v_{\varkappa 1} v_{\varkappa 3} \\ -v_{\varkappa 2} & v_{\varkappa 2} v_{\varkappa 1} & 1 - v_{\varkappa 3}^2 - v_{\varkappa 1}^2 & v_{\varkappa 2} v_{\varkappa 3} \\ -v_{\varkappa 3} & v_{\varkappa 3} v_{\varkappa 1} & v_{\varkappa 3} v_{\varkappa 2} & 1 - v_{\varkappa 1}^2 - v_{\varkappa 2}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее $u_{\varkappa i}$ и $v_{\varkappa i}$ ($i = 1, 2, 3$) — компоненты векторов $\mathbf{u}_{\varkappa} = \mathbf{p}_{\varkappa}/m_{\varkappa}$ и \mathbf{v}_{\varkappa} соответственно ($u_{\varkappa i} = \Gamma_{\varkappa} v_{\varkappa i}$). Как и выше, индекс \varkappa нумерует пакеты из всех четырех наборов начальных ($I_{s,d}$) и конечных ($F_{s,d}$) состояний. Нетрудно видеть, что $|T_{\varkappa}| = |T_{\varkappa}|_{\mathbf{v}_{\varkappa}=0} = 0$, но $|\mathfrak{R}_{s,d}| > 0$. Это следует из положительности квадратичных форм $\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ в предположении, что $\sigma_{\varkappa} > 0$ по крайней мере для двух пакетов \varkappa . Отметим также, что $\text{Tr } T_{\varkappa} = T_{\varkappa}^{\mu}_{\mu} = -3\sigma_{\varkappa}^2$ и, следовательно, $\text{Tr } \mathfrak{R}_{s,d} = -3 \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2$. Другим важным свойством определителя $|\mathfrak{R}_{s,d}|$ является положительность всех его главных миноров. Отсюда следует, в частности, что пространственные части матриц $\mathfrak{R}_{s,d}$, т. е. матрицы $|\mathfrak{R}_{s,d}^{ij}|$ ($i, j = 1, 2, 3$), также являются положительно определенными, а значит, и квадратичные формы $\mathfrak{R}_{s,d}^{ij} x_i x_j$ положительны.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 (1 + u_{\varkappa i}^2), & \omega &= \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 \mathbf{u}_{\varkappa}^2, \\ v_i &= \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 \Gamma_{\varkappa} u_{\varkappa i}, & w_i &= \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 u_{\varkappa j} u_{\varkappa k}. \end{aligned} \quad (326)$$

Здесь и далее индексы s и d не пишутся для упрощения формул. Пространственные индексы, обозначаемые латинскими буквами i, j, k , принимают значения 1, 2, 3; при этом подразумевается, если не оговорено противного, что $i \neq j \neq k$, причем в каждой формуле, содержащей все три индекса, тройка (i, j, k) является циклической перестановкой (1, 2, 3). Используя эти соглашения, запишем определители \mathfrak{R}_s и \mathfrak{R}_d в виде

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_{s,d}| &= \omega \prod_i \omega_i + 2\omega \prod_i w_i + \sum_i v_i w_i (v_i w_i - v_j w_j - v_k w_k) + \\ &+ \sum_i [w_i \omega_i (2v_j v_k - \omega w_i) - v_i^2 \omega_j \omega_k]. \end{aligned} \quad (327)$$

П1.2. Обратные тензоры перекрытия $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}$. Матрицы, обратные к $\mathfrak{R}_{s,d}$, определяются через алгебраические дополнения (адьюнкты) $\mathfrak{A}_{s,d}^{\mu\nu}$ матричных

элементов $\mathfrak{R}_{s,d}$:

$$\mathfrak{R}_{s,d}^{-1} = |\mathfrak{R}_{s,d}|^{-1} \|\mathfrak{A}_{s,d}^{\mu\nu}\|, \quad (328)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{s,d}^{00} &= \prod_i \omega_i - \sum_i w_i^2 \omega_i + 2 \prod_i w_i, \\ \mathfrak{A}_{s,d}^{0i} &= v_i \omega_j \omega_k - v_j w_k \omega_k - v_k w_j \omega_j + w_i (v_j w_j + v_k w_k - v_i w_i), \\ \mathfrak{A}_{s,d}^{ii} &= \omega (\omega_j \omega_k - w_i^2) + 2 w_i v_j v_k - v_j^2 \omega_k - v_k^2 \omega_j, \\ \mathfrak{A}_{s,d}^{jk} &= (v_j v_k - \omega w_i) \omega_i + v_i (v_i w_i - v_j w_j - v_k w_k) + \omega w_j w_k. \end{aligned} \quad (329)$$

Отсюда находим матричные элементы матриц $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}$:

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} = (\mathfrak{R}_{s,d}^{-1})_{\mu\nu} = |\mathfrak{R}_{s,d}|^{-1} \tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{\mu\nu},$$

где

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{00} = \mathfrak{A}_{s,d}^{00}, \quad \tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{0i} = \tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{i0} = -\mathfrak{A}_{s,d}^{0i}, \quad \tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{ij} = \tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{ji} = \mathfrak{A}_{s,d}^{ij}.$$

Явные формулы для компонент обратных тензоров перекрытия в терминах наиболее вероятных 4-скоростей были найдены в [123]:

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} = \frac{1}{|\mathfrak{R}_{s,d}|} \sum_{a,b,c \in \mathcal{S}, \mathcal{D}} \sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_c^2 \mathfrak{J}_{s,d}^{abc\mu\nu}. \quad (330)$$

Фигурирующие в (330) многоиндексные выражения (симметричные по лоренцевым индексам) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{s,d}^{abc00} &= \left[\Gamma_a \Gamma_b - \frac{1}{3} (u_a u_b) \right] (u_b u_c) (u_c u_a) + \frac{1}{2} \Gamma_a^2 [1 - (u_b u_c)^2] + \frac{1}{3}, \\ \mathfrak{J}_{s,d}^{abc0i} &= \frac{1}{2} \Gamma_c [(u_a u_b)^2 u_{ci} - u_{ci} - 2(u_a u_b)(u_b u_c) u_{ai} + 2(u_a u_c) u_{ai}] - \\ &\quad - \Gamma_b (u_a u_b) u_{ai}, \\ \mathfrak{J}_{s,d}^{abcij} &= \Gamma_a \Gamma_b [(u_c u_a)(u_c u_b) - (u_a u_b)] \delta_{ij} + \frac{1}{2} (\Gamma_c^2 - 1) [1 - (u_a u_b)^2] \delta_{ij} + \\ &\quad + \{ \Gamma_c [\Gamma_a (u_b u_c) + \Gamma_b (u_c u_a) - \Gamma_c (u_a u_b)] - \Gamma_a \Gamma_b + (u_a u_b) \} u_{ai} u_{bj} + \\ &\quad + \Gamma_b [\Gamma_b - \Gamma_a (u_a u_b)] u_{ci} u_{cj}; \\ |\mathfrak{R}_{s,d}| &= \sum_{a,b,c,d \in \mathcal{S}, \mathcal{D}} \sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_c^2 \sigma_d^2 \{ \Gamma_a \Gamma_b (u_c u_a) [(u_c u_d)(u_d u_b) - (u_b u_c)] + \\ &\quad + \frac{1}{3} [(u_a u_b)(u_b u_c)(u_c u_a) - 1] - \frac{1}{2} \Gamma_a \Gamma_b (u_a u_b) [(u_c u_d)^2 - 1] + \\ &\quad + \frac{1}{6} \Gamma_d^2 [3(u_b u_c)^2 - 2(u_a u_b)(u_b u_c)(u_c u_a) - 1] \}. \end{aligned}$$

Этот результат получен без предположения о сохранении энергии-импульса.

Положительная определенность симметричных матриц $\mathfrak{R}_{s,d}$ (а следовательно, и $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}$) приводит к ряду строгих неравенств, в частности*

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\mu} > 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{00}\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{ii} - (\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{0i})^2 > 0, \quad \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{jj}\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{kk} - (\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{jk})^2 > 0. \quad (331a)$$

Аналогичные неравенства справедливы и для адьюнктов $\mathfrak{A}_{s,d}^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}_{s,d}^{\mu\nu}$ (поскольку $|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}| > 0$), а также для элементов матрицы $\|R^{\mu\nu}\| = \|\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}\|$ (нет суммирования по повторяющимся индексам):

$$R_{\mu\mu} > 0, \quad R_{00}R_{ii} - R_{0i}^2 > 0, \quad R_{jj}R_{kk} - R_{jk}^2 > 0. \quad (331б)$$

Из неравенств (331б) вытекают важные следствия, в частности положительность функций \mathcal{R} и $m - n_0 - n_0^2$. Действительно, в системе координат, ось z которой направлена вдоль единичного вектора \mathbf{l} , имеем

$$\mathcal{R} = R_{33}, \quad m - n_0 - n_0^2 = \frac{R_{00}\mathcal{R} - (\mathbf{R}\mathbf{l})^2}{R^2} = \frac{R_{00}R_{33} - R_{03}^2}{(R_{00} - 2R_{03} + R_{33})^2}.$$

Поскольку же эти величины вращательно-инвариантны, то из (331б) следует, что $\mathcal{R} > 0$ и $m - n_0 - n_0^2 > 0$. Из последнего неравенства видим, что величина (285) положительна, что приводит к подавлению вероятности (297).

Функции n и \tilde{m} строятся из компонент 4-вектора $Y = Y_s + Y_d$, где

$$Y_s^\mu = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_{s\nu} \quad \text{и} \quad Y_d^\mu = -\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_{d\nu},$$

и тензорных компонент $R^{0i} = \tilde{\mathfrak{R}}_s^{0i} + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{0i}$. Отметим также, что для вычисления функций n в действительности достаточно знать лишь скалярное произведение $Yl = (Y_s + Y_d)l = E_\nu R$ и нулевую компоненту $Y^0 = Y_s^0 + Y_d^0$. Более того, достаточно вычислить эти величины в ПВ_0 -пределе, в котором расчеты существенно упрощаются. В дальнейшем мы будем использовать символ $\{f\}$ для указания того, что функция f вычисляется в ПВ_0 -пределе. В этих терминах

$$Y_{s,d}l \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} q_\mu l_\nu \Big|_{q=E_\nu l} = E_\nu^{-1} \left\{ \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \right\} \quad \text{и} \quad Y_{s,d}^0 \rightarrow \left\{ \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{0\mu} q_\mu \right\}.$$

Для иллюстрации общих формул ниже рассмотрим несколько простейших типов процессов в источнике и детекторе, представляющих интерес для приложений теории к реальным нейтринным экспериментам.

*Левые части неравенств (331a) представляют собой главные миноры $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}$ первого и второго порядков. Подразумевается, что здесь (как и ниже, в формулах (331б)) нет суммирования по повторяющимся индексам.

П1.3. Двухчастичный распад в источнике. Изучим простейший процесс — лептонный распад $a \rightarrow \ell \nu_*$ в источнике ($a_{\ell 2}$). Здесь a — заряженный мезон ($\pi^\pm, K^\pm, D_s^\pm, \dots$), ℓ — заряженный лептон (e^\pm, μ^\pm, τ^\pm) и ν_* — виртуальное нейтрино или антинейтрино. Поскольку такие распады являются основными источниками ускорительных, атмосферных и астрофизических нейтрино и антинейтрино высоких энергий, мы изучим этот пример достаточно подробно*.

П1.3.1. Формулы при произвольных импульсах. В рассматриваемом случае определитель матрицы \mathfrak{R}_s можно легко вычислить по формуле (327), записанной в с. с. о. мезонного пакета**:

$$|\mathfrak{R}_s| = \sigma_a^2 \sigma_\ell^2 \sigma_2^4 |\mathbf{u}_\ell^*|^2. \quad (332)$$

Здесь $\sigma_2^2 = \sigma_a^2 + \sigma_\ell^2$ и $\mathbf{u}_\ell = \mathbf{p}_\ell / m_\ell = \Gamma_\ell \mathbf{v}_\ell$. Поскольку определитель $|\mathfrak{R}_s|$ есть лоренц-инвариант, он преобразуется в л. с. подстановкой

$$|\mathbf{u}_\ell^*| = \frac{1}{m_a m_\ell} \sqrt{(E_\ell \mathbf{p}_a - E_a \mathbf{p}_\ell)^2 - |\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_\ell|^2} = (u_a u_\ell) V_{a\ell},$$

где

$$V_{a\ell} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_\ell)^2 - |\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_\ell|^2}}{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_\ell}$$

есть инвариантная относительная скорость мезона и лептона в л. с. Отметим, что в этой формуле кинематические переменные, относящиеся к разным частицам, независимы друг от друга, поскольку они не ограничены законом сохранения энергии-импульса. Но в частном случае, когда виртуальное нейтрино находится на массовой поверхности, а масса нейтрино и «размазки» импульсов мезона и лептона пренебрежимо малы, можно использовать обычные соотношения кинематики 2-частичного распада, согласно которым

$$|\mathbf{v}_\ell^*| = V_{a\ell} = \frac{m_a^2 - m_\ell^2}{m_a^2 + m_\ell^2} \quad \text{и} \quad |\mathbf{u}_\ell^*| = \frac{m_a^2 - m_\ell^2}{2m_a m_\ell}.$$

Разумеется, формулы данного раздела справедливы для любых двухчастичных распадов, например для распадов релятивистских ионов, идущих за счет захвата орбитального электрона (таких как $^{140}\text{Pr}^{57+} \rightarrow ^{140}\text{Ce}^{57+} \nu_$) в мысленном эксперименте, способном детектировать низкоэнергетические нейтрино от ЕС-распада. С известными оговорками формулы применимы и для последовательных процессов излучения и резонансного поглощения (индуцированного электронным захватом) мессбауэровского антинейтрино (например $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + \bar{\nu}_*, \bar{\nu}_* + ^3\text{He} \rightarrow ^3\text{H}$).

**Для обозначения с. с. о. мезона мы используем подстрочный значок *. Индексы a и ℓ помечают соответствующие частицы и не должны быть спутаны с лоренцевыми индексами. Последнее соглашение принято всюду в данном разделе.

Несколько более сложный расчет, в котором используются общие формулы (329), позволяет найти в явном виде алгебраические дополнения $\mathfrak{A}_s^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_s^{00} &= \sigma_2^2[\sigma_2^2(\sigma_a^2\Gamma_a^2 + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell^2) + \sigma_a^2\sigma_\ell^2|\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_\ell|^2], \\ \mathfrak{A}_s^{0i} &= \sigma_2^2\{\sigma_a^2[\sigma_a^2\Gamma_a + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell(u_a u_\ell)]u_{ai} + \sigma_\ell^2[\sigma_\ell^2\Gamma_\ell + \sigma_a^2\Gamma_a(u_a u_\ell)]u_{\ell i}\}, \\ \mathfrak{A}_s^{ii} &= \sigma_2^2\{\sigma_a^2[\sigma_a^2 u_{ai} + \sigma_\ell^2(u_a u_\ell)u_{\ell i}]u_{ai} + \sigma_\ell^2[\sigma_\ell^2 u_{\ell i} + \sigma_a^2(u_a u_\ell)u_{ai}]u_{\ell i} + \\ &\quad + \sigma_a^2\sigma_\ell^2[(\Gamma_\ell \mathbf{u}_a - \Gamma_a \mathbf{u}_\ell)^2 - |\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_\ell|^2]\}, \\ \mathfrak{A}_s^{jk} &= \sigma_2^2[\sigma_a^4 u_{aj} u_{ak} + \sigma_\ell^4 u_{\ell j} u_{\ell k} + \sigma_a^2\sigma_\ell^2(u_a u_\ell)(u_{aj} u_{\ell k} + u_{\ell j} u_{ak})], \quad j \neq k.\end{aligned}\quad (333)$$

Отсюда или из (330) можно получить явно лоренц-инвариантную формулу для компонент обратного тензора:

$$\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} = \frac{\sigma_a^4 u_a^\mu u_a^\nu + \sigma_\ell^4 u_\ell^\mu u_\ell^\nu - \sigma_a^2\sigma_\ell^2\{g^{\mu\nu}[(u_a u_\ell)^2 - 1] - (u_a u_\ell)(u_a^\mu u_\ell^\nu + u_\ell^\mu u_a^\nu)\}}{\sigma_a^2\sigma_\ell^2(\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2)[(u_a u_\ell)^2 - 1]}.$$

Отсюда

$$\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu = \frac{\sigma_a^4 (u_a q)^2 + \sigma_\ell^4 (u_\ell q)^2 + 2\sigma_a^2\sigma_\ell^2 (u_a u_\ell)(u_a q)(u_\ell q)}{\sigma_a^2\sigma_\ell^2\sigma_2^2 |\mathbf{u}_\ell^*|^2} - \frac{q^2}{\sigma_2^2}. \quad (334)$$

Найдем теперь явный вид 4-вектора Y_s , чьи компоненты определяются как

$$\begin{aligned}Y_s^0 &= \tilde{\mathfrak{R}}_s^{0\nu} q_{s\nu} = \frac{1}{|\mathfrak{R}_s|} [\mathfrak{A}_s^{00}(E_a - E_\ell) - \mathfrak{A}_s^{0i}(p_a - p_\ell)_i], \\ Y_s^i &= \tilde{\mathfrak{R}}_s^{i\nu} q_{s\nu} = \frac{1}{|\mathfrak{R}_s|} [\mathfrak{A}_s^{ij}(p_a - p_\ell)_j - \mathfrak{A}_s^{i0}(E_a - E_\ell)].\end{aligned}$$

После элементарных преобразований из (333) получаем следующий результат:

$$Y_s^\mu = \frac{1}{|\mathbf{u}_\ell^*|^2} \left\{ \left[\frac{(p_a p_\ell)}{m_a^2} - 1 \right] \frac{p_a^\mu}{\sigma_\ell^2} - \left[\frac{(p_a p_\ell)}{m_\ell^2} - 1 \right] \frac{p_\ell^\mu}{\sigma_a^2} \right\}. \quad (335)$$

Полезные тождества:

$$\begin{aligned}(u_a q)(u_\ell q) &= \Gamma_a \Gamma_\ell q_0^2 - [\Gamma_a(\mathbf{u}_\ell \mathbf{q}) + \Gamma_\ell(\mathbf{u}_a \mathbf{q})]q_0 + (\mathbf{u}_a \mathbf{q})(\mathbf{u}_\ell \mathbf{q}), \\ (\mathbf{u}_a \mathbf{q})(\mathbf{u}_\ell \mathbf{q}) &= \sum_i [(u_{ai} q_i)(u_{\ell i} q_i) + (u_{aj} q_j)(u_{\ell k} q_k) + (u_{ak} q_k)(u_{\ell j} q_j)].\end{aligned}$$

П1.3.2. ПВ₀-предел. При выводе формул из предыдущего пункта кинематические ограничения не налагались, так что они справедливы для произвольного 4-вектора q . Примем теперь во внимание точные законы сохранения, т. е. перейдем к ПВ₀-пределу (означающему в данном частном случае, что $q = p_a - p_\ell = p_\nu = E_\nu l$ и $p_\nu^2 = 0$). Получаем

$$u_a u_\ell = \frac{E_\ell^*}{m_\ell}, \quad u_a q = E_\nu^*, \quad u_\ell q = \frac{m_a E_\nu^*}{m_\ell},$$

где

$$E_\ell^* = \frac{m_a^2 + m_\ell^2}{2m_a} \quad \text{и} \quad E_\nu^* = \frac{m_a^2 - m_\ell^2}{2m_a}$$

есть, соответственно, энергии лептона и нейтрино в с. с. о. мезона. Подставив эти соотношения в (334), найдем ПВ₀-предел для квадратичной формы $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$:

$$\left\{ \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \right\} = \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \gg 1. \quad (336)$$

Оценка параметров эффективного нейтринного пакета. Для иллюстрации полученного результата рассмотрим специальный, но вполне реалистичный случай, когда можно пренебречь вкладом в полную функцию \mathfrak{D} , обусловленным реакцией в детекторе, для чего следует предположить, что параметры σ_\varkappa для всех $\varkappa \in D$ достаточно велики по сравнению с σ_a и σ_ℓ . Такое предположение разумно для экспериментов с ускорительными и атмосферными мюонными нейтрино и антинейтрино. Действительно, в источнике (распадном канале, верхней атмосфере) взаимодействиями мезонов и мюонов друг с другом и с окружающей средой, как правило, можно пренебречь, и поэтому значения параметров σ_a и σ_μ очень малы (близки к предельно допустимым в СРГП-модели). Значения параметров σ_\varkappa для долгоживущих in- и out-частиц \varkappa (ядер, адронов, лептонов) в типичном детекторе определяются не распадными ширинами этих частиц, а величинами их свободных пробегов в детекторной среде*, так что $\sigma_\varkappa \gg \sigma_{a,\mu}$. Для рождающихся в детекторе короткоживущих частиц и резонансов, которые распадаются до взаимодействия со средой, выполняется по крайней мере условие $\sigma_\varkappa \gg \sigma_\mu$.

Итак, используя (336), получаем

$$\mathfrak{D}^2 \approx E_\nu^2 \left[2 \left(\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \right) \right]^{-1} \ll E_\nu^2 \quad (337)$$

и, следовательно,

$$\sigma_j^2 \approx \frac{m_j^2}{2} \left(\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \right)^{-1} \ll m_j^2. \quad (338)$$

Как видим, в этом простейшем случае эффективный пакет виртуального нейтрино с данной массой полностью определяется массами и «размазками» импульсов пакетов a и ℓ , причем значения σ_j для всех трех известных нейтрино *чрезвычайно малы* при любых допустимых приближением СРГП значениях σ_a и σ_ℓ . Более того, учитывая, что массы трех известных нейтрино на много

* Волновые пакеты формируются заново при каждом (неупругом или упругом) взаимодействии частицы со средой и внешними полями.

порядков меньше масс всех других (известных) элементарных частиц с ненулевой массой, заключаем, что $\sigma_j^2 \lll \sigma_{a,\ell}^2$. Хотя приведенные оценки сделаны без учета вкладов реакции в детекторе, они на качественном уровне объясняют успех стандартного квантово-механического предположения о том, что легкие нейтрино обладают определенными импульсами, несмотря на то, что рождаются они в процессах с участием частиц с относительно большими «размазками» импульсов. Из (337) следует, в частности, что $\sigma_j = 0$ при $m_j = 0$, т. е. безмассовые нейтрино можно считать плоскими волнами. С очевидными оговорками этот замечательный факт можно использовать при анализе процессов, подобных изображенным на рис. 8, в которых легкие массивные нейтрино участвуют в качестве внешних волновых пакетов.

Из условий применимости приближения СРПП для нестабильных частиц

$$\left(\frac{\sigma_{\varkappa}}{\sigma_{\varkappa}^{\max}}\right)^4 \lll 1, \quad \sigma_{\varkappa}^{\max} = \sqrt{m_{\varkappa}\Gamma_{\varkappa}}$$

(где $\Gamma_{\varkappa} = 1/\tau_{\varkappa}$ — полная распадная ширина частицы \varkappa) следует важное ограничение

$$\sigma_j^2 \lll \frac{m_j^2}{2} \left(\frac{m_{\ell}}{\Gamma_{\ell}} + \frac{m_a}{\Gamma_a}\right)^{-1}.$$

Таким образом, для двухчастичных распадов *любых* мезонов с мюоном в конечном состоянии ($\pi_{\mu 2}$, $K_{\mu 2}$ и т. д.) следует ограничение сверху

$$\frac{\sigma_j^2}{m_j^2} \lll \frac{\Gamma_{\mu}}{2m_{\mu}} \approx 1,4 \cdot 10^{-18},$$

так что $\sigma_j^{\max}/\sigma_{\mu}^{\max} \approx m_j/m_{\mu} \lll 1$. Отсюда находим ограничения снизу для эффективных размеров нейтринного пакета, поперечного и продольного по отношению к импульсу нейтрино*:

$$d_j^{\perp} \gg 2,6 \left(\frac{0,1 \text{ эВ}}{m_j}\right) \text{ км}$$

и

$$d_j^{\parallel} = \frac{d_j^{\perp}}{\Gamma_j} \gg 2,6 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1 \text{ ГэВ}}{E_{\nu}}\right) \left(\frac{0,1 \text{ эВ}}{m_j}\right) \text{ см.}$$

* Следует отметить, что d_j^{\perp} ни в коем случае не есть размер *покоящегося* нейтринного пакета, поскольку все оценки были сделаны в ультрарелятивистском приближении и справедливы, следовательно, лишь для таких систем отсчета, в которых нейтрино остается ультрарелятивистским. Лоренц-инвариантность нейтринной волновой функции $\psi_j^j(\mathbf{p}_j, x)$ тоже нужно понимать с точностью до этой существенной оговорки. Явный вид эффективного волнового пакета нерелятивистского нейтрино требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки данной работы.

Ограничение для характеристик нейтринных пакетов, возникающих в $a_{\tau 2}$ -распадах, зависит от типа распадающейся частицы. Например, в случае распада D_s -мезона получаем $\sigma_j^2/m_j^2 \ll 2,2 \cdot 10^{-13}$, что при $m_j = 0,1$ ЭВ соответствует предельному эффективному поперечному размеру нейтринного пакета «всего лишь» 6,6 м.

Эффективные размеры d_j^\perp и d_j^\parallel определяют, по порядку величины, допустимые поперечные и продольные квантовые отклонения центра нейтринного волнового пакета от «классической траектории» $\bar{\mathbf{L}}_j = \mathbf{v}_j T$. Как видим, поперечные отклонения $\delta \mathbf{L}_j^\perp \sim d_j^\perp/2$ могут быть гигантскими, заведомо превышающими как размеры существующих нейтринных детекторов, так и естественное уширение ускорительных нейтринных пучков даже на расстояниях в сотни и тысячи километров от источника. Этот факт не должен вызывать недоумения, если вспомнить, что стандартное квантово-механическое описание массивного нейтрино как состояния с определенным импульсом подразумевает (как прямое следствие соотношения неопределенностей), что его «размеры» (причем как поперечные, так и продольные) бесконечно велики. При интерпретации обычных экспериментов по нейтринным осцилляциям такое описание не приводит к нефизическим результатам по той причине, что ни поперечные размеры нейтринного пакета, ни поперечные квантовые флуктуации не входят в выражение для скорости счета нейтринных событий, должным образом усредненной по пространственным координатам x_κ внешних пакетов. При таком усреднении автоматически исчезает и зависимость от временных компонент x_κ^0 ; остается лишь зависимость скорости счета от внешних («инструментальных») пространственно-временных переменных, задаваемых условиями эксперимента*. Большие поперечные размеры нейтринного пакета могут проявлять себя в специальных нейтринных экспериментах, в которых контролируется не только расстояние между источником и детектором, но и временной интервал между событиями рождения и взаимодействия нейтрино. Такие эксперименты требуют специального рассмотрения.

Эффекты неколлинеарности передач импульсов в источнике и детекторе содержатся в функциях n и m , свойства которых обсуждаются ниже.

Вклады в функции n и m . Из общей формулы (335) находим 4-вектор Y_s в ПВ₀-приближении:

$$\{Y_s\} = \frac{1}{m_a E_\nu^*} \left[\left(\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \right) p_a - \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} p_\nu \right] = \frac{1}{m_a E_\nu^*} \left[\left(\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \right) p_\ell - \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} p_\nu \right].$$

* Следует помнить, однако, что условия, необходимые для применимости математической процедуры усреднения, весьма ограничительны и отнюдь не обязаны выполняться для всех нейтринных экспериментов. Так, например, они заведомо нарушаются в ускорительных экспериментах с короткой базой, меньшей, чем эффективные поперечные размеры нейтринных пакетов.

Скалярные произведения, которые требуются для расчета $a_{\ell 2}$ -вкладов в функцию \mathbf{n} , имеют вид

$$\begin{aligned} \{Y_s l\} &= \left\{ \tilde{\mathfrak{N}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \right\} \frac{1}{E_\nu} = \left(\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \right) \frac{1}{E_\nu}, \\ \{\mathbf{Y}_s \mathbf{l}\} &= \{Y_s^0 - Y_{sl}\} = \frac{\Gamma_a}{E_\nu^*} \left[\left(\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} \right) \left(1 - \frac{m_a E_\nu^*}{E_a E_\nu} \right) - \frac{m_a^2 E_\nu}{\sigma_a^2 E_a} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\left\{ \frac{\mathbf{Y}_s \mathbf{l}}{Y_{sl}} \right\} = \left[\Gamma_a - \left(\frac{m_a^2 \sigma_\ell^2}{m_a^2 \sigma_\ell^2 + m_\ell^2 \sigma_a^2} \right) \frac{E_\nu}{m_a} \right] \frac{E_\nu}{E_\nu^*} - 1 \equiv \mathbf{n}_s(E_a, E_\nu).$$

Функция \mathbf{n}_s может служить оценкой для полной функции \mathbf{n} , если, как и в случае с функцией \mathfrak{D} , пренебречь вкладом в \mathbf{n} , обусловленным детекторной частью диаграммы (в данном случае — величинами Y_d^0 и Y_{dl}), считая, что параметры σ_\varkappa ($\varkappa \in D$) достаточно велики по сравнению с σ_a и σ_ℓ . Поскольку при фиксированном значении E_ν функция \mathbf{n}_s линейно зависит от E_a , имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{n}_s \geq \mathbf{n}_s(E_a^{\min}, E_\nu),$$

в котором

$$E_a^{\min} = \frac{m_a}{2} \left(\frac{E_\nu}{E_\nu^*} + \frac{E_\nu^*}{E_\nu} \right)$$

есть минимальная энергия частицы a , необходимая для рождения безмассового нейтрино с энергией E_ν в $a_{\ell 2}$ -распаде. Таким образом, абсолютный минимум функции \mathbf{n}_s отрицателен:

$$\mathbf{n}_s^{\min} = \mathbf{n}_s(m_a, E_\nu^*) = -\frac{(m_a^2 - m_\ell^2)\sigma_\ell^2}{2(m_a^2\sigma_\ell^2 + m_\ell^2\sigma_a^2)}, \quad |\mathbf{n}_s^{\min}| < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_a^2} \right).$$

Функция \mathbf{n}_s возрастает с увеличением энергии нейтрино и может быть сколь угодно велика при $E_\nu \gg E_\nu^*$:

$$\mathbf{n}_s \geq \mathbf{n}_s(E_a^{\min}, E_\nu) = \frac{1}{2} (1 - 2|\mathbf{n}_s^{\min}|) \left(\frac{E_\nu}{E_\nu^*} \right)^2 \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{E_\nu^*}{E_\nu} \right) \right].$$

Как хорошо известно, распределение энергии нейтрино в $a_{\ell 2}$ -распаде равномерно (т. е. не зависит от E_ν) внутри кинематических границ

$$E_\nu^* \Gamma_a (1 - |\mathbf{v}_a|) \leq E_\nu \leq E_\nu^* \Gamma_a (1 + |\mathbf{v}_a|),$$

откуда следует, что средняя энергия распадного нейтрино равна $\bar{E}_\nu = \Gamma_a E_\nu^*$. Поэтому при высоких энергиях распадающихся мезонов, $\Gamma_a \gg 1$, с точностью до $\mathcal{O}(\Gamma_a^{-2})$ имеем

$$n_s(E_a, \bar{E}_\nu) \approx \Gamma_a^2 (1 - |n_s^{\min}|) = (1 - |n_s^{\min}|) \left(\frac{\bar{E}_\nu}{E_\nu^*} \right)^2$$

и, следовательно,

$$n_s r_j |_{E_\nu = \bar{E}_\nu} \approx \frac{1}{2} (1 - |n_s^{\min}|) \left(\frac{m_j}{E_\nu^*} \right)^2 \ll 1.$$

При тех же предположениях, удерживая только лидирующие по Γ_a и E_ν/E_ν^* члены, можно оценить вклад $a_{\ell 2}$ -распада в функцию m :

$$m_s \approx \Gamma_a^2 \left\{ 1 + \frac{\sigma_\ell^4 m_a^4}{(m_\ell^2 \sigma_a^2 + m_a^2 \sigma_\ell^2)^2} \left[1 + \frac{2\sigma_a^2 E_\nu^*}{m_a (\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2)} \right] \left(\frac{E_\nu}{E_a} \right)^2 \right\} \left(\frac{E_\nu}{E_\nu^*} \right)^2.$$

Отсюда видно, что $m_s \gg n_s$; тем не менее предполагаемые в п. 7.2.1 неравенства (284) остаются справедливыми при $E_\nu \sim \bar{E}_\nu$.

П1.4. Квазиупругое рассеяние в детекторе. В качестве простейшего (и наиболее важного) примера реакции в детекторной вершине диаграммы рассмотрим «квазиупругое» рассеяние виртуального нейтрино $\nu_* a \rightarrow b\ell$, в котором частица-мишень a может быть электроном, нуклоном или ядром, а ℓ — заряженный лептон. Поскольку в типичном нейтринном эксперименте частицы-мишени обладают очень малыми (тепловыми) скоростями относительно лабораторной системы, будем считать, что лабораторная система совпадает с с. с. о. волнового пакета, описывающего состояние частицы a . Разумеется, при необходимости все формулы могут быть преобразованы в любую другую систему отсчета, поскольку мы имеем дело лишь с векторами и тензорами, законы преобразования которых хорошо известны.

П1.4.1. Формулы при произвольных импульсах. В с. с. о. пакета a определитель матрицы \mathfrak{R}_d имеет вид

$$|\mathfrak{R}_d| = \sigma_3^2 \{ (\sigma_3^2 + \sigma_a^2) \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (u_b u_\ell)^2 V_{b\ell}^2 + 2\sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (u_b u_\ell) (\mathbf{u}_b \mathbf{u}_\ell) + \sigma_a^2 [\sigma_b^2 (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \mathbf{u}_b^2 + \sigma_\ell^2 (\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2) \mathbf{u}_\ell^2] \}. \quad (339)$$

Здесь $V_{b\ell}$ есть относительная скорость частиц b и ℓ , а $\sigma_3^2 \equiv \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_\ell^2$. Важный вывод, следующий из этой формулы, заключается в том, что определитель $|\mathfrak{R}_d|$ остается *неотрицательным*, даже если одна (но только одна) из частиц a , b или ℓ описывается плоской волной. Если, например, пренебречь членами, пропорциональными σ_ℓ^2 , то формула для определителя (339) приобретает вид, совпадающий с (332):

$$|\mathfrak{R}_d| \approx \sigma_a^2 \sigma_b^2 (\sigma_a^2 + \sigma_b^2)^2 |\mathbf{u}_b|^2. \quad (340)$$

Это важное свойство дает возможность значительно упростить анализ много-пакетных in- и out-состояний, пренебрегая вкладами пакетов очень больших пространственных размеров (характеризующихся очень малыми значениями параметров σ_{\neq}). При этом следует иметь в виду, что приближенная формула (340) применима только при условии $|\mathbf{u}_b| \neq 0^*$. Аналогичная оговорка должна быть учтена и в общем случае, т. е. при отбрасывании вкладов пакетов с очень малыми значениями σ_{\neq} следует вырезать окрестности фазового пространства, внутри которых определители $|\mathfrak{R}_s|$ и $|\mathfrak{R}_d|$, вычисленные в таком приближении, обращаются в нуль. Как правило, такие области расположены вблизи кинематических границ фазового пространства и не дают вклада в экспериментально измеряемые характеристики.

Согласно (329) алгебраические дополнения $\mathfrak{A}_d^{\mu\nu}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_d^{00} &= \sigma_3^2[\sigma_3^2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2\Gamma_b^2 + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell^2) + \sigma_b^2\sigma_\ell^2|\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_\ell|^2], \\ \mathfrak{A}_d^{0i} &= \sigma_3^2\{\sigma_b^2[(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)\Gamma_b + \sigma_\ell^2(u_b u_\ell)]u_{bi} + \sigma_\ell^2[(\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2)\Gamma_\ell + \sigma_b^2(u_b u_\ell)]u_{\ell i}\}, \\ \mathfrak{A}_d^{ii} &= \sigma_b^2(\sigma_3^2\sigma_b^2 - \sigma_a^2\sigma_\ell^2\mathbf{u}_\ell^2)u_{bi}^2 + \sigma_\ell^2(\sigma_3^2\sigma_\ell^2 - \sigma_a^2\sigma_b^2\mathbf{u}_b^2)u_{\ell i}^2 + \\ &\quad + 2\sigma_b^2\sigma_\ell^2[\sigma_a^2\Gamma_b\Gamma_\ell + (\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)(u_b u_\ell)]u_{bi}u_{\ell i} + \sigma_3^{-2}|\mathfrak{R}_d|, \\ \mathfrak{A}_d^{jk} &= \sigma_b^2(\sigma_3^2\sigma_b^2 - \sigma_a^2\sigma_\ell^2\mathbf{u}_\ell^2)u_{bj}u_{bk} + \sigma_\ell^2(\sigma_3^2\sigma_\ell^2 - \sigma_a^2\sigma_b^2\mathbf{u}_b^2)u_{\ell j}u_{\ell k} + \\ &\quad + \sigma_b^2\sigma_\ell^2[\sigma_a^2\Gamma_b\Gamma_\ell + (\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)(u_b u_\ell)](u_{bj}u_{\ell k} + u_{bk}u_{\ell j}), \quad j \neq k.\end{aligned}\tag{341}$$

Отсюда для произвольного 4-вектора q получаем

$$\begin{aligned}|\mathfrak{R}_d|\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}q_\mu q_\nu &= \mathfrak{A}_d^{00}q_0^2 + \sum_i(-2\mathfrak{A}_d^{0i}q_0 + \mathfrak{A}_d^{ii}q_i)q_i + 2\sum_{j<k}\mathfrak{A}_d^{jk}q_j q_k = \\ &= \sigma_3^2[\sigma_3^2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2\Gamma_b^2 + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell^2) + \sigma_b^2\sigma_\ell^2|\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_\ell|^2]q_0^2 - \\ &\quad - 2\sigma_3^2\sigma_b^2[(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)\Gamma_b + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell(u_b u_\ell)](\mathbf{u}_b \mathbf{q})q_0 - \\ &\quad - 2\sigma_3^2\sigma_\ell^2[(\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2)\Gamma_\ell + \sigma_b^2\Gamma_b(u_b u_\ell)](\mathbf{u}_\ell \mathbf{q})q_0 + \\ &\quad + \sigma_3^2[\sigma_b^4(\mathbf{u}_b \mathbf{q})^2 + \sigma_\ell^4(\mathbf{u}_\ell \mathbf{q})^2 + 2\sigma_b^2\sigma_\ell^2(u_b u_\ell)(\mathbf{u}_b \mathbf{q})(\mathbf{u}_\ell \mathbf{q}) + \\ &\quad + \sigma_a^2\sigma_b^2\sigma_\ell^2\{[(\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_\ell)\mathbf{q}]^2 - (\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_\ell)^2\mathbf{q}^2\} + \sigma_3^{-2}|\mathfrak{R}_d|\mathbf{q}^2.\end{aligned}$$

Компоненты 4-импульса Y_d найдем, используя (341):

$$Y_d^0 = \frac{\sigma_3^2}{|\mathfrak{R}_d|}(c_a^0 m_a - c_b^0 E_b - c_\ell^0 E_\ell), \quad \mathbf{Y}_d = \frac{\sigma_3^2}{|\mathfrak{R}_d|}(c_b \mathbf{u}_b + c_\ell \mathbf{u}_\ell).$$

Напомним, что величина $|\mathbf{u}_\ell^|$ в (332) всегда отлична от нуля.

Фигурирующие здесь коэффициентные функции даются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 c_a^0 &= \sigma_a^2(\sigma_3^2 + \sigma_b^2\Gamma_b^2 + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell^2) + \sigma_b^2\sigma_\ell^2[(\Gamma_b\Gamma_\ell - 1)^2 - (\mathbf{u}_b\mathbf{u}_\ell)^2] + (\sigma_b^2\Gamma_b + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell)^2, \\
 c_b^0 &= \sigma_3^2[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_\ell^2\Gamma_\ell^2(1 - \mathbf{v}_b\mathbf{v}_\ell)], \\
 c_\ell^0 &= \sigma_3^2[\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2 + \sigma_b^2\Gamma_b^2(1 - \mathbf{v}_b\mathbf{v}_\ell)], \\
 c_b &= \sigma_b^2\{[m_a\sigma_\ell^2\Gamma_\ell - m_\ell(\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)](u_b u_\ell) + m_a\sigma_b^2\Gamma_b - m_b(\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)\} + \\
 &\quad + \sigma_a^2\{m_b\sigma_\ell^2\mathbf{u}_\ell^2 + \sigma_b^2[\Gamma_b(m_a - m_\ell\Gamma_\ell) - m_b]\}, \\
 c_\ell &= \sigma_\ell^2\{[m_a\sigma_b^2\Gamma_b - m_b(\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)](u_b u_\ell) + m_a\sigma_\ell^2\Gamma_\ell - m_\ell(\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)\} + \\
 &\quad + \sigma_a^2\{m_\ell\sigma_b^2\mathbf{u}_b^2 + \sigma_\ell^2[\Gamma_\ell(m_a - m_b\Gamma_b) - m_\ell]\}.
 \end{aligned}$$

Как и должно быть, вышеприведенные выражения симметричны по отношению к замене индексов $b \leftrightarrow \ell$, а их явно нековариантная форма связана с использованием специальной системы отсчета.

Пл.4.2. ПВ₀-предел. В ПВ₀-пределе кинематика реакции $2 \rightarrow 2$ позволяет записать величины $|\mathfrak{R}_d|$, $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ и $\mathbf{Y}_d|$ в терминах двух произвольных независимых инвариантных переменных; мы будем использовать стандартную пару переменных

$$s = (p_a + p_\nu)^2 = m_a(2E_\nu + m_a) \quad \text{и} \quad Q^2 = -(p_\nu - p_\ell)^2.$$

Для того чтобы записать выражения предыдущего раздела через эти переменные, примем во внимание точные кинематические соотношения:

$$\begin{aligned}
 E_b &= \frac{1}{m_a}(E_b^* E_a^* - E_\nu^* P_\ell^* \cos \theta_*), & \mathbf{p}_b \mathbf{p}_\nu &= \frac{E_\nu}{m_a}(E_b^* E_\nu^* - E_a^* P_\ell^* \cos \theta_*), \\
 E_\ell &= \frac{1}{m_a}(E_\ell^* E_a^* + E_\nu^* P_\ell^* \cos \theta_*), & \mathbf{p}_\ell \mathbf{p}_\nu &= \frac{E_\nu}{m_a}(E_\ell^* E_\nu^* + E_a^* P_\ell^* \cos \theta_*), \\
 |\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_\ell| &= \frac{E_\nu P_\ell^* \sin \theta_*}{m_b m_\ell}, & (\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_\ell) \mathbf{p}_\nu &= 0, \\
 u_b u_\ell &= \frac{s - m_b^2 - m_\ell^2}{2m_b m_\ell}, & V_{b\ell} &= \frac{2\sqrt{s} P_\ell^*}{s - m_b^2 - m_\ell^2},
 \end{aligned}$$

в которых $E_\nu = |\mathbf{p}_\nu| = (s - m_a^2)/2m_a$ и $\mathbf{p}_\nu = E_\nu \mathbf{l}$ есть, соответственно, энергия и импульс безмассового нейтрино в лабораторной системе отсчета, а

$$\begin{aligned}
 E_\nu^* &= \frac{s - m_a^2}{2\sqrt{s}}, & E_\ell^* &= \frac{s + m_\ell^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}, \\
 E_a^* &= \frac{s + m_a^2}{2\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad E_b^* &= \frac{s - m_\ell^2 + m_b^2}{2\sqrt{s}}
 \end{aligned}$$

есть энергии частиц ν^* , ℓ , a и b в с.ц.м. сталкивающихся частиц ν^* и a , которая задается условиями

$$E_\nu^* + E_a^* = E_b^* + E_\ell^*, \quad \mathbf{p}_\nu^* + \mathbf{p}_a^* = \mathbf{p}_\ell^* + \mathbf{p}_b^* = 0;$$

наконец, $P_\ell^* = |\mathbf{p}_\ell^*|$. Угол рассеяния лептона θ_* в с.ц.м. связан с Q^2 :

$$Q^2 = 2E_\nu^*(E_\ell^* - P_\ell^* \cos \theta_*) - m_\ell^2.$$

Кинематически допустимая область фазового пространства дается неравенствами

$$s \geq s_{\text{th}} = \max[m_a^2, (m_b + m_\ell)^2], \quad (342)$$

$$Q_-^2 \leq Q^2 \leq Q_+^2, \quad Q_\pm^2 = 2E_\nu^*(E_\ell^* \pm P_\ell^*) - m_\ell^2. \quad (343)$$

Теперь после элементарных, хотя и довольно громоздких, алгебраических преобразований находим

$$\begin{aligned} \{|\mathfrak{R}_d|\} &= \frac{\sigma_3^2}{4m_a^2 m_b^2 m_\ell^2} \sum_{k,l=0}^2 A_{kl} s^k Q^{2l}, \\ \{|\mathfrak{R}_d| \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu\} &= \frac{\sigma_3^2}{4m_a^2 m_b^2 m_\ell^2} \sum_{k,l=0}^2 B_{kl} s^k Q^{2l}, \\ \{|\mathfrak{R}_d| \mathbf{Y}_d \mathbf{q}\} &= \frac{\sigma_3^2}{8m_a^2 m_b^2 m_\ell^2} \sum_{k,l=0}^3 C_{kl} s^k Q^{2l}. \end{aligned}$$

Отличные от нуля коэффициенты A_{kl} , B_{kl} ($0 \leq k, l \leq 2$) и C_{kl} ($0 \leq k, l \leq 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} A_{00} &= \sigma_b^2 m_a^2 m_\ell^2 [\sigma_a^2 (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) (m_a^2 - 2m_b^2) + \\ &\quad + \sigma_\ell^2 (\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2) (m_\ell^2 - 2m_b^2) - 3\sigma_a^2 \sigma_\ell^2 m_b^2] + \\ &\quad + \sigma_3^2 m_b^2 [\sigma_b^2 m_b^2 (\sigma_a^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_a^2) + \sigma_a^2 \sigma_\ell^2 (m_b^4 - 4m_a^2 m_\ell^2)], \\ A_{01} &= \sigma_a^2 \{ \sigma_b^2 [2\sigma_a^2 m_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2) + \sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) (m_a^2 + 2m_b^2)] + \\ &\quad + 2[\sigma_b^4 m_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2) + \sigma_\ell^2 m_b^4 (\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2)] \}, \\ A_{02} &= \sigma_3^2 \sigma_a^2 (\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2), \\ A_{10} &= -\sigma_\ell^2 \{ \sigma_b^2 [\sigma_a^2 (m_a^2 + m_b^2) (2m_b^2 + m_\ell^2) + 2\sigma_\ell^2 m_a^2 (m_b^2 + m_\ell^2)] + \\ &\quad + 2[\sigma_b^4 m_a^2 (m_b^2 + m_\ell^2) + \sigma_a^2 m_b^4 (\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2)] \}, \\ A_{11} &= -\sigma_a^2 \sigma_\ell^2 [\sigma_b^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) + 2\sigma_3^2 m_b^2], \\ A_{12} &= -\sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_\ell^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{20} &= \sigma_3^2 \sigma_\ell^2 (\sigma_a^2 m_b^2 + \sigma_b^2 m_a^2), \\
 A_{21} &= \sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_\ell^2; \\
 B_{00} &= m_a^2 m_\ell^2 \{ \sigma_\ell^2 (m_a^2 + m_\ell^2) [\sigma_a^2 (m_a^2 + m_b^2) + \sigma_b^2 (m_a^2 + m_\ell^2)] + \\
 &\quad + \sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) \} + m_b^2 (\sigma_a^4 m_a^2 + \sigma_\ell^4 m_\ell^2 + \sigma_a^2 \sigma_\ell^2 m_b^2), \\
 B_{01} &= m_a^2 \{ 2 \sigma_\ell^4 m_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) [\sigma_b^2 (m_a^2 + 2m_\ell^2) + \sigma_a^2 m_b^2] + \\
 &\quad + \sigma_b^2 m_\ell^2 [\sigma_a^2 (2m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) + 2\sigma_b^2 (m_\ell^2 + m_a^2)] \}, \\
 B_{02} &= \sigma_3^2 m_a^2 (\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2), \\
 B_{10} &= -m_\ell^2 \{ \sigma_\ell^2 [\sigma_b^2 m_a^2 (m_a^2 + m_b^2 + 2m_\ell^2) + \sigma_a^2 m_b^2 (m_a^2 + m_b^2)] + \\
 &\quad + \sigma_a^2 \sigma_b^2 (m_a^2 + m_b^2) (m_\ell^2 + 2m_a^2) + 2m_a^2 [\sigma_a^4 m_b^2 + \sigma_b^4 (m_\ell^2 + m_a^2)] \}, \\
 B_{11} &= -[2\sigma_3^2 \sigma_b^2 m_a^2 m_\ell^2 + (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) (\sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 \sigma_a^2 m_b^2)], \\
 B_{12} &= -(\sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 \sigma_a^2 m_b^2), \\
 B_{20} &= \sigma_3^2 m_\ell^2 (\sigma_a^2 m_b^2 + \sigma_b^2 m_a^2), \\
 B_{21} &= \sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 \sigma_a^2 m_b^2; \\
 C_{00} &= m_a^2 m_\ell^2 \{ \sigma_a^2 [\sigma_b^2 (m_a^4 + m_a^2 m_\ell^2 - m_a^2 m_b^2 + m_\ell^2 m_b^2) + \sigma_\ell^2 m_b^2 (m_b^2 - 2m_a^2)] + \\
 &\quad + (\sigma_b^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2 + \sigma_b^2 m_\ell^2) [\sigma_b^2 m_a^2 + (2m_\ell^2 - m_b^2) (\sigma_\ell^2 + \sigma_b^2)] \}, \\
 C_{01} &= m_a^2 \{ \sigma_a^2 [\sigma_b^2 (2m_a^2 m_\ell^2 + m_b^2 m_\ell^2 + m_\ell^4) + \sigma_\ell^2 m_b^2 (m_\ell^2 + m_b^2)] + \\
 &\quad + \sigma_\ell^4 m_b^2 (3m_\ell^2 - m_b^2) + \sigma_b^4 m_\ell^2 (2m_a^2 - m_b^2 + 3m_\ell^2) + \\
 &\quad + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) (m_a^2 - m_b^2 + 3m_\ell^2) \}, \\
 C_{02} &= m_a^2 \sigma_3^2 (m_b^2 \sigma_\ell^2 + \sigma_b^2 m_\ell^2), \\
 C_{10} &= -m_\ell^2 \{ \sigma_a^2 [\sigma_b^2 (2m_a^4 - 2m_a^2 m_b^2 + m_a^2 m_\ell^2 + m_b^2 m_\ell^2) + \sigma_\ell^2 m_b^2 (m_b^2 - 3m_a^2)] + \\
 &\quad + \sigma_b^4 [2m_a^2 (m_a^2 - m_b^2) + m_\ell^2 (3m_a^2 - m_b^2)] - \sigma_\ell^4 m_b^2 (m_a^2 + m_b^2) + \\
 &\quad + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 [m_a^2 (2m_a^2 + 4m_\ell^2 - 3m_b^2) - m_b^2 (m_b^2 + m_\ell^2)] \}, \\
 C_{11} &= -\sigma_a^2 [\sigma_b^2 m_\ell^2 (3m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) + \sigma_\ell^2 m_b^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2)] - \\
 &\quad - \sigma_b^4 m_\ell^2 (m_a^2 - m_b^2 - m_\ell^2) + \sigma_\ell^4 m_b^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) + \\
 &\quad + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 [(m_b^2 + m_\ell^2)^2 - m_a^2 (m_a^2 - m_b^2 + 3m_\ell^2)], \\
 C_{12} &= -\sigma_a^2 (\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2) - \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (m_a^2 - m_b^2 - m_\ell^2) + \sigma_b^4 m_\ell^2 + \sigma_\ell^4 m_b^2, \\
 C_{20} &= m_\ell^2 \{ \sigma_a^2 [\sigma_b^2 (m_a^2 - m_b^2) - \sigma_\ell^2 m_b^2] + \sigma_b^4 (m_a^2 - m_b^2) - \sigma_\ell^2 m_b^2 (\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2) + \\
 &\quad + 2\sigma_b^2 (\sigma_\ell^2 m_a^2 - \sigma_\ell^2 m_b^2) \}, \\
 C_{21} &= \sigma_a^2 (\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2) - 2\sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) - \sigma_b^4 m_\ell^2 - \sigma_\ell^4 m_b^2, \\
 C_{22} &= -\sigma_b^2 \sigma_\ell^2, \\
 C_{31} &= \sigma_b^2 \sigma_\ell^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, квадратичная форма $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ и скалярное произведение $\mathbf{Y}_d \mathbf{q}$ являются рациональными функциями двух переменных s и Q^2 :

$$\left\{ \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \right\} = \frac{\sum_{k,l} B_{kl} s^k Q^{2l}}{\sum_{k,l} A_{kl} s^k Q^{2l}} \equiv \mathfrak{F}_d(s, Q^2),$$

$$\left\{ \mathbf{Y}_d \mathbf{q} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k,l} C_{kl} s^k Q^{2l}}{\sum_{k,l} A_{kl} s^k Q^{2l}} \equiv n_d(s, Q^2) \mathfrak{F}_d(s, Q^2).$$

Здесь мы ввели функцию*

$$n_d = \frac{\{\mathbf{Y}_d \mathbf{l}\}}{\{\mathbf{Y}_d \mathbf{l}\}} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k,l} C_{kl} s^k Q^{2l}}{\sum_{k,l} B_{kl} s^k Q^{2l}}.$$

Полезно также ввести функцию \mathfrak{D}_d с помощью следующего определения:

$$\frac{\mathfrak{D}_d^2}{E_\nu^2} = \frac{1}{2\mathfrak{F}_d} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k,l} A_{kl} s^k Q^{2l}}{\sum_{k,l} B_{kl} s^k Q^{2l}}.$$

Хотя ни \mathfrak{D}_d , ни n_d не имеют сами по себе очевидного физического смысла, они полезны для иллюстрации поведения интересующих нас функций \mathfrak{D} и n в том специальном случае, когда можно пренебречь соответствующими вкладками в \mathfrak{D} и n , обусловленными реакцией в источнике**, а именно, при выполнении условий

$$\left\{ \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \right\} \gg \left\{ \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \right\} \quad \text{и} \quad \{|\mathbf{Y}_d \mathbf{l}|\} \gg \{|\mathbf{Y}_s \mathbf{l}|\}.$$

В простейшем частном случае, когда $\sigma_a/m_a = \sigma_b/m_b = \sigma_\ell/m_\ell = \lambda = \text{const}$ (эти соотношения описывают своеобразный скейлинг эффективных размеров пакетов), можно показать, что функции $\lambda^2 \mathfrak{F}_d$ (а следовательно, и \mathfrak{D}_d/λ) и n_d не зависят от параметра λ и определяются исключительно

* Следует обратить внимание, что в отличие от \mathfrak{F}_d функция n_d не является релятивистским инвариантом, несмотря на то, что выражается (в л. с.) в терминах двух инвариантов.

** Этот случай прямо противоположен рассмотренному в качестве примера в приложении П1.3.2.

кинематикой. Области определения функций \mathfrak{F}_d и n_d ограничены кинематическими условиями (342), (343), и различия формы поверхностей, изображенных на разных панелях, обусловлены главным образом разными порогами реакции (342), т. е., по существу, массами конечных лептонов. Поэтому различия нивелируются при достаточно высоких энергиях, т. е. при $s \gg \max(s_{\text{th}})$. Обращение функции \mathfrak{F}_d в нуль при $E_\nu \rightarrow 0$ для беспороговой реакции $\nu n \rightarrow pe^-$ не имеет отношения к нашей задаче, ограниченной рассмотрением ультррелятивистских нейтрино*.

В общем случае поведение функций \mathfrak{F}_d и n_d становится гораздо более сложным. Разумеется, это предположение, принятое здесь исключительно в иллюстративных целях, совершенно произвольно и, более того, совершенно нереалистично. В более реалистичной ситуации, $\sigma_\pi/m_\pi \lll 1$, даже функция $\log(\mathfrak{F}_d)$ очень сильно изменяется внутри своей области определения и детали ее поведения труднопроизводимы на двумерном графике. Для лучшего понимания свойств функций \mathfrak{F}_d и n_d рассмотрим здесь наиболее важные предельные случаи, асимптотики и неравенства.

Пл.4.3. Низкоэнергетические пределы функций \mathfrak{F}_d и n_d . Пределы функций \mathfrak{F}_d и n_d на кинематическом пороге квазиупругой реакции $\nu + b \rightarrow b + \ell$ в детекторе имеют следующий вид**:

$$\mathfrak{F}_d(s_{\text{th}}, Q_{\text{th}}^2) = \frac{(m_b + m_\ell)^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2},$$

$$n_d(s_{\text{th}}, Q_{\text{th}}^2) = \frac{(\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2)[m_a^2 - (m_b + m_\ell)^2]}{2[\sigma_a^2(m_b + m_\ell)^2 + \sigma_b^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 m_a^2]}.$$

Здесь предполагается, что $m_a < m_b + m_\ell$. Пороговые значения величин s и Q^2 равны при этом

$$s_{\text{th}} = (m_b + m_\ell)^2 \quad \text{и} \quad Q_{\text{th}}^2 = m_\ell \left(m_b - \frac{m_a^2}{m_b + m_\ell} \right).$$

Для беспороговой реакции ($m_a > m_b + m_\ell$, $s_{\text{th}} = m_a^2$, $Q_{\text{th}}^2 = -m_\ell^2$) находим

$$\mathfrak{F}_d(s_{\text{th}}, Q_{\text{th}}^2) = 0,$$

$$n_d(s_{\text{th}}, Q_{\text{th}}^2) = 1 - \frac{\sigma_3^2 [2\sigma_a^2 m_b^2 + \sigma_b^2 (m_a^2 + m_b^2 - m_\ell^2)]}{2[\sigma_a^2 \sigma_b^2 (m_a^2 + m_b^2 - m_\ell^2) + \sigma_a^4 m_b^2 + \sigma_b^4 m_a^2]}.$$

*Напомним, что в случае $E_\nu \sim m_j$ формулы для дисперсии сильнейшим образом видоизменяются, см. п. 7.2.2.

**Все формулы написаны в «ПВ₀-пределе», предполагающем точный закон сохранения энергии-импульса в реакции $2 \rightarrow 2$ плюс $m_j = 0$, $\forall j$. Кроме того, предполагается, если не оговорено противного, что все параметры σ_π отличны от нуля.

Таким образом, точное обращение функции \mathfrak{F}_d в нуль возможно только для беспороговой реакции (например, $\nu n \rightarrow pe$) при $E_\nu = 0$. Разумеется, этот формальный предел выходит далеко за рамки ультррелятивистского приближения $E_\nu^2 \gg \max(m_j^2)$, использованного при выводе формул для функций \mathfrak{F}_d и n_d , и практического значения не имеет, поскольку все современные нейтринные эксперименты работают исключительно с пучками ультррелятивистских нейтрино и антинейтрино*. Интересно отметить при этом, что предел \mathfrak{F}_d при $E_\nu = \max(m_j) \equiv m_\nu$ и $Q^2 = -m_\ell^2$ (для беспороговой реакции), который дается выражением

$$\frac{4m_a^2 m_\ell^2 m_\nu^2}{\sigma_3^2 \sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_\ell^2} \left[\frac{\sigma_a^2 \sigma_b^2 (m_a^2 + m_b^2 - m_\ell^2) + \sigma_b^4 m_a^2 + \sigma_a^4 m_b^2}{(m_a^2 - m_b^2)^2 - 2m_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2)^2 + m_\ell^4} \right] \left(\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \right)^{-1},$$

все еще может быть большим по величине, если по крайней мере два из трех параметров σ_a , σ_b и σ_ℓ малы по сравнению с m_ν .

П1.4.4. Высокоэнергетические асимптотики функций \mathfrak{F}_d и n_d . В предположении, что $\sigma_{a,b,\ell} \neq 0$ и $Q^2 < \infty$, асимптотическое поведение функций $\mathfrak{F}_d(s, Q^2)$ и $n_d(s, Q^2)/s$ при высоких энергиях не зависит от переменной s , а именно:

$$\mathfrak{F}_d(s, Q^2) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} - \left(\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} \right)^2 \left(\frac{Q^2}{\sigma_3^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} \right)^{-1},$$

$$n_d(s, Q^2) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{s}{2\sigma_a^2} \left[\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{\sigma_3^2 m_\ell^2}{\sigma_\ell^2 Q^2} \left(\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} \right) \right]^{-1}.$$

Эти асимптотики удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} < \mathfrak{F}_d(s, Q^2) < \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2},$$

$$\frac{\sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (m_b^2 - m_a^2)}{2\sigma_3^2 (\sigma_a^2 m_b^2 + \sigma_b^2 m_a^2)} < n_d(s, Q^2) < \frac{s}{2m_a^2} \left[1 + \frac{\sigma_a^2}{m_a^2} \left(\frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \right) \right]^{-1}$$

($s \rightarrow \infty$, $Q^2 < \infty$), а их предельные значения на кинематических границах таковы:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathfrak{F}_d(s, Q_-^2) = \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} n_d(s, Q_-^2) = \frac{\sigma_b^2 (m_a^2 - m_b^2) - \sigma_\ell^2 m_b^2}{2(\sigma_a^2 m_b^2 + \sigma_b^2 m_a^2)},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathfrak{F}_d(s, Q_+^2) = \frac{m_b^2}{\sigma_b^2}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} n_d(s, Q_+^2) = \frac{\sigma_\ell^2 (m_a^2 - m_\ell^2) - \sigma_b^2 m_\ell^2}{2(\sigma_a^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_a^2)}.$$

*Здесь уместно напомнить, что более общий анализ, охватывающий нерелятивистский случай, представляет потенциальный интерес в контексте изучения возможности детектирования реликтовых нейтрино, а также для ускорительных и астрофизических экспериментов по поиску гипотетических сверхтяжелых нейтрино и «кэвных» стерильных нейтрино.

Эти величины, как видим, симметричны по отношению к замене индексов $b \leftrightarrow \ell$. Пороговые значения $n_d(s, Q_\pm^2)$ обращаются в нуль при специфических соотношениях между параметрами σ_\varkappa и массами. В этих экзотических случаях нужно учесть следующие ($\sim 1/s$) поправки.

В частном случае, когда частица-мишень a есть нуклон, из динамических соображений следует, что при высокой энергии нейтрино средний угол рассеяния в с. ц. м., $\langle \theta_* \rangle$, равен по порядку величины обратному лоренцевскому фактору лептона $\Gamma_\ell^* = E_\ell^*/m_\ell$. Поэтому $\langle Q^2 \rangle \sim m_\ell^2$ и $\langle \theta \rangle \sim m_\ell/\sqrt{s}$, где θ есть угол рассеяния лептона в л. с. (совпадающей с с. с. о. нуклона). Можно показать, что соответствующие асимптотики функций \mathfrak{F}_d и n_d имеют вид

$$\mathfrak{F}_d(s, m_\ell^2) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \left[1 + \frac{\sigma_\ell^2}{\sigma_3^2} \left(\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} \right) \left(\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_3^2} \right)^{-1} \right] < 2 \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2},$$

$$n_d(s, m_\ell^2) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sigma_b^2 \sigma_\ell^2 s}{2 [(\sigma_b^2 m_a^2 + \sigma_a^2 m_b^2) (\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\sigma_\ell^2) + \sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2]} < \frac{E_\nu}{2m_a}.$$

Поскольку при высоких энергиях существенный вклад в скорость счета квазиупругих событий дает лишь узкая область углов, близких к $\theta = \langle \theta \rangle$, можно заключить, что эффективное асимптотическое значение \mathfrak{F}_d является практически константой, которая определяется в основном величиной дисперсии импульса лептонного ВП, σ_ℓ . При этом произвольные* вариации параметров σ_a и σ_b могут изменить асимптотику лишь в пределах фактора 2.

Асимптотическое поведение $\mathfrak{F}_d(s, Q^2)$ резко изменяется, если один (и только один) из параметров σ_\varkappa обращается в нуль. При этом в случае $\sigma_a = 0$ или $\sigma_b = 0$ асимптотика не зависит от s :

$$\mathfrak{F}_d(s, Q^2) \underset{s \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{Q^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} & \text{при } \sigma_a = 0, \\ \frac{Q^2}{\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} & \text{при } \sigma_b = 0, \end{cases}$$

а при $\sigma_\ell = 0$ квадратично растет с s :

$$\mathfrak{F}_d(s, Q^2) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{Q^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} + \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} \right) s^2}{(Q^2 + m_a^2 + m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} \quad \text{при } \sigma_\ell = 0.$$

Другие переменные. Некоторые свойства функции \mathfrak{F}_d становятся более прозрачными, если записать ее в терминах переменных E_ν и θ_* . Рассмотрим

* Не нарушающие, разумеется, условия применимости модели СРПМ.

асимптотическое разложение \mathfrak{F}_d при $E_\nu \rightarrow \infty$ и фиксированном значении угла θ_* . Для не слишком малых значений $\sin \theta_*$ она может быть записана как

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_d(E_\nu, \theta_*) &= \frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} - \frac{a_1 \sigma_3^2}{2m_a E_\nu \sin^2 \theta_*} \times \\ &\times \left\{ \left[\left(\frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \right) \cos \theta_* + \left(\frac{m_b^2 \sigma_\ell^2 - m_\ell^2 \sigma_b^2}{m_\ell^2 \sigma_b^2 + m_b^2 \sigma_\ell^2} \right) \left(\frac{2m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \right) \right]^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{4m_a m_b m_\ell}{\sigma_a \sigma_b \sigma_\ell} \right)^2 \left(\frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \right)^{-2} \left(\frac{m_a^2}{\sigma_a^2} + \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} + \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \right) \right\} + \frac{1}{\sin^4 \theta_*} \mathcal{O} \left(\frac{m_a^2}{E_\nu^2} \right). \end{aligned}$$

При $\sin \theta_* = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_d(E_\nu, 0) &= \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \left[1 - \frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a E_\nu} + \mathcal{O} \left(\frac{m_a^2}{E_\nu^2} \right) \right], \\ \mathfrak{F}_d(E_\nu, \pi) &= \frac{m_b^2}{\sigma_b^2} \left[1 - \frac{m_a^2 - m_\ell^2}{m_a E_\nu} + \mathcal{O} \left(\frac{m_a^2}{E_\nu^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, при высоких энергиях $\langle \theta_* \rangle \sim \Gamma_\ell^* = E_\ell^*/m_\ell$. Можно показать, что соответствующее асимптотическое разложение имеет вид

$$\mathfrak{F}_d \left(E_\nu, \theta_* = \frac{1}{\Gamma_\ell^*} \right) = \frac{m_\ell^2}{\sigma_\ell^2} \left[b_0 - \frac{b_1 \sigma_3^2}{m_a (b_0 - 1)^2 E_\nu} + \mathcal{O} \left(\frac{m_a^2}{E_\nu^2} \right) \right],$$

где

$$b_0 = 1 + \frac{\sigma_\ell^2 (m_b^2 \sigma_a^2 + m_a^2 \sigma_b^2)}{\sigma_3^2 (m_b^2 \sigma_a^2 + m_a^2 \sigma_b^2) + m_\ell^2 \sigma_a^2 \sigma_b^2},$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 8\sigma_\ell^2 (m_b^2 \sigma_a^2 + m_a^2 \sigma_b^2)^3 \times \\ &\times \left[m_b^2 \left(m_a^2 - m_b^2 + \frac{m_\ell^2}{3} \right) \sigma_a^2 + m_a^2 \left(m_a^2 - m_b^2 + \frac{4m_\ell^2}{3} \right) \sigma_b^2 \right] + \\ &+ 2\sigma_\ell^2 (m_b^2 \sigma_a^2 + m_a^2 \sigma_b^2) [m_b^2 \sigma_a^4 + (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) \sigma_a^2 \sigma_b^2 + m_a^2 \sigma_b^4] \times \\ &\times [m_b^2 (m_a^2 - m_b^2 - m_\ell^2) \sigma_a^2 + m_a^2 (m_a^2 - m_b^2 + m_\ell^2) \sigma_b^2]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что эффективное асимптотическое значение $\mathfrak{F}_d(E_\nu, \theta_*)$ практически постоянно и с учетом того, что $1 < b_0 < 2$, его величина определяется в основном дисперсией импульса лептонного пакета.

Случай сильной иерархии. Функция $\mathfrak{F}_d(s, Q^2)$ значительно упрощается в случае сильной иерархии между величинами параметров σ_a , σ_b и σ_ℓ .

Вычисляя соответствующие последовательные пределы, находим

$$\mathfrak{F}_d(s, Q^2) \approx \begin{cases} \frac{(Q^2 + m_\ell^2)^2}{(s - Q^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_a}{\sigma_a}\right)^2 & \text{при } \sigma_\ell \gg \sigma_a \gg \sigma_b, \\ \frac{(Q^2 + m_\ell^2)^2}{(s - m_b^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_b^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_b}{\sigma_b}\right)^2 & \text{при } \sigma_\ell \gg \sigma_b \gg \sigma_a, \\ \frac{(s - m_a^2)^2}{(Q^2 + m_a^2 + m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} \left(\frac{m_b}{\sigma_b}\right)^2 & \text{при } \sigma_a \gg \sigma_b \gg \sigma_\ell, \\ \frac{(s - m_a^2)^2}{(s - Q^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_\ell}{\sigma_\ell}\right)^2 & \text{при } \sigma_a \gg \sigma_\ell \gg \sigma_b, \\ \frac{(s - Q^2 - m_a^2 - m_\ell^2)^2}{(s - m_b^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_b^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_\ell}{\sigma_\ell}\right)^2 & \text{при } \sigma_b \gg \sigma_\ell \gg \sigma_a, \\ \frac{(s - Q^2 - m_a^2 - m_\ell^2)^2}{(Q^2 + m_a^2 + m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} \left(\frac{m_a}{\sigma_a}\right)^2 & \text{при } \sigma_b \gg \sigma_a \gg \sigma_\ell. \end{cases}$$

Отсюда видно, в частности, что* ни наибольший, ни наименьший из трех параметров σ_κ не влияет на форму и величину функции $\mathfrak{F}_d(s, Q^2)$. Это нетривиальное свойство можно обобщить на случай процессов с произвольным числом частиц в конечном состоянии. При этом в случае сильной иерархии значений σ_κ единственным существенным параметром является вторая по величине дисперсия после наибольшей. Этот факт полезен при анализе многочастичных процессов (с числом внешних пакетов больше 2), поскольку позволяет рассматривать пакеты с очень малыми (по сравнению с остальными) σ_κ как плоские волны. В частности, значительно упрощается расчет радиационных поправок с плосковолновыми фотонами во внешних линиях фейнмановских диаграмм, поскольку он может проводиться с использованием стандартных методов КТП. Напомним, что учет петлевых электрослабых поправок не приводит к дополнительным вычислительным усложнениям, связанным с ВП формализмом, поскольку все они формально включены в соответствующие матричные элементы и никак не связаны с характеристиками внешних in- и out-состояний. По соглашению, принятому в основном тексте, калибровочные бозоны также не могут фигурировать в качестве внешних линий диаграмм.

* При сильной иерархии масштабов дисперсий импульсов внешних пакетов, но не в самом общем случае.

П1.5. Трехчастичный распад в источнике. Общие формулы, описывающие трехчастичный распад $a \rightarrow b + \ell + \nu_*$, формально совпадают с таковыми для рассеяния $2 \rightarrow 2$, если рассматривать их в с. с. о. частицы a . Главное различие обусловлено кинематикой. Поэтому мы рассмотрим этот случай кратко. Подобно случаю рассеяния $2 \rightarrow 2$, функции $|\mathfrak{R}_s|$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ могут быть записаны в терминах двух независимых инвариантных переменных, в качестве которых можно использовать, например, любую пару инвариантов

$$\begin{aligned} s_1 &= (p_b + p_\ell)^2 = (p_a - p_\nu)^2, \\ s_2 &= (p_\nu + p_\ell)^2 = (p_a - p_b)^2, \\ s_3 &= (p_\nu + p_b)^2 = (p_a - p_\ell)^2, \end{aligned}$$

связанных тождеством $s_1 + s_2 + s_3 = m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2$. Физическая область для этих переменных задается условиями

$$(m_b + m_\ell)^2 \leq s_1 \leq m_a^2, \quad m_\ell^2 \leq s_2 \leq (m_a - m_\ell)^2, \quad m_b^2 \leq s_3 \leq (m_a - m_b)^2.$$

Для определенности будем использовать пару (s_1, s_2) . Областью определения для этой пары является диаграмма Далитца

$$s_1^- \leq s_1 \leq s_1^+, \quad m_\ell^2 \leq s_2 \leq (m_a - m_\ell)^2,$$

где

$$s_1^\pm = m_b^2 + m_\ell^2 - \frac{(s_2 + m_b^2)(s_2 - m_a^2 + m_\ell^2) \mp (s_2 - m_b^2)\sqrt{(s_2 - m_a^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_a^2 m_\ell^2}}{2s_2}.$$

Воспользовавшись результатами предыдущего пункта, найдем, например,

$$\begin{aligned} \{|\mathfrak{R}_s|\} &= \frac{\sigma_3^2}{4m_a^2 m_b^2 m_\ell^2} \sum_{k,l=0}^2 A'_{kl} s_1^k s_2^l, \\ \{\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu\} &= \frac{\sigma_3^2}{4m_a^2 m_b^2 m_\ell^2} \sum_{k,l=0}^2 B'_{kl} s_1^k s_2^l. \end{aligned}$$

Следовательно, квадратичная форма $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ является рациональной функцией переменных s_1 и s_2 ,

$$\{\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu\} = \frac{\sum_{k,l} B'_{kl} s_1^k s_2^l}{\sum_{k,l} A'_{kl} s_1^k s_2^l} \equiv \mathfrak{F}_s(s_1, s_2).$$

Отличные от нуля коэффициенты A'_{kl} и B'_{kl} ($0 \leq k, l \leq 2$) имеют вид

$$\begin{aligned}
 A'_{00} &= \sigma_\ell^2 [\sigma_a^2 m_b^2 (\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2) (m_a^2 - m_\ell^2)^2 + \sigma_b^2 m_a^2 (\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2) (m_b^2 - m_\ell^2)^2] + \\
 &\quad + \sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 \{ \sigma_\ell^2 [m_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) - 7m_a^2 m_b^2] + (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) (m_\ell^4 - 4m_a^2 m_b^2) \}, \\
 A'_{01} &= -\sigma_a^2 \{ \sigma_b^2 [\sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) (m_a^2 + 2m_\ell^2) + 2m_\ell^4 (\sigma_a^2 + \sigma_b^2)] + \\
 &\quad + 2\sigma_\ell^2 m_b^2 (m_\ell^2 + m_a^2) (\sigma_a^2 + \sigma_\ell^2) \}, \\
 A'_{02} &= \sigma_3^2 \sigma_a^2 (\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2), \\
 A'_{10} &= -\sigma_b^2 \{ \sigma_a^2 [\sigma_\ell^2 (m_\ell^2 + m_a^2) (2m_\ell^2 + m_b^2) + 2m_\ell^4 (\sigma_a^2 + \sigma_b^2)] + \\
 &\quad + 2\sigma_\ell^2 m_a^2 (\sigma_b^2 + \sigma_\ell^2) (m_\ell^2 + m_b^2) \}, \\
 A'_{11} &= \sigma_a^2 \sigma_b^2 [\sigma_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) + 2\sigma_3^2 m_\ell^2], \\
 A'_{12} &= -\sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_\ell^2, \\
 A'_{20} &= \sigma_3^2 \sigma_b^2 (\sigma_a^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_a^2), \\
 A'_{21} &= -\sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_\ell^2; \\
 B'_{00} &= m_a^2 m_b^2 \{ \sigma_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2) [\sigma_a^2 (m_a^2 + m_\ell^2) + \sigma_b^2 (m_b^2 + m_\ell^2) + \sigma_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2)] + \\
 &\quad + m_\ell^2 (\sigma_a^4 m_a^2 + \sigma_b^4 m_b^2 + \sigma_a^2 \sigma_b^2 m_b^2) \}, \\
 B'_{01} &= -m_a^2 \{ \sigma_a^2 [\sigma_b^2 m_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) + \sigma_\ell^2 m_b^2 (2m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2)] + \\
 &\quad + 2m_b^2 [\sigma_b^4 m_\ell^2 + \sigma_\ell^4 (m_a^2 + m_b^2)] + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 (m_b^2 + m_\ell^2) (m_a^2 + 2m_b^2) \}, \\
 B'_{02} &= \sigma_3^2 m_a^2 (\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_b^2), \\
 B'_{10} &= -m_b^2 \{ 2\sigma_a^4 m_a^2 m_\ell^2 + \sigma_a^2 (m_a^2 + m_\ell^2) [\sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 (2m_a^2 + m_b^2)] + \\
 &\quad + \sigma_\ell^2 m_a^2 [2\sigma_\ell^2 (m_a^2 + m_b^2) + \sigma_b^2 (m_a^2 + 2m_b^2 + m_\ell^2)] \}, \\
 B'_{11} &= 2\sigma_3 \sigma_\ell^2 m_a^2 m_b^2 + (m_a^2 + m_b^2 + m_\ell^2) (\sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 \sigma_a^2 m_b^2), \\
 B'_{12} &= -(\sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 \sigma_a^2 m_b^2), \\
 B'_{20} &= \sigma_3^2 m_b^2 (\sigma_a^2 m_\ell^2 + \sigma_\ell^2 m_a^2), \\
 B'_{21} &= \sigma_a^2 \sigma_b^2 m_\ell^2 + \sigma_b^2 \sigma_\ell^2 m_a^2 + \sigma_\ell^2 \sigma_a^2 m_b^2.
 \end{aligned}$$

Опустим детальное изучение предельных случаев и асимптотик, поскольку они могут быть получены из формул для случая квазиупругого рассеяния в детекторе. В качестве примера приведем случай сильной иерархии между параметрами σ_a , σ_b и σ_ℓ , в котором, подобно случаю рассеяния $2 \rightarrow 2$,

функция $\mathfrak{F}_s(s_1, s_2)$ становится особенно простой:

$$\mathfrak{F}_s(s_1, s_2) \approx \begin{cases} \frac{(s_1 + s_2 - m_a^2 - m_b^2)^2}{(s_2 - m_a^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_a^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_a}{\sigma_a}\right)^2 & \text{при } \sigma_\ell \gg \sigma_a \gg \sigma_b, \\ \frac{(s_1 + s_2 - m_a^2 - m_b^2)^2}{(s_1 - m_b^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_b^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_b}{\sigma_b}\right)^2 & \text{при } \sigma_\ell \gg \sigma_b \gg \sigma_a, \\ \frac{(s_1 - m_a^2)^2}{(s_1 + s_2 - m_\ell^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} \left(\frac{m_b}{\sigma_b}\right)^2 & \text{при } \sigma_a \gg \sigma_b \gg \sigma_\ell, \\ \frac{(s_1 - m_a^2)^2}{(s_2 - m_a^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_a^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_\ell}{\sigma_\ell}\right)^2 & \text{при } \sigma_a \gg \sigma_\ell \gg \sigma_b, \\ \frac{(s_2 - m_b^2)^2}{(s_1 - m_b^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_b^2 m_\ell^2} \left(\frac{m_\ell}{\sigma_\ell}\right)^2 & \text{при } \sigma_b \gg \sigma_\ell \gg \sigma_a, \\ \frac{(s_2 - m_b^2)^2}{(s_1 + s_2 - m_\ell^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} \left(\frac{m_a}{\sigma_a}\right)^2 & \text{при } \sigma_b \gg \sigma_a \gg \sigma_\ell. \end{cases}$$

Из этих формул видно, что *при сильной иерархии* ни наибольший, ни наименьший из параметров не влияют на величину и форму функции $\mathfrak{F}_s(s_1, s_2)$.

Приложение 2 МНОГОМЕРНЫЕ ГАУССОВЫ КВАДРАТУРЫ

В основном тексте часто используются интегралы

$$\mathcal{G}(A, B) = \int dx \exp(-A_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + B_\mu x^\mu), \tag{344}$$

где $A = \|A_{\mu\nu}\|$ — симметричная положительно определенная матрица, а B_μ — произвольные комплексные постоянные*. Хотя интегралы такого вида хорошо известны (см., например, [138]), мы приведем здесь простой расчет (344), поскольку в литературе имеет место некоторая путаница, или, лучше сказать, недоговоренность, связанная с определением матрицы, обратной к A в пространстве Минковского. Симметричная матрица A всегда может быть диагонализирована с помощью ортогонального преобразования $O = \|O_{\mu\nu}\|$

*В данной работе величины $A_{\mu\nu}$ и B_μ являются компонентами тензора и 4-вектора соответственно, но для дальнейшего это обстоятельство несущественно. Более того, результат (347) не зависит от размерности и сигнатуры пространства-времени.

(см., например, [139]):

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} O_{\mu\alpha} O_{\nu\alpha}, \quad \sum_{\alpha} O_{\mu\alpha} O_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}, \quad (345)$$

причем a_{α} — это (положительные) собственные значения матрицы A . Поэтому квадратичная форма в показателе экспоненты подынтегрального выражения (344) может быть переписана в виде

$$- \sum_{\alpha} a_{\alpha} (O_{\mu\alpha} x^{\mu})(O_{\nu\alpha} x^{\nu}) + B_{\mu} x^{\mu} = \sum_{\alpha} \left(-a_{\alpha} y_{\alpha}^2 + \sum_{\mu} B_{\mu} O_{\mu\alpha} y_{\alpha} \right), \quad (346)$$

где $y_{\alpha} = O_{\mu\alpha} x^{\mu}$ и, следовательно, $x^{\mu} = \sum_{\alpha} O_{\mu\alpha} y_{\alpha}$. Якобиан этого преобразования равен $|O| = 1$, так что $dx = dy$. Подстановка (346) в (344) сводит интеграл к произведению стандартных гауссовых квадратур:

$$\mathcal{G}(A, B) = \prod_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{a_{\alpha}}} \exp \left[\frac{1}{4a_{\alpha}} \left(\sum_{\mu} B_{\mu} O_{\mu\alpha} \right)^2 \right]. \quad (347)$$

Согласно (345)

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}^{-1} O_{\mu\alpha} O_{\nu\alpha} = (A^{-1})_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{A}^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \prod_{\alpha} a_{\alpha} = |A|.$$

Отсюда для 3-мерного евклидова пространства получаем

$$\mathcal{G}(A, B) = \sqrt{\frac{\pi^3}{|A|}} \exp \left(\frac{1}{4} \tilde{A}_{kn} B_k B_n \right), \quad \tilde{A} = A^{-1}, \quad (348)$$

а для 4-мерного пространства Минковского

$$\mathcal{G}(A, B) = \frac{\pi^2}{\sqrt{|A|}} \exp \left(\frac{1}{4} \tilde{A}^{\mu\nu} B_{\mu} B_{\nu} \right), \quad \tilde{A} = g A^{-1} g. \quad (349)$$

Заметим, что в последнем случае $\tilde{A} \neq A^{-1}$, так как $\tilde{A}_{0k} = \tilde{A}_{k0} = -(A^{-1})_{0k}$, $k = 1, 2, 3$. Поскольку, очевидно, собственные значения матрицы \tilde{A} равны $1/a_{\alpha} > 0$, она положительно определена. Разумеется, $|\tilde{A}| = 1/|A|$. В наиболее важном для нас случае, когда величины $A^{\mu\nu}$ и B^{μ} образуют, соответственно, тензор и 4-вектор, форма $\tilde{A}^{\mu\nu} B_{\mu} B_{\nu}$ есть лоренцев скаляр, поскольку таковым является интеграл (344).

Приложение 3 ФАКТОРИЗАЦИЯ АДРОННЫХ БЛОКОВ

Покажем, что при некоторых естественных предположениях, сформулированных ниже, адронный матричный элемент (233) может быть приведен к виду (235). Для этого выразим матричный элемент в правой части (234), содержащий элементарные кварковые токи j_q и j_q^\dagger , через адронные токи. Используя определение хронологического произведения локальных операторов, запишем*

$$T[j_q(x)j_q^\dagger(y)\mathbb{S}_h] = \theta(x_0 - y_0)A(x, y) + \theta(y_0 - x_0)B(x, y), \quad (350)$$

где

$$A(x, y) = \mathbb{U}(\infty, x_0)j_q(x)\mathbb{U}(x_0, y_0)j_q^\dagger(y)\mathbb{U}(y_0, -\infty), \quad (351a)$$

$$B(y, x) = \mathbb{U}(\infty, y_0)j_q^\dagger(y)\mathbb{U}(y_0, x_0)j_q(x)\mathbb{U}(x_0, -\infty), \quad (351b)$$

и

$$\mathbb{U}(\tau_2, \tau_1) = \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} dx_0 \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_h(x) \right] \quad (352)$$

— оператор эволюции для адронной части лагранжиана. Используя хорошо известные свойства этого оператора

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\tau_2, \tau_1) &= \mathbb{U}(\tau_2, \tau)\mathbb{U}(\tau, \tau_1), & \mathbb{U}(\tau_2, \tau_1)\mathbb{U}(\tau_1, \tau_2) &= 1, \\ \mathbb{U}(\infty, -\infty) &= \mathbb{S}_h, & \mathbb{U}(\pm\infty, \pm\infty) &= 1, \end{aligned}$$

перепишем выражение (351a) следующим образом:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \mathbb{U}(\infty, \tau)\mathbb{U}(\tau, x_0)j_q(x)\mathbb{U}(x_0, \tau)\mathbb{U}(\tau, x_0) \times \\ &\quad \times \mathbb{U}(x_0, y_0)j_q^\dagger(y)\mathbb{U}(y_0, \tau)\mathbb{U}(\tau, y_0)\mathbb{U}(y_0, -\infty) = \\ &= \mathbb{U}(\infty, \tau)\mathbb{U}(\tau, x_0)j_q(x)\mathbb{U}(x_0, \tau)\mathbb{U}(\tau, y_0)j_q^\dagger(y)\mathbb{U}(y_0, \tau)\mathbb{U}(\tau, -\infty). \end{aligned} \quad (353)$$

Здесь τ — произвольный параметр. Определим теперь оператор адронного тока (в гейзенберговском представлении) как

$$J(x) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathbb{U}(\tau, x_0)j_q(x)\mathbb{U}(x_0, \tau). \quad (354)$$

*В этом приложении для краткости не выписываем лоренцевские индексы и символы нормального упорядочения в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям.

Тогда (353) можно переписать как

$$A(x, y) = \mathbb{S}_h J(x) J^\dagger(y). \quad (355a)$$

Аналогичным образом находим из (351б):

$$B(y, x) = \mathbb{S}_h J^\dagger(y) J(x). \quad (355б)$$

Подстановка (355) в (350) дает

$$T[j_q(x) j_q^\dagger(y) \mathbb{S}_h] = \mathbb{S}_h T[J(x) J^\dagger(y)]. \quad (356)$$

Как известно, одночастичные адронные состояния не меняются под действием адронной S -матрицы. Поскольку наши состояния $|\{k_b\}\rangle$ представляют собой прямые произведения одночастичных адронных состояний, можно считать, что $\mathbb{S}_h^\dagger |\{k_b\}\rangle = |\{k_b\}\rangle$ с точностью до несущественного фазового множителя. Следовательно, с точностью до этого множителя получаем из (356)

$$\langle \{k_b\} | T[j_q(x) j_q^\dagger(y) \mathbb{S}_h] | \{k_a\} \rangle = \langle \{k_b\} | T[J(x) J^\dagger(y)] | \{k_a\} \rangle \equiv \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle_T. \quad (357)$$

Рассмотрим теперь следующий матричный элемент:

$$\langle J(x) J^\dagger(y) \rangle = \langle \{k_b\} | J(x) J^\dagger(y) | \{k_a\} \rangle.$$

Благодаря трансляционной инвариантности ток $J(x)$ удовлетворяет уравнению

$$i \partial_\mu J(x) = [J(x), P^\mu], \quad (358)$$

в котором P^μ — оператор полного 4-импульса, соответствующий адронной части лагранжиана (см., например, [140]). Используя (358), получаем

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right) \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle = \langle [J(x) J^\dagger(y), P^\mu] \rangle = (K - K')^\mu \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle, \quad (359)$$

где

$$K = K_s + K_d = \sum_{a \in I_s} k_a + \sum_{a \in I_d} k_a,$$

$$K' = K'_s + K'_d = \sum_{b \in F'_s} k_b + \sum_{b \in F'_d} k_b.$$

Формальное решение дифференциальных уравнений (359) имеет вид

$$\langle J_\mu(x) J_\nu^\dagger(y) \rangle = \exp \{ i [(K'_s - K_s)(x - x_s) + (K'_d - K_d)(y - x_d)] \} \times \\ \times \langle J_\mu(x_s) J_\nu^\dagger(x_d) \rangle + C_{\mu\nu}(x - y), \quad (360)$$

где x_s и x_d — произвольные пространственно-временные 4-векторы, а $C_{\mu\nu}(x)$ — компоненты некоторого тензора*, такие, что $C_{\mu\nu}(x_s - x_d) = 0$.

Подобный результат может быть получен и для матричного элемента (357). В самом деле, записав (357) в явном виде

$$\langle J(x)J^\dagger(y) \rangle_T = \theta(x_0 - y_0) \langle J(x)J^\dagger(y) \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle J^\dagger(y)J(x) \rangle,$$

принимая во внимание, что $(\partial/\partial x_\mu + \partial/\partial y_\mu)\theta(x_0 - y_0) = 0$, и учитывая (359), получаем уравнения

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right) \langle J(x)J^\dagger(y) \rangle_T = (K - K')^\mu \langle J(x)J^\dagger(y) \rangle_T. \quad (361)$$

Их решение совпадает с решением (360), в котором $\langle \dots \rangle$ заменяется на $\langle \dots \rangle_T$. Для наших целей удобно выбрать в качестве 4-векторов x_s и x_d прицельные точки для in- и out-пакетов в источнике и детекторе соответственно. Поскольку точки X_s и X_d макроскопически разделены, токи $J(X_s)$ и $J^\dagger(X_d)$ взаимно коммутируют: $[J_\mu(X_s), J_\nu^\dagger(X_d)] = 0$. В результате матричный элемент $\langle J_\mu(X_s)J_\nu^\dagger(X_d) \rangle_T$ факторизуется на два сомножителя, относящихся к вершинам источника и детектора и зависящих лишь от соответствующих переменных. Итак, после введения 4-векторов (c -числовых адронных токов)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s(X_s; \{k_a, k_b\}) &= e^{i(K_s - K'_s)X_s} \langle \{k_b\} | J(X_s) | \{k_a\} \rangle, \quad a \in I_s, b \in F'_s, \\ \mathcal{J}_d^*(X_d; \{k_a, k_b\}) &= e^{i(K_d - K'_d)X_d} \langle \{k_b\} | J^\dagger(X_d) | \{k_a\} \rangle, \quad a \in I_d, b \in F'_d, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle J_\mu(x)J_\nu^\dagger(y) \rangle_T &= \exp \{ i[(K'_s - K_s)x + (K'_d - K_d)y] \} \times \\ &\times \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{k_a, k_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{k_a, k_b\}) + C_{\mu\nu}(x - y). \end{aligned} \quad (362)$$

Тензорные компоненты $C_{\mu\nu}(x - y)$, удовлетворяющие условиям

$$C_{\mu\nu}(X_s - X_d) = 0, \quad (363)$$

могут иметь сингулярность (не сильнее, чем δ -функция или ее производные) только в точке $x = y$. С другой стороны, благодаря условию (363) они должны обращаться в нуль после интегрирования по x и y , проведенного по достаточно малым пространственно-временным объемам, окружающим прицельные точки. Функции $C_{\mu\nu}(x - y)$ входят в амплитуду только через интеграл

$$\propto \int dx dy e^{iq(x-y)} C_{\mu\nu}(x - y) \psi_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha, x_\alpha - x) \psi_\beta^*(\mathbf{p}_\beta, x_\beta - y), \quad (364)$$

*Вообще говоря, этот тензор может параметрически зависеть от импульсов и спинов начальных и конечных одночастичных фоковских состояний адронов.

в котором ψ_α^* и ψ_β^* — ψ -функции, описывающие ВП конечных лептонов ℓ_α^+ и ℓ_β^- с импульсами \mathbf{p}_α и \mathbf{p}_β соответственно. Вклад произведения $\psi_\alpha^* \psi_\beta^*$ в подынтегральном выражении (364) существен только внутри классических мировых трубок, проходящих вблизи соответствующих прицельных точек. Поэтому подынтегральное выражение (364) может оказаться не пренебрежимо малым, только если мировые трубки перекрываются в существенной области (в предельном случае, если оси лептонных трубок совпадают). Но такая конфигурация сильно подавлена в силу приближенного сохранения энергии-импульса. Это нетрудно понять из рассмотрения простейшего случая $C_{\mu\nu}(x-y) \propto \delta(x-y)$. В этом случае интеграл (364) пропорционален «размазанной» δ -функции $\tilde{\delta}(p_\alpha + p_\beta)$ и поэтому пренебрежимо мал в силу неравенства $p_\alpha^0 + p_\beta^0 \geq m_\alpha + m_\beta$. Эти качественные аргументы позволяют нам пренебречь нефизическими «дальнодействующими корреляциями», обусловленными слагаемым $C_{\mu\nu}(x-y)$ в (362). При этом в силу (357) правая часть (233) может быть переписана в виде

$$\int \left[\prod_a \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} e^{i[(k_a - p_a)x_a - k_a x]} \right] \times \\ \times \int \left[\prod_b \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b^*(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} e^{-i[(k_b - p_b)x_b - k_b y]} \right] \times \\ \times \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{k_a, k_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{k_a, k_b\}).$$

Принимая во внимание свойства формфакторов $\phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a)$ и $\phi_b(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b)$, можно заменить переменные \mathbf{k}_a и \mathbf{k}_b в функциях \mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d соответствующими внешними импульсами \mathbf{p}_a и \mathbf{p}_b . Сделав это (последнее) приближение, мы приходим к (235), что завершает доказательство.

Приложение 4 СТАЦИОНАРНАЯ ТОЧКА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ИМПУЛЬСОВ ВНЕШНИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Приведем здесь метод решения уравнения (249) в общем случае, т. е. для произвольной конфигурации внешних импульсов. Общее решение представляет интерес как с методической точки зрения, так и для анализа потенциально возможных в будущем нейтринных экспериментов при промежуточных (субрелятивистских) энергиях. Хотя предлагаемый алгоритм довольно громоздок, он легко может быть реализован в виде компьютерной программы и поэтому полезен прежде всего при численном анализе.

Удобно работать с уравнением (249), записанным в виде (267), в котором неизвестной величиной является скорость виртуального нейтрино. Возводя обе части (267) в квадрат, приходим к алгебраическому уравнению четвертого порядка

$$v^4 + c_3 v^3 + c_2 v^2 + c_1 v + c_0 = 0, \quad (365)$$

коэффициенты которого имеют вид

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{(\mathbf{R}1)^2 - (\boldsymbol{\eta}1)^2}{(\mathbf{R}1)^2 + \eta_0^2}, \\ c_1 &= -2 \frac{R(\mathbf{R}1) + 2(\mathbf{R}1)^2 - \eta_0(\boldsymbol{\eta}1)}{(\mathbf{R}1)^2 + \eta_0^2}, \\ c_2 &= \frac{R^2 + 6(\mathbf{R}1)^2 + 4R(\mathbf{R}1) + (\boldsymbol{\eta}1)^2 - \eta_0^2}{(\mathbf{R}1)^2 + \eta_0^2}, \\ c_3 &= -2 \frac{R(\mathbf{R}1) + 2(\mathbf{R}1)^2 + \eta_0(\boldsymbol{\eta}1)}{(\mathbf{R}1)^2 + \eta_0^2}. \end{aligned}$$

Здесь $\eta_\mu = Y_\mu/m_j$; всюду далее предполагается, что $m_j > 0$ (случай безмассового нейтрино тривиален), а индекс « j », нумерующий нейтрино, не пишется для упрощения и без того громоздких формул. Все остальные обозначения такие же, как и в основном тексте. Решение уравнения (365) может быть найдено методом Декарта–Эйлера (см., например, [141]). Согласно этому методу запишем уравнение (365) в «неполном» виде:

$$\left(v + \frac{c_3}{4}\right)^4 + \tilde{c}_2 \left(v + \frac{c_3}{4}\right)^2 + \tilde{c}_1 \left(v + \frac{c_3}{4}\right) + \tilde{c}_0 = 0. \quad (366)$$

Решения этого уравнения строятся из корней кубического уравнения

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad (367)$$

в котором

$$a_0 = -\frac{\tilde{c}_1^2}{64}, \quad a_1 = \frac{\tilde{c}_2^2 - 4\tilde{c}_0}{16}, \quad a_2 = \frac{\tilde{c}_2}{2}.$$

Уравнение (367) также может быть тождественно преобразовано к «неполной» форме (форме Кардано):

$$\left(z + \frac{a_2}{3}\right)^3 + \mathfrak{p} \left(z + \frac{a_2}{3}\right) + \mathfrak{q} = 0.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= a_1 - \frac{a_2^2}{3} = -\frac{[R^2 + 4R(\mathbf{Rl}) - \eta_0^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^2]^2}{48[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]^2}, \\ \mathfrak{q} &= a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + 2\left(\frac{a_2}{3}\right)^3 = -\frac{A}{864[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]^3}, \\ A &= A_0 + A_1(\mathbf{Rl}) + A_2(\mathbf{Rl})^2 + A_3(\mathbf{Rl})^3, \end{aligned}$$

$$A_0 = R^6 - 3[\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2]R^4 + 3[\eta_0^4 + 16\eta_0^2(\boldsymbol{\eta}l)^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^4]R^2 - [\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2]^3,$$

$$A_1 = 12R\{R^4 - 2[\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2]R^2 + [\eta_0^2 - 7\eta_0(\boldsymbol{\eta}l) + (\boldsymbol{\eta}l)^2](\eta l)^2\},$$

$$A_2 = 48R^2[R^2 - \eta_0^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^2] + 54(\eta l)^4,$$

$$A_3 = 64R^3.$$

Число вещественных корней определяется знаком функции

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{q}^2}{4} + \frac{\mathfrak{p}^3}{27} = \frac{[\eta_0(\boldsymbol{\eta}l)R - (\eta l)^2(\mathbf{Rl})]^2 B}{27 \cdot 648[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]^6},$$

совпадающим со знаком полинома $B = B_0 + B_1(\mathbf{Rl}) + B_2(\mathbf{Rl})^2 + B_3(\mathbf{Rl})^3$, коэффициенты которого имеют вид

$$B_0 = R^6 - 3[\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2]R^4 + 3[\eta_0^4 + 7\eta_0^2(\boldsymbol{\eta}l)^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^4]R^2 - [\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2]^3,$$

$$B_1 = 6R\{2R^4 - 4[\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2]R^2 + [2\eta_0 - (\boldsymbol{\eta}l)][\eta_0 - 2(\boldsymbol{\eta}l)](\eta l)^2\},$$

$$B_2 = 48R^2[R^2 - \eta_0^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^2] + 27(\eta l)^4,$$

$$B_3 = 64R^3.$$

При $B < 0$ имеются три различных вещественных корня, при $B > 0$ — один вещественный и пара взаимно-сопряженных комплексных корней, при $B = 0$ два или все три вещественных корня могут совпадать. Можно доказать следующее полезное тождество:

$$A = B + 27[\eta_0(\boldsymbol{\eta}l)R - (\eta l)^2(\mathbf{Rl})]^2. \quad (368)$$

П4.1. Решение Ферро–Тартальи–Кардано в радикалах. Корни «неполного» кубического уравнения (367) равны

$$z_0 = a + (A_+ + A_-), \quad z_{\pm} = a - \frac{1}{2}(A_+ + A_-) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(A_+ - A_-),$$

где

$$a = \frac{a_2}{3} = -\frac{C_0 + C_1(\mathbf{Rl}) + C_2(\mathbf{Rl})^2 + C_3(\mathbf{Rl})^3}{12[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]^2},$$

$$A_{\pm}^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\mathfrak{B}} = \frac{A}{18} \pm i^{\delta} |\eta_0(\boldsymbol{\eta}l)R - (\eta l)^2(\mathbf{Rl})| \sqrt{\frac{|B|}{3}};$$

$$C_0 = -\eta_0^2[2R^2 - 2\eta_0^2 - (\boldsymbol{\eta}l)^2],$$

$$C_1 = -2\eta_0[4\eta_0 - 3(\boldsymbol{\eta}l)]R,$$

$$C_2 = R^2 - 2(\eta l)[5\eta_0 - (\boldsymbol{\eta}l)],$$

$$C_3 = 4R;$$

$\delta = 0$ при $B \geq 0$ и $\delta = 1$ при $B < 0$. Выражение для A_{\pm} упрощается, если учесть тождество (368):

$$A_{\pm} = \frac{\left[3\sqrt{3} |\eta_0(\boldsymbol{\eta}l)R - (\eta l)^2(\mathbf{Rl})| \pm i^{\delta} \sqrt{|B|}\right]^{2/3}}{12[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]}.$$

П4.2. Решение в тригонометрической форме Виета. Для полноты приведем также более компактную тригонометрическую форму решения (форму Виета), которая может оказаться более удобной при численных расчетах и во всяком случае полезна для контроля точности вычислений путем сравнения с каноническим решением. Явный вид тригонометрического решения зависит от знака функции B .

П4.2.1. Случай $B < 0$. Как отмечалось выше, в этом случае (иногда называемом неприводимым), уравнение (367) имеет три вещественных корня:

$$z_0 = a + \zeta_0 \cos \frac{\alpha}{3}, \quad z_{\pm} = a - \zeta_0 \cos \left(\frac{\alpha \pm \pi}{3} \right),$$

где

$$\zeta_0 = \frac{|R^2 + 4R(\mathbf{Rl}) - \eta_0^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^2|}{6[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]}, \quad \cos \alpha = -\frac{A}{|R^2 + 4R(\mathbf{Rl}) - \eta_0^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^2|^3}.$$

П4.2.2. Случай $B \geq 0$. В этом случае уравнение (367) имеет один вещественный и два комплексных корня. Введем обозначения*

$$\tan \alpha' = \sqrt[3]{\tan \frac{\beta}{2}}, \quad \sin \beta = -\frac{4}{\cos \alpha} = \frac{4}{A} |R^2 + 4R(\mathbf{Rl}) - \eta_0^2 + (\boldsymbol{\eta}l)^2|^3.$$

*Заметим, что $|\alpha'| \leq \pi/4$ и $|\beta| \leq \pi/2$; во всех случаях берется реальное значение кубического корня.

Тогда корни равны

$$z_0 = a - \zeta_0 \operatorname{cosec} 2\alpha', \quad z_{\pm} = a + \frac{1}{2}\zeta_0(\operatorname{cosec} 2\alpha' \pm i\sqrt{3} \cot 2\alpha').$$

П4.3. Корни уравнения (365). Корни «неполного» уравнения четвертой степени (366) даются комбинациями

$$\Xi_n = \pm\sqrt{z_-} \pm \sqrt{z_0} \pm \sqrt{z_+},$$

в которых четыре из восьми возможных сочетаний знаков выбираются так, чтобы выполнялось условие

$$-\sqrt{z_-}\sqrt{z_0}\sqrt{z_+} = \frac{\tilde{c}_1}{8} = \frac{D_0 + D_1(\mathbf{Rl}) + D_2(\mathbf{Rl})^2 + D_3(\mathbf{Rl})^3 + D_4(\mathbf{Rl})^4}{8[(\mathbf{Rl})^2 + \eta_0^2]^3}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_0 &= \eta_0^3(\eta\mathbf{l})(R^2 + \eta_0^2), \\ D_1 &= \eta_0^2[R^2 - 3\eta_0^2 + 4\eta_0(\eta\mathbf{l}) - 2(\eta\mathbf{l})^2]R, \\ D_2 &= \eta_0\{2[3\eta_0 - (\eta\mathbf{l})]R^2 - (\eta\mathbf{l})[6\eta_0^2 - 3\eta_0(\eta\mathbf{l}) + (\eta\mathbf{l})^2]\}, \\ D_3 &= [9\eta_0^2 - 8\eta_0(\eta\mathbf{l}) + (\eta\mathbf{l})^2]R, \\ D_4 &= 2(\eta\mathbf{l})^2. \end{aligned}$$

Все четыре корня уравнения (365) могут быть теперь найдены по формуле

$$v_n = \Xi_n - c_3/4 \quad (n = 1, 2, 3, 4).$$

Единственный интересующий нас вещественный неотрицательный корень, соответствующий стационарной точке, должен удовлетворять условию положительности второй производной (251). Найденные в основном тексте решения для двух противоположных предельных случаев ($1 - v \ll 1$ и $v \sim 1$) могут служить дополнительными критериями единственности решения общего вида, основанного на описанном здесь алгоритме, поскольку они должны гладко «сшиваться» с правильным численным решением при соответствующих вариациях импульсов внешних ВП и дискретных параметров, определяющих величину эффективной скорости виртуального нейтрино.

Приложение 5 РАСПЛЫВАНИЕ НЕЙТРИННОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА НА СВЕРХДАЛЬНИХ РАССТОЯНИЯХ

Рассмотрим здесь обобщение некоторых полученных в основном тексте результатов, учитывающее распыливание эффективного нейтринного пакета на

астрономических расстояниях. Результаты данного приложения могут быть использованы при анализе данных нейтринных телескопов (таких как Baikal GVD, IceCube, KM3NeT ARCA и др.), многочисленных экспериментов по радиодетектированию нейтрино сверхвысоких энергий и обсуждаемых орбитальных экспериментов, в обширный список задач которых входит измерение флейворного состава потоков нейтрино и антинейтрино от удаленных астрофизических источников.

Интегрирование по переменной x^0 в (302) приводит к следующему выражению для фактора декогерентности:

$$S_{ij} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \exp(\Phi_{ij}) \int_{y_1^0}^{y_2^0} dy^0 \left\{ \operatorname{erf} \left[2\tilde{\mathfrak{D}}_{ij} \left(y^0 - x_1^0 - \frac{L}{v_{ij}} \right) + \frac{i\Delta E_{ij}}{4\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \right] - \operatorname{erf} \left[2\tilde{\mathfrak{D}}_{ij} \left(y^0 - x_2^0 - \frac{L}{v_{ij}} \right) + \frac{i\Delta E_{ij}}{4\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \right] \right\}, \quad (369)$$

$$\Phi_{ij} = - \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right)^2 \left(\frac{\tilde{\mathfrak{D}}_i^* \tilde{\mathfrak{D}}_j}{\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \right)^2 L^2 - \left(\frac{\Delta E_{ij}}{4\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \right)^2 + i \left(\frac{\Delta E_{ij}}{v_{ij}} - \Delta P_{ij} \right) L. \quad (370)$$

Здесь

$$\Delta P_{ij} = P_i - P_j, \quad \Delta E_{ij} = E_i - E_j, \\ \frac{1}{v_{ij}} = \frac{1}{2\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}^2} \left[\frac{(\tilde{\mathfrak{D}}_i^*)^2}{v_i} + \frac{\tilde{\mathfrak{D}}_j^2}{v_j} \right], \quad \tilde{\mathfrak{D}}_{ij}^2 = \frac{1}{2} [(\tilde{\mathfrak{D}}_i^*)^2 + \mathfrak{D}_j^2],$$

а остальные обозначения совпадают с использованными в основном тексте. Применяя введенную в основном тексте первообразную функции ошибок (306) и интегрируя по переменной y^0 в (369), находим обобщение формулы (303), полученной в основном тексте:

$$S_{ij} = \frac{\sqrt{\pi}}{8\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}^2} \exp(\Phi_{ij}) \sum_{l,l'=1}^2 (-1)^{l+l'+1} \operatorname{Ierf} \left[2\tilde{\mathfrak{D}}_{ij} \left(x_l^0 - y_{l'}^0 + \frac{L}{v_{ij}} \right) - i \frac{\Delta E_{ij}}{4\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \right]. \quad (371)$$

Хотя это выражение намного сложнее, чем его аналог (303), численный анализ эффектов декогерентности не представляет проблемы. В данном приложении мы рассмотрим лишь основные свойства комплекснозначной фазы Φ_{ij} . Для этого необходимо разделить вещественную и мнимую части фазы и определить масштабы длин, определяющие ее поведение.

Используя введенные выше определения и отбрасывая очевидно малые поправки, находим*

$$v_{ij} = \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \left(\frac{\mathbf{r}_i}{v_j} - \frac{\mathbf{r}_j}{v_i} \right) + 2 \left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j} \right) - i(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right)}{\left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{r}_i}{v_j} - \frac{\mathbf{r}_j}{v_i} \right)^2},$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}^2 = \frac{\mathfrak{D}^2 [2 + \mathbf{r}_i^2 + \mathbf{r}_j^2 + i(1 - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]}{2(1 + \mathbf{r}_i^2)(1 + \mathbf{r}_j^2)}, \quad \left(\frac{\tilde{\mathfrak{D}}_i^* \tilde{\mathfrak{D}}_j}{\tilde{\mathfrak{D}}_{ij}} \right)^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{1 - i\mathbf{r}_{ij}}.$$

Подстановка этих выражений в (370) дает

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -\frac{1}{1 + \mathbf{r}_{ij}^2} \left[\frac{\Delta E_{ij}}{4\mathfrak{D}_{ij}} + \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2} \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right) \mathfrak{D}_{ij} L \right]^2 - \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right)^2 \mathfrak{D}_{ij}^2 L^2 + \\ & + i \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j} \right) - \frac{\mathbf{r}_{ij}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)}{4(1 + \mathbf{r}_{ij}^2)} \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right) \right] \Delta E_{ij} - \Delta P_{ij} \right\} L + \\ & + \frac{i\mathbf{r}_{ij}}{1 + \mathbf{r}_{ij}^2} \left[(1 - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) \left(\frac{\Delta E_{ij}}{4\mathfrak{D}} \right)^2 - \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right)^2 \mathfrak{D}^2 L^2 \right], \quad (372) \end{aligned}$$

где

$$\mathfrak{D}_{ij} = \mathfrak{D} \left(1 + \frac{\mathbf{r}_i^2 + \mathbf{r}_j^2}{2} \right)^{-1/2}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{2} \approx \frac{2\Delta m_{ij}^2 \mathfrak{D}^2 L}{E_\nu^3}. \quad (373)$$

Анализ выражения (372) показывает, что вещественная часть фазы Φ_{ij} становится не зависящей от L внутри двух сильно разделенных в пространстве областей, задаваемых следующими условиями:

$$L \ll \mathfrak{L} = \frac{nE_\nu}{4\mathfrak{D}^2}$$

и

$$L \gg \mathfrak{L}_{ij} = \begin{cases} \frac{E_\nu}{2(m_i^2 + m_j^2)} \left(\frac{E_\nu}{\mathfrak{D}} \right)^2, & \text{если } m_i \gg m_j \text{ или } m_j \gg m_i, \\ \frac{E_\nu}{2|m_i^2 - m_j^2|} \left(\frac{E_\nu}{\mathfrak{D}} \right)^2, & \text{если } |m_i - m_j| \ll m_i + m_j. \end{cases}$$

*Заметим, что $v_{jj} = v_j$, $\tilde{\mathfrak{D}}_{jj}^2 = \mathfrak{D}^2/(1 + \mathbf{r}_j^2)$ и $|\tilde{\mathfrak{D}}_j|^2/\tilde{\mathfrak{D}}_{jj} = \mathfrak{D}$.

Соответствующие асимптотические значения $\Re \Phi_{ij}$, вычисленные с точностью $\mathcal{O}(r_{i,j})$, имеют вид

$$\Re \Phi_{ij}|_{L \ll \mathcal{L}} \approx \Re \Phi_{ij}^0 = - \left(\frac{\pi n}{2 \mathfrak{D} L_{ij}} \right)^2 \left[1 + \frac{m}{n} (r_i + r_j) \right], \quad (374a)$$

$$\Re \Phi_{ij}|_{L \gg \mathcal{L}_{ij}} \approx \Re \Phi_{ij}^\infty = - \left(\frac{E_\nu}{4 \mathfrak{D}} \right)^2 [1 - 4(n+1)(r_i + r_j)]. \quad (374б)$$

Здесь и ниже мы используем обычные определения для осцилляционных длин и разностей квадратов масс нейтрино:

$$L_{ij} = \frac{4\pi E_\nu}{\Delta m_{ij}^2}, \quad \Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 \quad (i \neq j).$$

Видно, что асимптотика при больших значениях L , $\Re \Phi_{ij}^\infty$, практически не зависит от масс нейтрино и от фактора n ; как $\Re \Phi_{ij}^0$, так и $\Re \Phi_{ij}^\infty$ становятся произвольно большими при стремлении \mathfrak{D} к нулю. Кроме того, очевидные соотношения

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\mathcal{L}}{n|r_i \pm r_j|} \quad \text{и} \quad \Re \Phi_{ij}^0 = n(r_i - r_j) \Re \Phi_{ij}^\infty [1 + \mathcal{O}(r_{i,j})]$$

приводят к модельно-независимым неравенствам

$$\mathcal{L} \ll \mathcal{L}_{ij} \quad \text{и} \quad |\Re \Phi_{ij}^0| \ll |\Re \Phi_{ij}^\infty|.$$

Следовательно, как видно из (372), для любой пары нейтрино ν_i, ν_j существует широкий интервал расстояний $\mathcal{L} \ll L \ll \mathcal{L}_{ij}$, в котором $|\Re \Phi_{ij}|$ квадратично растет с ростом L :

$$\Re \Phi_{ij} \approx - \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_j} \right)^2 \mathfrak{D}^2 L^2 \approx -(r_i - r_j)^2 \mathfrak{D}^2 L^2.$$

Все эти особенности поведения вещественной части фазы иллюстрирует рис. 25, на котором изображена функция $\log |\Re \Phi_{ij}|$ в широком интервале значений L — от земных расстояний ($\gtrsim 100$ км) до космологических ($\sim 10^4$ мпс) — при нескольких произвольно выбранных значениях безразмерного отношения \mathfrak{D}/E_ν . Кривые на этом рисунке рассчитаны для $m_i = 0,1$ эВ, $m_j = 0,01$ эВ и $E_\nu = 10$ ГэВ. Для того чтобы оценить величину важного фактора n , мы предположили, в иллюстративных целях, что он насыщается вкладом от распада пионов (типичного источника ускорительных, атмосферных и астрофизических нейтрино), причем вкладом реакций в детекторе можно пренебречь. Помимо этого мы предполагаем, что ВП пиона в импульсном

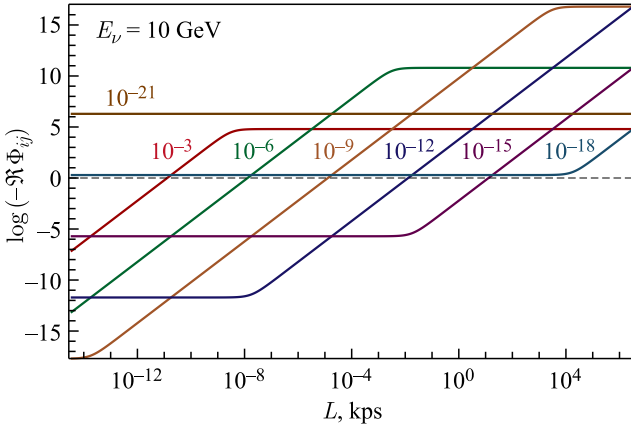


Рис. 25. Функция $\log |\Re \Phi_{ij}|$ в зависимости от L , вычисленная при $m_i = 0,1$ эВ, $m_j = 0,01$ эВ и $E_\nu = 10$ ГэВ для семи значений отношения \mathcal{Q}/E_ν (показаны у кривых). Функция n оценена в предположении, что доминирующий вклад в нее обусловлен $\pi_{\mu 2}$ -распадом в источнике

пространстве намного шире пакета мюона, т.е. $\sigma_\mu \ll \sigma_\pi$. Тогда нетрудно показать, что при ультрарелятивистских энергиях, $\Gamma_\pi \gg 1$, фактор n можно записать в следующем приближенном виде:

$$n \approx \left(\frac{E_\nu}{E_\nu^*} \right)^2 \approx \left(\frac{E_\nu}{29,8 \text{ МэВ}} \right)^2 \approx 1,1 \cdot 10^5.$$

Подобный анализ для мнимой части фазы (372) показывает, что последняя линейно (но с разными коэффициентами) растет с ростом L в областях $L \ll \mathcal{L}_{ij}$ и $L \gg \mathcal{L}_{ij}$, а именно,

$$\text{Im } \Phi_{ij} |_{L \ll \mathcal{L}_{ij}} \approx \text{Im } \Phi_{ij}^{\text{st}} = \frac{2\pi L}{L_{ij}} [1 + n(r_i + r_j)], \quad (375a)$$

$$\text{Im } \Phi_{ij} |_{L \gg \mathcal{L}_{ij}} \approx \text{Im } \Phi_{ij}^\infty = \frac{3\pi L}{2L_{ij}} \left[1 + \frac{1}{3}(n+1)(r_i + r_j) \right]. \quad (375b)$$

Два режима разделены сравнительно узкой переходной областью вблизи $L = \mathcal{L}_{ij}$. В области $L \lesssim \mathcal{L}$ с величиной $\text{Im } \Phi_{ij}$ ничего неожиданного не происходит. Описанное поведение $\text{Im } \Phi_{ij}$ иллюстрирует рис. 26, на котором показано отношение $\text{Im } \Phi_{ij} / \text{Im } \Phi_{ij}^{\text{st}}$, вычисленное при тех же самых предположениях, что и вещественная часть фазы. Нестандартное поведение функции $\text{Im } \Phi_{ij}$ при $L \gtrsim \mathcal{L}_{ij}$ представляет, однако, лишь академический интерес,

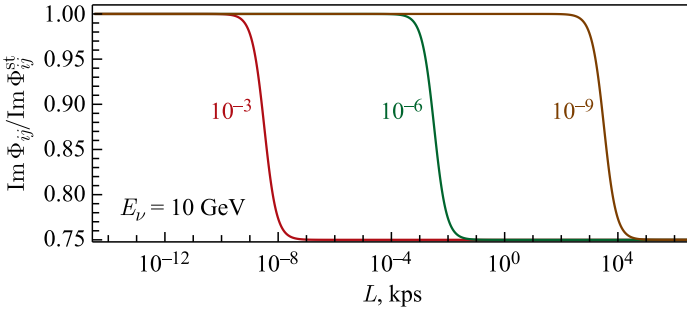


Рис. 26. Отношение $\text{Im } \Phi_{ij} / \text{Im } \Phi_{ij}^{\text{st}}$ в зависимости от L , вычисленное с теми же значениями параметров, что и вещественная часть фазы (см. подпись к рис. 25), для трех значений отношения \mathcal{D}/E_ν (показаны у кривых)

поскольку эта величина неизмерима из-за громадного подавляющего фактора

$$\propto (1 + \tau_{ij}^2)^{-1/4} \exp \left[-\frac{E_\nu^2}{16\mathcal{D}^2} \right],$$

приводящего к исчезновению интерференционных членов ($i \neq j$), входящих в выражение для скорости счета событий. Таким образом, «осцилляционное» поведение скорости счета имеет место лишь при $L \ll \min(\mathcal{L}_{ij})$. Именно эта область подробно изучена в основном тексте.

Приложение 6 ПРОСТРАНСТВЕННОЕ УСРЕДНЕНИЕ

В реалистических ситуациях отнюдь не всегда можно пренебречь размерами источника и детектора по сравнению с расстоянием между ними. В таких случаях необходимо провести аккуратное пространственное усреднение скорости счета по эффективным объемам источника и детектора. При этом следует учитывать возможные пространственные неоднородности нейтринного пучка и детекторной среды. В данном приложении мы ограничимся рассмотрением простой, но представляющей методический интерес ситуации, в которой такими неоднородностями можно пренебречь. Это означает, что функции плотности $\bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{x})$ не зависят от \mathbf{x} внутри объемов источника и детектора и обращаются в нуль за пределами этих объемов. В рамках этих приближений нас будет интересовать только зависящий от L множитель $e^{\Phi_{ij}(L)}/L^2$ (с $\Phi_{ij}(L) = i\varphi_{ij}(L) - \mathcal{A}_{ij}(L)^2$) в полном выражении для скорости счета; напомним, что величины \mathcal{B}_{ij}^2 и Θ_{ij} от L не зависят.

Нижe мы сделаем еще одно упрощение: будем предполагать, что линейные размеры детектора в направлении нейтринного пучка пренебрежимо малы по сравнению с размерами источника в том же направлении, а последние, в свою очередь, малы по сравнению со средним расстоянием между источником и детектором. Расположим начало координат во внутренней точке детектора (точка O_d на рис. 27) и направим ось z вдоль единичного вектора -1 , т. е. в направлении некоторой внутренней точки O_s в источнике. Обозначим $\mathbf{x} = L\mathbf{l}$, $L = O_s O_d$, тогда интересующий нас интеграл по пространственному объему источника можно записать в виде

$$\mathcal{J}_{ij} \equiv \int_{V_s} \frac{d\mathbf{x}}{L^2} e^{\Phi_{ij}(L)} = \int_{\Omega_s} d\Omega \int_{L_\Omega^N}^{L_\Omega^F} dL e^{\Phi_{ij}(L)}. \quad (376)$$

Здесь V_s — рабочий объем источника; Ω_s — телесный угол, под которым этот объем виден из точки O_d ; L_Ω^N и L_Ω^F — расстояния от O_d до, соответственно, ближней и дальней границ источника (для простоты — выпуклого) в направлении единичного вектора $\Omega = (\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Удобно ввести условное расстояние между источником и детектором как

$$\bar{L} = \frac{1}{2\Omega_s} \int_{\Omega_s} d\Omega (L_\Omega^F + L_\Omega^N).$$

Во избежание недоразумений заметим, что в зависимости от углового разрешения детектора и постановки эксперимента телесный угол Ω_s может оказаться меньше полного телесного угла, под которым виден весь источник. Рис. 27 схематически иллюстрирует именно такую возможность, тогда как равенство (376) справедливо в общем случае. Заметим также, что малость угла Ω_s не эквивалентна малости самого источника; важным контрпримером является хорошо коллимированный пучок мезонов от ускорителя (нейтринной фабрики) в длинном распадном канале. Элементарное интегрирование по L дает

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ij} = \frac{E_\nu L_{ij}}{4\sqrt{\pi}D} \int_{\Omega_s} d\Omega \left[\operatorname{erf} \left(\frac{2\pi D L_\Omega^F}{E_\nu L_{ij}} - \frac{iE_\nu}{2D} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{2\pi D L_\Omega^N}{E_\nu L_{ij}} - \frac{iE_\nu}{2D} \right) \right] \exp \left[-\frac{2E_\nu^2 + (\Delta E_{ij})^2}{8D^2} \right] \quad (i \neq j) \quad (377a) \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{J}_{jj} = \int_{V_s} \frac{d\mathbf{x}}{L^2} = \int_{\Omega_s} d\Omega (L_\Omega^F - L_\Omega^N). \quad (377b)$$

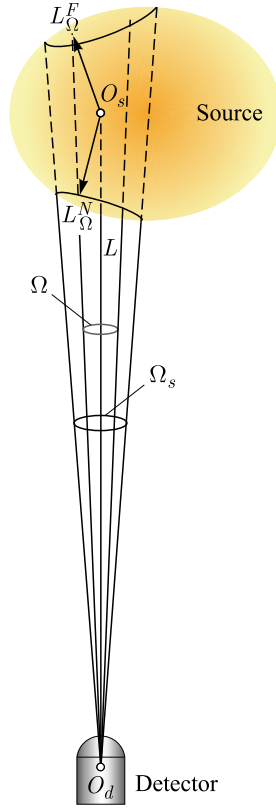


Рис. 27. Схематическая иллюстрация пространственного усреднения

Эти общие формулы могут быть полезны при обработке данных нейтринных экспериментов с короткой базой, в которых расстояние от источника (например того же распадного канала) до детектора сравнимо по величине с продольными размерами источника.

В случае «идеального эксперимента», для которого мы примем, что

$$r_N = \max_{\Omega \in \Omega_s} (\bar{L} - L_{\Omega}^N) \ll \bar{L} \quad \text{и} \quad r_F = \max_{\Omega \in \Omega_s} (L_{\Omega}^F - \bar{L}) \ll \bar{L}, \quad (378)$$

можно использовать следующее разложение для функции ошибок:

$$\text{erf}(z + \delta) \approx \text{erf}(z) + \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \left[1 - z\delta + \frac{2}{3}(2z^2 - 1)\delta^2 + \dots \right]. \quad (379)$$

Вкладами порядка $\mathcal{O}(\delta^2)$ и $\mathcal{O}(z^2\delta^2)$ в этом разложении можно пренебречь, если предположить, что $|\delta| \ll 1$ и $|z\delta| \ll 1$. В нашем конкретном случае

первое условие означает, что

$$\frac{2\pi D r_{N,F}}{E_\nu L_{ij}} \ll 1, \quad (380)$$

тогда как второе не является необходимым, благодаря приближенному сокращению членов второго порядка малости. В самом деле, используя (379), находим

$$\mathcal{J}_{ij} \approx \int_{\Omega_s} d\Omega (L_\Omega^F - L_\Omega^N) e^{\Phi_{ij}(\bar{L})} \left\{ 1 - \Delta_\Omega \left[\frac{2i\pi\bar{L}}{L_{ij}} - \left(\frac{2\pi D\bar{L}}{E_\nu L_{ij}} \right)^2 \right] \right\},$$

где

$$\Delta_\Omega = 2 \left(1 - \frac{L_\Omega^N + L_\Omega^F}{2\bar{L}} \right) = \frac{L_\Omega^F - \bar{L}}{\bar{L}} - \frac{\bar{L} - L_\Omega^N}{\bar{L}}.$$

Очевидно, $|\Delta_\Omega| \ll 1$. Предполагая, что

$$\max_{\Omega \in \Omega_s} \Delta_\Omega \left[\left(\frac{2\pi D\bar{L}}{E_\nu L_{ij}} \right)^4 + \left(\frac{2\pi\bar{L}}{L_{ij}} \right)^2 \right]^{1/2} \ll 1, \quad (381)$$

приходим к результату (справедливому уже для любых i и j)

$$\mathcal{J}_{ij} \approx e^{\Phi_{ij}(\bar{L})} \int_{\Omega_s} d\Omega (L_\Omega^F - L_\Omega^N) \approx V_s \frac{e^{\Phi_{ij}(\bar{L})}}{\bar{L}^2}, \quad (382)$$

который можно было бы «угадать» на основании теоремы о среднем. Наш результат, однако, дополнен вполне нетривиальными достаточными условиями (378), (380) и (381), которые нельзя было бы получить из одной лишь теоремы о среднем. Объем V_s в (382) оценивается (с той же точностью) как

$$V_s = \int_{V_s} d\mathbf{x} = \frac{1}{3} \int_{\Omega_s} d\Omega [(L_\Omega^F)^3 - (L_\Omega^N)^3] \approx \bar{L}^2 \int_{\Omega_s} d\Omega (L_\Omega^F - L_\Omega^N).$$

Теперь, если предположить, что рабочий (реперный) объем детектора V_d достаточно мал по сравнению с V_s (в нейтринных экспериментах это условие, как правило, выполняется), а геометрия детектора не слишком причудлива, то интегрирование по переменной u становится тривиальным и дает

$$\int_{V_d} dy \int_{V_s} d\mathbf{x} \frac{e^{\Phi_{ij}(L)}}{L^2} \approx V_s V_d \frac{e^{\Phi_{ij}(\bar{L})}}{\bar{L}^2}, \quad (383)$$

где \bar{L} по-прежнему имеет смысл условного расстояния между источником и детектором.

Для иллюстрации важности и нетривиальности условий (378), (380) и (381) рассмотрим простейший случай сфероидального источника радиуса r , чей угловой размер θ_s не превышает углового разрешения детектора. Из простых геометрических соображений следует, что $\Delta_\Omega = 2(1 - \cos \theta)$ и, разумеется, $r_N = r_F = r$. Отсюда

$$\max_{\Omega \in \Omega_s} \Delta_\Omega = \Delta_{\Omega_s} = 2(1 - \cos \theta_s) \approx \theta_s^2 \approx (r/\bar{L})^2. \quad (384)$$

Для дальнейшего упрощения предположим, что $2\pi\bar{L} \gg |L_{ij}|$ (это неравенство всегда выполняется для солнечных и астрофизических нейтрино, детектируемых на Земле) и $2\pi\bar{L} \lesssim |L_{ij}|E_\nu/D$ (что не всегда справедливо для удаленных астрофизических источников, но допустимо для Солнца). Тогда условие (380) выполняется автоматически, в то время как условие (381) приобретает вид

$$\frac{2\pi r^2}{\bar{L}|L_{ij}|} \ll 1. \quad (385)$$

Это неравенство, безусловно, *не* выполняется для Солнца при принятом в настоящее время значении Δm_{12}^2 . В самом деле, области эффективного рождения нейтрино в солнечном ядре представляют собой относительно узкие концентрические слои с типичными радиусами от $0,1R_\odot$ для ${}^8\text{B}$, ${}^7\text{Be}$ и CNO нейтрино до $0,3R_\odot$ в случае pp -, pep - и hep -нейтрино* (здесь R_\odot — солнечный радиус). Тогда левую часть неравенства (385) можно оценить как

$$\frac{2\pi r^2}{\bar{L}|L_{12}|} \approx 26 \left(\frac{r}{0,2R_\odot} \right)^2 \left(\frac{|\Delta m_{12}^2|}{8 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2} \right) \left(\frac{1 \text{ МэВ}}{E_\nu} \right),$$

откуда видно (и это, конечно, не новость), что приближение (383) совершенно неприменимо для анализа осцилляций солнечных нейтрино.

Суммируя полученные результаты, отметим следующее: хотя наше рассмотрение было предельно упрощено во многих отношениях**, оно демонстрирует, что учет конечных размеров источника существен для правильной обработки данных в осцилляционных экспериментах как с короткой, так и с очень длинной базой, много большей размеров источника или детектора, включая расстояния L порядка астрономической единицы, как в случае экспериментов с солнечными нейтрино.

*См. детали в [142, 143].

**При более аккуратном анализе нужно принять во внимание пространственные распределения сталкивающихся и/или распадающихся частиц в источнике и, что крайне важно для астрофизических приложений (в частности, для экспериментов с солнечными нейтрино), — эффекты взаимодействия виртуальных нейтрино со средой источника, в частности, когерентное рассеяние нейтрино на электронах среды (МСВ-эффект [144, 145]).

Приложение 7 КОМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦИЯ ОШИБОК И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ФОРМУЛЫ

Функция ошибок и дополнительная функция ошибок комплексного аргумента изучались во многих работах (см., например, [146–150] и цитируемую там литературу). Приведем здесь некоторые результаты, используемые в разд. 10 для анализа функции декогерентности. Для удобства ссылок выпишем сперва хорошо известные формулы [103]

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \quad (386)$$

$$\operatorname{erfc}(z) \sim \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2z^2)^n} \right] \quad \left(z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4} \right). \quad (387)$$

Из (306) и (386) получаем следующие разложения для введенной в основном тексте функции $\operatorname{Ierf}(z)$:

$$\operatorname{Ierf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 + z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{30} - \frac{z^8}{168} + \mathcal{O}(z^{10}) \right], \quad (388a)$$

$$= \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \left[1 + 2z^2 + \frac{4z^4}{3} + \frac{8z^6}{15} + \frac{16z^8}{105} + \mathcal{O}(z^{10}) \right]. \quad (388b)$$

Эти разложения полезны для, соответственно, малых и промежуточных значений $|z|^*$. Для того чтобы найти асимптотики функций $\operatorname{erfc}(z)$ и $\operatorname{Ierf}(z)$ при больших $|z|$, нужно использовать (387) для $\operatorname{erfc}(-z)$ и затем воспользоваться правилом

$$\operatorname{erfc}(z) = 2 - \operatorname{erfc}(-z).$$

В результате из (306) и (387) получаем

$$\operatorname{Ierf}(z) \sim \pm z + \frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi}z^2} \left[1 - \frac{3}{2z^2} + \frac{15}{4z^4} - \frac{105}{8z^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^8}\right) \right] \quad (z \rightarrow \infty), \quad (389)$$

где верхний (нижний) знак должен быть взят для $|\arg z| < 3\pi/4$ ($|\arg z| > 3\pi/4$).

Нижеследующие формулы полезны при численных расчетах функции ошибок с высокой точностью. Они основаны на следующем интегральном

* На практике (388a) и (388b) хорошо работают при $|z| \lesssim 1$ и $1 \lesssim |z| \lesssim 4,5$ соответственно.

представлении дополнительной функции ошибок (см., например, [146, 149]):

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt e^{-(t^2+z^2)}}{t^2+z^2}.$$

Отсюда следует (ср. с результатом [147])

$$\Re[\operatorname{erfc}(a+ib)] = +\frac{r}{\pi} \exp[-r^2 \cos(2\omega)] [r^2 \cos(w_+) \mathcal{I}_0(a,b) + \cos(w_-) \mathcal{I}_2(a,b)],$$

$$\operatorname{Im}[\operatorname{erfc}(a+ib)] = -\frac{r}{\pi} \exp[-r^2 \cos(2\omega)] [r^2 \sin(w_+) \mathcal{I}_0(a,b) + \sin(w_-) \mathcal{I}_2(a,b)],$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n(a,b) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt t^n e^{-t^2}}{(t^2+a^2-b^2)^2+4a^2b^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt t^n e^{-t^2}}{[t^2+r^2 \cos(2\omega)]^2+[r^2 \sin(2\omega)]^2}, \\ w_{\pm} &= 2ab + \omega, \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos \omega = \frac{a}{r}, \quad \sin \omega = \frac{b}{r}, \end{aligned}$$

причем все входящие сюда величины вещественны. Заметим, что подынтегральные выражения в интегралах $\mathcal{I}_n(a,b)$ положительны, несингулярны (за исключением тривиального случая $a=b=0$) и быстро убывают при больших значениях $|t|$. Эти свойства полезны при численном интегрировании, основанном на стандартных квадратурных формулах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E.* Versuch einer theorie der β -strahlen. I // Z. Phys. 1934. V. 88. P. 161–177.
2. *Steinberger J.* The History of Neutrinos, 1930–1985. What Have We Learned about Neutrinos? What Have We Learned Using Neutrinos? // Ann. Phys. 2012. V. 327. P. 3182–3205.
3. *Fermi E.* Tentativo di una teoria dei raggi β // Ric. Sci. 1933. V. 4. P. 491–495.
4. *Понтекорво Б.* Мезоний и антимезоний // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 549–551 (Sov. Phys. JETP. 1957. V. 6. P. 429–431).
5. *Pontecorvo B.* Inverse β Processes and Nonconservation of Lepton Charge // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 247–248 (Sov. Phys. JETP. 1958. V. 7. P. 172–173); JINR Preprint P-95. Dubna, 1957.

6. *Cleveland B. T. et al.* Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector // *Astrophys. J.* 1998. V. 496. P. 505–526.
7. *Kaether F., Hampel W., Heusser G., Kiko J., Kirsten T.* Reanalysis of the GALLEX Solar Neutrino Flux and Source Experiments // *Phys. Lett. B.* 2010. V. 685. P. 47–54.
8. *Abdurashitov J. N. et al.* Measurement of the Solar Neutrino Capture Rate with Gallium Metal. III: Results for the 2002–2007 Data-Taking Period // *Phys. Rev. C.* 2009. V. 80. P. 015807.
9. *Fukuda Y. et al.* Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 1562–1567.
10. *Adamson P. et al.* Combined Analysis of ν_μ Disappearance and $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ Appearance in MINOS Using Accelerator and Atmospheric Neutrinos // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 112. P. 191801.
11. *Ahn M. H. et al.* Indications of Neutrino Oscillation in a 250 km Long Baseline Experiment // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. P. 041801.
12. *Abe S. et al.* Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100. P. 221803.
13. *An F. P. et al.* Observation of Electron–Antineutrino Disappearance at Daya Bay // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. P. 171803.
14. *Ahn J. K. et al.* Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. P. 191802.
15. *Abe Y. et al.* Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the Double Chooz Experiment // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. P. 052008.
16. *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* Remarks on the Unified Model of Elementary Particles // *Prog. Theor. Phys.* 1962. V. 28. P. 870–880.
17. *Gribov V., Pontecorvo B.* Neutrino Astronomy and Lepton Charge // *Phys. Lett.* 1969. V. 28B. P. 493–496.
18. *Eliezer Sh., Swift A. R.* Experimental Consequences of Electron Neutrino–Muon–Neutrino Mixing in Neutrino Beams // *Nucl. Phys. B.* 1976. V. 105. P. 45–51.
19. *Fritzsch H., Minkowski P.* Vector-Like Weak Currents, Massive Neutrinos, and Neutrino Beam Oscillations // *Phys. Lett. B.* 1976. V. 62. P. 72–76.
20. *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* Again on Neutrino Oscillations // *Lett. Nuovo Cim.* 1976. V. 17. P. 569–574.
21. *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* Lepton Mixing and Neutrino Oscillations // *Phys. Rept.* 1978. V. 41. P. 225–261.
22. *Bilenky S. M., Giunti C., Grimus W.* Phenomenology of Neutrino Oscillations // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 1999. V. 43. P. 1–86.
23. *Fisher P., Kayser B., McFarland K. S.* Neutrino Mass and Oscillation // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1999. V. 49. P. 481–528.
24. *Bilenky S. M.* Neutrino Masses, Mixing and Oscillations // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 2004. V. 460. P. 403–444.
25. *Mohapatra R. N. et al.* Theory of Neutrinos: A White Paper // *Rep. Prog. Phys.* 2007. V. 70. P. 1757–1867.
26. *Gonzalez-Garcia M. C., Maltoni M.* Phenomenology with Massive Neutrinos // *Phys. Rep.* 2008. V. 460. P. 1–129.
27. *Bilenky S.* Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos // *Lect. Notes Phys.* 2010. V. 817. P. 1–255.

28. King S. F., Merle A., Morisi S., Shimizu Y., Tanimoto M. Neutrino Mass and Mixing: from Theory to Experiment // *New J. Phys.* 2014. V. 16. P. 045018.
29. King S. F. Models of Neutrino Mass, Mixing and CP Violation // *J. Phys. G.* 2015. V. 42. P. 123001.
30. Bilenky S. Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos // *Lect. Notes Phys.* 2018. V. 947. P. 1–273.
31. Kudenko Yu. G. Neutrino Oscillations: Recent Results and Future Prospects // *Phys. Usp.* 2018. V. 61, No. 8. P. 739–747. (*Usp. Fiz. Nauk.* 2018. T. 188, № 8. C. 821–830).
32. Giunti C., Kim C. W., Lee J. A., Lee U. W. On the Treatment of Neutrino Oscillations without Resort to Weak Eigenstates // *Phys. Rev. D.* 1993. V. 48. P. 4310–4317.
33. Grimus W., Stockinger P. Real Oscillations of Virtual Neutrinos // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 54. P. 3414–3419.
34. Giunti C., Kim C. W., Lee U. W. When Do Neutrinos Cease to Oscillate? // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 421. P. 237–244.
35. Campagne J.-E. Neutrino Oscillations from Pion Decay in Flight // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 400. P. 135–144.
36. Kiers K., Weiss N. Neutrino Oscillations in a Model with a Source and Detector // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 3091–3105.
37. Zraček M. From Kaons to Neutrinos: Quantum Mechanics of Particle Oscillations // *Acta Phys. Polon. B.* 1998. V. 29. P. 3925–3956.
38. Ioannian A., Pilaftsis A. Neutrino Oscillations in Space within a Solvable Model // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 053003.
39. Grimus W., Stockinger P., Mohanty S. The Field Theoretical Approach to Coherence in Neutrino Oscillations // *Ibid.* P. 013011.
40. Grimus W., Mohanty S., Stockinger P. Neutrino Oscillations and the Effect of the Finite Lifetime of the Neutrino Source // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 61. P. 033001.
41. Cardall Ch. Y., Chung D. J. H. The MSW Effect in Quantum Field Theory // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 073012.
42. Cardall Ch. Y. Coherence of Neutrino Flavor Mixing in Quantum Field Theory // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 61. P. 073006.
43. Beuthe M. Propagation and Oscillations in Field Theory. hep-ph/0010054. 2000.
44. Stockinger P. Introduction to a Field-Theoretical Treatment of Neutrino Oscillations // *Pramana.* 2000. V. 54. P. 203–214.
45. Beuthe M. Oscillations of Neutrinos and Mesons in Quantum Field Theory // *Phys. Rep.* 2003. V. 375. P. 105–218.
46. Beuthe M. Towards a Unique Formula for Neutrino Oscillations in Vacuum // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 66. P. 013003.
47. Giunti C. Neutrino Wave Packets in Quantum Field Theory // *JHEP.* 2002. V. 11. P. 017.
48. Garbutt M., McKellar Bruce H. J. Neutrino Production, Oscillation and Detection in the Presence of General Four-Fermion Interactions. hep-ph/0308111. 2003.
49. Giunti C. Coherence and Wave Packets in Neutrino Oscillations // *Found. Phys. Lett.* 2004. V. 17. P. 103–124.
50. Bernardini A. E., De Leo S. An Analytic Approach to the Wave Packet Formalism in Oscillation Phenomena // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 053010.

51. *Asahara A., Ishikawa K., Shimomura T., Yabuki T.* Neutrino Oscillations in Intermediate States. II. Wave Packets // *Prog. Theor. Phys.* 2005. V. 113. P. 385–411.
52. *Dolgov A. D., Lychkovskiy O. V., Mamonov A. A., Okun L. B., Rotaev M. V. et al.* Oscillations of Neutrinos Produced and Detected in Crystals // *Nucl. Phys. B.* 2005. V. 729. P. 79–94.
53. *Nishi C. C.* First Quantized Approaches to Neutrino Oscillations and Second Quantization // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 73. P. 053013.
54. *Kopp J.* Mössbauer Neutrinos in Quantum Mechanics and Quantum Field Theory // *JHEP.* 2009. V. 06. P. 049.
55. *Akhmedov E. Kh., Smirnov A. Yu.* Paradoxes of Neutrino Oscillations // *Phys. Atom. Nucl.* 2009. V. 72. P. 1363–1381.
56. *Keister B. D., Polyzou W. N.* Relativistic Quantum Theories and Neutrino Oscillations // *Phys. Scripta.* 2010. V. 81. P. 055102.
57. *Naumov V. A., Naumov D. V.* Relativistic Wave Packets in a Field Theoretical Approach to Neutrino Oscillations // *Russ. Phys. J.* 2010. V. 53. P. 549–574.
58. *Naumov D. V., Naumov V. A.* A Diagrammatic Treatment of Neutrino Oscillations // *J. Phys. G.* 2010. V. 37. P. 105014.
59. *Kayser B., Kopp J., Robertson R. G. H., Vogel P.* On a Theory of Neutrino Oscillations with Entanglement // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 82. P. 093003.
60. *Akhmedov E. Kh., Kopp J.* Neutrino Oscillations: Quantum Mechanics vs. Quantum Field Theory // *JHEP.* 2010. V. 1004. P. 008.
61. *Akhmedov E. Kh., Smirnov A. Yu.* Neutrino Oscillations: Entanglement, Energy-Momentum Conservation and QFT // *Found. Phys.* 2011. V. 41. P. 1279–1306.
62. *Bernardini E. A., Guzzo M. M., Nishi Celso C.* Quantum Flavor Oscillations Extended to the Dirac Theory // *Fortsch. Phys.* 2011. V. 59. P. 372–453.
63. *Akhmedov E., Hernandez D., Smirnov A.* Neutrino Production Coherence and Oscillation Experiments // *JHEP.* 2012. V. 1204. P. 052.
64. *Akhmedov E. Kh., Wilhelm A.* Quantum Field Theoretic Approach to Neutrino Oscillations in Matter // *JHEP.* 2013. V. 1301. P. 165.
65. *Morris T. R.* Superluminal Velocity through Near-Maximal Neutrino Oscillations or by Being Off Shell // *J. Phys. G.* 2012. V. 39. P. 045010.
66. *Giunti C., Kim Ch. W.* Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics. New York: Oxford Univ. Press Inc., 2007.
67. *Nussinov Sh.* Solar Neutrinos and Neutrino Mixing // *Phys. Lett. B.* 1976. V. 63. P. 201–203.
68. *Kayser B.* On the Quantum Mechanics of Neutrino Oscillation // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 24. P. 110–116.
69. *Giunti C., Kim C. W., Lee U. W.* When Do Neutrinos Really Oscillate? Quantum Mechanics of Neutrino Oscillations // *Phys. Rev. D.* 1991. V. 44. P. 3635–3640.
70. *Giunti C., Kim C. W., Lee U. W.* Coherence of Neutrino Oscillations in Vacuum and Matter in the Wave Packet Treatment // *Phys. Lett. B.* 1992. V. 274. P. 87–94.
71. *Rich J.* The Quantum Mechanics of Neutrino Oscillations // *Phys. Rev. D.* 1993. V. 48. P. 4318–4325.
72. *Kiers K., Nussinov Sh., Weiss N.* Coherence Effects in Neutrino Oscillations // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 53. P. 537–547.

73. *Giunti C., Kim C.W.* Coherence of Neutrino Oscillations in the Wave Packet Approach // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 58. P. 017301.
74. *Stodolsky L.* The Unnecessary Wave Packet // *Ibid.* V. 58. P. 036006.
75. *Nauenberg M.* Correlated Wave Packet Treatment of Neutrino and Neutral Meson Oscillations // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 447. P. 23–30.
76. *Shirokov M.I., Naumov V.A.* Time-to-Space Conversion in Neutrino Oscillations // *Concepts Phys.* 2007. V. 4. P. 121–138.
77. *Bernardini A.E., Guzzo M.M., Torres F.R.* Second-Order Corrections to Neutrino Two-Flavor Oscillation Parameters in the Wave Packet Approach // *Eur. Phys. J. C.* 2006. V. 48. P. 613–623.
78. *Pérez Y.F., Quimbay C.J.* Spreading of Wave Packets for Neutrino Oscillations // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2014. V. 29. P. 1450007.
79. *Takeuchi Y., Tazaki Y., Tsai S.Y., Yamazaki T.* Wave Packet Approach to the Equal-Energy/Momentum/Velocity Prescriptions of Neutrino Oscillation // *Mod. Phys. Lett. A.* 1999. V. 14. P. 2329–2339.
80. *Kayser B., Kopp J.* Testing the Wave Packet Approach to Neutrino Oscillations in Future Experiments. arXiv:1005.4081 [hep-ph]. 2010.
81. *Bruss D., Sehgal L.M.* Distinguishing a Coherent from an Incoherent Mixture of Neutrino Flavor // *Phys. Lett. B.* 1989. V. 216. P. 426–430.
82. *Lisi E., Marrone A., Montanino D.* Probing Possible Decoherence Effects in Atmospheric Neutrino Oscillations // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. P. 1166–1169.
83. *Araki T. et al.* Measurement of Neutrino Oscillation with KamLAND: Evidence of Spectral Distortion // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. P. 081801.
84. *Blennow M., Ohlsson T., Winter W.* Damping Signatures in Future Neutrino Oscillation Experiments // *JHEP.* 2005. V. 0506. P. 049.
85. *Barenboim G., Mavromatos N.E., Sarkar S., Waldron-Lauda A.* Quantum Decoherence and Neutrino Data // *Nucl. Phys. B.* 2006. V. 758. P. 90–111.
86. *Adamson P. et al.* Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 131802.
87. *Jones B.J.P.* Dynamical Pion Collapse and the Coherence of Conventional Neutrino Beams // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 91, No. 5. P. 053002.
88. *An F.P. et al.* Study of the Wave Packet Treatment of Neutrino Oscillation at Daya Bay // *Eur. Phys. J. C.* 2017. V. 77, No. 9. P. 606.
89. *Kobach A., Manohar A.V., McGreevy J.* Neutrino Oscillation Measurements Computed in Quantum Field Theory // *Phys. Lett. B.* 2018. V. 783. P. 59–75.
90. *Coelho J.A.B., Mann W.A.* Decoherence, Matter Effect, and ν Hierarchy Signature in Long-Baseline Experiments // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 96, No. 9. P. 093009.
91. *Coelho J.A.B., Mann W.A., Bashar S.S.* Nonmaximal θ_{23} Mixing at $\text{NO}\nu\text{A}$ from Neutrino Decoherence // *Ibid.* V. 118, No. 22. P. 221801.
92. *Coloma P., Lopez-Pavon J., Martinez-Soler I., Nunokawa H.* Decoherence in Neutrino Propagation through Matter, and Bounds from IceCube/DeepCore // *Eur. Phys. J. C.* 2018. V. 78, No. 8. P. 614.
93. *Balheiro Gomes G., Forero D.V., Guzzo M.M., De Holanda P.C., Oliveira R.L.N.* Quantum Decoherence Effects in Neutrino Oscillations at DUNE. arXiv:1805.09818 [hep-ph]. 2018.

94. Carrasco J. C., Diaz F. N., Gago A. M. Probing CPT Breaking Induced by Quantum Decoherence at DUNE // *Phys. Rev. D*. 2019. V. 99, No. 7. P. 075022.
95. Capolupo A., Giampaolo S. M., Lambiase G. Decoherence in Neutrino Oscillations, Neutrino Nature and CPT Violation // *Phys. Lett. B*. 2019. V. 792. P. 298–303.
96. Naumov D. V. On the Theory of Wave Packets // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2013. V. 10. P. 642–650.
97. Almeida C., Jabs A. Spreading of a Relativistic Wave Packet // *Am. J. Phys.* 1984. V. 52. P. 921–925.
98. Taylor J. R. *Scattering Theory: Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions*. New York; London; Sydney; Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1972.
99. Goldberger M. L., Watson K. M. *Collision Theory*. New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1964.
100. Naumov V. A., Shkirmanov D. S. Covariant Asymmetric Wave Packet for a Field-Theoretical Description of Neutrino Oscillations // *Mod. Phys. Lett. A*. 2015. V. 30, No. 24. P. 1550110.
101. Korenblit S. E., Taychenachev D. V. Interpolating Wave Packets in QFT and Neutrino Oscillation Problem. arXiv:1712.06641 [hep-th]. 2017.
102. Bialynicki-Birula I., Bialynicka-Birula Z. Twisted Localized Solutions of the Dirac Equation: Hopfionlike States of Relativistic Electrons // *Phys. Rev. A*. 2019. V. 100, No. 1. P. 012108.
103. NIST Handbook of Mathematical Functions / Eds.: F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, Ch. W. Clark. Cambridge; New York; Melbourne; Madrid; Cape Town; Singapore, São Paulo; Delhi; Dubai; Tokyo: Nat. Inst. of Standards and Technology & Cambridge Univ. Press, 2010.
104. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
105. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, 1981.
106. Tanabashi M. et al. Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D*. 2018. V. 98, No. 3. P. 030001.
107. Naumov V. A. Atmospheric Muons and Neutrinos // *Proc. of the 2nd Workshop on Methodical Aspects of Underwater/Ice Neutrino Telescopes* / Ed. R. Wischnewski. DESY. Zeuthen, Germany, 2002. P. 31–46. hep-ph/0201310.
108. Lagage P.-O. Accélération et propagation des rayons cosmiques. Production, oscillations et détection de neutrinos. PhD Thesis. Paris Univ., VI–VII, 1987.
109. Lindroos M., Mezzetto M. *Beta Beams: Neutrino Beams*. London: Imperial College Press, 2010.
110. Goodman M. Planned Reactor and Beam Experiments on Neutrino Oscillations // *Nucl. Phys. A*. 2009. V. 827. P. 518c–523c.
111. Proc. of the 11th Intern. Workshop on Neutrino Factories, Superbeams and Beta Beams “NuFact09”, Fermilab and Illinois Inst. of Technology, Chicago, Illinois, USA, July 20–25, 2009 / Eds.: M. C. Goodman, D. M. Kaplan, Z. Sullivan // *AIP Conf. Proc.* V. 1222. 2010.
112. Sato J. Monoenergetic Neutrino Beam for Long Baseline Experiments // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 95. P. 131804.
113. Yoshimura M., Sasao N. Neutrino Pair and Gamma Beams from Circulating Excited Ions // *Phys. Rev. D*. 2015. V. 92, No. 7. P. 073015.

114. *Yoshimura M., Sasao N.* Photon and Neutrino-Pair Emission from Circulating Quantum Ions // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 93, No. 11. P. 113018.
115. *Bradler K.* Relativistically Invariant Photonic Wave Packets // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2011. V. 28, No. 4. P. 113018.
116. *Smith B. J., Raymer M. G.* Photon Wave Functions, Wave-Packet Quantization of Light, and Coherence Theory // *New J. Phys.* 2007. V. 9. P. 414.
117. *Peskin M. E., Schroeder D. V.* An Introduction to Quantum Field Theory. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publ. Company, 1995.
118. *Blinov A. E. et al.* Large Impact Parameters Cutoff in Bremsstrahlung at Colliding Beams // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 113. P. 423.
119. *Tikhonov Yu. A.* PhD Thesis. 1982.
120. *Kotkin G. L., Serbo V. G., Schiller A.* Processes with Large Impact Parameters at Colliding Beams // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1992. V. 7. P. 4707–4745.
121. *Case W. B.* Wigner Functions and Weyl Transforms for Pedestrians // *Am. J. Phys.* 2008. V. 76. P. 937–946.
122. *Karlovetz D. V.* Probing Phase of a Scattering Amplitude beyond the Plane-Wave Approximation // *Eur. Phys. Lett.* 2016. V. 116, No. 3. P. 31001.
123. *Naumov V. A., Shkirmanov D. S.* Extended Grimus–Stockinger Theorem and Inverse Square Law Violation in Quantum Field Theory // *Eur. Phys. J. C.* 2013. V. 73, No. 11. P. 2627.
124. *Korenblit S. E., Taychenachev D. V.* Higher Order Corrections to the Grimus–Stockinger Formula // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2013. V. 10. P. 610–614.
125. *Korenblit S. E., Taychenachev D. V.* Extension of Grimus–Stockinger Formula from Operator Expansion of Free Green Function // *Mod. Phys. Lett. A.* 2015. V. 30, No. 14. P. 1550074.
126. *Naumov D. V., Naumov V. A., Shkirmanov D. S.* Inverse-Square Law Violation and Reactor Antineutrino Anomaly // *Phys. Part. Nucl.* 2017. V. 48, No. 1. P. 12–20.
127. *Naumov D. V., Naumov V. A., Shkirmanov D. S.* Quantum Field Theoretical Description of Neutrino Oscillations and Reactor Antineutrino Anomaly // *Phys. Part. Nucl.* 2017. V. 48, No. 6. P. 1007–1010.
128. *Korenblit S. E., Sinitzskaya A. V.* The Role of Short Distance Power Corrections to Differential and Total Cross-Section and the Optical Theorem for Potential Scattering // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. V. 32. P. 1750066.
129. *Faizal M., Korenblit S. E., Sinitzskaya A. V., Upadhyay S.* Corrections to Scattering Processes due to Minimal Measurable Length // *Phys. Lett. B.* 2019. V. 794. P. 1–6.
130. *Nowakowski M., Pilaftsis A.* On Gauge Invariance of Breit–Wigner Propagators // *Z. Phys. C.* 1993. V. 60. P. 121–126.
131. *Lopez Castro G., Lucio J. L., Pestieau J.* Remarks on the W Propagator at the Resonance // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1996. V. 11. P. 563–570.
132. *Aghanim N. et al.* Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters // *Astron. Astrophys.* 2018 (submitted); arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].
133. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1984.
134. *Akhmedov E. Kh.* Do Charged Leptons Oscillate? // *JHEP.* 2007. V. 0709. P. 116.
135. *An F. P. et al.* Neutrino Physics with JUNO // *J. Phys. G.* 2016. V. 43, No. 3. P. 030401.

136. *Ivanov I. P., Seipt D., Surzhykov A., Fritzsche S.* Elastic Scattering of Vortex Electrons Provides Direct Access to the Coulomb Phase // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 94, No. 7. P. 076001.
137. *Ivanov I. P., Serbo V. G.* Scattering of Twisted Particles: Extension to Wave Packets and Orbital Helicity // *Phys. Rev. A.* 2011. V. 84. P. 033804.
138. *Ramond P.* Field Theory: A Modern Primer. Advanced Book Program, 2nd ed. Redwood City, California: Addison-Wesley Publ. Comp., 2007.
139. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. New York: McGraw-Hill Book Comp., Inc., 1960.
140. *Биленький С. М.* Введение в диаграммную технику Фейнмана. М.: Атомиздат, 1971.
141. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
142. *Bahcall J. N., Serenelli A. M., Basu S.* 10,000 Standard Solar Models: A Monte Carlo Simulation // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2006. V. 165. P. 400–431.
143. *Antonelli V., Miramonti L., Pena Garay C., Serenelli A.* Solar Neutrinos // *Adv. High Energy Phys.* 2013. V. 2013. P. 351926.
144. *Wolfenstein L.* Neutrino Oscillations in Matter // *Phys. Rev. D.* 1978. V. 17. P. 2369–2374.
145. *Mikheev S. P., Smirnov A. Yu.* Resonance Amplification of Oscillations in Matter and Spectroscopy of Solar Neutrinos // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1985. V. 42. P. 913–917.
146. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. 10th ed. Washington: Dover Publ., Inc., 1972. Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. 55.
147. *Kestin J., Persen L. N.* On the Error Function of a Complex Argument // *Z. Angew. Math. Phys.* 1956. V. 7. P. 33–40.
148. *Zaker T. A.* Calculation of the Complementary Error Function of Complex Argument // *J. Comp. Phys.* 1969. V. 4. P. 427–430.
149. *Mori M.* A Method for Evaluation of the Error Function of Real and Complex Variable with High Relative Accuracy. Publ. RIMS. Kyoto Univ., 1983. V. 19. P. 1081–1094.
150. *Di Rocco H. O., Aguirre Téllez M.* Evaluation of the Asymmetric Voigt Profile and Complex Error Functions in Terms of the Kummer Functions // *Acta. Phys. Polon. A.* 2004. V. 106. P. 816–817.