

РАВНОВЕСНЫЕ СРЕДНЕПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С АНОМАЛЬНЫМ ФЛУКТУАЦИОННЫМ ПОВЕДЕНИЕМ

*А. Валов*¹, *А. Горский*^{2,3}, *С. Нечаев*^{4,5,*}

¹ Федеральный исследовательский центр химической физики
им. Н. Н. Семенова РАН, Москва

² Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва

³ Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

⁴ Междисциплинарный научный центр им. Ж.-В. Понселе, Москва

⁵ Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Исследованы три одночастичные статистические модели броуновских экскурсий, демонстрирующие для флуктуаций скейлинг Кардара–Паризи–Занга (КПЗ) с критическим показателем $\nu = 1/3$. Во всех моделях внешние ограничения вынуждают стохастический процесс находиться в режиме больших отклонений. Изучаются аномальные КПЗ флуктуации для следующих систем: 1) броуновские экскурсии на неоднородных конечных деревьях с линейно растущей валентностью, которые можно рассматривать как среднеполевое приближение для матричных моделей Думитриу–Эдельмана, 2) $(1+1)D$ «магнитные» пути Дика в полосе конечной ширины, 3) «надутые» идеальные полимерные кольца с фиксированным радиусом инерции. Блокируя в последней задаче крупномасштабные пространственные флуктуации с помощью непроницаемой круговой границы и оставляя только «типичные» моды, можно наблюдать аномальные КПЗ флуктуации мономеров кольца вблизи непроницаемой границы. Напротив, при отсутствии жесткой границы имеются гауссовы флуктуации. Во всех рассмотренных моделях поведение со скейлингом КПЗ возникает при наличии двух взаимодополняющих условий: 1) траектории находятся в области нетипичных больших отклонений в фазовом пространстве и 2) траектории опираются на круговую непроницаемую границу.

We have considered three different “one-body” statistical systems involving Brownian excursions, which possess for fluctuations the Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) scaling with the critical exponent $\nu = 1/3$. In all models imposed external constraints push the underlying stochastic process to a large deviation regime. Specifically, we have considered fluctuations

*E-mail: sergei.nechaev@gmail.com

for: 1) Brownian excursions on non-uniform finite trees with linearly growing branching originating from the mean-field approximation of the Dumitriu–Edelman representation of matrix models, 2) $(1 + 1)D$ “magnetic” Dyck paths within the strip of finite width, 3) inflated ideal polymer ring with fixed gyration radius. In the latter problem, cutting off the long-ranged spatial fluctuations and leaving only the “typical” modes for stretched paths, we ensure the KPZ-like scaling for bond fluctuations. To the contrary, summing up all normal modes, we get the Gaussian behavior. In all the considered models, KPZ fluctuations emerge in the presence of two complementary conditions: 1) the trajectories are pushed to a large deviation region of a phase space, and 2) the trajectories are leaning on an impenetrable boundary.

PACS: 05.40.-a; 05.20.-y

Посвящается Вячеславу Борисовичу Приезжеву

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное исследование экстремальных задач коррелированных случайных процессов в статистической механике постепенно привело математиков, а затем и физиков к пониманию того, что нормальное распределение Гаусса не столь универсально, как это предполагалось ранее, и соседствует с другим, не менее универсальным законом, известным как распределение Трейси–Видома (ТВ). «Визитной карточкой» распределения Трейси–Видома является скейлинговый показатель, ν , второго момента распределения, который известен как показатель Кардара–Паризи–Занга (КПЗ). Впервые этот критический индекс был получен в работе [1] (см. также обзор [2]) для неравновесного одномерного стохастического процесса направленного роста. В большинстве работ, посвященных задачам нестационарного роста, исследовались статистические свойства огибающей поверхности, растущей во времени, характеризующейся высотой $h(x, t)$, где x и t — соответственно координата и время. В размерности $1 + 1$ (одна пространственная координата и время) растущий фронт определяется известной скейлинговой зависимостью

$$\begin{aligned} (\text{Var } h(x, t))^{1/2} &= \\ &= \frac{1}{N^{1/2}} \left(\sum_{x=1}^N \langle h^2(x, t) \rangle - \langle h(t) \rangle^2 \right)^{1/2} = N^{1/2} g(\tau/N^{3/2}), \end{aligned} \quad (1)$$

где скобки означают усреднение по различным реализациям беспорядка, переменная $\tau = t/N$ — усредненное количество частиц на один столбец растущего агрегата, а функция $g(u)$ от переменной $u = \tau/N^{3/2}$ имеет следующее асимптотическое поведение:

$$g(u) \sim \begin{cases} u^{1/3} & \text{для } u \ll 1, \\ \text{const} & \text{для } u \gg 1. \end{cases} \quad (2)$$

Зависимость (2) характерна для многих нестационарных процессов, и $(1 + 1)$ -мерный показатель КПЗ, $\nu = 1/3$, наблюдался во множестве различных моделей роста.

Прорыв в понимании универсальности статистики КПЗ связан с работами [3, 4], где было показано, что для плоских начальных условий распределение нормированной высоты поверхности, $\tau^{-1/3}(h(i, \tau) - 2\tau)$, в задаче полинуклеарного роста сходится при $\tau \rightarrow \infty$ к распределению TW [5], описывающему статистику собственных значений вблизи края спектра случайных матриц, принадлежащих гауссову ортогональному ансамблю (GOE). В радиальной геометрии статистика растущей поверхности соответствует крайевым состояниям гауссова унитарного ансамбля (GUE) [4]. Одновременно стало понятно, что распределение TW описывает статистику энергии основного состояния одномерного направленного полимера в случайном гауссовом потенциале. В 2010 г. распределение Трейси–Видома было получено с использованием формализма реплик в рамках модели направленного полимера в замороженном некоррелированном случайном потенциале. Следует отметить, что флуктуации высоты, относящиеся к классу универсальности КПЗ, изучались также в реальных экспериментах как в плоской [6–8], так и в радиальной геометрии в задаче электропроводности нематических жидких кристаллов [7, 8], и было продемонстрировано хорошее количественное согласие с распределениями Трейси–Видома для GOE- и GUE-ансамблей.

Возникает следующий естественный вопрос: можно ли увидеть реализации статистики КПЗ в равновесной статистической механике в задачах, не относящихся к области неравновесного роста? Критический показатель, $\nu = 1/2$, управляет флуктуациями случайного блуждания, что на теоретико-полевым языке соответствует квантовой механике невзаимодействующих частиц. Нас интересует, существуют ли простые одночастичные равновесные статистические модели, в которых реализуются флуктуации с критическим показателем $\nu = 1/3$? Как будет показано ниже, ответ на этот вопрос положительный, и в следующих разделах мы приведем примеры таких моделей.

Несмотря на существенный прогресс в понимании математических аспектов распределения Трейси–Видома и его связи с фазовыми переходами третьего рода [9], существует, тем не менее, значительный пробел в построении простых статистических моделей среднего поля, демонстрирующих скейлинг КПЗ. Большой вклад в разработку таких моделей внесли статьи [10, 11]. В них был предложен интуитивно понятный вероятностно-геометрический подход, основанный на приближении геометрической оптики к исследованию больших отклонений в статистике броуновских траекторий, в ситуации, когда реализация броуновской экскурсии происходит в нетипичной области фазового пространства.

В данной статье предлагается ряд точно решаемых одночастичных статистических моделей с флуктуационным поведением КПЗ. Идейно работа

связана с работой [10]. Одновременно с рассмотрением равновесной статистической задачи подсчета путей на «супердереве» Кейли (дерево с линейно растущей степенью вершины в зависимости от номера поколения) обсуждается скейлинг КПЗ в термодинамическом пределе. Показано, что модель вычисления статсуммы броуновских экскурсий на супердеревьях можно рассматривать как среднеполевое приближение подхода Думитриу–Эдельмана к теории случайных матриц. Детерминантное представление полиномов Эрмита тесно связано с характеристическим полиномом трансфер-матрицы на супердереве. Когда скорость изменения валентности вершины дерева (приращение количества ветвей между соседними поколениями дерева) мала, можно идентифицировать соответствующую модель с решеточным случайным блужданием в размерности $(1 + 1)$ в трансверсальном магнитном поле [12]. Эту же задачу можно сформулировать в симметричном римановом пространстве с непостоянной радиально-зависимой кривизной, которая является обобщением пространства постоянной отрицательной кривизны (гиперболического пространства). Наконец, задача вычисления статсуммы путей на обобщенных супердеревьях связывается со статистикой одномерных путей Дика с фиксированной площадью под кривой. Эта связь открывает интересную интерпретацию ансамблей путей на обобщенных супердеревьях с точки зрения построения алгебраических инвариантов торических узлов.

1. БРОУНОВСКИЕ ЭКСКУРСИИ НА СУПЕРДЕРЕВЬЯХ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Ключевым объектом в статистике собственных значений случайных матричных ансамблей является совместное распределение собственных значений, $P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$,

$$P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto \prod_{i \neq j}^N |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \exp\left(-c \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right), \quad (3)$$

где β зависит от матричного ансамбля и обычно принимает значения $\beta = 1, 2, 4$ — соответственно для гауссовых ортогональных, унитарных и симплектических ансамблей.

Рассмотрим функцию распределения одной переменной, например спектральную плотность $\rho(\lambda)$, которая определяется как

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right\rangle &\propto \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \times \\ &\times \prod_{i \neq j}^N |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \exp\left(-c \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right) \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i). \end{aligned} \quad (4)$$

При $c = \beta N/2$ и $N \gg 1$ спектральная плотность в объеме распределения дается известным полукруговым законом Вигнера, $\rho(\lambda) = (1/\pi N)\sqrt{\lambda^2 - 4N}$, в то время как вблизи спектрального края, $\lambda \simeq \lambda_{\max}$, где $\lambda_{\max} = 2\sqrt{N}$, спектральная плотность определяется распределением Трейси–Видома для переменной $\xi = (\lambda_{\max} - 2\sqrt{N})/(N^{-1/6})$, так что

$$\text{Prob}(\xi < x) = \exp\left(-\int_x^\infty (s-x)q^2(s)ds\right), \quad (5)$$

где x не зависит от N , а функция $q(s)$ удовлетворяет уравнению Пенлеве II $q''(s) = 2q^3(s) + sq(s)$ с асимптотическим поведением $q(s)|_{s \gg 1} \rightarrow \text{Ai}(s)$ и $\text{Ai}(s) = 1/\pi \int_{-\infty}^\infty \sin(u^3/3 + su) du$. Результат (5) соответствует гауссову унитарному ансамблю (GUE).

1.1. Представление Думитриу–Эдельмана матричных ансамблей. В работе [13] И. Думитриу и А. Эдельман показали, что спектральная статистика известных матричных ансамблей совпадает со спектральной статистикой ансамблей симметричных трехдиагональных случайных матриц с независимыми матричными элементами, равномерно распределенными на главной диагонали и неравномерно распределенными на двух субдиагоналях. В частности, совместное распределение $P_2(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ гауссова унитарного ансамбля совпадает со спектральной плотностью ансамбля трехдиагональных симметричных матриц M , диагональные элементы которых x_{kk} ($k = 1, \dots, K$) распределены нормально, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, а субдиагональные элементы $x_{k,k+1} \equiv x_{k+1,k}$ ($k = 1, \dots, K$) имеют так называемое χ_k -распределение. Напомним, что нормальное и χ -распределения имеют следующие плотности вероятности для случайной величины, x :

$$\begin{cases} f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & \text{— нормальное распределение, } \mathcal{N}(\mu, \sigma), \\ f(x|n) = \frac{x^{k-1} e^{-x^2/2}}{2^{k/2-1} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & x \geq 0 \text{ — } \chi\text{-распределение,} \end{cases} \quad (6)$$

где $\Gamma(z)$ — это гамма-функция. Важно, что субдиагональные элементы $x_{k,k+1}$ *распределены не идентично*.

Симметричная матрица M (с $x_{ij} = x_{ji}$) допускает простую интерпретацию в качестве трансфер-матрицы задачи подсчета путей на случайном симметричном дереве [12]. Чтобы сделать утверждение более прозрачным,

запишем M вместе с модифицированной матрицей M' :

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 & \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} & \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_{21}^2 & x_{22} & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & x_{32}^2 & x_{33} & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & x_{43}^2 & x_{44} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & x_{54}^2 & x_{55} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Видно, что при любом распределении матричных элементов $\det M = \det M'$. Далее будем работать с матрицей \hat{M}' и рассматривать ее как трансфер-матрицу случайного дерева, построенную следующим образом:

а) все вершины поколения дерева k имеют один и тот же случайный вес с нормальным распределением $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$;

б) степень (валентность) всех вершин дерева в поколении k есть случайная величина с распределением χ_k .

Для задачи подсчета путей на таком случайном дереве условие а) обеспечивает нормально распределенные элементы диагональной матрицы, а б) — χ -распределенные веса для переходов между соседними поколениями дерева (от поколения k к поколению $k + 1$).

Определим теперь усредненное дерево, которое является результатом усреднения по ансамблю случайных деревьев, построенных выше. Вместо того чтобы иметь дело со спектральной плотностью ансамбля случайных матриц M и M' , будем исследовать распределение собственных значений «средних» матриц $\langle M \rangle$ и $\langle M' \rangle$, полученных путем замены каждого элемента матрицы на его среднее значение. Средние значения всех диагональных элементов равны 0, так как плотность вероятности $f(x|\mu, \sigma)$ симметрична относительно нуля при $\mu = 0$, а средние внедиагональных случайных элементов даются следующим выражением:

$$\begin{cases} \mu_1 = \mathbf{E}_{\chi(k)}(x) = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & \text{для внедиагональных элементов матрицы } M, \\ \mu_2 = \mathbf{E}_{\chi(k)}(x^2) = k & \text{для внедиагональных элементов матрицы } M'. \end{cases} \tag{8}$$

При $k \gg 1$ матожидание $\mathbf{E}_{\chi(k)}(x)$ имеет асимптотическое поведение

$$\mathbf{E}_{\chi(k)}(x)|_{k \gg 1} = \sqrt{k}. \tag{9}$$

Для удобства используем асимптотическую форму элементов матрицы, так как относительная разница средней величины и асимптотического значения

является быстро уменьшающейся функцией. Таким образом, усредненные матрицы $\langle M \rangle$ и $\langle M' \rangle$:

$$\langle M \rangle \approx \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \langle M' \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрица $K \times K$ $\langle M' \rangle$ может рассматриваться как трансфер-матрица для случайных блужданий на симметричном растущем (T^+) или убывающем (T^-) супердереве. Степень вершины, p , этих деревьев не является постоянной, а линейно зависит от текущего уровня, k ($k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$):

$$p_k^+ = \begin{cases} p_0^+ & \text{для } k = 0, \\ 2 + ak & \text{для } k \geq 1, a > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad p_k^- = \begin{cases} p_0^- & \text{для } k = 0, \\ p_0^- - ak & \text{для } k \geq 1, a > 0 \end{cases} \quad (11)$$

соответственно для супердеревьев T^+ и T^- (рис. 1, $a, б$). Инкремент (скорость изменения) ветвления, a , при переходе от поколения к поколению супердерева является некоторой целочисленной константой, а через p_0^\pm обозначено число ребер, выходящих из корня ($k = 0$) дерева. Матрица $\langle M' \rangle$ в (10) соответствует растущему супердереву T^+ с $p_0^+ = 1$ и $a = 1$. Супердеревья T^\pm естественным образом параметризуют в континуальном пределе симметричные римановы пространства непостоянной отрицательной кривизны.

Перед тем как приступить к исследованию статистических свойств случайных экскурсий на супердеревьях, следует отметить важный момент, касающийся подсчета числа случайных путей на неоднородных графах. В связи с тем, что ветвление дерева не является постоянным, нужно различать вычисление статсуммы путей (СП) и более привычную статистику случайных блужданий (СБ). Разница между СП и СБ заключается в различных нормировках элементарного шага: для СП все шаги входят в статсумму с весом один, а для симметричного СБ вероятность шага зависит от текущей степени вершины, p : вероятность шага по каждой связи графа равна p^{-1} . Для однородных графов с одинаковым числом связей, выходящих из одной вершины, статсумма СП и распределение вероятности СБ отличаются только константой нормировки и соответствующие матожидания и дисперсии одинаковы. Однако для неоднородных графов, таких как супердеревья T^\pm , различие между СП и СБ принципиально: при вычислении числа путей может возникать «энтропийная» локализация на вершинах с большими значениями p , в то время как

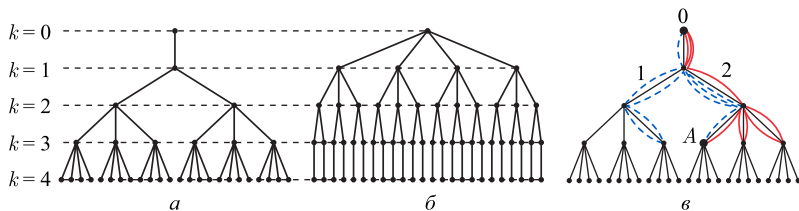


Рис. 1. Супердеревья: а) растущее дерево T^+ с $p_0 = 1$ и $a = 1$; б) убывающее дерево T^- с $p_0 = 4$ и $a = -1$; в) конфигурация броуновского моста («арбуз»), образованная двумя независимыми траекториями по $n = 9$ шагов каждая (сплошная и штриховая линии). Обе траектории начинаются в корне 0 и соединяются в точке A на уровне k растущего дерева

для случайных блужданий такой локализации нет по определению. Вопросы, связанные с различием СП и СБ, а также эффект энтропийной локализации впервые обсуждались для самоподобных структур в работе [14], а затем — в работе [15] для графов в виде звезд. Недавно явление локализации обсуждалось в более общем контексте в работе [16] для регулярных решеток с дефектами, где авторы ввели понятие случайного блуждания с максимальной энтропией, которое по существу идентично проблеме подсчета путей. Фазовый переход локализация–делокализация в задаче подсчета путей на дереве с одним тяжелым корнем изучался в работе [17].

Рассмотрим проблему вычисления статсуммы числа путей на конечном дереве T . Определим статсумму, $Z_N(k)$, числа всех путей из N шагов, начинающихся из корня дерева ($k = 0$) и заканчивающихся на некотором поколении дерева, k ($k = 0, \dots, K - 1$). Если T является обычным деревом Кейли (решеткой Бете) с постоянным ветвлением, p , в каждой вершине, то вопрос вычисления $Z_N(k)$ хорошо известен и многократно обсуждался в литературе в связи с различными физическими приложениями, начиная со статистики случайных блужданий, топологии полимеров, локализации и заканчивая вопросами, связанными с ренормгрупповыми потоками на многообразиях, голографией и структурой черных дыр в квантовой теории поля. Во всех указанных случаях однородное дерево Кейли рассматривается как дискретизация гиперболического пространства — поверхности Римана с постоянной отрицательной кривизной. Для растущего дерева определенная выше функция $Z_N(k)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению ($k = 0, 1, \dots, K - 1$)

$$\begin{cases} Z_{N+1}(k) = (p_{k-1} - 1)Z_N(k - 1) + Z_N(k + 1) & \text{для } 2 \leq k \leq K - 1, \\ Z_{N+1}(k) = Z_N(k + 1) & \text{для } k = 0, \\ Z_{N+1}(k) = p_{k-1}Z_N(k - 1) + Z_N(k + 1) & \text{для } k = 1, \\ Z_{N+1}(k) = (p_{k-1} - 1)Z_N(k - 1) & \text{для } k = K - 1, \\ Z_{N=0} = \delta_{k,0}. \end{cases} \quad (12)$$

Чтобы переписать (12) в матричной форме, сделаем сдвиг $k \rightarrow k + 1$ и построим вектор $\mathbf{Z}_N = (Z_N(1), Z_N(2), \dots, Z_N(K))^T$. Уравнение (12) определяет эволюцию вектора \mathbf{Z}_N по N :

$$\mathbf{Z}_{N+1} = \hat{T}\mathbf{Z}_N; \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & p_1 - 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & p_2 - 1 & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & p_{K-2} - 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z}_{N=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрицу \hat{T} можно диагонализировать стандартным образом. Характеристические полиномы $P_k(\lambda) = \det(\hat{T} - \lambda\hat{I})$ матрицы $k \times k$ \hat{T} удовлетворяют рекурсии

$$\begin{cases} P_k(\lambda) = -\lambda P_{k-1}(\lambda) - (p_{k-2} - 1)P_{k-2}(\lambda) & \text{для } 3 \leq k \leq K, \\ P_1(\lambda) = -\lambda, \\ P_2(\lambda) = \lambda^2 - p_0, \end{cases} \quad (14)$$

где величина p_k определена в (11). Спектральная плотность, $\rho(\lambda)$, построена следующим образом. Решим уравнение $P_K(\lambda) = 0$ для заданного K , получим набор собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ и построим гистограмму кратности вырождения каждого собственного значения. Спектральные плотности для нескольких различных значений p_0 и a показаны на рис. 2, где изображены зависимости $\rho(\lambda)$ для трансфер-матриц размера $K \times K$ при $K = 400$ и следующих наборов параметров: $p_0 = 800$, $a = -2$ для рис. а, $p_0 = 1$, $a = 1$ для рис. б, $p_0 = 1$, $a = -0,0025$ для рис. в и $p_0 = 1$, $a = 0,0025$ для рис. г.

Рассмотрим теперь аналитическое решение (12) для растущего дерева T^+ с $p_0 = 1$ и $a = 1$ и проанализируем соответствующую асимптотику P_K . Характеристические полиномы $P_k(\lambda)$ трансфер-матрицы T определяются следующим образом:

$$\begin{cases} P_k(\lambda) = -\lambda P_{k-1}(\lambda) - (k-1)P_{k-2}(\lambda) & \text{для } 3 \leq k \leq K, \\ P_1(\lambda) = \lambda, \\ P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1. \end{cases} \quad (15)$$

Уравнения (15) совпадают с рекурсией для «вероятностных» полиномов Эрмита $\mathcal{H}_k(\lambda)$:

$$P_k(\lambda) \equiv \mathcal{H}_k(\lambda) = (-1)^k e^{\lambda^2/2} \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{-\lambda^2/2}, \quad \mathcal{H}_k(\lambda) = 2^{-k/2} H_k\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \quad (16)$$

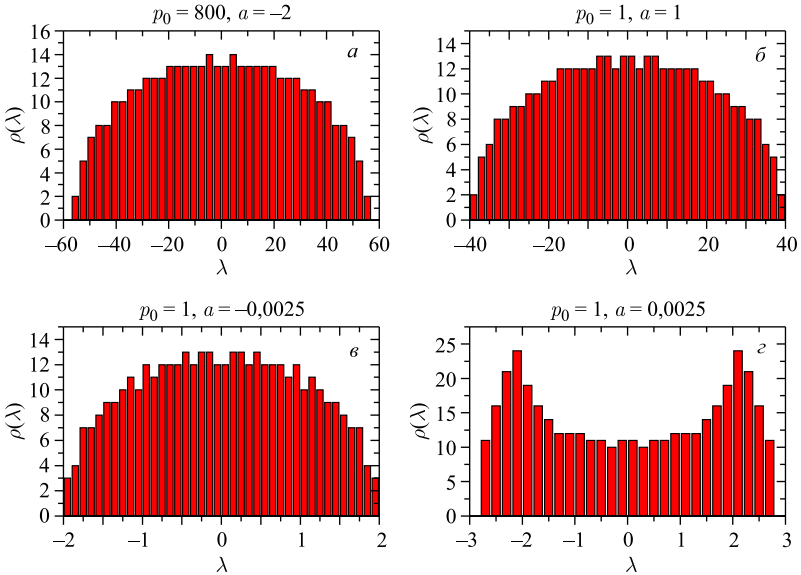


Рис. 2. Примеры спектральных плотностей трансфер-матриц деревьев из $K = 400$ поколений и различных случаев: а) $p_0 = 800, a = -2$; б) $p_0 = 1, a = 1$; в) $p_0 = 1, a = -0,0025$; з) $p_0 = 1, a = 0,0025$

где $H_k(\lambda)$ — стандартные полиномы Эрмита. Следовательно, собственные значения матрицы T размера $K \times K$ (см. (13)) — это корни полинома Эрмита $\mathcal{H}_k(\lambda)$. В статье [18] было показано, что нормированные корни K -го многочлена Эрмита слабо сходятся при $K \gg 1$ к полукруговому распределению Вигнера:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi K} \sqrt{4K - \lambda^2}. \tag{17}$$

Таким образом, спектральная плотность $\rho(\lambda)$ вблизи спектральной границы $|\lambda_{\max}| = 2\sqrt{K}$ не имеет особенностей.

Понятно, что, перейдя от случайной матрицы M к усредненной $\langle M \rangle$, мы полностью исключили случайность. В связи с этим возникает следующий вопрос: несет ли матрица $\langle M \rangle$ какую-либо остаточную информацию о распределении Трейси–Видома? Ниже мы покажем, что негауссова статистика с характерным скейлингом КПЗ скрыта в статистике броуновских экскурсий (замкнутых путей) на конечных супердеревьях. Более того, предполагая, что выполняется соотношение $N = cK$ между числом шагов N броуновского моста и размером K супердерева, и варьируя c , мы можем увидеть достаточно плавный фазовый переход в пределе $K \rightarrow \infty$. Род перехода пока точно не определен, но есть основания предполагать, что он 3-го рода.

Итак, рассмотрим следующую задачу: имея симметричное конечное супердерево T^\pm размером K , вычислим условное распределение вероятности $W_N(k, n|K)$ для всех траекторий из N шагов, начинающихся в корне дерева ($k = 0$) и возвращающихся туда же на последнем шаге, у которых промежуточный шаг с номером n находится на расстоянии k от корня дерева. В частности, нас интересует функция распределения $W_N(k, n = N/2|K)$. Вычисляя величину

$$\langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle \sim K^{2\gamma} \quad (18)$$

в термодинамическом пределе $K \rightarrow \infty$ при условии $N = cK$, мы ожидаем увидеть разные значения γ ниже и выше некоторого значения $c = c^*$, а именно:

$$\gamma = \begin{cases} 1/2 & \text{для } c < c^*, \\ 1/3 & \text{для } c > c^*. \end{cases} \quad (19)$$

Поскольку полиномы Эрмита являются волновыми функциями квантового осциллятора, можно задать вопрос, как проявляется скейлинг КПЗ в квантово-механической постановке. С этой целью воспользуемся представлением осциллятора в терминах супердерева и матричной модели [19]. Волновую функцию $\Psi_N(x)$ с энергией $E_N = \hbar(N + 1/2)$ можно представить в виде взвешенной суммы путей на супердереве:

$$\Psi_N(x) \propto \sum_{\text{paths}, N} e^{i\tilde{S}(\text{paths}|x)}, \quad (20)$$

где сумма идет по всем путям из N шагов на дереве. Пути начинаются в корне и заканчиваются в вершине супердерева поколения K . Интеграл по траектории (20) совпадает с интегралом в гильбертовом пространстве осциллятора, куда энергия входит как вес. Два представления дают один и тот же ответ для статсуммы

$$Z(T) = \int_{\text{paths}} dx(t) e^{S(x(t))} = \text{Tr}_{\text{Hilbert space}} e^{-\text{TH}}. \quad (21)$$

В интеграле по траекториям наложено условие $x(t) = x(t + T)$. Связанное с этим представление волновой функции в терминах трансфер-матрицы таково:

$$\Psi_N(x) \propto \det(x - \hat{X})_{N \times N}, \quad (22)$$

где $\hat{X} = \sqrt{T} \cos(i(d/dI))$ — оператор координат в представлении действие-угол. На каждом шаге применение оператора \hat{X} отвечает движению по радиусу в фазовом пространстве. Это представление соответствует представлению

волновой функции в квантовой механике через эрмитову $N \times N$ матрицу β -ансамбля с гауссовой мерой [19]

$$\Psi_N(x) \propto \int \prod_i^N d\lambda_i (\lambda_i - \lambda_j)^\beta \det(M - x)^\beta e^{-\beta \text{Tr} M^2}. \quad (23)$$

Нас интересует предел $\beta \rightarrow 0$, $\beta N = \text{const}$, где произведение βN определяет энергию $E = \hbar(1/2 + \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta N)$. Рассматриваемая задача в энергетическом пространстве сформулирована следующим образом. Рассмотрим не вполне стандартный матричный элемент

$$W(N, K|n) \propto \langle 0 | \hat{X}^N | K \rangle_n, \quad (24)$$

где бра- и кет-векторы соответствуют волновым функциям в представлении действия $\Psi(I)$. Оператором перехода в этом представлении является оператор \hat{X} . Ключевым моментом является то, что мы вводим обрезание в пространстве действие–энергия, $I < n$, которое ограничивает область интегрирования. Нас интересует зависимость матричного элемента \hat{X} от состояния $|K\rangle$. Будучи сформулированной в обычном, а не в гильбертовом пространстве, данная задача звучала бы так. Зафиксируем начальную и конечную точки эволюции $x_{\text{in}}, x_{\text{out}}$ и определим амплитуду перехода

$$\langle x_{\text{out}} | \exp(iHt) | x_{\text{in}} \rangle, \quad (25)$$

где гамильтониан — это некоторый дифференциальный или разностный оператор в x -представлении. Определим теперь явно оператор эволюции, выберем в разложении по степеням N член, соответствующий H^N , и наложим ограничение в координатном пространстве $x < X_0$. Функцией, представляющей интерес, будут распределения конечных точек эволюции в зависимости от X_0 .

1.2. Броуновские мосты и статистика КПЗ на конечных супердеревах.

Статсумма $Z_N(k)$ траекторий из N шагов, начинающихся в корне растущего конечного супердерева \mathcal{T}^+ , удовлетворяет рекуррентному соотношению (12). Перепишем (12) в матричном виде, для чего сделаем сдвиг $k \rightarrow k + 1$ и построим вектор $\mathbf{Z}_N = (Z_N(1), Z_N(2), \dots, Z_N(K))^T$. Уравнение (13) определяет эволюцию \mathbf{Z}_N по N :

$$\mathbf{Z}_{N+1} = T_{K \times K} \mathbf{Z}_N, \quad T_{K \times K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & K-1 & 0 & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{N=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Статсумма $Z_N(k)$ путей, заканчивающихся на уровне k супердерева, может быть выражена через матричный элемент N -й степени трансфер-матрицы: $Z_N(k) = (T_{K \times K}^N)_{1,k}$. Пусть N и K четные, а k — нечетное ($k = 2m + 1$, $m \in [0, P/2 - 1]$). Тогда при $N > K \gg 1$ имеем

$$Z_N(k) \approx \lambda_{\max}^N \frac{\mathcal{H}_{k-1}(\lambda_{\max})}{\sum_{j=1}^K \frac{\mathcal{H}_{j-1}^2(\lambda_{\max})}{(j-1)!}}, \quad (27)$$

где $\mathcal{H}_k(\lambda)$ — «вероятностный» полином Эрмита (см. (16)). При $N \gg 1$ доминирующий вклад в функцию распределения дает наибольшее собственное значение λ_{\max} трансфер-матрицы $T_{K \times K}$. Таким образом, при $N \gg 1$ вероятность найти конец пути на уровне k супердерева можно оценить как

$$P_N(k) \approx \frac{H_{k-1}(\lambda_{\max})}{K/2-1 \sum_{i=0} H_{2i}(\lambda_{\max})}. \quad (28)$$

Теперь можно вычислить условную вероятность $Q_N(k, n|K)$ того, что n -й шаг траектории находится на уровне k супердерева при условии, что на шаге N траектория возвращается в корень, а все супердерево имеет K поколений. Соответствующая броуновская экскурсия геометрически напоминает «арбуз» и состоит из двух участков, 1 и 2, длиной n и $N - n$ соответственно. Оба участка начинаются в точке корня 0 (см. рис. 1, в) и встречаются в точке A , расположенной на расстоянии k от корня. Функция $Q_N(k, n|K)$ есть

$$Q_N(k, n|K) = C_0 \frac{P_n(k)P_{N-n}(k)}{k!P_N(0)} = C_0 \frac{\mathcal{H}_{k-1}^2(\lambda_{\max})}{k!}, \quad (29)$$

где $C_0 = \left(\sum_k (\mathcal{H}_{k-1}^2(\lambda_{\max}))/k! \right)^{-1}$. Без потери общности и для простоты можем считать, что $n = N/2$, т. е. мы рассматриваем распределение средней точки броуновского моста, а в (27) предположим, что $n = N - n > K$.

Поведение полиномов Эрмита, $\mathcal{H}_k(\lambda)$, в окрестностях края спектра подробно проанализировано в работе [20]. При $\lambda \approx 2\sqrt{K}$ полиномы $\mathcal{H}_k(\lambda)$ имеют следующую асимптотику:

$$\mathcal{H}_K(\lambda) \approx \sqrt{2\pi} 2^{-K/2} \exp\left(\frac{K \ln(2K)}{2} - \frac{3K}{2} + \lambda\sqrt{K}\right) \times \\ \times K^{1/6} \text{Ai}\left(\frac{\lambda - 2\sqrt{K}}{K^{-1/6}}\right), \quad (30)$$

где $\text{Ai}(z) = 1/\pi \int_0^\infty \cos(\xi^3/3 + \xi z), d\xi$ — функция Эйри. Обозначим через $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ нули функции Эйри ($a_i < 0$ для всех i). При $K \gg 1$ максимальное собственное значение, λ_{\max} , трансфер-матрицы (26) имеет следующую лидирующую асимптотику:

$$\lambda_{\max} = 2\sqrt{K} + a_1 K^{-1/6}, \tag{31}$$

где $a_1 \approx -2,3381$ — наименьший по абсолютному значению ноль функции Эйри.

Предположим, что число шагов броуновской экскурсии, N , является линейной функцией максимального размера дерева, K , т.е. $N = cK$. Деля подстановку $k = K - j$ в $j/K \ll 1$, получаем для $c > c^*$ асимптотическое поведение

$$Q_N(K - j, n = N/2|K) \Big|_{N=cK} = \frac{\mathcal{H}_{K-j-1}^2(\lambda_{\max})}{(K - j)!} \approx C^{-1} \text{Ai}^2(a + bj), \tag{32}$$

где $C = \sum_i \text{Ai}^2(a + bj)$ и константы a и b определены так:

$$a = \frac{1}{K^{1/3}} - a_1 \left(1 - \frac{1}{6K}\right), \quad b = \frac{1}{K^{1/3}} - \frac{a_1}{6K}. \tag{33}$$

При $c > c^*$, где $c^* \approx 4$, квадратный корень из дисперсии $\sqrt{\text{Var } k} = \sqrt{\mathbb{E}(k - \mathbb{E}k)^2}$, вычисленной с условным распределением $Q_{N=cK}$, имеет следующее асимптотическое поведение при больших K :

$$\sqrt{\text{Var } k} \sim K^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{3}. \tag{34}$$

При $c < c^*$ функция условного распределения, $Q_{N=cK}$, является гауссовой, а соответствующая дисперсия при больших K имеет вид

$$\sqrt{\text{Var } k} \sim K^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Функции распределения средних точек броуновских мостов при $c < c^*$ и $c > c^*$, полученные на основе вычислений трансфер-матриц, изображены на рис. 3.

В точке c^* происходит достаточно плавный фазовый переход, который проявляется в том, что критические индексы флуктуаций броуновского моста ниже и выше c^* имеют различное асимптотическое поведение. Соответствующая фазовая диаграмма представлена на рис. 4. Мы не можем пока однозначно определить род перехода, для этого требуются дополнительные

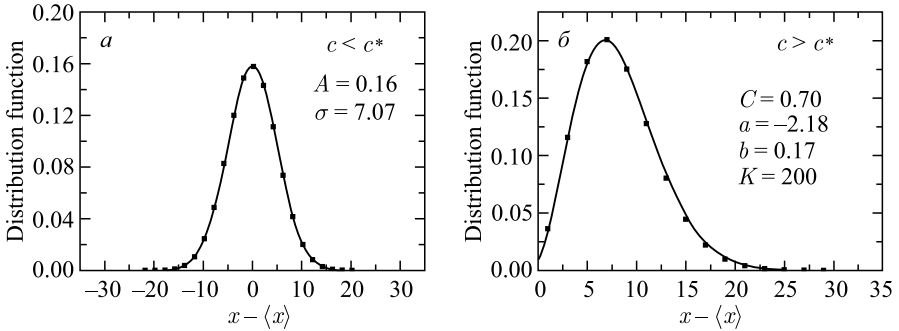


Рис. 3. Функции распределения средних точек броуновских мостов: а) сравнение сдвинутого распределения $Q_N(k, n|K)$ в $c < c^*$ с гауссовым распределением $A \exp(-(x - \langle x \rangle)^2 / \sigma^2)$ с $A = 0,16$, $\sigma = 7,07$; б) смещенное распределение $Q_N(k, n|K)$ с $c > c^*$ против распределения типа Эйри: $CAi^2(a + b(K - x))$ с $C = 0,70$, $a = -2,18$, $b = 0,17$, $K = 200$ и $N = 8K$ (параметры a , b для данного K определены в (33))

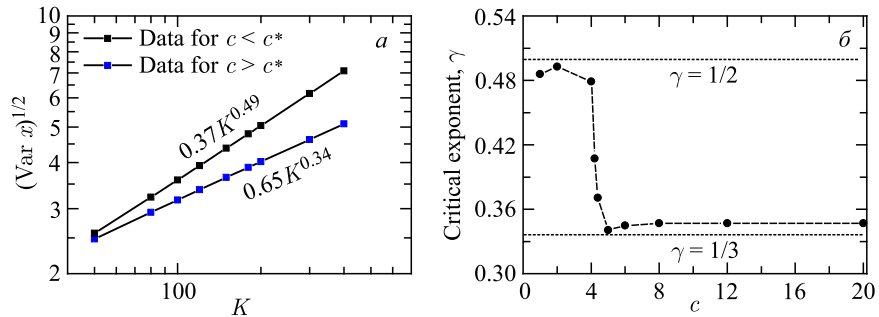


Рис. 4. а) Колебания средней точки броуновского моста в «сжатом» режиме при $c > c^*$; б) критические экспоненты для колебаний броуновского моста на конечных супердеревах при различных $c = N/K$. Четко виден фазовый переход при $c = c^* \approx 4$

исследования, но предварительные расчеты дают основание полагать, что это переход третьего рода.

На рис. 4 критический показатель γ построен в зависимости от c . Зависимость $\gamma(c)$ позволяет количественно определить, насколько сильно броуновская экскурсия взаимодействует с границей супердерева: при $c < 2$ броуновская экскурсия не доходит до границы дерева, а при $c > 2$ дерево начинает «сжимать» броуновский мост. Переход происходит при $c = c^* \approx 4$, что означает, что для возникновения распределения типа Эйри с флуктуациями КПЗ броуновский мост из N шагов должен быть достаточно сжат на конечном супердереве из K ($N > c^*K$) поколений.

2. МАГНИТНЫЕ ПУТИ ДИКА В ПОЛОСЕ И СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА СУПЕРДЕРЕВЬЯХ С МАЛОЙ СКОРОСТЬЮ ВЕТВЛЕНИЯ

В предыдущем разделе обсуждались броуновские экскурсии на супердереве со скоростью ветвления $a = 1$. В данном разделе рассматривается случай малой скорости ветвления $|a| \ll 1$. В статье [12] показано, что случайное блуждание на таких деревьях тесно связано с так называемыми магнитными путями Дика, для которых наличие эффективного магнитного поля на решетке аналогично блужданию на графе с малой линейной скоростью ветвления.

Рассмотрим квадратную решетку $N \times N$ и перечислим все пути из N шагов, начинающихся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в точке (N, N) , которые находятся выше диагонали квадрата (путь может касаться диагонали, но не может ее пересекать). Пусть A — это площадь между траекторией и диагональю квадрата (в полных плакетах). Для удобства повернем решетку на $\pi/4$ и рассмотрим статсумму всех направленных путей из N шагов на полупрямой, $k \geq 0$, с фиксированной площадью A — суммой всех полных закрашенных плакетов, как изображено на рис. 5. Наш ключевой объект — это взвешенная с площадью каноническая статсумма, $W_N(q)$, определенная следующим образом:

$$Z_N(q) = \sum_{\text{Dyck paths}} q^A, \quad (36)$$

где суммирование идет по ансамблю путей Дика из N шагов с площадью A и q — это «активность» A . Представляя q в виде $q = e^H$, можем определить химпотенциал H как магнитное поле, сопряженное с площадью A .

Статсумма путей $Z_N(k, q)$, где k — это высота пути на шаге N , удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} Z_{N+1}(k) = Z_N(k-1) + q^k Z_N(k+1) & \text{для } 0 < k < \infty, \\ Z_{N+1}(k) = Z_N(k+1) & \text{для } k = 0, \\ Z_{N=0}(k) = \delta_{k,0}. \end{cases} \quad (37)$$

Статсумма броуновской экскурсии определяется $Z_N(0, q)$, так как на самом последнем шаге траектория возвращается к начальной точке и выражается числами Каталана q в представлении Карлица–Риордана [21]:

$$Z_N(0, q) = \begin{cases} C_{N/2}(q) & \text{для } N = 2m, \quad \text{где } m = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{для } N = 2m + 1, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (38)$$

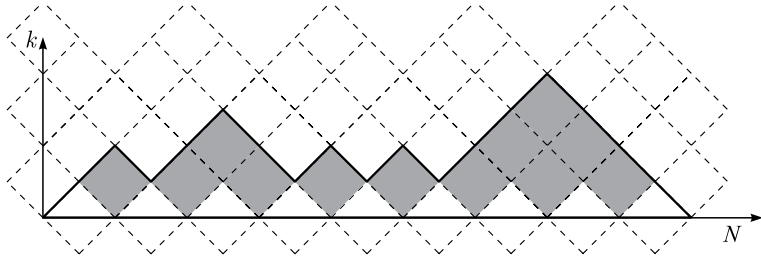


Рис. 5. Путь Дика из N шагов на полупрямой $k \geq 0$ с фиксированной площадью под траекторией, измеряемой в полных плакетах

Напомним, что числа $C_N(q)$ удовлетворяют рекурсии

$$C_N(q) = \sum_{k=0}^{N-1} q^k C_k(q) C_{N-k-1}(q), \tag{39}$$

которая является расширением стандартной рекурсии на q -числа Каталана. Производящая функция $F(s, q) = \sum_{N=0}^{\infty} s^N C_N(q)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(s, q) = 1 + sF(s, q)F(sq, q). \tag{40}$$

Известно, что решение (40) может быть записано в виде непрерывной дроби:

$$F(s, q) = \frac{1}{1 - \frac{s}{1 - \frac{sq}{1 - \frac{sq^2}{1 - \dots}}}} = \frac{A_q(s)}{A_q(s/q)}, \tag{41}$$

где $A_q(s)$ — это функция q -Эйри, определенная следующим образом:

$$A_q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} (-s)^n}{(q; q)_n}, \quad (t; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - tq^k). \tag{42}$$

В работах [22–24] было показано, что в пределе $q \rightarrow 1^-$ и $s \rightarrow 1/4^-$ функция $F(s, q)$ имеет следующий асимптотический вид (ср. с (41)):

$$F(z, q) \sim \mathcal{F}_{\text{reg}} + (1 - q)^{1/3} \frac{d}{dz} \ln \text{Ai}(4z), \quad z = \frac{1/4 - s}{(1 - q)^{2/3}}, \tag{43}$$

где F_{reg} — регулярная часть при $(q \rightarrow 1^-, s \rightarrow 1/4^-)$. Функция $\mathcal{F}(s, 1)$ является производящей функцией для недеформированных ($q = 1$) чисел Каталана:

$$F(s, q = 1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s}. \quad (44)$$

Функция $F(s, 1)$ определена для $0 < s < 1/4$, а в точке $s = 1/4$ первая производная $F(s, 1)$ испытывает разрыв, который может быть интерпретирован как критическое поведение. Предел $q \rightarrow 1^-, s \rightarrow 1/4^-$ также можно получить из асимптотического выражения для $F(s, q)$.

Для того чтобы увидеть связь броуновских путей на убывающем конечном дереве со взвешенными путями Дика в ограниченной полосе, рассмотрим предел $q \rightarrow 1$ в уравнении (37). Положим $q = 1 - \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll 1$, и разложим (37) до первого члена по ε . Получим следующую систему уравнений [12]:

$$\begin{cases} Z_{N+1}(k, q) = (1 - \varepsilon(k - 1))Z_N(k - 1, q) + Z_N(k + 1, q) \text{ для } 1 \leq k \leq K - 1, \\ Z_{N=0}(k, q) = \delta_{k,0}. \end{cases} \quad (45)$$

Видно, что уравнения (45) и (12) эквивалентны с точностью до замены $a = -\varepsilon$ (где $0 < \varepsilon \ll 1$) и $p_0 = 1$. Следовательно, (45) дает выражение для числа путей на убывающем дереве с малой скоростью ветвления a . Это выражение совпадает с (37), разложенным до первого члена по $\varepsilon = 1 - q$.

Сумма путей $Z_N(k, q)$ в полосе шириной n (напомним, что $k \leq n$ — это высота пути на шаге N) удовлетворяет соотношению

$$\begin{cases} Z_{N+1}(k) = Z_N(k - 1) + q^k Z_N(k + 1) \text{ для } 0 < k \leq n, \\ Z_{N+1}(k) = Z_N(k + 1) \text{ для } k = 0, \\ Z_{N=0}(k) = \delta_{k,0}. \end{cases} \quad (46)$$

Рассмотрим производящую функцию по N :

$$Z(s, k) = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N(k) s^k. \quad (47)$$

Для $Z(s, k)$ рекуррентные соотношения (46) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{Z}_\delta = \hat{T}_{(n+1) \times (n+1)} \mathbf{Z}_s, \quad (48)$$

где

$$\hat{T}_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} s^{-1} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & s^{-1} & -q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & s^{-1} & -q^2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1 & s^{-1} & -q^{n-1} \\ 0 & 0 & & 0 & -1 & s^{-1} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$\mathbf{Z}_\delta = \begin{pmatrix} s^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_s = \begin{pmatrix} Z_s(0) \\ Z_s(1) \\ Z_s(2) \\ \vdots \\ Z_s(k) \end{pmatrix}.$$

Производящая функция числа взвешенных путей Дика, возвращающихся в $k = 0$ в полосе конечной ширины, получена в работе [25]:

$$Z_s(k = 0) = \frac{\sum_{m=0}^{[n/2]} (-s^2)^m q^{m^2} [n-m]_q}{\sum_{m=0}^{[(n+1)/2]} (-s^2)^m q^{m(m-1)} [n+1-m]_q}, \tag{50}$$

где

$$[n]_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_m (q; q)_{n-m}}. \tag{51}$$

Ниже дано обобщение выражения (50) на производящую функцию магнитных путей Дика, которые заканчиваются на уровне k в полосе шириной n :

$$Z_s(k) = \frac{s^k \sum_{m=0}^{[(n-k)/2]} (-s^2)^m q^{m(m+k)} [n-k-m]_q}{\sum_{m=0}^{[(n+1)/2]} (-s^2)^m q^{m(m-1)} [n+1-m]_q}, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{52}$$

Рекуррентные соотношения (46), переписанные в матричной форме в пространстве (N, q) , имеют вид (мы сделали сдвиг $n + 1 \rightarrow n$)

$$\mathbf{Z}_{N+1} = T_{n \times n} \mathbf{Z}_N, \tag{53}$$

где

$$T_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q^2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & q^{n-2} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Следуя работе [26], можем использовать следующее представление \mathbf{Z}_N :

$$Z_N(k) = T_{1,k}^N = \sum_{m=1}^n x_m^N \frac{p_{k-1}(x_m) \gamma_n(k)}{N_n(x_m)}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{55}$$

где

$$\gamma_n(k) = \prod_{i=k}^{n-1} q^{i-1}, \quad N_n(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_n(i) p_{i-1}^2(x) \tag{56}$$

и

$$p_n(x) = \det(T_{n \times n} - xI) = (-x)^n \sum_{m=0}^{[n/2]} (-x^{-2})^m q^{m(m-1)} \begin{bmatrix} n-m \\ m \end{bmatrix}_q. \tag{57}$$

Через $x_{k, \overline{1, n}}$ обозначены собственные значения матрицы $T_{n \times n}$. Для $N \gg n$ справедлива следующая аппроксимация:

$$Z_N(k) \approx 2x_{\max}^N \frac{p_{k-1}(x_{\max}) \gamma_n(k)}{N_n(x_{\max})}. \tag{58}$$

Таким образом, вероятность найти конец траектории на уровне k не зависит от N .

Условная вероятность найти броуновскую экскурсию на уровне k на шаге с номером N при условии, что на шаге $2N$ траектория вернулась в точку старта, есть

$$Q(N, k) = \frac{Z_N^2(k)}{\sum_{k=0}^n Z_N^2(k)} \approx \frac{p_{k-1}^2(x_{\max}) \gamma_n^2(k)}{\sum_{k=1}^n p_{k-1}^2(x_{\max}) \gamma_n^2(k)}. \tag{59}$$

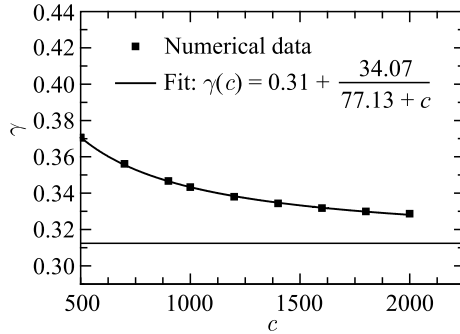


Рис. 6. Критический показатель $\gamma(c)$ флуктуаций средней точки «надутого» пути Дика в полосе шириной n из $2N$ шагов при $q = 1 + N^{-2/3}$ и сильном растяжении, $N = cn$

Выражение (59) позволяет вычислять флуктуации высоты средней точки броуновской экскурсии, $\sqrt{\langle(k - \langle k \rangle)^2\rangle}$, в зависимости от размера полосы, n , в слегка «надутых» путях Дика, когда площадь контролируется хипотенциалом q , зависящим от длины пути, $q = 1 + N^{-\beta}$ ($\beta > 0$). Для некоторых β мы ожидаем появления универсального скейлингового поведения:

$$\text{Var } k(n) = \langle(k - \langle k \rangle)^2\rangle = \sum_{k=0}^n k^2 Q(N, k) - \left(\sum_{k=0}^n k Q(N, k) \right)^2 \sim n^{2\gamma(c)}, \quad (60)$$

где условие $N = cn$, т. е. количество шагов, N , траектории Дика меняется линейно с шириной полосы, n . Условие $N = cn$ напоминает соотношение $N = cK$ в зависимости между числом шагов, N , броуновской экскурсии и максимальным числом поколений супердерева, K (см. выражения (18), (19), (31), (32) предыдущего раздела). При $\beta = 2/3$ зависимость критического показателя γ от c изображена на рис. 6 для больших численных значений c .

Численная оценка дисперсии в (60), изображенная на рис. 6, ясно показывает, что для выбранных $\beta = 2/3$ и больших c (где $c = N/n$) критический индекс $\gamma(c)$ в (60) стремится к значению $\gamma \approx 0,31$, что очень близко к показателю КПЗ, $\nu = 1/3$. Экстраполируя численные результаты $\gamma(c)$ для больших c с использованием аппроксимации Паде, записанной в виде отношения двух полиномов двух многочленов первого порядка,

$$\gamma(c) \approx \left. \frac{A + Bc}{D + c} \right|_{c \rightarrow \infty} \rightarrow B,$$

мы получили результаты, изображенные на рис. 6. Наилучшая аппроксимация получена при значениях $A = 58,14$, $B = 0,31$, $D = 77,13$. Для значений β , отличающихся от значения $\beta = 2/3$, не получена хорошая сходимость

для критического показателя, что может означать нарушение скейлинговой зависимости $(\text{Var}, k(n))^{1/2} = n^\gamma$, однако этот вопрос требует дальнейшего более детального изучения.

Сделаем небольшое отступление от рассматриваемого круга конкретных вопросов, и выскажем предположения относительно возможного критического поведения в ансамбле торических узлов. Известно, что функция распределения для взвешенных магнитных путей Дика в прямоугольнике $n \times m$ для взаимно простых (n, m) задает инварианты торических узлов $T_{n,m}$ [27]. Если положить $n = km$ (где k — целое), то вместо инвариантов узлов возникают инварианты зацеплений. Критическое поведение для ансамбля торических узлов $T_{n,n+1}$ обсуждалось в работе [28]. В связи с тем, что построение инвариантов торических узлов может быть интерпретировано в терминах вычисления статсуммы броуновских экскурсий магнитных путей Дика, можно задаться вопросом, что означает на языке узлов фазовый переход от гауссова поведения к поведению со скейлингом КПЗ, который мы видим в магнитных броуновских экскурсиях.

В качестве предварительной гипотезы можно высказать следующее соображение. Так как рассматриваются пути Дика на полосе, одно «квантовое число» торического узла фиксируется шириной полосы n . Напомним, что нас интересуют пути из N шагов, достигающие высоты k в случае, когда $N > n$. Таким образом, траектория вынуждена какое-то число раз достичь границы. Если $N \rightarrow \infty$ при фиксированном n , то с точки зрения теории узлов нас интересуют торические узлы $T_{n,\infty}$. Условие $N = cn$ при $N \rightarrow \infty$ означает, что фактически мы смотрим на так называемый стабильный предел торических узлов $T_{\infty,\infty}$ при условии $n/m = \text{const}$. Можно ожидать, что в статсумме торических узлов происходит фазовый переход при некотором критическом значении $c = c^*$. Изучение критического поведения инвариантов узлов в зависимости от входящих в инвариант параметров является новой, очень перспективной областью математической физики, лежащей на стыке алгебраической топологии, комбинаторики и теории критических явлений, в которой в настоящее время сделаны лишь первые робкие шаги.

3. СТАТИСТИКА «НАДУТОГО» СЛУЧАЙНОГО КОЛЬЦА

Классическая проблема в статистике идеальных полимеров, поставленная и решенная в 1962 г. М. Фиксманом [29], касается вычисления функции распределения, $Z_N(R_g)$, замкнутого случайного блуждания из N шагов с фиксированным радиусом инерции, R_g . Позже эта же проблема неоднократно переоткрывалась в независимых исследованиях с использованием различных подходов (см., например, [30, 31]). Мы рассматриваем задачу вычисления функции распределения $Z_N(r|R_g)$ конкретного мономера, находя-

щегося в точке \mathbf{r} броуновского кольца с фиксированным радиусом инерции, R_g . Нас будет интересовать специфический предел «надутых» путей, когда радиус инерции, R_g , растет вместе с длиной цепочки, N , как $R_g = aN^\alpha$ ($1/2 < \alpha \leq 1$). В частности, нас интересует предельный случай, $R_g = N$, что отвечает ситуации сильно «надутых» колец.

Цель нашего рассмотрения — подчеркнуть роль вытяжения траектории, а также особую роль наложенных геометрических ограничений. Искомую функцию распределения мы получим двумя разными способами: 1) путем точного суммирования всех флуктуационных мод траекторий и 2) путем учета только «типичных» флуктуационных мод вытягиваемых траекторий. Будет показана принципиальная разница во флуктуационном поведении: в режиме 1) флуктуации гауссовы, а в режиме 2) флуктуации контролируются показателем КПЗ $\nu = 1/3$. В конце раздела рассмотрим физическую реализацию модели надутого полимерного кольца, позволяющую обосновать обрезание длинноволновых флуктуационных мод.

Рассмотрим полимерное кольцо из N мономеров с координатами $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1, N}$. Данная система изображена на рис. 7, а. Итак, у нас есть идеальный кольцевой полимер, у которого центр масс

$$\mathbf{R}_c = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j$$

находится в центре трехмерного пространства, т. е. $\mathbf{R}_c = 0$. По определению радиус инерции, R_g^2 , равен

$$\begin{aligned} R_g^2 &= \frac{1}{2N^2} \sum_{j \neq k}^N (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j^2 - \mathbf{R}_c^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j^2. \end{aligned} \quad (61)$$

«Раздуем» идеальную кольцевую цепь, зафиксировав квадрат радиуса инерции, R_g^2 , в большом каноническом ансамбле, введя множитель Лагранжа, s . Определим каноническую функцию распределения следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_N(s) &= \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_{N-1} \exp \left(-u \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j)^2 \right) e^{-sR_g^2} = \\ &= \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_{N-1} \exp \left(-u \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j)^2 - \frac{s}{N} \sum_{j \neq k}^N \mathbf{r}_j^2 \right), \end{aligned} \quad (62)$$

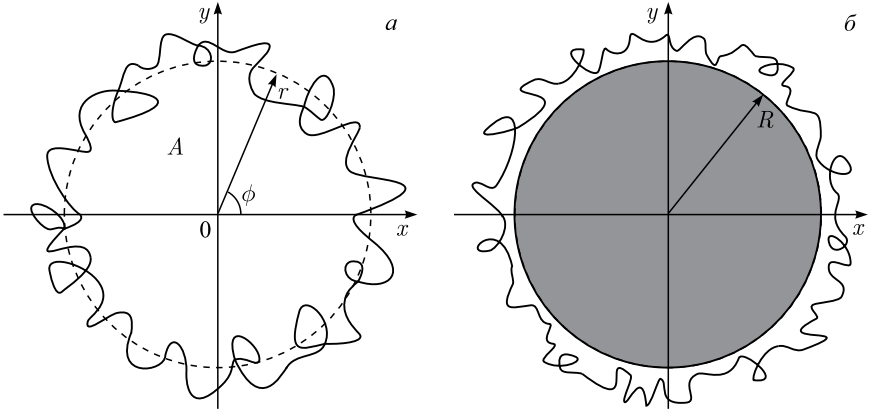


Рис. 7. а) «Надутое» случайное кольцо с фиксированным радиусом инерции R_g . б) «Надутое» случайное кольцо, опирающееся на непроницаемый диск радиусом R_g

где предполагается, что $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_1$. Так как все измерения независимы, то в дальнейшем мы можем рассматривать только одномерную систему.

В терминах интеграла по траекториям выражение (62) может быть записано в виде

$$Z_N(s) = \int \mathcal{D}\{x\} \exp \left\{ - \int_0^N \left(u \dot{x}^2(t) + \frac{s}{N} x^2(t) \right) dt \right\} = \int \mathcal{D}\{x\} e^{-S}, \quad (63)$$

где $\dot{x} = \partial x(t)/\partial t$ и $0 \leq t \leq N$. Лагранжиан L действия $S = \int_0^N L dt$ в (63) определяется как

$$L = u \dot{x}^2 + \frac{s}{N} x^2(t) \quad (64)$$

и соответствующее нестационарное уравнение Шредингера распределения вероятности в параболическом потенциале $V(x) = (-s/N)x^2$ имеет вид

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{4u} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - \frac{s}{N} x^2 P(x, t). \quad (65)$$

Сравним (65) с задачей движения квантовой частицы в гармоническом потенциале. Решение стационарной квантово-механической задачи дается уравнением Шредингера

$$-E_n \psi_n(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_n(x) - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_n(x), \quad (66)$$

где

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right), \quad (67)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega;$$

здесь $H_n(\dots)$ — это полином Эрмита.

Для (65) имеем

$$\begin{cases} -\lambda_n W_n(x) = \frac{\partial W_n(x)}{\partial t}, \\ -\lambda_n W(x) = \frac{1}{4u} \frac{\partial^2 W_n(x)}{\partial x^2} - \frac{s}{N} x^2 W_n(x). \end{cases} \quad (68)$$

Соответствие между параметрами (65) и (66) следующее:

$$E_n \leftrightarrow \lambda_n, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \leftrightarrow \frac{1}{4u}, \quad \frac{1}{2}m\omega^2 \leftrightarrow \frac{s}{N}. \quad (69)$$

Таким образом, решение задачи о поиске стационарной функции распределения (68) полимерного кольца дается выражением

$$W_n(x) = \left(\frac{su}{4N}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(x\left(\frac{4su}{N}\right)^{1/4}\right) \exp\left(-x^2\left(\frac{su}{N}\right)^{1/2}\right), \quad (70)$$

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{s}{N}}.$$

Нас интересует следующая функция распределения:

$$Q(x, N) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n N} W_n^2(x), \quad (71)$$

где собственная функция $W_n(x)$ и соответствующее собственное значение λ_n определены в (70). Функция распределения $Q(x, N)$, заданная уравнениями (70), (71), является отправной точкой для нашего дальнейшего рассмотрения.

3.1. Точное вычисление ряда (71). Функция распределения $Q(x, N)$ в (71) может быть явно записана в виде следующей суммы:

$$Q(x, N) = \left(\frac{su}{4N}\right)^{1/2} \exp\left(-2x^2\left(\frac{su}{N}\right)^{1/2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{sN}\right) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2\left(x\left(\frac{4su}{N}\right)^{1/4}\right)}{n!} \left(\frac{\exp\left(-\sqrt{sN}\right)}{2}\right)^n. \quad (72)$$

Теперь, используя свойства полиномов Эрмита, можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \exp\left(\frac{2u}{1+u}xy - \frac{u^2}{1-u^2}(x-y)^2\right), \quad |u| < 1. \quad (73)$$

Выполняя суммирование в (73), получаем выражение для $Q(x, N)$:

$$Q(x, N) = \left(\frac{su}{4N}\right)^{1/2} \exp\left(-2x^2\left(\frac{su}{N}\right)^{1/2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{sN}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1-\exp(-2\sqrt{sN})}} \exp\left(\frac{4\exp(-\sqrt{sN})}{1+\exp(-\sqrt{sN})}x^2\left(\frac{su}{N}\right)^{1/2}\right). \quad (74)$$

Легко заметить, что функция $Q(x, N)$ задает квадратичные (гауссовы) флуктуации звеньев полимерного кольца.

3.2. Оценка ряда (71) методом перевала. Оценим сумму в формуле (71) методом перевала. Поскольку s — это множитель Лагранжа для квадрата радиуса инерции R_g^2 , основной вклад в статсумму (71) дают траектории, для которых

$$s \approx R_g^{-2}. \quad (75)$$

Таким образом, мы «надуваем» траекторию, т.е. увеличиваем R_g , соответствующим образом уменьшая s согласно (75), сохраняя при этом соотношение между длиной и радиусом инерции «надутого» кольца, т.е. полагаем, что $N = aR_g^\alpha$, где $1 \leq \alpha < 2$ и $a = \text{const}$.

Из уравнения (71) видно, что доминирующий вклад в $Q(x, N)$ дают такие n , для которых $\lambda_n N \approx 1$. Подставляя соотношение $\lambda_n = N^{-1}$ в (70), получаем уравнения, определяющие значения n , которые дают основной (инстантонный) вклад в $Q(x, N)$:

$$\frac{1}{N} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{s}{N}}. \quad (76)$$

Решая уравнение (76) при условии $n \gg 1$ и используя (75), получаем

$$n = n^* \approx \frac{1}{\sqrt{sN}} = \frac{R_g}{\sqrt{N}}. \quad (77)$$

Выражая все параметры задачи в терминах R_g и N , можно переписать (70) следующим образом:

$$W_n(x) = \left(\frac{u}{4R_g^2 N}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \times \\ \times \left(x \left(\frac{4u}{R_g^2 N}\right)^{1/4}\right) \exp\left(-x^2 \left(\frac{u}{R_g^2 N}\right)^{1/2}\right). \quad (78)$$

Известно, что полином Эрмита $H_n(z)$ при $z \approx 2\sqrt{n}$ и $n \gg 1$ имеет асимптотическое выражение в терминах функции Эйри

$$H_n(z) \approx \sqrt{2\pi} 2^{-n/2} \exp\left(\frac{n \ln(2n)}{2} - \frac{3n}{2} + z\sqrt{n}\right) n^{1/6} \text{Ai}\left(\frac{z - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}}\right), \\ z = x \left(\frac{4u}{R_g^2 N}\right)^{1/4}. \quad (79)$$

Условие $z \approx 2\sqrt{n}^*$ задает уравнение для $x = x^*$, при котором соотношение (79) оказывается самосогласованным:

$$x^* \left(\frac{4u}{R_g^2 N}\right)^{1/4} = 2 \left(\frac{R_g^2}{N}\right)^{1/4}. \quad (80)$$

Соответствующее выражение для флуктуаций, $(z - 2\sqrt{n})/n^{-1/6}$, есть

$$\frac{x^* \left(\frac{4u}{R_g^2 N}\right)^{1/4} - 2 \left(\frac{R_g^2}{N}\right)^{1/4}}{\left(\frac{R_g}{\sqrt{N}}\right)^{-1/6}} = \xi, \quad (81)$$

где ξ не зависит от R_g и N . Решая (81), получаем

$$x^* = \left(\frac{2}{u}\right)^{1/4} R_g + \frac{\xi}{(4u)^{1/4}} (R_g N)^{1/3}. \quad (82)$$

3.3. О чем говорит различие между точным суммированием ряда (74) и его инстантонным приближением (79)? Полное суммирование ряда (71) дает гауссово распределение флуктуаций звеньев полимерного кольца (даже для натянутых траекторий), в то время как аппроксимация ряда (71) его значением вблизи точки перевала для натянутых траекторий приводит к аномальной статистике с флуктуациями КПЗ за счет обрезания в (71) членов с

малыми собственными значениями λ_k , которые отвечают крупномасштабным пространственным флуктуациям цепи. С этой точки зрения обрезание ряда (71) выглядит как введение пространственного ограничения в виде непроницаемого диска, на который опирается «надутое» полимерное кольцо, как показано на рис. 7. Аналогичное поведение было обнаружено в работе [32] для флуктуаций «вытянутого» случайного блуждания, расположенного в непосредственной близости от непроницаемого диска.

Таким образом, наличие жесткого непроницаемого диска, ограничивающего флуктуации броуновского кольца, имеет решающее значение для локализации траекторий внутри полосы шириной $R^{1/3}$. В обоих случаях (при точном суммировании ряда (71) и при его аппроксимации значением вблизи точки перевала) множество «надутых» путей принадлежит очень малой области фазового пространства, в котором, в принципе, может реализовываться негауссова статистика. Однако режим больших уклонений, по-видимому, не является достаточным условием возникновения аномальной статистики и должен сопровождаться наличием выпуклой границы в виде жесткого непроницаемого диска, на которую «опираются» траектории. Роль выпуклой границы в проявлении аномальной статистики исследовалась ранее в работах [33, 34] и недавно была отмечена в работе [35].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены три «одночастичные» модели броуновских экскурсий, которые демонстрируют негауссово флуктуационное поведение типа Кардара–Паризи–Занга, характеризующееся критическим показателем $\nu = 1/3$. Основная идея работы заключается в демонстрации некоторых возможных механизмов возникновения аномальной статистики на примере простых одночастичных систем, в которых внешние ограничения заставляют соответствующий стохастический процесс находиться в режиме больших уклонений. Описанные модели являются по своей сути различными воплощениями «растянутых» траекторий в неоднородной геометрии.

В разд. 1 рассмотрены броуновские экскурсии из N шагов на конечных супердеревах с максимальным числом поколений K и линейно растущей (от поколения к поколению) валентностью. Показано, что при условии $N = cK$ система испытывает в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ фазовый переход: при $c < c^*$ траектории имеют гауссовы флуктуации, а при $c > c^*$ флуктуации имеют статистику КПЗ. Построение теории среднего поля в духе теории Гинзбурга–Ландау для этого фазового перехода (который, как мы предполагаем, является переходом третьего рода) представляется очень важной и актуальной задачей.

Супердерево с линейной скоростью ветвления соответствует пространству Гильберта гармонического осциллятора. Представление Гильберта в терминах

супердерева для достаточно общей гамильтоновой системы может быть реализовано в базисе Крылова. В этом случае коэффициенты Ланкоса дают трехдиагональное представление оператора Лиувилля и тем самым обеспечивают древообразную структуру соответствующего пространства.

Недавно было показано, что зависимость ветвления от уровня дерева допускает интерпретацию в терминах открытой цепочки Тоды [36]. Анализируя частные решения классической цепочки Тоды, можно сделать вывод о том, хаотична ли общая гамильтонова система на квантовом уровне или нет. Используя результаты для общих трехдиагональных представлений в базисе Крылова [36], было бы интересно понять, сохраняется ли фазовый переход от гауссовой статистики к статистике КПЗ в более общей гамильтоновой системе.

В разд. 2 исследована статистика $(1+1)D$ броуновских экскурсий Дика из N шагов с заданной площадью под кривой в полосе конечной ширины n . Рассмотрена задача в большом каноническом ансамбле с контролем площади сопряженной переменной, q . Как и в разд. 1, наложено линейное ограничение $N = cn$ на полное число шагов блуждания и рассмотрены флуктуации средней точки в ансамбле путей Дика при больших n и при фиксированном соотношении $c = N/n$. Обнаружено, что для $q = 1 + N^{-2/3}$ флуктуации имеют негауссов характер с типичным скейлингом КПЗ $\gamma \approx 0,31$ при $c \gg 1$.

В разд. 3 изучены пространственные флуктуации связей «надутого» идеального полимерного кольца из N звеньев без объемных взаимодействий с фиксированным радиусом инерции, R_g . Степень набухания («надутости») полимерного кольца контролируется соотношением между N и R_g . Данная задача восходит к началу 60-х гг. прошлого века и является небольшой модификацией задачи, предложенной и решенной М. Фиксманом, который интересовался вычислением функции распределения, $Z(R_g, N)$, идеального полимерного кольца из N мономеров с фиксированным радиусом инерции R_g . Показано, что, обрезая большие пространственные флуктуации и оставляя для сильно «надутого» полимера только «типичный» инстантонный режим с $R_g = aN$, получаем КПЗ-скейлинг для флуктуаций связи. Напротив, суммируя все нормальные моды, имеем гауссовы флуктуации.

Во всех рассмотренных моделях флуктуации со скейлингом КПЗ возникают при наличии двух взаимодополняющих условий: 1) траектории «живут» в нетипичной области больших отклонений фазового пространства и 2) траектории «опираются» на непроницаемую (выпуклую) оболочку. По-видимому, именно одновременное наличие обоих условий обеспечивает аномальный флуктуационный режим со скейлингом КПЗ в одночастичных статистических системах.

Благодарности. Авторы благодарны Н. Бриллиантову, В. Meerson, Г. Ошанину, К. Половникову, Т. Prellberg, С. Шлоссману, М. Тамму, В. Аветисову и А. Владимирову за многочисленные дискуссии и ценные комментарии. Работа

была частично поддержана РФФИ (грант № 18-29-13013). Авторы благодарны фонду БАЗИС за поддержку в рамках грантов № 17-11-122-1 для А. Горского и № 19-1-1-48-1 для С. Нечаева и А. Валова. Работа А. Валова была выполнена в рамках государственного задания ФИЦ ХФ РАН #FFZE-2019-0016.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C. Dynamic Scaling of Growing Interfaces // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 889.
2. Halpin-Healy T., Zhang Y.-C. Kinetic Roughening Phenomena, Stochastic Growth, Directed Polymers and All That // *Phys. Rep.* 1995. V. 254. P. 215.
3. Johansson K. Discrete Polynuclear Growth and Determinantal Processes // *Commun. Math. Phys.* 2003. V. 242. P. 277.
4. Prähofer M., Spohn H. Universal Distributions for Growth Processes in 1 + 1 Dimensions and Random Matrices // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 4882;
Prähofer M., Spohn H. Scale Invariance of the PNG Droplet and the Airy Process // *J. Stat. Phys.* 2002. V. 108. P. 1071.
5. Tracy C. A., Widom H. Level-Spacing Distributions and the Airy Kernel // *Commun. Math. Phys.* 1994. V. 159. P. 151.
6. Miettinen L., Myllys M., Merikoski J., Timonen J. Experimental Determination of KPZ Height-Fluctuation Distributions // *Eur. Phys. J. B.* 2005. V. 46. P. 55.
7. Takeuchi K. A., Sano M. Universal Fluctuations of Growing Interfaces: Evidence in Turbulent Liquid Crystals // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 104. P. 230601.
8. Takeuchi K. A., Sano M., Sasamoto T., Spohn H. Growing Interfaces Uncover Universal Fluctuations behind Scale Invariance // *Sci. Rep. (Nature)*. 2011. V. 1. P. 34.
9. Majumdar S. N., Schehr G. Top Eigenvalue of a Random Matrix: Large Deviations and Third Order Phase Transition // *J. Stat. Mech.* 2014. P. 01012.
10. Smith N. R., Meerson B. Geometrical Optics of Constrained Brownian Excursion: From the KPZ Scaling to Dynamical Phase Transitions // *J. Stat. Mech.* 2019. P. 023205.
11. Meerson B., Smith N. R. Geometrical Optics of Constrained Brownian Motion: Three Short Stories // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2019. V. 52. P. 415001.
12. Gorsky A. S., Nechaev S. K., Valov A. F. On Statistical Models on Supertrees // *JHEP.* 2018. V. 218. P. 123.
13. Dumitriu I., Edelman A. Matrix Models for Beta Ensembles // *J. Math. Phys.* 2002. V. 43. P. 5830.
14. Maritan A. Random Walk and the Ideal Chain Problem on Self-Similar Structures // *Phys. Rev. Lett.* 1989. V. 62. P. 2845.
15. Ternovsky F. F., Nyrkova I. A., Khokhlov A. R. Statistics of an Ideal Polymer Chain near the Bifurcation Region of a Narrow Tube // *Physica A.* 1992. V. 184. P. 342.
16. Burda Z., Duda J., Luck J.-M., Waclaw B. Localization of the Maximal Entropy Random Walk // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 160602.
17. Nechaev S. K., Tamm M. V., Valba O. V. Path Counting on Simple Graphs: From Escape to Localization // *J. Stat. Mech.* 2017. P. 053301.
18. Korniyk M., Michaletzky G. Wigner Matrices, the Moments of Roots of Hermite Polynomials and the Semicircle Law // *J. Approx. Theor.* 2016. V. 211. P. 29.

19. *Krefl D.* Non-Perturbative Quantum Geometry II // JHEP. 2014. V. 1412. P. 118;
Krefl D. Non-Perturbative Quantum Geometry // JHEP. 2016. V. 1608. P. 020.
20. *Dominici D.* Asymptotic Analysis of the Hermite Polynomials from Their Differential–Difference Equation // J. Diff. Eq. Appl. 2007. V. 13. P. 1115.
21. *Carlitz L., Riordan J.* Two Element Lattice Permutation Numbers and Their q -Generalization // Duke J. Math. 1964. V. 31. P. 371;
Fürlinger J., Hofbauer J. q -Catalan Numbers // J. Comb. Theor. A. 1985. V. 40. P. 248.
22. *Prellberg T., Brak R.* Critical Exponents from Nonlinear Functional Equations for Partially Directed Cluster Models // J. Stat. Phys. 1995. V. 78. P. 701.
23. *Richard C., Guttmann A. J., Jensen I.* Scaling Function and Universal Amplitude Combinations for Self-Avoiding Polygons // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. V. 34. P. L495.
24. *Richard C.* Scaling Behaviour of Two-Dimensional Polygon Models // J. Stat. Phys. 2002. V. 108. P. 459.
25. *Owczarek A., Prellberg T.* Enumeration of Area-Weighted Dyck Paths with Restricted Height // Austral. J. Combinatorics. 2012. V. 54. P. 13.
26. *Al-Hassan Q. M.* On Powers of General Tridiagonal Matrices // Appl. Math. Sci. 2015. V. 9. P. 583.
27. *Gorsky E.* Zeta Functions in Algebra and Geometry // q, t -Catalan Numbers and Knot Homology. Contemporary Mathematics, 2012. P. 213.
28. *Bulycheva K., Gorsky A., Nechaev S.* Critical Behavior in Topological Ensembles // Phys. Rev. D. 2015. V. 92. P. 105006.
29. *Fixman M.* Radius of Gyration of Polymer Chains // J. Chem. Phys. 1962. V. 36. P. 306.
30. *Eichinger B. E.* An Approach to Distribution Functions for Gaussian Molecules // Macromolecules. 1977. V. 10. P. 671.
31. *Rudnik J., Gaspari G.* The Shapes of Random Walks // Science. 1987. V. 237. P. 384.
32. *Nechaev S., Polovnikov K., Shlosman S., Valov A., Vladimirov A.* Anomalous One-Dimensional Fluctuations of a Simple Two-Dimensional Random Walk in a Large-Deviation Regime // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. P. 012110.
33. *Hammond A., Peres Y.* Fluctuation of a Planar Brownian Loop Capturing a Large Area // Trans. Am. Math. Soc. 2008. V. 360. P. 6197.
34. *Ioffe D., Shlosman S., Velenik Y.* An Invariance Principle to Ferrari–Spohn Diffusions // Commun. Math. Phys. 2015. V. 336. P. 905.
35. *Vladimirov A., Shlosman S., Nechaev S.* Brownian Flights over a Circle. arXiv:2002.09965.
36. *Dymarsky A., Gorsky A.* Toda Chain Flow in Krylov Space. e-Print: 1912.12227.