

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В МОДЕЛИ САЧДЕВА–ЙЕ–КИТАЕВА

*М. А. Храмов**

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Исследуются непертурбативные эффекты в модели Сачдева–Йе–Китаева (SYK) при больших N . Рассматриваются реплика-недиагональные решения в модели SYK с целым числом реплик $M > 1$. Важным свойством таких решений является то, что они реализуют спонтанное нарушение группы временных трансляций на M копиях термальной окружности. Демонстрируется, что это спонтанное нарушение симметрии можно описать в терминах квазисредних Боголюбова, если рассмотреть систему нелокально взаимодействующих реплик SYK. Включение взаимодействия реплик в данной системе превращает сублидирующие реплика-недиагональные седловые точки из чистой SYK в термодинамические фазы, порождая нетривиальную фазовую структуру. Исследуется данная фазовая структура точно аналитически в модели SYK₂ и численно в модели SYK₄.

We study nonperturbative effects in the Sachdev–Ye–Kitaev (SYK) model at large N . We consider replica-nondiagonal solutions in the SYK model with integer replica number $M > 1$. An important feature of these solutions is that they realize spontaneous symmetry breaking of the group of time translations on M copies of the thermal circle. In this note we show that this spontaneous symmetry breaking can be described in terms of Bogolyubov quasi-averages, if one considers a system of nonlocally coupled SYK replicas. Inclusion of the coupling in this system turns subleading replica-nondiagonal saddle points from pure SYK into thermodynamic phases, giving rise to a nontrivial phase structure. We study this phase structure using exact analytic methods in SYK₂ model and numerically in the SYK₄ model.

PACS: 11.15.Tk; 11.10.-z

1. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Модель Сачдева–Йе–Китаева (SYK) [1–4] — это пример максимально хаотической голографической квантовой теории в размерности $0 + 1$. Га-

*E-mail: khrantsov@mi-ras.ru

мильтониан модели дается формулой

$$H = (i)^{q/2} \sum_{i_1 \leq i_2 < \dots < i_{q-1} \leq i_q = 1}^N j_{i_1 \dots i_q} \chi_{i_1} \dots \chi_{i_q}. \quad (1)$$

Динамическими переменными являются майорановские фермионы χ_i , а константы связи $j_{i_1 \dots i_q}$ распределены случайным образом по гауссовому распределению

$$P(j_{i_1 \dots i_q}) = \sqrt{\frac{N^{q-1}}{2(q-1)! \pi J^2}} \exp\left(-\frac{N^{q-1} j_{i_1 \dots i_q}^2}{2(q-1)! J^2}\right). \quad (2)$$

Роль безразмерной константы связи играет величина βJ . Число q определяет степень фермионного взаимодействия. Будем рассматривать случай $q = 2$, при котором модель точно интегрируема, и случай $q = 4$, при котором она хаотична.

Голографический принцип для данной модели означает, что она дуальна некоторой теории двухмерной гравитации в пространстве с асимптотикой AdS_2 . В более общем случае рассмотрим M реплик модели, в которых константы связи совпадают в каждой реализации ансамбля. Такая система будет дуальна двухмерной теории гравитации, которая суммирует квантовые геометрии с M границами. Более конкретно утверждение голографического соответствия имеет следующий вид:

$$\overline{Z_{\text{SYK}}(\beta)^M} = Z_{\text{gravity}}(\beta; M). \quad (3)$$

Здесь слева стоит усредненная по беспорядку (что обозначено горизонтальной чертой) статсумма для M реплик SYK, которую можно записать как функциональный интеграл по билोकальным коллективным полям: $\overline{Z(\beta)^M} = \int DG_{\alpha\beta} D\Sigma_{\alpha\beta} e^{-NI[G, \Sigma]}$ [4], где $\alpha, \beta = 1, \dots, M$ — репличные индексы, а действие имеет вид

$$I[G, \Sigma] = -\log \text{Pf} [\delta_{\alpha\beta} \partial_\tau - \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left(\Sigma_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) - \frac{J^2}{q} G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2)^q \right). \quad (4)$$

Здесь предполагается, что билोकальные поля удовлетворяют условию антисимметрии

$$G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -G_{\beta\alpha}(\tau_2, \tau_1), \quad \Sigma_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\Sigma_{\beta\alpha}(\tau_2, \tau_1). \quad (5)$$

Справа в выражении (3) стоит статсумма двухмерной гравитации, которая включает в себя функциональный интеграл по геометриям с M границами в форме окружностей длины β [5–10].

В недавних работах по квантовому хаосу в моделях типа SYK и квантовому поведению черных дыр (см., например, [5–7, 9, 11, 12]) ключевым моментом является важность реплика-недиагональных конфигураций в континуальном интеграле SYK, или эквивалентно вкладов связанных многообразий в гравитационную статсумму. Эти вклады являются непертурбативными эффектами с точки зрения модели SYK. Мы нашли и исследовали важное семейство таких эффектов — реплика-недиагональные решения уравнений седловой точки в SYK [13, 15]. В точной модели SYK такие решения существуют при целом числе реплик $M > 1$ и дают экспоненциально малый вклад в функциональный интеграл при больших N по сравнению с доминирующим реплика-диагональным решением.

Основной целью данной заметки является обсуждение симметричных свойств данных непертурбативных эффектов. Характерным свойством реплика-недиагональных решений является спонтанное нарушение симметрии относительно временных трансляций. Действие (4) при конечной температуре инвариантно относительно временных трансляций в каждой реплике $U(1)^{\times M}$. При этом реплика-диагональные седловые точки сохраняют эту симметрию, а реплика-недиагональные седловые точки, вообще говоря, спонтанно нарушают эту симметрию. В частности, седловые точки, для которых $G_{\alpha\beta}$ зависит только от разности времен, спонтанно нарушают полную временную трансляционную симметрию как $U(1)^{\times M} \rightarrow U(1)$. Этот механизм спонтанного нарушения симметрии играет ключевую роль в поведении таких величин, как спектральный формфактор [6, 11], и он естественным образом воспроизводится с гравитационной стороны соответствующими связными геометриями [6, 7].

В данной заметке мы сосредоточимся на случае $M = 2$ реплик и конечной температуры β^{-1} . Тогда $\alpha = L, R$. Введем также компактное обозначение для случайных констант связи $\mathbf{j} = \{j_{i_1 \dots i_q}\}$. Мы рассматриваем модель с действием [15]

$$S[\psi, \mathbf{j}] = S_{\text{SYK}}[\psi^L, \mathbf{j}] + S_{\text{SYK}}[\psi^R, \mathbf{j}] + S_{\text{int}}[\psi]. \quad (6)$$

Здесь

$$S_{\text{SYK}}[\psi^\alpha, \mathbf{j}] = \int_0^\beta d\tau \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i^\alpha \frac{d}{d\tau} \psi_i^\alpha - \frac{i^q/2}{q!} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i_1, i_2, \dots, i_q=1}^N j_{i_1 i_2 \dots i_q} \psi_{i_1}^\alpha \psi_{i_2}^\alpha \dots \psi_{i_q}^\alpha \right) \quad (7)$$

— это действие SYK для одной реплики. Мы также имеем член с явным взаимодействием между репликами:

$$S_{\text{int}} = \int_0^\beta \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \sum_{i=1}^N \psi_i^L(\tau_1) \eta_{LR}(\tau_1 - \tau_2) \psi_i^R(\tau_2), \quad (8)$$

где*

$$\eta_{LR}(\tau_1 - \tau_2) = \eta_{RL}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{\nu}{\beta \sin \frac{\pi}{\beta}(\tau_1 - \tau_2)}. \quad (9)$$

Здесь ν — константа связи.

В терминах репличных биллокальных полей функциональный интеграл для такой модели имеет вид производящего функционала с заданным источником:

$$\mathcal{Z}(\eta) = \int DG D\Sigma e^{-NI[G, \Sigma]}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} I[G, \Sigma; \eta] = & -\log \text{Pf} [\delta_{\alpha\beta} \partial_\tau - \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \left(\Sigma_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) - \frac{J^2}{q} G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2)^q \right) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \eta_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2). \quad (11) \end{aligned}$$

• Модель с действием (6) позволяет описать спонтанное нарушение симметрии $U(1) \times U(1) \rightarrow U(1)$ реплика-недиагональными решениями в терминах квазисредних Боголюбова [16]. Это верно как для $q = 2$, так и для $q = 4$.

• Малые пертурбативные эффекты, привносимые реплика-недиагональными решениями в чистой SYK, при добавлении взаимодействия между репликами с $\nu > 0$ превращаются в термодинамические фазы, доминирующие при определенных температурах.

Техническими результатами являются решения уравнений седловой точки для функционального интеграла (10) и исследование его фазовой структуры. Уравнения седловых точек имеют вид

$$\partial_\tau G_{\alpha\gamma}(\tau, \tau'') - \int d\tau' G_{\alpha\beta}(\tau, \tau') \Sigma_{\beta\gamma}(\tau', \tau'') = \delta_{\alpha\gamma} \delta(\tau - \tau''), \quad (12)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\tau, \tau') = J^2 G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')^{q-1} + \eta_{\alpha\beta}(\tau, \tau'). \quad (13)$$

*В действии временной интеграл понимается в смысле главного значения.

Реплика-симметричная форма источника (9) диктует через уравнение (13), что для решений нам следует предположить также реплика-симметричную форму

$$G_{LL} = G_{RR} = G_0, \quad G_{LR} = G_{RL} = G_1, \quad (14)$$

где как G_0 , так и G_1 предполагаются нечетными функциями в частотном и временном представлениях и антипериодичными по времени. Таким образом, мы решаем уравнения для двух динамических переменных.

Для мотивации обсуждения квазисредних сначала рассмотрим аналитическое решение модели в случае $q = 2$. Затем будет непосредственно обсуждаться спонтанное нарушение симметрии. В конце приводятся численные результаты для случая $q = 4$.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ

В случае $q = 2$ уравнения (12), (13) сводятся к системе алгебраических уравнений в частотном представлении:

$$-i\omega_n G_0(\omega_n) - J^2 G_0(\omega_n)^2 - (J^2 G_1(\omega_n) + i\nu \operatorname{sgn}(\omega_n)) G_1(\omega) = 1, \quad (15)$$

$$-i\omega_n G_1(\omega_n) - J^2 G_0(\omega) G_1(\omega) - (J^2 G_1(\omega_n) + i\nu \operatorname{sgn}(\omega_n)) G_0(\omega_n) = 0. \quad (16)$$

Здесь $\omega_n = (2\pi/\beta)(n + 1/2)$.

2.1. Решения. Уравнения (15), (16) для общих значений ν имеют четыре решения для каждой мацубаровской частоты:

$$G_0^{(1)}(\omega_n) = -\frac{i}{2J^2} \left[\omega_n - \frac{\operatorname{sgn}(\omega_n)}{\sqrt{2}} A_1 \right], \quad (17)$$

$$G_1^{(1)}(\omega_n) = \frac{i}{8J^2\nu\omega_n} \left(\sqrt{2}A_1(4J^2 + \omega_n^2 - B) - \nu^2(4|\omega_n| - \sqrt{2}A_1) \right), \quad (18)$$

$$G_0^{(2)}(\omega_n) = -\frac{i}{2J^2} \left[\omega_n + \frac{\operatorname{sgn}(\omega_n)}{\sqrt{2}} A_1 \right], \quad (19)$$

$$G_1^{(2)}(\omega_n) = \frac{i}{8J^2\nu\omega_n} \left(-\sqrt{2}A_1(4J^2 + \omega_n^2 - B) - \nu^2(4|\omega_n| + \sqrt{2}A_1) \right), \quad (20)$$

$$G_0^{(3)}(\omega_n) = -\frac{i}{2J^2} \left[\omega_n + \frac{\operatorname{sgn}(\omega_n)}{\sqrt{2}} A_2 \right], \quad (21)$$

$$G_1^{(3)}(\omega_n) = \frac{i}{8J^2\nu\omega_n} \left(-\sqrt{2}A_2(4J^2 + \omega_n^2 + B) - \nu^2(4|\omega_n| + \sqrt{2}A_2) \right), \quad (22)$$

$$G_0^{(4)}(\omega_n) = -\frac{i}{2J^2} \left[\omega_n - \frac{\text{sgn}(\omega_n)}{\sqrt{2}} A_2 \right], \quad (23)$$

$$G_1^{(4)}(\omega_n) = \frac{i}{8J^2\nu\omega_n} \left(\sqrt{2}A_2(4J^2 + \omega_n^2 + B) - \nu^2(4|\omega_n| - \sqrt{2}A_2) \right). \quad (24)$$

Здесь мы ввели вспомогательные обозначения

$$A_1 = \sqrt{4J^2 + \omega_n^2 + \nu^2 + B}, \quad (25)$$

$$A_2 = \sqrt{4J^2 + \omega_n^2 + \nu^2 - B},$$

$$B = \sqrt{16J^2\omega_n^2 + (4J^2 + \nu^2 - \omega_n^2)^2}. \quad (26)$$

Исследуя поведение этих решений при $\nu \rightarrow 0$ и сравнивая с результатами разд. 3.1 в [13], мы видим, что решения 1 и 2 стремятся к реплика-диагональным решениям, тогда как решения 3 и 4 стремятся к реплика-недиагональным решениям в чистой SYK.

Решения полной модели SYK₂ строятся путем выбора любого из четырех корней для каждой мацубаровской частоты независимо. Решение, для которого мы выбираем корень 1 для каждой мацубаровской частоты, дает стандартную седловую точку [3, 5], которая диагональна и доминирует при $\nu = 0$.

2.2. Фазовая структура. Вычисляя действие на решениях 1, 2, 3, 4 и исследуя его поведение, можно показать, что при достаточно низких температурах или высоких ν начинают доминировать решения, в которых кроме корня 1 встречаются мацубаровские моды с корнем 4. Это порождает бесконечное число нетривиальных фаз, соответствующих реплика-недиагональным решениям в пределе $\nu \rightarrow 0$. Из условия фазового перехода можно получить

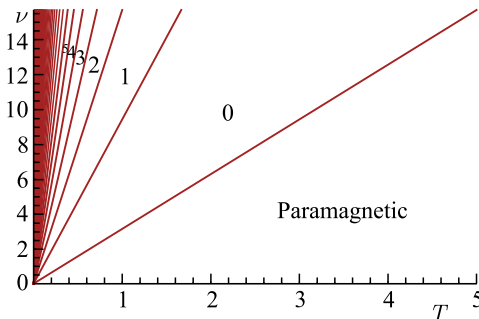


Рис. 1. Фазовая диаграмма двух нелокально взаимодействующих цепочек SYK₂ в плоскости ν - T , определенная уравнением (27). Числа нумеруют нетривиальные фазы

точное уравнение критических кривых [15], семейство которых параметризуется целым числом n . Это уравнение имеет вид

$$\nu_{\text{cr}} = 2\pi T_{\text{cr}} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (27)$$

Отметим, что здесь нет зависимости от J . Соответствующая фазовая диаграмма в плоскости константы связи ν и температуры $T = \beta^{-1}$ представлена на рис. 1. Из нее видно, что а) при любой заданной температуре (константе связи) можно получить бесконечное число фаз, увеличивая константу связи (уменьшая температуру), и б) при любой заданной температуре, уменьшая константу связи квазистатически, всегда оказываемся в «парамагнитной» (стандартной) фазе.

3. НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И КВАЗИСРЕДНИЕ

Источник η снимает вырождение между реплика-недиагональными решениями не взаимодействующей системы и превращает спонтанное нарушение симметрии $U(1) \times U(1) \rightarrow U(1)$ в явное. В разд. 2 явно показано, что источник конкретной формы (9) создает нетривиальную фазовую структуру из реплика-недиагональных решений, которые имеют самую низкую свободную энергию после снятия вырождения. Следовательно, нужно обратить особое внимание на порядок взятия пределов $N \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$ [16].

В модели SYK с двумя не взаимодействующими репликами точный двухточечный коррелятор определяется как

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\delta}{\delta\eta_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2)} \log \mathcal{Z}(\eta) \Big|_{\eta=0}. \quad (28)$$

Нам особенно интересен случай, когда $\alpha \neq \beta$. В терминах интеграла по траекториям (10) имеем

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \int DG D\Sigma e^{-NI[G, \Sigma; \eta]} G_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) \Big|_{\eta=0}. \quad (29)$$

Можно определить обычное квантовое среднее в термодинамическом пределе

$$\langle G_{LR}(\tau_1, \tau_2) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \int DG D\Sigma e^{-NI[G, \Sigma; \eta]} G_{LR}(\tau_1, \tau_2) \Big|_{\eta=0} \right]. \quad (30)$$

Чтобы вычислить эту величину, сначала полагается $\eta = 0$ и затем вычисляется интеграл по траекториям в приближении седловой точки. Доминирующей седловой точкой при $\eta = 0$ является стандартное реплика-диагональное решение, которое сохраняет симметрию трансляций по времени. Следовательно,

результатом является

$$\langle G_{LR} \rangle = 0. \quad (31)$$

Теперь определим *квасисреднее* Боголюбова [14–16]

$$\begin{aligned} \langle G_{LR}(\tau_1, \tau_2) \rangle &= \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \int DG D\Sigma e^{-NI[G, \Sigma; \eta]} G_{LR}(\tau_1, \tau_2) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Чтобы найти эту величину, нужно вычислить функциональный интеграл с помощью седловой точки при некотором ненулевом η и затем взять предел $\eta \rightarrow 0$. Это позволяет этой величине захватывать реплика-недиагональную структуру.

Продемонстрируем, как это работает явно при $q = 2$. Во-первых, мы берем конечное значение $\nu = \nu_0$ такое, что система находится в нетривиальной фазе $\mathbf{0}$. В этой фазе мы имеем $G_1(\pm\omega_0) = G_1^{(4)}(\pm\omega_0)$ (см. (24)). В этом случае

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \int DG D\Sigma e^{-NI[G, \Sigma; \eta]} G_{LR}(\omega_0) = G_1^{(4)}(\omega_0). \quad (33)$$

Далее формула (24) в пределе $\nu \rightarrow 0$ сводится к

$$G_1|_{\nu=0}(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\sqrt{4J^2 + \omega^2}}{2J^2}. \quad (34)$$

В результате это дает ненулевое квазисреднее

$$\langle G_{LR}(\omega_0) \rangle = i \frac{\sqrt{4J^2 + \omega_0^2}}{2J^2}, \quad \langle G_{LR}(\omega_n) \rangle = 0 \quad \forall n \neq 0. \quad (35)$$

Значение квазисреднего $\langle G_{LR}(\tau_1, \tau_2) \rangle$ соответствует значению реплика-недиагональной компоненты $G_{\alpha\beta}$ на реплика-недиагональной седловой точке SYK с не взаимодействующими репликами. Таким образом, квазисредние помнят о ее фазовой структуре после того, как ν выключено. Как обсуждается в разд. 4 ниже, эта же картина верна с этим источником и при $q = 4$.

4. СЛУЧАЙ $q = 4$: ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Численные решения уравнений седловой точки. В случае $q = 4$ мы решаем уравнения седловой точки (12), (13) с анзацем (14) численно методом, описанным в [13, 15]. Графики решений для парамагнитной (тривиальной) и первых трех нетривиальных фаз представлены на рис. 2.

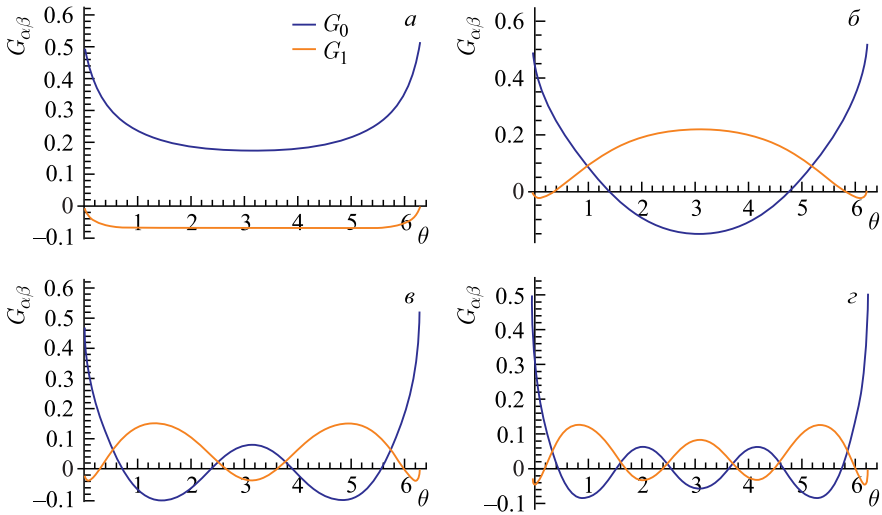


Рис. 2. Численные решения для $G_{\alpha\beta}$ как функции $\theta = (2\pi/\beta)\tau$ для $\nu = 0,1$ и $J = 1$. а) Парамагнитная фаза, $T = 0,032$; б) фаза **0**, $T = 0,025$; в) фаза **1**, $T = 0,008$; г) фаза **2**, $T = 0,004$

4.2. Фазовая структура. Для исследования фазовых переходов мы определим свободную энергию как

$$F = -T \log Z(\eta), \tag{36}$$

где $T = \beta^{-1}$. На доминирующей седловой точке в ведущем порядке большого N мы выражаем ее через действие на решении как

$$F = TN (-\log 2 + I|_{\text{on-shell}}). \tag{37}$$

Здесь $\log 2$ вычтен для того, чтобы энтропия соответствовала свободному ответу $N \log 2$ при $J = \nu = 0$.

На рис. 3 представлено поведение свободной энергии вблизи трех самых высокотемпературных критических точек. Эти фазовые переходы являются переходами первого порядка. Стоит отметить, что на нетривиальных фазах теплоемкость отрицательна. Тем не менее, настраивая ν , можно заставить любую заданную нетривиальную фазу иметь сколь угодно близкую к нулю теплоемкость, позволяя ей таким образом прожить сколь угодно долго.

Данная картина фазовых переходов указывает на то, что при не слишком больших значениях ν в сравнении с J мы также имеем бесконечное семейство нетривиальных фаз в модели с $q = 4$. Соответствующие решения

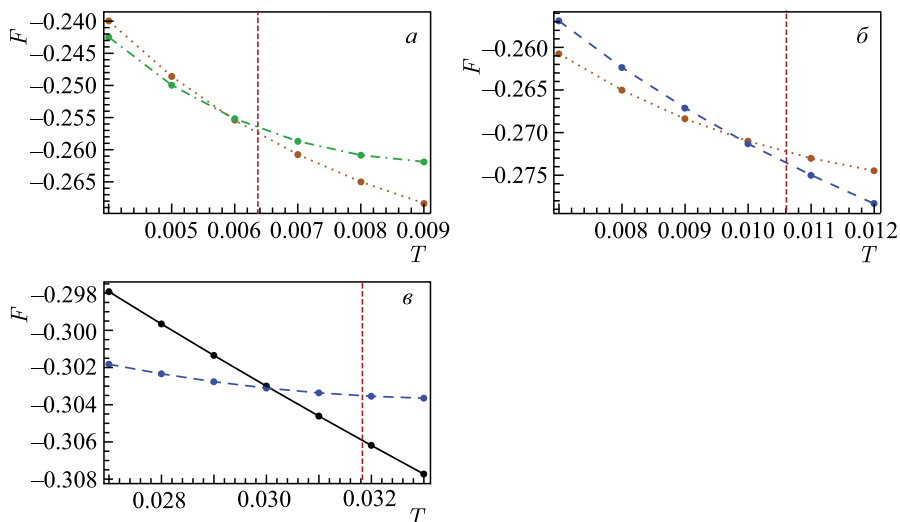


Рис. 3 (цветной в электронной версии). Свободная энергия при фазовых переходах в модели $q = 4$. Здесь черная (сплошная) кривая — свободная энергия парамагнитной фазы, синяя (штриховая) кривая — свободная энергия фазы $\mathbf{0}$, коричневая (пунктирная) кривая — свободная энергия фазы $\mathbf{1}$ и зеленая (штрихпунктирная) кривая — свободная энергия фазы $\mathbf{2}$. Здесь $J = 1$. Пунктирная (вертикальная) линия показывает для сравнения соответствующую критическую точку в модели $q = 2$, которая диктуется уравнением (27)

также сводятся к реплика-недиагональным в пределе $\nu \rightarrow 0$, и таким образом взаимодействие (8) определяет квазисреднее для спонтанного нарушения симметрии временных трансляций и в версии модели с $q = 4$.

Благодарности. Данный вклад в труды Боголюбовской конференции «Проблемы теоретической и математической физики» 2019 г. основан на работе [15] и представлен на конференции автором в виде устного доклада. Автор благодарен И. Я. Арефьевой и И. В. Воловичу за полезные дискуссии. Работа поддержана РФФИ, грант № 18-32-00918.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sachdev S., Ye J. Gapless Spin Fluid Ground State in a Random, Quantum Heisenberg Magnet // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3339; cond-mat/9212030.
2. Kitaev A. <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/>, <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/>.
3. Maldacena J., Stanford D. Remarks on the Sachdev–Ye–Kitaev Model // Phys. Rev. D. 2016. V. 94, No. 10. P. 106002; arXiv:1604.07818 [hep-th].

4. *Kitaev A., Suh S.J.* The Soft Mode in the Sachdev–Ye–Kitaev Model and Its Gravity Dual // JHEP. 2018. V. 1805. P. 183; arXiv:1711.08467 [hep-th].
5. *Cotler J.S. et al.* Black Holes and Random Matrices // JHEP. 2017. V. 1705. P. 118; Erratum // JHEP. 2018. V. 1809. P. 002; arXiv:1611.04650 [hep-th].
6. *Saad P., Shenker S.H., Stanford D.* A Semiclassical Ramp in SYK and in Gravity. arXiv:1806.06840 [hep-th].
7. *Saad P., Shenker S.H., Stanford D.* JT Gravity as a Matrix Integral. arXiv:1903.11115 [hep-th].
8. *Maldacena J., Qi X.L.* Eternal Traversable Wormhole. arXiv:1804.00491 [hep-th].
9. *Garcia-Garcia A.M., Nosaka T., Rosa D., Verbaarschot J.J.M.* Quantum Chaos Transition in a Two-Site SYK Model Dual to an Eternal Traversable Wormhole // Phys. Rev. D. 2019. V. 100, No. 2. P. 026002; arXiv:1901.06031 [hep-th].
10. *Blommaert A., Mertens T.G., Verschelde H.* Clocks and Rods in Jackiw–Teitelboim Quantum Gravity // JHEP. 2019. V. 1909. P. 060; arXiv:1902.11194 [hep-th].
11. *Garcia-Garcia A.M., Verbaarschot J.J.M.* Spectral and Thermodynamic Properties of the Sachdev–Ye–Kitaev Model // Phys. Rev. D. 2016. V. 94, No. 12. P. 126010; arXiv:1610.03816 [hep-th].
12. *Balasubramanian V., Craps B., Czech B., Sárosi G.* Echoes of Chaos from String Theory Black Holes // JHEP. 2017. V. 1703. P. 154; arXiv:1612.04334 [hep-th].
13. *Aref'eva I., Khramtsov M., Tikhanovskaya M., Volovich I.* Replica-Nondiagonal Solutions in the SYK Model // JHEP. 2019. V. 1907. P. 113; arXiv:1811.04831 [hep-th].
14. *Aref'eva I., Volovich I.* Spontaneous Summery Breaking in Fermionic Random Matrix Model // JHEP. 2019. V. 10. P. 113; arXiv:1811.04831 [hep-th].
15. *Aref'eva I., Khramtsov M., Volovich I.* Revealing Nonperturbative Effects in the SYK Model // Theor. Math. Phys. 2019. V. 201, No. 2. P. 1585 (ТМФ. 2019. Т. 201, № 2. С. 198); arXiv:1905.04203 [hep-th].
16. *Bogoliubov N.N.* Lectures on Quantum Statistics. V. 2. Quasi-Averages. Gordon and Breach Sci. Publ., 1970;
Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов: в 12 т. Т. 6: Статистическая механика. М.: Наука, 2006.