ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 621–631

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО ИЗ СУПЕРПОЛЕВОГО КАЛИБРОВАНИЯ

Е. А. Иванов [1,*], *О. Лехтенфельд* [2,**], *С. Федорук* [1,***]

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[2] Институт теоретической физики Ганноверского университета, Ганновер, Германия

На основе метода суперполевого калибрования построены новые $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ суперполевые системы, обобщающие модели Калоджеро. В $\mathcal{N}=2$ случае эти системы в бозонном пределе содержат рациональные модели Калоджеро и гиперболические модели Калоджеро–Сазерленда, а в $\mathcal{N}=4$ случае — их $U(2)$ спиновые расширения.

Using the superfield gauging procedure, we construct new $\mathcal{N}=2$ and $\mathcal{N}=4$ superfield systems that generalize Calogero models. In the bosonic limit, these systems yield rational Calogero models and hyperbolic Calogero–Sutherland models in the $\mathcal{N}=2$ case, and their $U(2)$ spin generalization in the $\mathcal{N}=4$ case.

PACS: 11.30.Pb; 12.60.Jv

ВВЕДЕНИЕ

Модели Калоджеро [1–3] являются хрестоматийными примерами интегрируемых многочастичных одномерных ($d=1$) систем. Простейшая из них — так называемая рациональная модель Калоджеро

$$S_C = \frac{1}{2}\int dt \left[\sum_a \dot{x}_a \dot{x}_a - \sum_{a\neq b} \frac{c^2}{4(x_a-x_b)^2}\right], \quad a,b=1,\ldots,n, \tag{1}$$

описывающая взаимодействие n идентичных частиц с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния, и инвариантная относительно преобразований $d=1$ конформной группы $SO(1,2)$

$$\delta t = \alpha, \quad \delta x_a = \frac{1}{2}\,\dot{\alpha} x_a, \quad \partial_t^3 \alpha = 0. \tag{2}$$

---

*E-mail: eivanov@theor.jinr.ru
**E-mail: olaf.lechtenfeld@itp.uni-hannover.de
***E-mail: fedoruk@theor.jinr.ru

Система Калоджеро–Мозера [1–3] получается добавлением к (1) осцилляторного члена $\sim \sum\limits_{a\neq b}(x_a - x_b)^2$. Представляющие интерес в первую очередь как интегрируемые системы рациональные модели Калоджеро также тесно связаны с моделями черных дыр и M-теорией [4,5].

Помимо конформно-инвариантных систем известны и другие интегрируемые многочастичные модели калоджеровского типа [6], например гиперболические системы Калоджеро–Сазерленда [1–3, 7]

$$S_{\rm CS} = \frac{1}{2}\int dt\left[\sum_a \dot q_a \dot q_a - \sum_{a\neq b}\frac{c^2}{4\sinh^2\dfrac{q_a-q_b}{2}}\right], \tag{3}$$

а также их тригонометрические аналоги.

Естественным обобщением систем Калоджеро и Калоджеро–Сазерленда являются их суперсимметричные варианты. Суперрасширение с $\mathcal{N}=2$ было построено в [8], где каждая бозонная координата x_a дополнялась двумя фермионными полями до мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$. Таким образом, модель содержит n физических бозонов и $2n$ фермионов. Соответствующее $\mathcal{N}=2$, $d=1$ суперполевое действие в пределе нулевых фермионов сводится к действию рациональной модели Калоджеро. Аналогичным образом можно построить $\mathcal{N}=2$ расширение моделей Калоджеро–Сазерленда [9]. Построение суперсимметричных расширений с более высокими $\mathcal{N}$ сталкивается с определенными проблемами. Так, при обобщении на случай $\mathcal{N}=4$ множество x_a необходимо расширить до множества супермультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ с n бозонными и $4n$ фермионными полями [10]. Однако при построении соответствующего суперполевого действия, приводящего к потенциалу n-частичной системы Калоджеро в бозонном секторе, возникают несколько функций от x_a [11], связанных уравнениями WDVV [12, 13], явные решения которых известны только для нескольких малых n.

Существует другой тип суперсимметризации, в котором вышеупомянутые проблемы не возникают, хотя построенные таким способом модели являются «неминимальными»: они содержат $\mathcal{N}n^2$ фермионов для каждого набора n бозонных координат [14–16]. Эта суперсимметризация основана на методе калибрования [17], разработанном ранее в [3,18,19] в применении к бозонным системам Калоджеро. Та или иная модель Калоджеро возникает в результате исключения калибровочных полей в матричной калибровочно-инвариантной системе. В настоящем докладе, основанном на результатах работ [14–16], показано, как этот подход можно применить к некоторым $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ суперполевым матричным моделям для получения новых версий суперсимметричных моделей Калоджеро.

1. МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО И КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА КАК КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ

Для иллюстрации используемого метода мы вначале покажем, как можно воспроизвести известную модель конформной механики [20],

$$S_0 = \int dt\, L_0, \quad L_0 = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 - c^2\, x^{-2}\right), \tag{4}$$

из другой $d = 1$ системы, обладающей калибровочной симметрией [15]. Рассмотрим модель комплексного поля $v(t)$ с лагранжианом

$$L_v = \frac{1}{2}\,\dot{v}\dot{\bar{v}} + \frac{im}{2}\,(\dot{v}\bar{v} - v\dot{\bar{v}}), \tag{5}$$

инвариантным относительно глобальных преобразований $v' = \mathrm{e}^{-i\lambda}\, v$, $\bar{v}' = \mathrm{e}^{i\lambda}\bar{v}$. Теперь расширим лагранжиан (5) так, чтобы он обладал калибровочной симметрией с локальным параметром: $\lambda \to \lambda(t)$. Для этого введем $d = 1$ калибровочное поле $A(t)$, удлиняющее производные, $\dot{v} \to \nabla v = \dot{v} + iAv$, $\dot{\bar{v}} \to \nabla\bar{v} = \dot{\bar{v}} - iA\bar{v}$. Полученная система с лагранжианом

$$L_v^g = \frac{1}{2}\,\nabla v \nabla\bar{v} + \frac{im}{2}\,(\nabla v\bar{v} - v\nabla\bar{v}) + cA \tag{6}$$

инвариантна с точностью до полной производной относительно введенных выше калибровочных преобразований, дополненных преобразованием $A' = A + \dot{\lambda}$. Последний член в (6) с константой c, также калибровочно-инвариантный с точностью до полной производной, является аналогом известного члена Файе–Илиопулоса.

Выбирая калибровку $v = \bar{v} \equiv x(t)$ и исключая поле $A(t)$ с помощью его уравнения движения, получаем следующее выражение для лагранжиана в данной калибровке:

$$L_{\text{gauge}} = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(mx - cx^{-1}\right)^2, \tag{7}$$

который при $m = 0$ совпадает с лагранжианом (4). Отметим, что исходное действие с лагранжианом (5) при $m = 0$, как и калибровочно-инвариантная модель (6), инвариантны относительно конформных преобразований $SO(1,2)$ (2), дополненных преобразованиями $\delta A(t) = -\dot{f}\, A(t)$. Как результат действие с лагранжианом (4) также обладает конформной симметрией.

В калибровочном подходе система Калоджеро описывается $U(n)$-инвариантной матричной системой [3, 18, 19], использующей $n \times n$ эрмитово матричное поле X_a^b, $a, b = 1, \ldots, n$, комплексное $U(n)$-спинорное поле $Z_a(t)$,

$\bar{Z}^a = (Z_a)^*$ и n^2 эрмитовых калибровочных полей A_a^b. Калибровочно-инвариантное действие имеет вид

$$S_C = \frac{1}{2} \int dt \left[\mathrm{tr}\,(\nabla X \nabla X) + i\,(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z}Z) + 2c\,\mathrm{tr}A \right], \tag{8}$$

где введены следующие определения для ковариантных производных:

$$\nabla X = \dot{X} + i[A, X], \quad \nabla Z = \dot{Z} + iAZ, \quad \nabla\bar{Z} = \dot{\bar{Z}} - i\bar{Z}A. \tag{9}$$

Действие (8) инвариантно относительно локальных $U(n)$-преобразований, действующих на спинорные индексы a, b всех входящих величин, с матричным полем A_a^b в качестве калибровочного. Используя $n^2 - n$ локальных преобразований, можно закрепить калибровку $X_a{}^b = 0$ с $a \neq b$. Остаточные калибровочные преобразования, генерируемые абелевой подгруппой $[U(1)]^n$, далее фиксируются условиями вещественности $\bar{Z}^a = Z_a$ для Z_a, подчиненным связям $Z_a Z_a = c$ для каждого a. В результате после исключения вспомогательных и калибровочных полей действие (8) сводится к действию (1) модели Калоджеро. Поскольку исходное действие (8) обладает конформной инвариантностью, модель (1) также конформно-инвариантна.

Модель Калоджеро–Сазерленда можно воспроизвести посредством аналогичного калибрования системы с нелинейным кинетическим членом сигма-модельного типа для матричного поля X_a^b:

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{2} \int dt \left[\mathrm{tr}\left(X^{-1}\nabla X X^{-1}\nabla X \right) + i\,(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z}Z) + 2c\,\mathrm{tr}\,A \right]. \tag{10}$$

Следуя той же процедуре, как и в рациональном случае, приходим к действию

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{2} \int dt \left[\sum_a \frac{\dot{x}_a \dot{x}_a}{(x_a)^2} - \sum_{a \neq b} \frac{x_a x_b c^2}{(x_a - x_b)^2} \right], \tag{11}$$

которое в терминах переменных $q_a = \ln x_a$ совпадает с (3). Как и исходное матричное действие, полученное действие не обладает конформной инвариантностью.

2. $\mathcal{N} = 2$ МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО И КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА

Для построения $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричного обобщения мы прибегнем к той же стратегии, исходя теперь из матричных $\mathcal{N} = 2$ суперполей и выполняя суперполевое калибрование. Исходными являются $n \times n$ матричное эрмитово суперполе с компонентами $\mathcal{X}_a{}^b(t, \theta, \bar{\theta})$, $a, b = 1, \ldots, n$, описывающими n^2 супермультиплетов $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, и киральное $U(n)$-спинорное суперполе

$\mathcal{Z}_a(t_L,\theta)$, $\bar{\mathcal{Z}}^a(t_R,\bar\theta)$, $\bar{D}\mathcal{Z}_a=0$, $D\bar{\mathcal{Z}}^a=0$, $t_{L,R}=t\mp i\theta\bar\theta$. Свободное действие для этих мультиплетов,

$$S^{N=2}=\frac{1}{2}\int dt\,d\theta\,d\bar\theta\,\big[\,\mathrm{tr}\,\big(\bar{D}\mathcal{X}D\mathcal{X}\big)-\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}\big], \tag{12}$$

остается инвариантным при глобальных $U(n)$-преобразованиях $\mathcal{Z}'=\mathrm{e}^{i\lambda}\mathcal{Z}$, $\bar{\mathcal{Z}}'=\bar{\mathcal{Z}}\,\mathrm{e}^{-i\bar\lambda}$, $\mathcal{X}'=\mathrm{e}^{i\lambda}\,\mathcal{X}\,\mathrm{e}^{-i\bar\lambda}$. Калибрование этих изометрий состоит в переходе к киральным и антикиральным суперполевым параметрам λ и $\bar\lambda$. Для обеспечения инвариантности вводится эрмитово калибровочное суперполе V с законом преобразования $\mathrm{e}^{2V\,'}=\mathrm{e}^{i\bar\lambda}\,\mathrm{e}^{2V}\,\mathrm{e}^{-i\lambda}$. Калибровочно-инвариантное действие имеет вид

$$S_C^{N=2}=\frac{1}{2}\int dt\,d^2\theta\,\big[\mathrm{tr}\,\big(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{X}\,\mathrm{e}^{2V}\mathcal{D}\mathcal{X}\,\mathrm{e}^{2V}\big)-\bar{\mathcal{Z}}\,\mathrm{e}^{2V}\mathcal{Z}+2c\,\mathrm{tr}\,V\big], \tag{13}$$

где ковариантные производные определены как

$$\mathcal{D}\mathcal{X}=D\mathcal{X}+\mathrm{e}^{-2V}(D\,\mathrm{e}^{2V})\,\mathcal{X},\quad \bar{\mathcal{D}}\mathcal{X}=\bar{D}\mathcal{X}-\mathcal{X}\,\mathrm{e}^{2V}(\bar{D}\,\mathrm{e}^{-2V}). \tag{14}$$

Можно показать, что исходное матричное действие (12) и его калибровочно-инвариантный аналог (13) обладают $\mathcal{N}=2$ суперконформной симметрией $SU(1,1|1)$.

Используя компонентные разложения $\mathcal{X}=X+\ldots$, $\mathcal{Z}=Z+\ldots$, выбирая калибровку Весса–Зумино $V=\theta\bar\theta A(t)$ и исключая вспомогательные поля, получаем следующее компонентное действие:

$$S_C^{N=2}=\frac{1}{2}\int dt\,\big[\mathrm{tr}\,\nabla X\,\nabla X+i\,(\bar{Z}\nabla Z-\nabla\bar{Z}Z)+2c\,\mathrm{tr}\,A+i\,\mathrm{tr}\,(\bar\Psi\nabla\Psi-\nabla\bar\Psi\Psi)\big]. \tag{15}$$

Здесь $\nabla\Psi=\dot\Psi+i[A,\Psi]$, $\nabla\bar\Psi=\dot{\bar\Psi}+i[A,\bar\Psi]$, а ∇X, ∇Z определены в (9). Легко показать, что бозонный предел действия (15) совпадает с действием рациональной модели Калоджеро в калибровочно-инвариантной формулировке (8). Таким образом, мы получили новое $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное расширение n-частичной модели Калоджеро с n физическими бозонами и $2n^2$ фермионами Ψ_a^b, $\bar\Psi_b^a$, в отличие от стандартной $\mathcal{N}=2$ системы Калоджеро с $2n$ фермионами, предложенной в [8].

Отметим, что после дополнительной фиксации калибровки $Z_a=\bar{Z}^a$ связи $(Z_a)^2=c-R_a$ содержат фермионные члены $R_a\equiv\{\Psi,\bar\Psi\}_a{}^a$, $(R_a)^{2n-1}\equiv 0$. В настоящее время не ясно, как трактовать это «размножение» фермионных полей. Возможно, что для уменьшения их числа необходимо ввести новую фермионную калибровочную инвариантность типа известной κ-симметрии.

Для вывода $\mathcal{N}=2$ суперсимметричного обобщения модели Калоджеро–Сазерленда надо исходить из калибровочной суперполевой сигма-модели

$$S_{\mathrm{CS}}^{N=2}=\frac{1}{2}\int dt\,d^2\theta\,\big[\mathrm{tr}\big(\mathcal{X}^{-1}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{X}\,\mathcal{X}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{X}\big)-\bar{\mathcal{Z}}\,\mathrm{e}^{2V}\,\mathcal{Z}+2c\,\mathrm{tr}\,V\big]. \tag{16}$$

Выполняя те же шаги, что и в рациональном случае, приходим к компонентному действию

$$S_{\rm CS}^{N=2} = \frac{1}{2}\int dt\,\Big[\,{\rm tr}\big(X^{-1}\nabla X\,X^{-1}\nabla X\big) + i\,\big(\bar Z\nabla Z - \nabla\bar Z Z\big) + 2c\,{\rm tr}\,A + \\ + i\,{\rm tr}\big(X^{-1}\bar\Psi X^{-1}\nabla\Psi - X^{-1}\nabla\bar\Psi X^{-1}\Psi\big) - \\ - \frac{1}{2}\,{\rm tr}\big(X^{-1}\bar\Psi X^{-1}\bar\Psi X^{-1}\Psi X^{-1}\Psi\big)\Big]. \quad (17)$$

В бозонном пределе оно переходит в калибровочно-инвариантное действие модели Калоджеро–Сазерленда (10).

Альтернативная суперполевая формулировка рассмотренных $\mathcal{N} = 2$ моделей недавно предложена в [21].

3. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Универсальным подходом к суперполевым формулировкам $\mathcal{N} = 4$ механики является метод $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ гармонического суперпространства [22], представляющего собой $d = 1$ версию $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ гармонического суперпространства [23]. В отличие от обычного $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперпространства с координатами $(t, \theta_i, \bar\theta^k)$, $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ гармоническое суперпространство параметризовано координатами $(t, \theta^\pm, \bar\theta^\pm, u^\pm_i)$, где $\theta^\pm = \theta^i u^\pm_i$, $\bar\theta^\pm = \bar\theta^i u^\pm_i$ и $u^\pm_i$, $u^{+i}u^-_i = 1$ — $SU(2)$-гармоники, параметризующие 2-сферу $S^2 \sim SU(2)_R/U(1)_R$. Важное свойство гармонического суперпространства состоит в наличии у него гармонического аналитического подпространства, включающего половину исходных грассмановых переменных, $(\zeta, u) = (t_A, \theta^+, \bar\theta^+, u^\pm_i)$, $t_A = t + i(\theta^+\bar\theta^- + \theta^-\bar\theta^+)$. Это аналитическое суперпространство замкнуто относительно $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии.

Все $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ мультиплеты описываются гармоническими суперполями. В частности, $\mathcal{N} = 4$ мультиплет $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$ представляется вещественным гармоническим суперполем $\mathcal{X}(t, \theta^\pm, \bar\theta^\pm, u)$, подчиненным определенной системе связей (см. детали в [22]), или аналитическим препотенциалом $\mathcal{V}(\zeta, u)$, задаваемым интегральным представлением

$$\mathcal{X}(t, \theta_i, \bar\theta^i) = \int du\,\mathcal{V}(t_A, \theta^+, \bar\theta^+, u)\Big|_{\theta^\pm = \theta^i u^\pm_i,\ \bar\theta^\pm = \bar\theta^i u^\pm_i} \quad (18)$$

и определенным с точностью до калибровочных преобразований $\delta\mathcal{V} = D^{++}\lambda^{--}$ с локальным аналитическим параметром $\lambda^{--}(\zeta, u)$. В этом разделе будет использоваться также $\mathcal{N} = 4$ гипермультиплет, который описывается комплексными аналитическими суперполями $\mathcal{Z}^+$, $\bar{\mathcal{Z}}^+$, подчиненными связи

$D^{++}\,\mathcal{Z}^+ = 0$, где $D^{++} = u^{+i}\partial/\partial u^{-i} + 2i\theta^+\bar\theta^+\partial_{t_A}$ — сохраняющая аналитичность гармоническая производная (в аналитическом базисе). Калибровочные поля содержатся в аналитическом калибровочном препотенциале V^{++}, не подчиненном каким-либо связям. На этом суперполе определено калибровочное преобразование

$$V^{++\,\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda}\,V^{++}\,\mathrm{e}^{-i\lambda} - i\,\mathrm{e}^{i\lambda}(D^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda}), \qquad (19)$$

где $\lambda_a^b(\zeta, u^\pm) \in u(n)$ — эрмитов аналитический матричный параметр. Используя калибровочную свободу (19), можно выбрать калибровку Весса–Зумино $V^{++} = 2i\,\theta^+\bar\theta^+A(t_A)$.

3.1. $\mathcal{N}=4$ суперсимметричная модель Калоджеро. Матричное суперполевое действие

$$S^{\mathcal{N}=4} = S^{\mathcal{N}=4}_{\mathcal{X}} + S^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{WZ}} + S^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{FI}} \qquad (20)$$

обладает наиболее общей $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперконформной симметрией $D(2,1;\alpha)$ в случае, когда слагаемые в (20) имеют вид

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{N}=4}_{\mathcal{X}} &= \frac{1}{4(1+\alpha)}\int \mu_H\big(\mathrm{tr}\,\mathcal{X}^2\big)^{-1/2\alpha}, \\ S^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{WZ}} &= \frac{1}{2}\int \mu_A^{(-2)}\mathcal{V}_0\,\widetilde{\mathcal{Z}}^{a\,+}\mathcal{Z}^+_a, \\ S^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{FI}} &= -\frac{ic}{2}\int \mu_A^{(-2)}\,\mathrm{tr}\,V^{++}, \end{aligned} \qquad (21)$$

где μ_H и $\mu_A^{(-2)}$ — меры интегрирования в полном и аналитическом гармонических суперпространствах. Все присутствующие в (21) суперполя определяются связями, в которых используются производные, ковариантные относительно локальных $U(n)$-преобразований,

$$\mathcal{X}^{\,\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda}\mathcal{X}\mathrm{e}^{-i\lambda}, \quad \mathcal{Z}^{+\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda}\mathcal{Z}^+, \quad \bar{\mathcal{Z}}^{+\prime} = \bar{\mathcal{Z}}^+\mathrm{e}^{-i\lambda}, \qquad (22)$$

например $D^{++}\mathcal{Z}^+ \to \mathcal{D}^{++}\mathcal{Z}^+ = D^{++}\mathcal{Z}^+ + iV^{++}\mathcal{Z}^+$. Кроме того, суперполе $\mathcal{V}_0$ является вещественным аналитическим препотенциалом для $U(n)$-синглетного суперполя $\mathcal{X}_0 \equiv \mathrm{tr}\,(\mathcal{X})$. Они связаны интегральным преобразованием (18).

Рассмотрим выбор $\alpha = -1/2$, при котором $D(2,1;\alpha) \sim osp(4|2)$. В калибровке Весса–Зумино и после исключения части вспомогательных полей действие (20) принимает вид

$$S_C^{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{2}\int dt\Big[\mathrm{tr}\big(\nabla X\nabla X + 2c\,A\big) + \frac{n}{4}(\bar Z^{(i}Z^{k)})(\bar Z_i Z_k) + \\ + i\,X_0\big(\bar Z_k\nabla Z^k - \nabla\bar Z_k\,Z^k\big)\Big] + \\ + \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\int dt\big(\bar\Psi_k\nabla\Psi^k - \nabla\bar\Psi_k\Psi^k\big) - \int dt\,\frac{\Psi_0^{(i}\bar\Psi_0^{k)}(\bar Z_i Z_k)}{2X_0}, \quad (23)$$

где $X_0 := \mathrm{tr}\,(X)$, $\Psi_0^i := \mathrm{tr}\,(\Psi^i)$, $\bar\Psi_0^i := \mathrm{tr}\,(\bar\Psi^i)$. После фиксации калибровки для остаточной калибровочной симметрии и исключения полей A_a^b, $a\neq b$, а также подходящего переопределения полей бозонную часть действия можно записать в виде

$$S_{C,b}^{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{2}\int dt\Big\{\sum_a \dot x_a\dot x_a + i\sum_a(\bar Z_k^a\dot Z_a^k - \dot{\bar Z}{}_k^a Z_a^k) - \\ - \sum_{a\neq b}\frac{\mathrm{tr}(S_aS_b)}{4(x_a-x_b)^2} - \frac{n\,\mathrm{tr}(\hat S\hat S)}{2(X_0)^2}\Big\}, \quad (24)$$

где $(S_a)_i{}^j := \bar Z_i^a Z_a^j$, $(\hat S)_i{}^j := \sum\limits_a\Big[(S_a)_i{}^j - (1/2)\delta_i^j(S_a)_k{}^k\Big]$ и поля Z_a^k подчиняются связям $\bar Z_i^a Z_a^i = c$ (для каждого a). Член Весса–Зумино для Z-переменных в (24) порождает скобки Дирака $[\bar Z_i^a, Z_b^j]_D = i\delta_b^a\delta_i^j$, имеющие следствием соотношения

$$\big[(S_a)_i{}^j, (S_b)_k{}^l\big]_D = i\delta_{ab}\Big\{\delta_i^l(S_a)_k{}^j - \delta_k^j(S_a)_i{}^l\Big\}. \quad (25)$$

Иными словами, для каждого значения индекса a величины S_a образуют взаимно коммутирующие алгебры $u(2)$, а $(\hat S)_i^j$ является полным сохраняющимся нетеровским $SU(2)$-зарядом данной системы.

В отличие от случая $\mathcal{N}=2$ при описании $\mathcal{N}=4$ механики не все из $d=1$ полей Z_a^i оказываются вспомогательными: после квантования они становятся $U(2)$-спиновыми степенями свободы (т. е. гармониками в пространстве отображения). Кроме того, величина $\mathrm{tr}\,\hat S\hat S$ является интегралом движения, генерирующим в случае $\mathcal{N}=4$ конформный потенциал в секторе центра масс. С точностью до этого дополнительного конформного потенциала бозонный предел построенной $\mathcal{N}=4$ системы совпадает с интегрируемой $U(2)$-спиновой моделью Калоджеро [3].

Возможны другие типы суперсимметризации n-частичной модели Калоджеро с $su(n)$- или $so(n)$-спиновыми переменными [24, 25]. В $su(n)$-модели спиновые переменные могут быть исключены с помощью гамильтоновой редукции с сохранением $\mathcal{N}n^2$ фермионов для любого числа суперсимметрий $\mathcal{N}$.

3.2. $\mathcal{N} = 4$ модели Калоджеро–Сазерленда. Основной отличительной чертой этой системы является выбор в (20) нелинейного сигма-модельного действия для $\mathcal{X}$,

$$S_{\mathcal{X}} = \frac{1}{2} \int \mu_H \operatorname{tr}(\ln \mathcal{X}), \tag{26}$$

с сохранением вида остальных двух членов в (20), (21). Полная структура компонентного действия восстанавливается теми же манипуляциями, как и в случае рационального Калоджеро. Количество физических фермионов снова равно $4n^2$. Действие (26) обладает только «плоской» $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперсимметрией и $SU(2)$ R-симметрией.

Введение переменных q_a с помощью замены $x_a = \mathrm{e}^{q_a}$ приводит бозонную часть действия к виду

$$S^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{CS},b} = \tilde{S}^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{CS},b} + \int dt \sum_{a,b} \frac{(S_a)^{(ik)}\,(S_b)_{(ik)} \operatorname{tr}(X^2)}{4(X_0)^2}, \tag{27}$$

где $\mathrm{Tr}\left(X^2\right) = \sum\limits_c \mathrm{e}^{2q_c}$, $X_0 = \sum\limits_c \mathrm{e}^{q_c}$, выполняются связи $\bar{Z}^a_i Z^i_a = c$ для каждого a и

$$\tilde{S}^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{CS},b} = \frac{1}{2} \int dt \left\{ \sum_a \left[\dot{q}_a \dot{q}_a + i(\bar{Z}^a_k \dot{Z}^k_a - \dot{\bar{Z}}^a_k Z^k_a) \right] - \sum_{a \neq b} \frac{(S_a)_i{}^k (S_b)_k{}^i}{4 \sinh^2 \dfrac{q_a - q_b}{2}} \right\}. \tag{28}$$

Следовательно, с точностью до последнего члена действие (27) описывает гиперболическую $U(2)$-спиновую систему Калоджеро–Сазерленда [3].

Выбор действия S_{WZ} в (21) для $\mathcal{N} = 4$ рациональной модели Калоджеро в основном определялся требованием суперконформной инвариантности. В гиперболическом случае такая симметрия отсутствует с самого начала. В частности, действие (26) для $\mathcal{X}$ уже не обладает такой инвариантностью и нет причин настаивать на ней в других частях полного действия. Поэтому естественно в полном действии (20) выбрать для мультиплетов $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ вместо (21) самое простое действие

$$\tilde{S}^{\mathcal{N}=4}_{\mathrm{WZ}} = -\frac{1}{2} \int \mu^{(-2)}_A \bar{\mathcal{Z}}^{+a} \mathcal{Z}^+_a. \tag{29}$$

Новое полное действие в бозонном секторе содержит «чистую» гиперболическую $U(2)$-спиновую систему Калоджеро–Сазерленда для любого n без какого-либо дополнительного взаимодействия. Координата центра масс полностью отделяется и описывается свободным действием в этой модели.

Также существует $\mathcal{N}=4$ суперсимметричное расширение моделей Калоджеро–Сазерленда с $4n^2$ фермионами, не содержащее спиновых переменных [26].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы описали универсальный метод построения суперсимметричных расширений моделей калоджеровского типа на основе процедуры суперполевого калибрования. Этот метод приводит к нестандартной суперсимметризации с $\mathcal{N}n^2$ физическими фермионными полями. С его помощью построены новые $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ суперполевые системы, содержащие в качестве бозонного предела рациональные модели Калоджеро и гиперболические модели Калоджеро–Сазерленда при $\mathcal{N}=2$ и их $U(2)$-спиновые аналоги при $\mathcal{N}=4$.

Перечислим некоторые дальнейшие задачи в рамках предложенного подхода:

• исследование классической и квантовой интегрируемости новых суперсимметричных моделей Калоджеро;

• проверка возможностей описания спиновых переменных в различных $\mathcal{N}=4$ системах Калоджеро другими $\mathcal{N}=4$, $d=1$ мультиплетами, например, мультиплетами $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ или $(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1})$;

• обобщение калибровочного подхода на случай $\mathcal{N}=4$ «слабой» суперсимметрии $SU(2|1)$ [27–29] и аналогичной деформированной версии $\mathcal{N}=8$ суперсимметрии [30] с дополнительными членами осцилляторного типа;

• квантование всех этих моделей подобно тому, как это было недавно сделано в [31] для систем Калоджеро–Мозера с $SU(2|1)$-суперсимметрией;

• воспроизведение методом суперполевого калибрования многочастичных систем, построенных в [24, 25] в гамильтоновом подходе на массовой поверхности для произвольного $\mathcal{N}$;

• суперсимметризация других интегрируемых многочастичных моделей [6], например тригонометрических моделей Калоджеро–Сазерленда, эллиптических моделей и т. п.

Благодарности. Е. Иванов и С. Федорук благодарят за поддержку Российский научный фонд, грант № 16-12-10306.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2191; 1971. V. 12. P. 419.
2. *Moser J.* // Adv. Math. 1975. V. 16. P. 197.
3. *Polychronakos A. P.* // J. Phys. A. 2006. V. 39. P. 12793.
4. *Gibbons G. W., Townsend P. K.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 454. P. 187.
5. *Ivanov E., Krivonos S., Niederle J.* // Nucl. Phys. B. 2004. V. 677. P. 485.
6. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* // Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313; 1983. V. 94. P. 313.
7. *Sutherland B.* // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 246; Phys. Rev. A. 1972. V. 5. P. 1372.
8. *Freedman D. Z., Mende P. F.* // Nucl. Phys. B. 1990. V. 344. P. 317.
9. *Desrosiers P., Lapointe L., Mathieu P.* // Nucl. Phys. B. 2001. V. 606. P. 547.

10. *Wyllard N.* // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 2826.
11. *Bellucci S., Galajinsky A., Latini E.* // Phys. Rev. D. 2005. V. 71. P. 044023.
12. *Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281.
13. *Dijkgraaf R., Verlinde H. L., Verlinde E. P.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59.
14. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 105015.
15. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* // J. Phys. A. 2012. V. 45. P. 173001.
16. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* // Nucl. Phys. B. 2019. V. 944. P. 11463.
17. *Delduc F., Ivanov E.* // Nucl. Phys. B. 2006. V. 753. P. 211.
18. *Polychronakos A. P.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 266. P. 29.
19. *Gorsky A., Nekrasov N.* // Teor. Mat. Fiz. 1994. V. 100. P. 97.
20. *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.* // Nuovo Cim. A. 1976. V. 34. P. 569.
21. *Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A.* arXiv:1912.05989.
22. *Ivanov E., Lechtenfeld O.* // JHEP. 2003. V. 0309. P. 073.
23. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* // Class. Quant. Grav. 1984. V. 1. P. 469.
24. *Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A.* // Phys. Lett. B. 2018. V. 784. P. 137; 2019. V. 790. P. 191.
25. *Krivonos S., Lechtenfeld O., Provorov A., Sutulin A.* // Ibid. V. 791. P. 385.
26. *Krivonos S., Lechtenfeld O.* // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. P. 086010.
27. *Bellucci S., Nersessian A.* // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 065013.
28. *Smilga A. V.* // Phys. Lett. B. 2004. V. 585. P. 173.
29. *Ivanov E., Sidorov S.* // Class. Quant. Grav. 2014. V. 31. P. 075013.
30. *Ivanov E., Lechtenfeld O., Sidorov S.* // JHEP. 2016. V. 1611. P. 031; 2018. V. 1808. P. 193.
31. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O., Sidorov S.* // Ibid. V. 1804. P. 043.