

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕТЫРЕХСОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

Е. Е. Перепелкин^{1,2}, *Н. Г. Иноземцева*³, *М. В. Клименко*¹,
*Р. В. Полякова*², *М. Б. Садовникова*¹

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

³ Московский технический университет связи и информатики, Москва

Предлагается аналитический метод нахождения собственных частот и собственных функций поперечных колебаний четырехсоставного твэла для проектируемого импульсного реактора «Нептун». В качестве твэла в модели используется металлическая трубка с кусочно-постоянной плотностью материала в продольном направлении. В явном виде через функции Крылова найдено частотное уравнение, и численно-аналитическим методом определены собственные частоты первых восьми мод. Для нахождения высших мод предложена аналитическая экстраполяция, имеющая экспоненциальный характер. Получены аналитические выражения для собственных функций, дающие хорошее совпадение с численными расчетами в среде ANSYS.

An analytical method for finding the natural frequencies and eigenfunctions of transverse vibrations of a four-component fuel element (rod) for the designed NEPTUNE pulse reactor is proposed. A rod with a piecewise constant material density in the longitudinal direction is used as a model. The frequency equation is explicitly obtained through Krylov functions, and the natural frequencies of the first eight modes are determined using a numerical and analytical method. To find higher modes, an analytical extrapolation of exponential nature is proposed. Analytical expressions for the eigenfunctions, which provide a good agreement with numerical calculations in the ANSYS environment, are obtained.

PACS:28.00; 89.30.—g

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование современных физических установок требует оценки влияния различных факторов. Математическое моделирование является неотъемлемой частью этого процесса [1–5]. Несмотря на высокую производительность вычислительных систем, необходимо построение аналитической модели, «ухватывающей» суть физического процесса и дающей начальное приближение для детальной оптимизации всей системы [6].

Одной из таких современных проектируемых установок является реактор «Нептун» [7]. В работе [8] введен в рассмотрение так называемый эффект динамического изгиба твэла, влияющего на стабильность работы реактора импульсного типа [9]. Непосредственное численное моделирование эффекта динамического изгиба более чем для 500 твэлов ректора является вычислительно емкой задачей, требующей значительных временных затрат. Проблема существенно усложняется при оптимизации параметров системы. Естественным видится построение аналитической модели, в которой учитываются основные физические эффекты. Например, в работе [10] приведено расширенное математическое описание эффекта динамического изгиба твэла с учетом собственного веса, исследования точек бифуркации уравнения движения, рассмотрения негладких начальных условий, приводящих к решениям из класса обобщенных функций.

Исследование стабильности работы реактора включает в себя поиск собственных частот поперечных колебаний твэла. В работе [11] приведены результаты численно-аналитических расчетов четырехсоставного стержня (рис. 1), соответствующего модели твэла для нового реактора «Нептун». Модель твэла была представлена в виде металлической трубки с кусочно-постоянной плотностью $\rho_j = m_j / (S_j l_j)$, где $j = 1, \dots, 4$. Величина S_j определяет площадь сечения и является постоянной по всей длине трубки. Значения m_j, l_j задают массу и длину соответственно для j -го участка (см. рис. 1). В табл. 1 приведены технические характеристики модели. Значения длин l_j , масс m_j и модулей Юнга E_j в табл. 1 указаны точно, а площадей сечения S_j и плотностей ρ_j — приближенно. Отметим, что понятия точного и приближенного следует понимать в смысле размера мантиссы числа при численном моделировании. Значения l_j, m_j и E_j указаны со всеми значащими цифрами, а для значений S_j и ρ_j указаны только первые три цифры после запятой, хотя при численном счете используются различные размеры мантиссы: float (4 Б), double (8 Б) и варианты long double (до 16 Б). Размер мантиссы имеет существенное влияние на точность получаемых результатов (см. рис. 6).

Трубка имеет диаметр $d_0 = 1,7$ см и толщину $\Delta d = 0,045$ см. Один конец трубки жестко закреплен, а второй свободен (см. рис. 1).

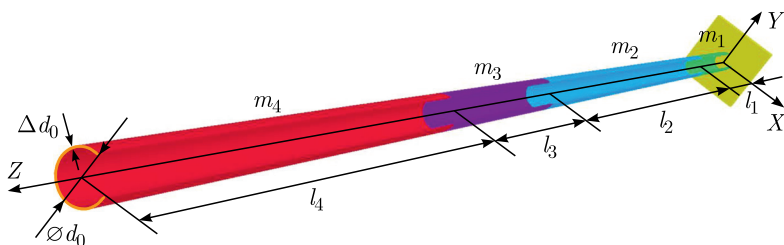


Рис. 1. Геометрическая модель четырехсоставного твэла

Таблица 1. Параметры модели твэла

Часть	l_j , см	m_j , г	ρ_j , г/см ³	E_j , ГПа	S_j , см ²
1	15	286	81,492	200	0,234
2	44	1188	115,399		
3	15	286	81,492		
4	26	49	8,055		

Для поиска собственных частот и собственных функций указанной системы в области $\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j$, где $\Gamma_j = \{z : z_{j-1} \leq z < z_j\}$, $z_0 = 0$, $z_4 = L$, $z_j = z_{j-1} + l_j$, ищется решение начально-краевой задачи для функции смещения $u(z, t) = u^j(z, t)$, $z \in \Gamma_j$ [11–13]:

$$a_j u_{tt}^j + u_{zzzz}^j = 0, \quad a_j = \frac{\rho_j S_j}{E_j J_j}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (\text{B.1})$$

где $J_j = (\pi/4) / (R_2^4 - R_1^4)$ — геометрический момент инерции сечения трубки, а $R_2 = d_0/2$, $R_1 = R_2 - \Delta d_0$. В рассматриваемом частном случае (см. табл. 1) модель твэла имеет одинаковый геометрический момент инерции J_j для всех четырех частей твэла. В общем случае это условие может быть не выполнено, поэтому индекс j присутствует в обозначениях.

Начально-краевые условия для уравнения (B.1) имеют вид

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad u_t(z, 0) = u_1(z), \quad (\text{B.2})$$

$$u^1(z_1, t) = u^2(z_1, t), \quad u^2(z_2, t) = u^3(z_2, t), \quad u^3(z_3, t) = u^4(z_3, t), \quad (\text{B.3})$$

$$u_t^1(0, t) = u_z^1(0, t) = 0, \quad u_t^1(z_1, t) = u_t^2(z_1, t),$$

$$u_t^2(z_2, t) = u_t^3(z_2, t), \quad u_t^3(z_3, t) = u_t^4(z_3, t),$$

$$u_z^1(z_1, t) = u_z^2(z_1, t), \quad E_1 u_{zz}^1(z_1, t) = E_2 u_{zz}^2(z_1, t), \quad (\text{B.4})$$

$$E_1 u_{zzz}^1(z_1, t) = E_2 u_{zzz}^2(z_1, t),$$

$$u_z^2(z_2, t) = u_z^3(z_2, t), \quad E_2 u_{zz}^2(z_2, t) = E_3 u_{zz}^3(z_2, t),$$

$$E_2 u_{zzz}^2(z_2, t) = E_3 u_{zzz}^3(z_2, t), \quad u_z^3(z_3, t) = u_z^4(z_3, t), \quad (\text{B.5})$$

$$E_3 u_{zzz}^3(z_3, t) = E_4 u_{zzz}^4(z_3, t), \quad E_3 u_{zzz}^3(z_3, t) = E_4 u_{zzz}^4(z_3, t),$$

$$u_{zz}^4(L, t) = u_{zzz}^4(L, t) = 0.$$

Начально-краевые условия (B.2)–(B.5) условно разбиты на три группы. Первая группа (B.2) задает распределение смещения $u_0(z)$ и скорости $u_1(z)$ в стержне для начального момента времени $t = 0$. Усло-

вия (В.3) определяют непрерывность функции смещения u и скорости u_t на границах областей Γ_j , т. е. в точках z_1 , z_2 и z_3 . Также в группе (В.3) задано условие жесткого закрепления верхнего конца стержня при $z = 0$. Группе выражений (В.4) соответствуют условия равенства углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил в точках z_1 , z_2 и z_3 . В группе (В.5) задано условие незакрепленного конца стержня при $z = L$.

Решение задачи (В.1)–(В.5) допускает представление в факторизованном виде, т. е. $u^j(z, t) \sim Z^j(z) T^j(t)$:

$$\begin{cases} T_{tt}^j + \varpi^2 T^j = 0, \\ \overline{Z}_{zzzz}^j - \lambda_j \overline{Z}^j = 0, \end{cases} \quad (\text{В.6})$$

где

$$Z^j(z) = Z^j(\overline{z}L) \stackrel{\text{det}}{=} \overline{Z}^j(\overline{z}), \quad \lambda_j \stackrel{\text{det}}{=} \varpi^2 L^4 a_j, \quad \omega_j = \varpi = \text{const}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (\text{В.7})$$

Первое уравнение в системе (В.6) для временной функции $T^j(t)$ не связано с пространственными координатами, так как факторизованный вид решения подразумевает «независимость» пространства и времени. Таким образом, индекс j , характеризующий локализацию в пространстве для первого уравнения, несет «избыточную» информацию. С физической точки зрения величина ω_j , определяющая собственные частоты системы (как целой), должна быть единая для всего стержня, т. е. одинаковой для всех его областей Γ_j , поэтому $\omega_j = \varpi$.

Собственные частоты ϖ_ℓ и собственные функции W_ℓ могут быть найдены из второго уравнения (В.7) с соответствующими ему граничными условиями:

$$\overline{Z}^1(0) = \overline{Z}_z^1(0) = 0, \quad \overline{Z}^k(\overline{z}_k) = \overline{Z}^{k+1}(\overline{z}_k), \quad k = 1, \dots, 3, \quad (\text{В.8})$$

$$\overline{Z}_z^k(\overline{z}_k) = \overline{Z}_z^{k+1}(\overline{z}_k), \quad E_k \overline{Z}_{zz}^k(\overline{z}_k) = E_{k+1} \overline{Z}_{zz}^{k+1}(\overline{z}_k), \quad (\text{В.9})$$

$$E_k \overline{Z}_{zzz}^k(\overline{z}_k) = E_{k+1} \overline{Z}_{zzz}^{k+1}(\overline{z}_k),$$

$$\overline{Z}_{zz}^4(1) = \overline{Z}_{zzz}^4(1) = 0. \quad (\text{В.10})$$

Целью данной работы является получение аналитических выражений для собственных функций W_ℓ оператора $\mathcal{L} = d^4/dz^4$ в области Γ с крайними условиями (В.8)–(В.10).

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 на основе разложения решения \overline{Z}^j второго уравнения (В.6) по функциям Крылова [14] с некоторыми коэффициентами c_n , $n = 1, \dots, 14$, строится частотное уравнение для определения ϖ_ℓ . Оно имеет вид определителя матрицы с блочной структурой и не зависит от коэффициентов разложения c_n . Так как известны собственные частоты ϖ_ℓ , в разд. 2 предлагается аналитический

метод нахождения коэффициентов разложения c_n . Метод основывается на линейной независимости функций Крылова. С использованием выражений для собственных частот ϖ_ℓ и собственных функций $W_\ell(\bar{z})$, $\ell \in \mathbb{N}$, из разд. 1, 2 в разд. 3 проводится численный расчет характеристик модели четырехсоставного твэла (см. рис. 1, табл. 1). Подробно описываются проблемы численного нахождения собственных функций, соответствующих высшим гармоникам. Для высших гармоник предложена асимптотическая аппроксимация значений собственных частот. Проведено сравнение численно-аналитических значений собственных частот ϖ_ℓ и функций $W_\ell(\bar{z})$ со значениями, полученными методом конечных элементов [1, 15]. В приложении приведены промежуточные математические преобразования.

1. ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Так как функции Крылова K_s , $s = 1, \dots, 4$, являются решением второго уравнения (В.6), справедливо разложение

$$\bar{z}^j(\bar{z}) = \sum_{s=1}^4 C_s^j K_s(\alpha_j \bar{z}), \quad (1.1)$$

где $\lambda_j = \alpha_j^4$, C_s^j — некоторые коэффициенты разложения, а функции K_s имеют вид

$$\begin{aligned} K_1(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \bar{z} + \cos \bar{z}), & K_2(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \bar{z} + \sin \bar{z}), \\ K_3(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \bar{z} - \cos \bar{z}), & K_4(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \bar{z} - \sin \bar{z}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметим, что функции (1.2) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} K_1(\bar{z}) = K_2'(\bar{z}) = K_3''(\bar{z}) = K_4'''(\bar{z}) = K_1^{(4)}(\bar{z}), & \quad K_1'(\bar{z}) = K_4(\bar{z}), \\ K_1(0) = 1, & \quad K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подстановка разложения (1.1) в граничные условия (В.8)–(В.10) приводит к системе уравнений (см. приложение):

$$\Lambda \mathbf{c} = \boldsymbol{\theta}, \quad \Lambda(\varpi) = \begin{pmatrix} A(\varpi) & B(\varpi) \\ C(\varpi) & D(\varpi) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_{14}\}^T, \quad C_s^j = c_{s-6+4j}, \quad C_1^1 = C_2^1 = 0, \quad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — нулевой вектор-столбец.

Матрица $\Lambda(\varpi)$ имеет блочную структуру. Матрицы $A(\varpi)$, $B(\varpi)$, $C(\varpi)$ и $D(\varpi)$ являются матрицами размера 7×7 :

$$A(\varpi) = \begin{pmatrix} k_{1,1}^{(3)} & k_{1,1}^{(4)} & -k_{2,1}^{(1)} & -k_{2,1}^{(2)} & -k_{2,1}^{(3)} & -k_{2,1}^{(4)} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k_{1,1}^{(2)} & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k_{1,1}^{(3)} & -k_{2,1}^{(4)} & -k_{2,1}^{(1)} & -k_{2,1}^{(2)} & -k_{2,1}^{(3)} & 0 \\ \frac{E_1 \alpha_1^2}{E_2 \alpha_2^2} k_{1,1}^{(1)} & \frac{E_1 \alpha_1^2}{E_2 \alpha_2^2} k_{1,1}^{(2)} & -k_{2,1}^{(3)} & -k_{2,1}^{(4)} & -k_{2,1}^{(1)} & -k_{2,1}^{(2)} & 0 \\ \frac{E_1 \alpha_1^3}{E_2 \alpha_2^3} k_{1,1}^{(4)} & \frac{E_1 \alpha_1^3}{E_2 \alpha_2^3} k_{1,1}^{(1)} & -k_{2,1}^{(2)} & -k_{2,1}^{(3)} & -k_{2,1}^{(4)} & -k_{2,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} k_{2,2}^{(4)} & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} k_{2,2}^{(1)} & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} k_{2,2}^{(2)} & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} k_{2,2}^{(3)} & -k_{3,2}^{(4)} \\ 0 & 0 & \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_3 \alpha_3^2} k_{2,2}^{(3)} & \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_3 \alpha_3^2} k_{2,2}^{(4)} & \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_3 \alpha_3^2} k_{2,2}^{(1)} & \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_3 \alpha_3^2} k_{2,2}^{(2)} & -k_{3,2}^{(3)} \\ 0 & 0 & \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_3 \alpha_3^3} k_{2,2}^{(2)} & \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_3 \alpha_3^3} k_{2,2}^{(3)} & \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_3 \alpha_3^3} k_{2,2}^{(4)} & \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_3 \alpha_3^3} k_{2,2}^{(1)} & -k_{3,2}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$B(\varpi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{3,2}^{(1)} & -k_{3,2}^{(2)} & -k_{3,2}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{3,2}^{(4)} & -k_{3,2}^{(1)} & -k_{3,2}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{3,2}^{(3)} & -k_{3,2}^{(4)} & -k_{3,2}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(\varpi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} & -k_{3,2}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{\alpha_4} k_{3,3}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} k_{3,3}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} k_{3,3}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3,3}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\varpi) = \begin{pmatrix} -k_{3,2}^{(2)} & -k_{3,2}^{(3)} & -k_{3,2}^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_4} k_{3,3}^{(1)} & \frac{\alpha_3}{\alpha_4} k_{3,3}^{(2)} & \frac{\alpha_3}{\alpha_4} k_{3,3}^{(3)} & -k_{4,3}^{(4)} & -k_{4,3}^{(1)} & -k_{4,3}^{(2)} & -k_{4,3}^{(3)} \\ \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} k_{3,3}^{(4)} & \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} k_{3,3}^{(1)} & \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} k_{3,3}^{(2)} & -k_{4,3}^{(3)} & -k_{4,3}^{(4)} & -k_{4,3}^{(1)} & -k_{4,3}^{(2)} \\ \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} k_{3,3}^{(3)} & \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} k_{3,3}^{(4)} & \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} k_{3,3}^{(1)} & -k_{4,3}^{(2)} & -k_{4,3}^{(3)} & -k_{4,3}^{(4)} & -k_{4,3}^{(1)} \\ k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} & -k_{4,3}^{(1)} & -k_{4,3}^{(2)} & -k_{4,3}^{(3)} & -k_{4,3}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4}^{(3)} & k_{4,4}^{(4)} & k_{4,4}^{(1)} & k_{4,4}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4}^{(2)} & k_{4,4}^{(3)} & k_{4,4}^{(4)} & k_{4,4}^{(1)} \end{pmatrix},$$

где использовано обозначение $k_{j,p}^{(s)} \stackrel{\text{det}}{=} K_s(\alpha_j \bar{z}_p)$, $p = j - 1, j$, и $\bar{z}_4 \stackrel{\text{det}}{=} 1$. Система (1.4) является однородной системой алгебраических уравнений. Так как тривиальное решение ($\mathbf{c} = \boldsymbol{\theta}$) не представляет интереса, получаем частотное уравнение для нахождения собственных частот ϖ_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\det \Lambda(\varpi) = 0, \quad (1.7)$$

где значения α_j , $j = 1, \dots, 4$, связаны между собой соотношением $\alpha_j^4 = \varpi^2 L^4 a_j$. Таким образом, частотное уравнение (1.7) записано относительно одной переменной — ϖ . При вычислении матрицы Λ стоит учесть, что величины $\alpha_i^4 / \alpha_{i+1}^4 = a_i / a_{i+1}$, $i = 1, \dots, 3$, т.е. не зависят от переменной ϖ . Такое упрощение ускоряет численное нахождение корней уравнения (1.7).

Для каждого значения ℓ существует свой набор коэффициентов C_s^j (1.5), т.е. $C_{s,\ell}^j$. Аналогичное справедливо и для коэффициентов $\alpha_{j,\ell}^4 = \varpi_\ell^2 L^4 a_j$. Следовательно, собственные функции согласно (1.1) представимы как

$$\bar{Z}_\ell^j(\bar{z}) = \sum_{s=1}^4 C_{s,\ell}^j K_s(\alpha_{j,\ell} \bar{z}). \quad (1.8)$$

2. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Использование представления (1.8) для построения собственных функций требует знания коэффициентов разложения $C_{s,j}$, которые связаны с коэффициентами c_n выражением (1.5). При выполнении частотного уравнения (1.7) система уравнений (1.4) имеет бесконечное множество решений в силу линейной зависимости строк/столбцов матрицы $\Lambda(\varpi_\ell)$. Найдём одно из таких решений c_1, \dots, c_{14} , которое позволит построить набор собственных координатных функций (1.8) четырехсоставного стержня.

Рассмотрим последние два уравнения из системы (1.4) согласно (П.32), (П.33), получим

$$\Phi^2(\alpha_4) \mathbf{c}^{11-12} = \mathbf{f}^{11-12}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi^2(x) \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} K_3(x) & K_4(x) \\ K_2(x) & K_3(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^{11-12} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}^{11-12} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix} = -c_{13} \begin{pmatrix} k_{4,4}^{(1)} \\ k_{4,4}^{(4)} \end{pmatrix} - c_{14} \begin{pmatrix} k_{4,4}^{(2)} \\ k_{4,4}^{(1)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где x — (по определению (1.3)) безразмерный аргумент функций Крылова.

Заметим, что определитель матрицы $\Phi^2(x)$ не равен нулю, т.е. $\det \Phi^2(x) \neq 0$. Данное свойство обеспечивается линейной независимо-

стью функций Крылова (1.2). Действительно, определитель Вронского для функций $K_3(x)$ и $K_4(x)$ имеет вид

$$\mathcal{W}(K_3, K_4)(x) = \begin{vmatrix} K_3(x) & K_4(x) \\ K_3'(x) & K_4'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_3(x) & K_4(x) \\ K_2(x) & K_3(x) \end{vmatrix} = \det \Phi^2(x) \neq 0, \quad (2.3)$$

где учтено свойство (1.3). Таким образом, определитель Вронского совпадает с определителем матрицы $\Phi^2(x)$. Следовательно, для решения системы (2.1) можно воспользоваться методом Крамера. Решение системы (2.1) имеет вид

$$\mathbf{c}^{11-12} = \frac{\Delta_{4,4}^{11-12}}{\det \Phi^2(\alpha_4)}, \quad (2.4)$$

$$\Delta_{4,4}^{11-12} = \begin{pmatrix} \Delta_{4,4}^{11} \\ \Delta_{4,4}^{12} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{4,4}^{11} = \begin{vmatrix} f_{11} & k_{4,4}^{(4)} \\ f_{12} & k_{4,4}^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{4,4}^{12} = \begin{vmatrix} k_{4,4}^{(3)} & f_{11} \\ k_{4,4}^{(2)} & f_{12} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

В силу (2.4), (2.5) и (2.2) коэффициенты \mathbf{c}^{11-12} выражаются через коэффициенты c_{13}, c_{14} :

$$\begin{aligned} \Delta_{4,4}^{11} &= c_{13} \left(k_{4,4}^{(4)} k_{4,4}^{(4)} - k_{4,4}^{(1)} k_{4,4}^{(3)} \right) + c_{14} \left(k_{4,4}^{(1)} k_{4,4}^{(4)} - k_{4,4}^{(2)} k_{4,4}^{(3)} \right), \\ \Delta_{4,4}^{12} &= c_{13} \left(k_{4,4}^{(1)} k_{4,4}^{(2)} - k_{4,4}^{(3)} k_{4,4}^{(4)} \right) + c_{14} \left(k_{4,4}^{(2)} k_{4,4}^{(2)} - k_{4,4}^{(1)} k_{4,4}^{(3)} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражение (2.4) с учетом выражений (2.6) перепишем в виде

$$\mathbf{c}^{11-12} = c_{13} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} + c_{14} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{\det \Phi^2(\alpha_4)} \begin{vmatrix} k_{4,4}^{(4)} & k_{4,4}^{(3)} \\ k_{4,4}^{(1)} & k_{4,4}^{(4)} \end{vmatrix}, & q_{11} &= \frac{1}{\det \Phi^2(\alpha_4)} \begin{vmatrix} k_{4,4}^{(1)} & k_{4,4}^{(3)} \\ k_{4,4}^{(2)} & k_{4,4}^{(4)} \end{vmatrix}, \\ p_{12} &= \frac{1}{\det \Phi^2(\alpha_4)} \begin{vmatrix} k_{4,4}^{(1)} & k_{4,4}^{(3)} \\ k_{4,4}^{(4)} & k_{4,4}^{(2)} \end{vmatrix}, & q_{12} &= \frac{1}{\det \Phi^2(\alpha_4)} \begin{vmatrix} k_{4,4}^{(2)} & k_{4,4}^{(3)} \\ k_{4,4}^{(1)} & k_{4,4}^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Зная решение (2.7), можно рассмотреть систему из четырех уравнений (П.28)–(П.31), которую перепишем в матричном виде:

$$\Phi^4(\alpha_3 \bar{z}_3) \mathbf{c}^{7-10} = \mathbf{f}^{7-10}, \quad (2.9)$$

$$\Phi^4(x) \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} K_4(x) & K_1(x) & K_2(x) & K_3(x) \\ K_3(x) & K_4(x) & K_1(x) & K_2(x) \\ K_2(x) & K_3(x) & K_4(x) & K_1(x) \\ K_1(x) & K_2(x) & K_3(x) & K_4(x) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c}^{7-10} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^{7-10} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_3}{\alpha_4} f_7 &= c_{11} k_{4,3}^{(4)} + c_{12} k_{4,3}^{(1)} + c_{13} k_{4,3}^{(2)} + c_{14} k_{4,3}^{(3)}, \\ \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} f_8 &= c_{11} k_{4,3}^{(3)} + c_{12} k_{4,3}^{(4)} + c_{13} k_{4,3}^{(1)} + c_{14} k_{4,3}^{(2)}, \\ \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} f_9 &= c_{11} k_{4,3}^{(2)} + c_{12} k_{4,3}^{(3)} + c_{13} k_{4,3}^{(4)} + c_{14} k_{4,3}^{(1)}, \\ f_{10} &= c_{11} k_{4,3}^{(1)} + c_{12} k_{4,3}^{(2)} + c_{13} k_{4,3}^{(3)} + c_{14} k_{4,3}^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В системе (2.11) коэффициенты c_{11} , c_{12} выражаются через коэффициенты c_{13} , c_{14} согласно (2.7), поэтому

$$\mathbf{f}^{7-10} = c_{13} \mathbf{P}^{7-10} + c_{14} \mathbf{Q}^{7-10}, \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{P}^{7-10} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(k_{4,3}^{(2)} + p_{11} k_{4,3}^{(4)} + p_{12} k_{4,3}^{(1)} \right) \\ \frac{E_4 \alpha_4^2}{E_3 \alpha_3^2} \left(k_{4,3}^{(1)} + p_{11} k_{4,3}^{(3)} + p_{12} k_{4,3}^{(4)} \right) \\ \frac{E_4 \alpha_4^3}{E_3 \alpha_3^3} \left(k_{4,3}^{(4)} + p_{11} k_{4,3}^{(2)} + p_{12} k_{4,3}^{(3)} \right) \\ k_{4,3}^{(3)} + p_{11} k_{4,3}^{(1)} + p_{12} k_{4,3}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{7-10} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(k_{4,3}^{(3)} + q_{11} k_{4,3}^{(4)} + q_{12} k_{4,3}^{(1)} \right) \\ \frac{E_4 \alpha_4^2}{E_3 \alpha_3^2} \left(k_{4,3}^{(2)} + q_{11} k_{4,3}^{(3)} + q_{12} k_{4,3}^{(4)} \right) \\ \frac{E_4 \alpha_4^3}{E_3 \alpha_3^3} \left(k_{4,3}^{(1)} + q_{11} k_{4,3}^{(2)} + q_{12} k_{4,3}^{(3)} \right) \\ k_{4,3}^{(4)} + q_{11} k_{4,3}^{(1)} + q_{12} k_{4,3}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что определитель матрицы $\Phi^4(x)$ не равен нулю, так как он совпадает с определителем Вронского:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(K_4, K_1, K_2, K_3)(x) &= \begin{vmatrix} K_4 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4' & K_1' & K_2' & K_3' \\ K_4'' & K_1'' & K_2'' & K_3'' \\ K_4''' & K_1''' & K_2''' & K_3''' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} K_4 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_3 & K_4 & K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 & K_4 & K_1 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{vmatrix} = \det \Phi^4(x) \neq 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где учтено свойство (1.3). С учетом свойства (2.13) метод Крамера дает решение системы (2.9):

$$\mathbf{c}^{7-10} = \frac{\Delta_{3,3}^{7-10}}{\det \Phi^4(\alpha_3 \bar{z}_3)}, \quad (2.14)$$

где

$$\Delta_{3,3}^{7-10} = \begin{pmatrix} \Delta_{3,3}^7 \\ \Delta_{3,3}^8 \\ \Delta_{3,3}^9 \\ \Delta_{3,3}^{10} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{3,3}^7 = \begin{vmatrix} f_7 & k_{3,3}^{(1)} & k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} \\ f_8 & k_{3,3}^{(4)} & k_{3,3}^{(1)} & k_{3,3}^{(2)} \\ f_9 & k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} & k_{3,3}^{(1)} \\ f_{10} & k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} \end{vmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\Delta_{3,3}^8 = \begin{vmatrix} k_{3,3}^{(4)} & f_7 & k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} \\ k_{3,3}^{(3)} & f_8 & k_{3,3}^{(1)} & k_{3,3}^{(2)} \\ k_{3,3}^{(2)} & f_9 & k_{3,3}^{(4)} & k_{3,3}^{(1)} \\ k_{3,3}^{(1)} & f_{10} & k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{3,3}^9 = \begin{vmatrix} k_{3,3}^{(4)} & k_{3,3}^{(1)} & f_7 & k_{3,3}^{(3)} \\ k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} & f_8 & k_{3,3}^{(2)} \\ k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} & f_9 & k_{3,3}^{(1)} \\ k_{3,3}^{(1)} & k_{3,3}^{(2)} & f_{10} & k_{3,3}^{(4)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3,3}^{10} = \begin{vmatrix} k_{3,3}^{(4)} & k_{3,3}^{(1)} & k_{3,3}^{(2)} & f_7 \\ k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} & k_{3,3}^{(1)} & f_8 \\ k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} & k_{3,3}^{(4)} & f_9 \\ k_{3,3}^{(1)} & k_{3,3}^{(2)} & k_{3,3}^{(3)} & f_{10} \end{vmatrix}.$$

Проведем разложение по столбцу для определителей (2.15), получим

$$\Delta_{3,3}^k = (\mathbf{f}^{7-10}, \mathbf{A}^k), \quad \mathbf{A}^k = (A_{1,k-6}^k \quad A_{2,k-6}^k \quad A_{3,k-6}^k \quad A_{4,k-6}^k)^T, \quad (2.16)$$

$$k = 7, \dots, 10,$$

где $A_{i,j}^k$ — алгебраическое дополнение элемента (i, j) определителя $\Delta_{3,3}^k$. Подставим выражения (2.12) в разложения (2.16):

$$\Delta_{3,3}^k = c_{13} (\mathbf{P}^{7-10}, \mathbf{A}^k) + c_{14} (\mathbf{Q}^{7-10}, \mathbf{A}^k), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{c}^{7-10} = c_{13} \begin{pmatrix} p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \end{pmatrix} + c_{14} \begin{pmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$p_k = \frac{(\mathbf{P}^{7-10}, \mathbf{A}^k)}{\det \Phi^4(\alpha_3 \bar{z}_3)}, \quad q_k = \frac{(\mathbf{Q}^{7-10}, \mathbf{A}^k)}{\det \Phi^4(\alpha_3 \bar{z}_3)}, \quad k = 7, \dots, 10.$$

Формулы (2.18) дают представление решения системы уравнений (2.9) через коэффициенты c_{13} и c_{14} . Рассмотрим четыре уравнения (П.25)–(П.27) для определения коэффициентов c_3, c_4, c_5, c_6 , записав их в матричном виде:

$$\Phi^4(\alpha_2 \bar{z}_2) \mathbf{c}^{3-6} = \mathbf{f}^{3-6}, \quad (2.19)$$

где по аналогии с предыдущей системой (2.11) выражения для правой части (2.19) представимы как

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(c_7 k_{3,2}^{(4)} + c_8 k_{3,2}^{(1)} + c_9 k_{3,2}^{(2)} + c_{10} k_{3,2}^{(3)} \right), \\ f_4 &= \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_2 \alpha_2^2} \left(c_7 k_{3,2}^{(3)} + c_8 k_{3,2}^{(4)} + c_9 k_{3,2}^{(1)} + c_{10} k_{3,2}^{(2)} \right), \\ f_5 &= \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_2 \alpha_2^3} \left(c_7 k_{3,2}^{(2)} + c_8 k_{3,2}^{(3)} + c_9 k_{3,2}^{(4)} + c_{10} k_{3,2}^{(1)} \right), \\ f_6 &= c_7 k_{3,2}^{(1)} + c_8 k_{3,2}^{(2)} + c_9 k_{3,2}^{(3)} + c_{10} k_{3,2}^{(4)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

или

$$\mathbf{f}^{3-6} = c_{13} \mathbf{P}^{3-6} + c_{14} \mathbf{Q}^{3-6}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{P}^{3-6} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(p_7 k_{3,2}^{(4)} + p_8 k_{3,2}^{(1)} + p_9 k_{3,2}^{(2)} + p_{10} k_{3,2}^{(3)} \right) \\ \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_2 \alpha_2^2} \left(k_{3,2}^{(3)} p_7 + p_8 k_{3,2}^{(4)} + p_9 k_{3,2}^{(1)} + p_{10} k_{3,2}^{(2)} \right) \\ \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_2 \alpha_2^3} \left(p_7 k_{3,2}^{(2)} + p_8 k_{3,2}^{(3)} + p_9 k_{3,2}^{(4)} + p_{10} k_{3,2}^{(1)} \right) \\ p_7 k_{3,2}^{(1)} + p_8 k_{3,2}^{(2)} + p_9 k_{3,2}^{(3)} + p_{10} k_{3,2}^{(4)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{3-6} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left(q_7 k_{3,2}^{(4)} + q_8 k_{3,2}^{(1)} + q_9 k_{3,2}^{(2)} + q_{10} k_{3,2}^{(3)} \right) \\ \frac{E_3 \alpha_3^2}{E_2 \alpha_2^2} \left(k_{3,2}^{(3)} q_7 + q_8 k_{3,2}^{(4)} + q_9 k_{3,2}^{(1)} + q_{10} k_{3,2}^{(2)} \right) \\ \frac{E_3 \alpha_3^3}{E_2 \alpha_2^3} \left(q_7 k_{3,2}^{(2)} + q_8 k_{3,2}^{(3)} + q_9 k_{3,2}^{(4)} + q_{10} k_{3,2}^{(1)} \right) \\ q_7 k_{3,2}^{(1)} + q_8 k_{3,2}^{(2)} + q_9 k_{3,2}^{(3)} + q_{10} k_{3,2}^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.19) с учетом свойства (2.13) имеет вид

$$\mathbf{c}^{3-6} = \frac{\Delta_{2,2}^{3-6}}{\det \Phi^4(\alpha_2 \bar{z}_2)}, \quad (2.22)$$

$$\Delta_{2,2}^{3-6} = \begin{pmatrix} \Delta_{2,2}^3 \\ \Delta_{2,2}^4 \\ \Delta_{2,2}^5 \\ \Delta_{2,2}^6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{2,2}^3 = \begin{vmatrix} f_3 & k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} \\ f_4 & k_{2,2}^{(4)} & k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} \\ f_5 & k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} & k_{2,2}^{(1)} \\ f_6 & k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2,2}^4 = \begin{vmatrix} k_{2,2}^{(4)} & f_3 & k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} \\ k_{2,2}^{(3)} & f_4 & k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} \\ k_{2,2}^{(2)} & f_5 & k_{2,2}^{(4)} & k_{2,2}^{(1)} \\ k_{2,2}^{(1)} & f_6 & k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,2}^5 = \begin{vmatrix} k_{2,2}^{(4)} & k_{2,2}^{(1)} & f_3 & k_{2,2}^{(3)} \\ k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} & f_4 & k_{2,2}^{(2)} \\ k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} & f_5 & k_{2,2}^{(1)} \\ k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} & f_6 & k_{2,2}^{(4)} \end{vmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\Delta_{2,2}^6 = \begin{vmatrix} k_{2,2}^{(4)} & k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} & f_3 \\ k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} & k_{2,2}^{(1)} & f_4 \\ k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} & k_{2,2}^{(4)} & f_5 \\ k_{2,2}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} & k_{2,2}^{(3)} & f_6 \end{vmatrix}.$$

Проведем разложение по столбцу для определителей (2.23), получим

$$\Delta_{2,2}^k = (\mathbf{f}^{3-6}, \mathbf{A}^k), \quad \mathbf{A}^k = (A_{1,k-2}^k \quad A_{2,k-2}^k \quad A_{3,k-2}^k \quad A_{4,k-2}^k)^T, \quad (2.24)$$

$$k = 3, \dots, 6.$$

Подставим выражения (2.21) в разложения (2.24):

$$\Delta_{2,2}^k = c_{13} (\mathbf{P}^{3-6}, \mathbf{A}^k) + c_{14} (\mathbf{Q}^{3-6}, \mathbf{A}^k), \quad (2.25)$$

$$\mathbf{c}^{3-6} = c_{13} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} + c_{14} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}, \quad p_k = \frac{(\mathbf{P}^{3-6}, \mathbf{A}^k)}{\det \Phi^4(\alpha_2 \bar{z}_2)}, \quad (2.26)$$

$$q_k = \frac{(\mathbf{Q}^{3-6}, \mathbf{A}^k)}{\det \Phi^4(\alpha_2 \bar{z}_2)}, \quad k = 3, \dots, 6.$$

Осталось рассмотреть последние четыре уравнения (П.20)–(П.23) исходной системы (1.2):

$$\begin{aligned} c_1 k_{1,1}^{(2)} + c_2 k_{1,1}^{(3)} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(c_3 k_{2,1}^{(4)} + c_4 k_{2,1}^{(1)} + c_5 k_{2,1}^{(2)} + c_6 k_{2,1}^{(3)} \right), \\ c_1 k_{1,1}^{(1)} + c_2 k_{1,1}^{(2)} &= \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(c_3 k_{2,1}^{(3)} + c_4 k_{2,1}^{(4)} + c_5 k_{2,1}^{(1)} + c_6 k_{2,1}^{(2)} \right), \\ c_1 k_{1,1}^{(4)} + c_2 k_{1,1}^{(1)} &= \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_1 \alpha_1^3} \left(c_3 k_{2,1}^{(2)} + c_4 k_{2,1}^{(3)} + c_5 k_{2,1}^{(4)} + c_6 k_{2,1}^{(1)} \right), \\ c_1 k_{1,1}^{(3)} + c_2 k_{1,1}^{(4)} &= c_3 k_{2,1}^{(1)} + c_4 k_{2,1}^{(2)} + c_5 k_{2,1}^{(3)} + c_6 k_{2,1}^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Коэффициенты c_3, c_4, c_5, c_6 выражаются через коэффициенты c_{13}, c_{14} , т. е. система (2.27) записана относительно коэффициентов c_1, c_2, c_{13}, c_{14} :

$$\begin{aligned} c_1 k_{1,1}^{(2)} + c_2 k_{1,1}^{(3)} - c_{13} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(p_3 k_{2,1}^{(4)} + p_4 k_{2,1}^{(1)} + p_5 k_{2,1}^{(2)} + p_6 k_{2,1}^{(3)} \right) - \\ - c_{14} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(q_3 k_{2,1}^{(4)} + q_4 k_{2,1}^{(1)} + q_5 k_{2,1}^{(2)} + q_6 k_{2,1}^{(3)} \right) &= 0, \\ c_1 k_{1,1}^{(1)} + c_2 k_{1,1}^{(2)} - c_{13} \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(p_3 k_{2,1}^{(3)} + p_4 k_{2,1}^{(4)} + p_5 k_{2,1}^{(1)} + p_6 k_{2,1}^{(2)} \right) - \\ - c_{14} \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(q_3 k_{2,1}^{(3)} + q_4 k_{2,1}^{(4)} + q_5 k_{2,1}^{(1)} + q_6 k_{2,1}^{(2)} \right) &= 0, \\ c_1 k_{1,1}^{(4)} + c_2 k_{1,1}^{(1)} - c_{13} \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_1 \alpha_1^3} \left(p_3 k_{2,1}^{(2)} + p_4 k_{2,1}^{(3)} + p_5 k_{2,1}^{(4)} + p_6 k_{2,1}^{(1)} \right) - \\ - c_{14} \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_1 \alpha_1^3} \left(q_3 k_{2,1}^{(2)} + q_4 k_{2,1}^{(3)} + q_5 k_{2,1}^{(4)} + q_6 k_{2,1}^{(1)} \right) &= 0, \\ c_1 k_{1,1}^{(3)} + c_2 k_{1,1}^{(4)} - c_{13} \left(p_3 k_{2,1}^{(1)} + p_4 k_{2,1}^{(2)} + p_5 k_{2,1}^{(3)} + p_6 k_{2,1}^{(4)} \right) - \\ - c_{14} \left(q_3 k_{2,1}^{(1)} + q_4 k_{2,1}^{(2)} + q_5 k_{2,1}^{(3)} + q_6 k_{2,1}^{(4)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Равенство нулю определителя системы (2.28) даст спектр собственных частот системы ϖ_ℓ . С одной стороны, определитель системы (2.28) имеет порядок 4×4 , в отличие от системы (1.2), у которой порядок 14×14 . С другой стороны, элементами определителя 4×4 являются сложные функции, вычисление которых проводится по формулам (2.8), (2.18) и (2.26).

Так как определитель равен нулю, уравнения в системе (2.28) являются линейно зависимыми, следовательно, минимум один из четырех коэффициентов c_1, c_2, c_{13}, c_{14} можно положить равным единице, например, $c_{14} = 1$. В этом случае в системе (2.28) достаточно рассмотреть только три уравнения для неизвестных коэффициентов c_1, c_2, c_{13} :

$$\Omega \mathbf{c}^{1,2,13} = \mathbf{f}^{1,2,13}, \quad (2.29)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,1}^{(3)} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(p_3 k_{2,1}^{(4)} + p_4 k_{2,1}^{(1)} + p_5 k_{2,1}^{(2)} + p_6 k_{2,1}^{(3)} \right) \\ k_{1,1}^{(1)} & k_{1,1}^{(2)} & -\frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(p_3 k_{2,1}^{(3)} + p_4 k_{2,1}^{(4)} + p_5 k_{2,1}^{(1)} + p_6 k_{2,1}^{(2)} \right) \\ k_{1,1}^{(3)} & k_{1,1}^{(4)} & -p_3 k_{2,1}^{(1)} - p_4 k_{2,1}^{(2)} - p_5 k_{2,1}^{(3)} - p_6 k_{2,1}^{(4)} \end{pmatrix} \times \\ &\times \mathbf{c}^{1,2,13} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^{1,2,13} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_{13} \end{pmatrix}, \\ f_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(q_3 k_{2,1}^{(4)} + q_4 k_{2,1}^{(1)} + q_5 k_{2,1}^{(2)} + q_6 k_{2,1}^{(3)} \right), \\ f_2 &= \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(q_3 k_{2,1}^{(3)} + q_4 k_{2,1}^{(4)} + q_5 k_{2,1}^{(1)} + q_6 k_{2,1}^{(2)} \right), \\ f_{13} &= q_3 k_{2,1}^{(1)} + q_4 k_{2,1}^{(2)} + q_5 k_{2,1}^{(3)} + q_6 k_{2,1}^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Заметим, что коэффициенты матрицы Ω связаны с физическими величинами, для которых в общем случае нельзя гарантировать линейную независимость строчек/столбцов матрицы Ω . Возможен случай, когда в исходной системе (2.28) будут линейно зависимы два уравнения. Предполагая, что физические параметры рассматриваемой системы достаточно «хороши» для выполнения условия $\det \Omega(\varpi_\ell) \neq 0$, запишем решение системы (2.29) в виде

$$\mathbf{c}^{1,2,13} = \frac{\Delta^{1,2,13}}{\det \Omega(\varpi_\ell)}, \quad (2.31)$$

$$\Delta^{1,2,13} = \begin{pmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \\ \Delta^{13} \end{pmatrix},$$

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} f_1 & k_{1,1}^{(3)} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(p_3 k_{2,1}^{(4)} + p_4 k_{2,1}^{(1)} + p_5 k_{2,1}^{(2)} + p_6 k_{2,1}^{(3)} \right) \\ f_2 & k_{1,1}^{(2)} & -\frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(p_3 k_{2,1}^{(3)} + p_4 k_{2,1}^{(4)} + p_5 k_{2,1}^{(1)} + p_6 k_{2,1}^{(2)} \right) \\ f_{13} & k_{1,1}^{(4)} & -p_3 k_{2,1}^{(1)} - p_4 k_{2,1}^{(2)} - p_5 k_{2,1}^{(3)} - p_6 k_{2,1}^{(4)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} k_{1,1}^{(2)} & f_1 & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(p_3 k_{2,1}^{(4)} + p_4 k_{2,1}^{(1)} + p_5 k_{2,1}^{(2)} + p_6 k_{2,1}^{(3)} \right) \\ k_{1,1}^{(1)} & f_2 & -\frac{E_2 \alpha_2^2}{E_1 \alpha_1^2} \left(p_3 k_{2,1}^{(3)} + p_4 k_{2,1}^{(4)} + p_5 k_{2,1}^{(1)} + p_6 k_{2,1}^{(2)} \right) \\ k_{1,1}^{(3)} & f_{13} & -p_3 k_{2,1}^{(1)} - p_4 k_{2,1}^{(2)} - p_5 k_{2,1}^{(3)} - p_6 k_{2,1}^{(4)} \end{vmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,1}^{(3)} & f_1 \\ k_{1,1}^{(1)} & k_{1,1}^{(2)} & f_2 \\ k_{1,1}^{(3)} & k_{1,1}^{(4)} & f_{13} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, по формулам (3.31), (3.32) находятся коэффициенты c_1, c_2, c_{13} . Знание коэффициентов c_{13}, c_{14} ($c_{14} = 1$) позволяет определить коэффициенты c_{11}, c_{12} (2.7), c_7, c_8, c_9, c_{10} (2.18), c_3, c_4, c_5, c_6 (2.26). Подставляя полный набор найденных коэффициентов c_1, \dots, c_{14} при заданной собственной частоте ϖ_ℓ в представление (1.8), получим набор собственных функций $\bar{Z}_\ell^j(\bar{z})$ для каждой области $z \in \Gamma_j$. В силу граничных условий (В.8) и (В.9) на границе областей Γ_j функции $\bar{Z}_\ell^j(\bar{z})$ будут непрерывно дифференцируемы.

Заметим, что собственные функции $\bar{Z}_\ell^j(\bar{z})$ имеют разную нормировку, так как при решении системы уравнений (2.28) было произвольным образом положено $c_{14} = 1$. Для соблюдения нормировки можно переопределить собственные функции как

$$W_\ell(\bar{z}) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{\bar{Z}_\ell^j(\bar{z})}{\left\| \bar{Z}_\ell^j(\bar{z}) \right\|_{L_2[0,1]}}, \quad \bar{z} \in \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (2.33)$$

где $\left\| \cdot \right\|_{L_2[0,1]}$ — норма в пространстве L_2 .

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Найдем собственные частоты четырехсоставного стержня с параметрами из табл. 1. В силу блочной структуры матрицы (1.4) вычисление определителя 14×14 можно свести к вычислению определителя матрицы 7×7 . Заметим, что $\forall \varpi : \det C(\varpi) = \det B(\varpi) = 0$, а определители матриц $A(\varpi)$ и $D(\varpi)$ в общем случае отличны от нуля, следовательно, для частотного уравнения (1.7) справедливы представления

$$\det \Lambda(\varpi) = \det A \det (D - CA^{-1}B) = 0 \Rightarrow \det (D - CA^{-1}B) = 0 \quad (3.1)$$

или

$$\det \Lambda(\varpi) = \det D \det (A - BD^{-1}C) = 0 \Rightarrow \det (A - BD^{-1}C) = 0. \quad (3.2)$$

Определители (3.1) и (3.2) вычисляются от матриц 7×7 , но при этом необходимо вычислить обратные матрицы A^{-1} или D^{-1} , которые должны существовать при условиях $\det A(\varpi) \neq 0$ и $\det D(\varpi) \neq 0$ соответственно.

Непосредственный численный эксперимент по расчету собственных частот по формулам (3.1), (3.2) и методом, изложенным в разд. 2, показал, что существенную погрешность имеет метод (3.1), (3.2). Поэтому дальнейшие вычисления были проведены методом из разд. 2.

Коэффициенты матрицы Λ (1.4) содержат гиперболические и тригонометрические функции, которые приводят к трансцендентному типу частотного уравнения (1.7). Таким образом, решение уравнения (1.7) или (3.1), (3.2) требует использования численного метода. Фактически необходимо найти нули функции $y(\varpi) = \det \Lambda(\varpi)$.

Непосредственное вычисление функции $y(\varpi)$ приводит к неустойчивой задаче при больших значениях собственных частот ϖ_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$. На рис. 2–6 показаны графики функции $y(\varpi)$ на интервалах, на которых она имеет нули ϖ_ℓ , $\ell = 1, \dots, 9$.

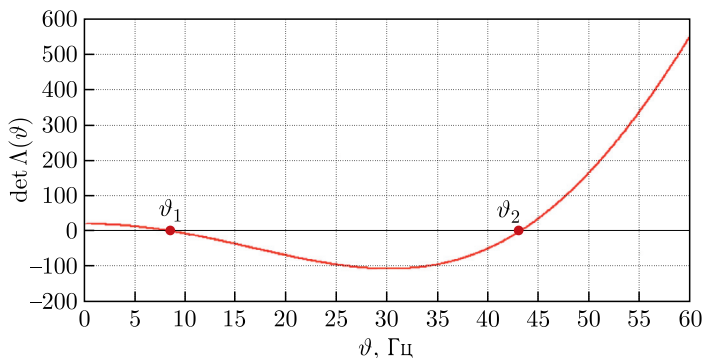


Рис. 2. График частотной функции $\det \Lambda(\vartheta)$ вблизи корней ϑ_1 и ϑ_2

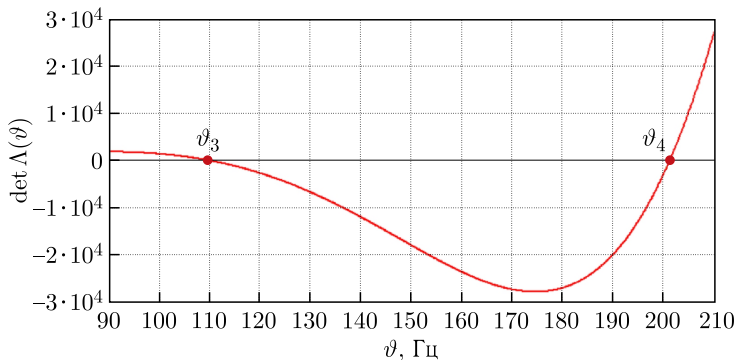
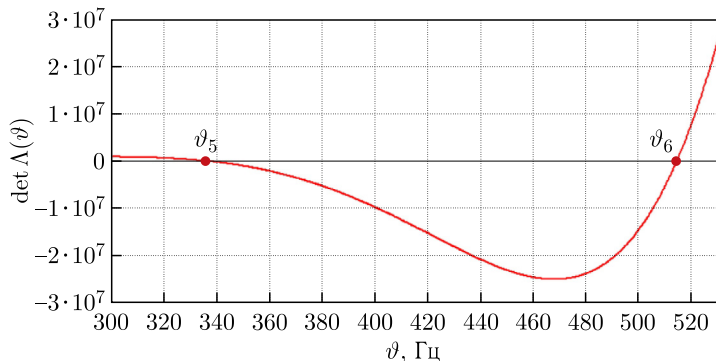
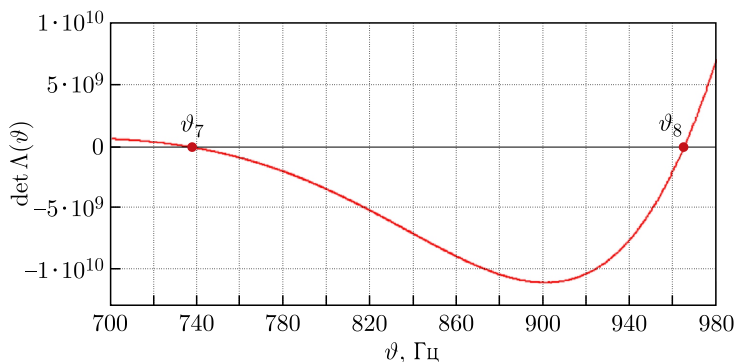


Рис. 3. График частотной функции $\det \Lambda(\vartheta)$ вблизи корней ϑ_3 и ϑ_4

Рис. 4. График частотной функции $\det \Lambda(\vartheta)$ вблизи корней ϑ_5 и ϑ_6 Рис. 5. График частотной функции $\det \Lambda(\vartheta)$ вблизи корней ϑ_7 и ϑ_8

На рис. 2–5 графики функции $y(\varpi)$ являются гладкими, что позволяет численным методом находить корни ϖ_ℓ , $\ell = 1, \dots, 8$, частотного уравнения (табл. 2). При $\ell = 9$ на рис. 6 видно, что функция $y(\varpi)$ имеет

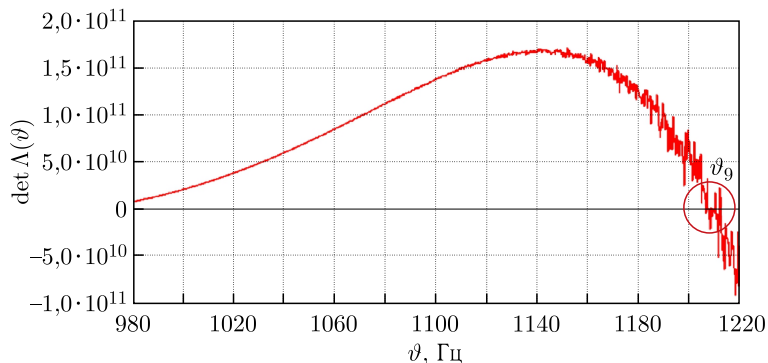
Рис. 6. Осцилляции частотной функции $\det \Lambda(\vartheta)$ вблизи корней ϑ_9

Таблица 2. Собственные частоты четырехсоставного стержня, где справедливо соотношение $2\pi\vartheta_\ell = \varpi_\ell$

Мода ℓ	ϖ_ℓ , рад/с	ϑ_ℓ , Гц
1	50,081	7,971
2	271,331	43,184
3	683,667	108,809
4	1263,807	201,141
5	2088,108	332,333
6	3230,179	514,099
7	4608,709	733,499
8	6061,527	964,722
9	7597,763	1209,222

осцилляции, что затрудняет нахождение корня ϖ_9 . Аналогичная ситуация наблюдается для последующих корней при $\ell > 9$.

Данная проблема возникает из-за того, что при вычислении определителя $\det \Lambda(\varpi)$ перемножаются большие значения $\exp(\mu\varpi) \gg 1$ на малые: $\exp(-\mu\varpi) \ll 1$ и $\sin, \cos \sim 1$ (где μ – некоторая постоянная величина).

Наличие осцилляций/неустойчивости (см. рис. 6) затрудняет проведение расчетов для мод высокого порядка. С одной стороны, данная проблема может быть решена путем увеличения размера мантиссы числа. С другой стороны, можно сделать оценку собственных частот высших мод. Найдем соотношения собственных частот

$$\eta_\ell = \frac{\vartheta_{\ell+1}}{\vartheta_\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

На рис. 7 квадратами показаны соотношения (3.3) для найденных численно собственных частот ϑ_ℓ , $\ell = 1, \dots, 9$ (см. табл. 2). Сплошная

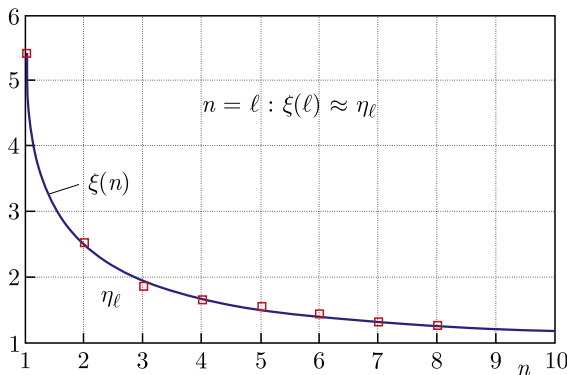


Рис. 7. Аппроксимация соотношения собственных частот η_ℓ

линия на рис. 7 соответствует графику функции

$$\xi(n) = e^{-1,1\sqrt{n}} (\eta_0 - 1) + 1. \quad (3.4)$$

Как видно на рис. 7, функция (3.4) с хорошей точностью аппроксимирует соотношения частот (3.3) по экспоненциальному закону. Таким образом, можно сделать оценку высших собственных частот простейшим выражением

$$\vartheta_{\ell+1} = \eta_\ell \vartheta_\ell \approx \xi(\ell) \vartheta_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) задает рекуррентное соотношение, позволяющее находить приближенные значения собственных частот четырехсоставного стержня.

Построим графики собственных функций (2.33). Согласно представлению (1.8) необходимо найти коэффициенты разложения C_s^j , связанные выражением (1.5) с коэффициентами c_1, \dots, c_{14} . В разд. 2 был изложен метод нахождения коэффициентов c_1, \dots, c_{14} при известной собственной частоте ϖ_ℓ (см. табл. 2). Производя необходимые вычисления по формулам (2.7), (2.18), (2.26) и (2.31), получим значения коэффициентов C_s^j для первых шести мод:

$$\hat{C}_\ell \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{3,\ell}^1 & C_{4,\ell}^1 \\ C_{1,\ell}^2 & C_{2,\ell}^2 & C_{3,\ell}^2 & C_{4,\ell}^2 \\ C_{1,\ell}^3 & C_{2,\ell}^3 & C_{3,\ell}^3 & C_{4,\ell}^3 \\ C_{1,\ell}^4 & C_{2,\ell}^4 & C_{3,\ell}^4 & C_{4,\ell}^4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{det}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{1,\ell} & c_{2,\ell} \\ c_{3,\ell} & c_{4,\ell} & c_{5,\ell} & c_{6,\ell} \\ c_{7,\ell} & c_{8,\ell} & c_{9,\ell} & c_{10,\ell} \\ c_{11,\ell} & c_{12,\ell} & c_{13,\ell} & c_{14,\ell} \end{pmatrix},$$

мода $\ell = 1$

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1,547 & 1,204 \\ -1,53 \cdot 10^{-5} & 1,444 \cdot 10^{-4} & -1,301 & 0,931 \\ 0,043 & -0,114 & -2,336 & 0,989 \\ 0,371 & -1,438 & -0,999 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

мода $\ell = 2$

$$\hat{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2,78 & -3,07 \\ 3,524 \cdot 10^{-3} & -0,014 & 2,377 & -2,428 \\ -2,064 & 2,836 & -0,231 & -0,63 \\ -0,373 & 6,213 & -7,427 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

мода $\ell = 3$

$$\hat{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,061 & 0,064 \\ -1,029 \cdot 10^{-3} & 2,675 \cdot 10^{-3} & -0,056 & 0,055 \\ -0,282 & 0,258 & -0,312 & 0,336 \\ -1,173 & 1,167 & -0,996 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

мода $\ell = 4$

$$\hat{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,012 & -0,012 \\ 9,921 \cdot 10^{-4} & -1,93 \cdot 10^{-3} & 0,012 & -0,011 \\ 0,211 & -0,205 & 0,216 & -0,222 \\ -0,993 & 0,962 & -0,969 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

мода $\ell = 5$

$$\hat{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3,729 \cdot 10^{-3} & 3,787 \cdot 10^{-3} \\ -1,111 \cdot 10^{-3} & 1,733 \cdot 10^{-3} & -5,137 \cdot 10^{-3} & 4,514 \cdot 10^{-3} \\ 1,242 & -1,244 & 1,241 & -1,239 \\ -0,993 & 0,997 & -1,004 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

мода $\ell = 6$

$$\hat{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1,393 \cdot 10^{-3} & -1,399 \cdot 10^{-3} \\ 1,091 \cdot 10^{-3} & -1,445 \cdot 10^{-3} & 2,664 \cdot 10^{-3} & -2,31 \cdot 10^{-3} \\ 2,872 & -2,871 & 2,872 & -2,873 \\ -1,002 & 1,003 & -1,001 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Результаты (3.6)–(3.11) содержат приблизительные значения коэффициентов разложения C_s^j , подстановка которых в представление (1.8) дает графики собственных функций (2.33) на рис. 8.

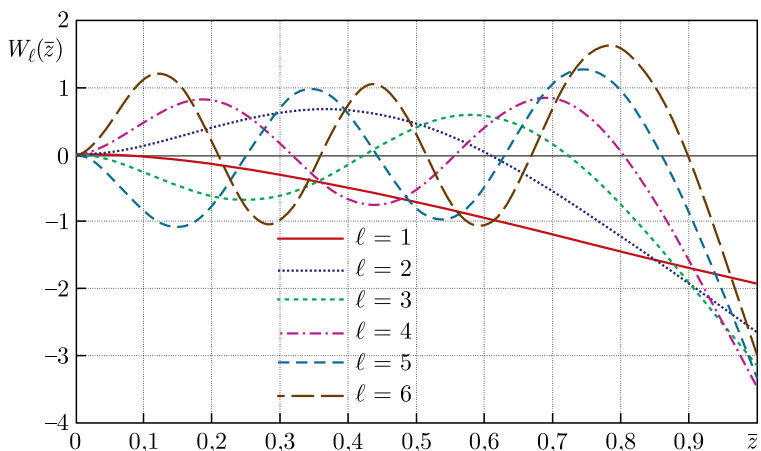


Рис. 8. Собственные функции первых шести мод

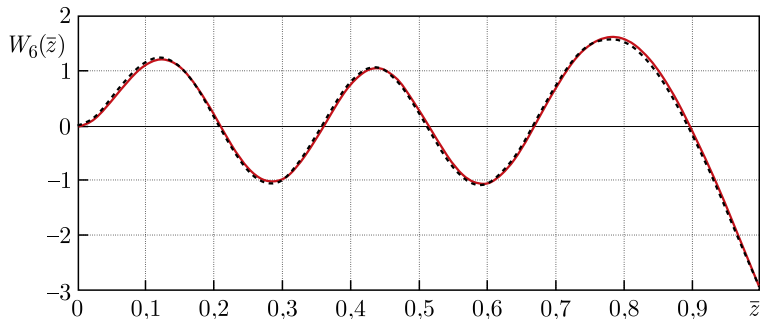


Рис. 9. Сравнение расчетов численно-аналитического метода с методом Галёркина для собственной функции шестой моды

Сравнение полученных собственных функций (2.33) с функциями, вычисленными методом Галёркина [7], показывает хорошее совпадение. В качестве примера на рис. 9 приведены графики собственной функции $W_6(\bar{z})$, посчитанной численно-аналитическим методом (см. разд. 2, сплошная кривая) и методом Галёркина ([15], штриховая кривая).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено частотное уравнение (1.4) для четырехсоставного стержня (см. рис. 1). Найдены явные выражения для элементов блочной матрицы Λ (1.6). Численно-аналитическим методом рассчитаны первые 8 собственных частот четырехсоставного стержня (см. табл. 2). При численном эксперименте выяснилось, что непосредственный расчет определителя 14×14 (1.7) эффективнее варианта (3.1), (3.2) с определителем 7×7 и определителя 4×4 системы (2.28). Процесс неустойчивости при вычислении определителя (1.7), (3.1), (3.2) требует дополнительного исследования, возможно, с привлечением математического аппарата теории некорректно поставленных задач.

Предложен метод оценки значений собственных частот ϑ_ℓ посредством экспоненциальной аппроксимации (3.5).

Изложен метод аналитического построения собственных функций четырехсоставного стержня (разд. 2). Для первых шести мод найдены коэффициенты разложения C_s^j и построены графики собственных функций, имеющие хорошее совпадение с аналогичными функциями, найденными конечно-элементным методом Галёркина. Несмотря на полученные явные аналитические выражения для коэффициентов C_s^j , с приемлемой точностью удается построить только первые шесть собственных функций. Проблема состоит в большом объеме вычислений, который накапливает существенную погрешность на высших модах. Решение проблемы — переход на больший размер мантисы числа и упрощение аналитических преобразований.

Описанные результаты могут быть использованы для построения и анализа динамического решения уравнения колебаний твэла в новом реакторе «Нептун».

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту статьи за ряд ценных замечаний, позволивших улучшить материал работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя выражения (1.1) и свойства (1.3), сделаем предварительные преобразования:

$$\begin{aligned}\bar{Z}^1(\bar{z}) &= C_1^1 K_1(\alpha_1 \bar{z}) + C_2^1 K_2(\alpha_1 \bar{z}) + C_3^1 K_3(\alpha_1 \bar{z}) + C_4^1 K_4(\alpha_1 \bar{z}), \\ \bar{Z}^2(\bar{z}) &= C_1^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}) + C_2^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}) + C_3^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}) + C_4^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}), \\ \bar{Z}^3(\bar{z}) &= C_1^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}) + C_2^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}) + C_3^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}) + C_4^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}), \\ \bar{Z}^4(\bar{z}) &= C_1^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}) + C_2^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}) + C_3^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}) + C_4^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}),\end{aligned}\quad (\text{П.1})$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_z^1(\bar{z}) &= \alpha_1 [C_1^1 K_4(\alpha_1 \bar{z}) + C_2^1 K_1(\alpha_1 \bar{z}) + C_3^1 K_2(\alpha_1 \bar{z}) + C_4^1 K_3(\alpha_1 \bar{z})], \\ \bar{Z}_z^2(\bar{z}) &= \alpha_2 [C_1^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}) + C_2^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}) + C_3^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}) + C_4^2 K_3(\alpha_2 \bar{z})], \\ \bar{Z}_z^3(\bar{z}) &= \alpha_3 [C_1^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}) + C_2^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}) + C_3^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}) + C_4^3 K_3(\alpha_3 \bar{z})], \\ \bar{Z}_z^4(\bar{z}) &= \alpha_4 [C_1^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}) + C_2^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}) + C_3^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}) + C_4^4 K_3(\alpha_4 \bar{z})],\end{aligned}\quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{zz}^1(\bar{z}) &= \alpha_1^2 [C_1^1 K_3(\alpha_1 \bar{z}) + C_2^1 K_4(\alpha_1 \bar{z}) + C_3^1 K_1(\alpha_1 \bar{z}) + C_4^1 K_2(\alpha_1 \bar{z})], \\ \bar{Z}_{zz}^2(\bar{z}) &= \alpha_2^2 [C_1^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}) + C_2^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}) + C_3^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}) + C_4^2 K_2(\alpha_2 \bar{z})], \\ \bar{Z}_{zz}^3(\bar{z}) &= \alpha_3^2 [C_1^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}) + C_2^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}) + C_3^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}) + C_4^3 K_2(\alpha_3 \bar{z})], \\ \bar{Z}_{zz}^4(\bar{z}) &= \alpha_4^2 [C_1^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}) + C_2^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}) + C_3^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}) + C_4^4 K_2(\alpha_4 \bar{z})],\end{aligned}\quad (\text{П.3})$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{zzz}^1(\bar{z}) &= \alpha_1^3 [C_1^1 K_2(\alpha_1 \bar{z}) + C_2^1 K_3(\alpha_1 \bar{z}) + C_3^1 K_4(\alpha_1 \bar{z}) + C_4^1 K_1(\alpha_1 \bar{z})], \\ \bar{Z}_{zzz}^2(\bar{z}) &= \alpha_2^3 [C_1^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}) + C_2^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}) + C_3^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}) + C_4^2 K_1(\alpha_2 \bar{z})], \\ \bar{Z}_{zzz}^3(\bar{z}) &= \alpha_3^3 [C_1^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}) + C_2^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}) + C_3^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}) + C_4^3 K_1(\alpha_3 \bar{z})], \\ \bar{Z}_{zzz}^4(\bar{z}) &= \alpha_4^3 [C_1^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}) + C_2^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}) + C_3^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}) + C_4^4 K_1(\alpha_4 \bar{z})].\end{aligned}\quad (\text{П.4})$$

Подставляя выражения (П.1) и (П.2) в первое условие (В.8) и учитывая свойства (1.3), получим

$$C_1^1 = 0, \quad C_2^1 = 0. \quad (\text{П.5})$$

Делая аналогичные преобразования с подстановкой (П.1)–(П.4) в граничные условия (В.8)–(В.10), приходим к системе уравнений

$$\bullet \bar{Z}^1(\bar{z}_1) = \bar{Z}^2(\bar{z}_1):$$

$$\begin{aligned} C_3^1 K_3(\alpha_1 \bar{z}_1) + C_4^1 K_4(\alpha_1 \bar{z}_1) &= C_1^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) + \\ &+ C_2^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_3^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_4^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1), \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

$$\bullet \bar{Z}_z^1(\bar{z}_1) = \bar{Z}_z^2(\bar{z}_1):$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 [C_3^1 K_2(\alpha_1 \bar{z}_1) + C_4^1 K_3(\alpha_1 \bar{z}_1)] &= \\ = \alpha_2 [C_1^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_2^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_3^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_4^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1)], \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

$$\bullet E_1 \bar{Z}_{zz}^1(\bar{z}_1) = E_2 \bar{Z}_{zz}^2(\bar{z}_1):$$

$$\begin{aligned} E_1 \alpha_1^2 [C_3^1 K_1(\alpha_1 \bar{z}_1) + C_4^1 K_2(\alpha_1 \bar{z}_1)] &= \\ = E_2 \alpha_2^2 [C_1^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_2^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_3^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_4^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1)], \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

$$\bullet E_1 \bar{Z}_{zzz}^1(\bar{z}_1) = E_2 \bar{Z}_{zzz}^2(\bar{z}_1):$$

$$\begin{aligned} E_1 \alpha_1^3 [C_3^1 K_4(\alpha_1 \bar{z}_1) + C_4^1 K_1(\alpha_1 \bar{z}_1)] &= \\ = E_2 \alpha_2^3 [C_1^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_2^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_3^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) + C_4^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1)], \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$\bullet \bar{Z}_z^2(\bar{z}_2) = \bar{Z}_z^3(\bar{z}_2):$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 [C_1^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_2^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_3^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_4^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2)] &= \\ = \alpha_3 [C_1^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_2^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_3^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_4^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2)], \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\bullet E_2 \bar{Z}_{zz}^2(\bar{z}_2) = E_3 \bar{Z}_{zz}^3(\bar{z}_2):$$

$$\begin{aligned} E_2 \alpha_2^2 [C_1^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_2^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_3^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_4^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2)] &= \\ = E_3 \alpha_3^2 [C_1^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_2^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_3^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_4^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2)], \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

$$\bullet E_2 \bar{Z}_{zzz}^2(\bar{z}_2) = E_3 \bar{Z}_{zzz}^3(\bar{z}_2):$$

$$\begin{aligned} E_2 \alpha_2^3 [C_1^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_2^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_3^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_4^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2)] &= \\ = E_3 \alpha_3^3 [C_1^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_2^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_3^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_4^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2)], \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

$$\bullet \bar{Z}^2(\bar{z}_2) = \bar{Z}^3(\bar{z}_2):$$

$$\begin{aligned} C_1^2 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_2^2 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_3^2 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2) + C_4^2 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) &= \\ = C_1^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_2^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_3^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) + C_4^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2), \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

$$\begin{aligned} & \bullet \bar{Z}_z^3(\bar{z}_3) = \bar{Z}_z^4(\bar{z}_3): \\ & \alpha_3 [C_1^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_2^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_3^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_4^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3)] = \\ & = \alpha_4 [C_1^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_2^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_3^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_4^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}_3)], \quad (\text{П.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet E_3 \bar{Z}_{zz}^3(\bar{z}_3) = E_4 \bar{Z}_{zz}^4(\bar{z}_3): \\ & E_3 \alpha_3^2 [C_1^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_2^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_3^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_4^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3)] = \\ & = E_4 \alpha_4^2 [C_1^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_2^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_3^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_4^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}_3)], \quad (\text{П.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet E_3 \bar{Z}_{zzz}^3(\bar{z}_3) = E_4 \bar{Z}_{zzz}^4(\bar{z}_3): \\ & E_3 \alpha_3^3 [C_1^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_2^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_3^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_4^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3)] = \\ & = E_4 \alpha_4^3 [C_1^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_2^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_3^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_4^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}_3)], \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \bar{Z}^3(\bar{z}_3) = \bar{Z}^4(\bar{z}_3): \\ & C_1^3 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_2^3 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_3^3 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3) + C_4^3 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) = \\ & = C_1^4 K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_2^4 K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_3^4 K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) + C_4^4 K_4(\alpha_4 \bar{z}_3), \quad (\text{П.17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \bar{Z}_{zz}^4(1) = \bar{Z}_{zzz}^4(1) = 0: \\ & C_1^4 K_3(\alpha_4) + C_2^4 K_4(\alpha_4) + C_3^4 K_1(\alpha_4) + C_4^4 K_2(\alpha_4) = 0, \quad (\text{П.18}) \\ & C_1^4 K_2(\alpha_4) + C_2^4 K_3(\alpha_4) + C_3^4 K_4(\alpha_4) + C_4^4 K_1(\alpha_4) = 0, \quad (\text{П.19}) \end{aligned}$$

где при получении выражений (П.6)–(П.9) учтено равенство (П.5). Переходя к коэффициентам (1.5) c_n , уравнения (П.6)–(П.19) можно записать в виде

$$c_1 k_{1,1}^{(3)} + c_2 k_{1,1}^{(4)} - c_3 k_{2,1}^{(1)} - c_4 k_{2,1}^{(2)} - c_5 k_{2,1}^{(3)} - c_6 k_{2,1}^{(4)} = 0, \quad (\text{П.20})$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(c_1 k_{1,1}^{(2)} + c_2 k_{1,1}^{(3)} \right) - c_3 k_{2,1}^{(4)} - c_4 k_{2,1}^{(1)} - c_5 k_{2,1}^{(2)} - c_6 k_{2,1}^{(3)} = 0, \quad (\text{П.21})$$

$$\frac{E_1 \alpha_1^2}{E_2 \alpha_2^2} \left(c_1 k_{1,1}^{(1)} + c_2 k_{1,1}^{(2)} \right) - c_3 k_{2,1}^{(3)} - c_4 k_{2,1}^{(4)} - c_5 k_{2,1}^{(1)} - c_6 k_{2,1}^{(2)} = 0, \quad (\text{П.22})$$

$$\frac{E_1 \alpha_1^3}{E_2 \alpha_2^3} \left(c_1 k_{1,1}^{(4)} + c_2 k_{1,1}^{(1)} \right) - c_3 k_{2,1}^{(2)} - c_4 k_{2,1}^{(3)} - c_5 k_{2,1}^{(4)} - c_6 k_{2,1}^{(1)} = 0, \quad (\text{П.23})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \left(c_3 k_{2,2}^{(4)} + c_4 k_{2,2}^{(1)} + c_5 k_{2,2}^{(2)} + c_6 k_{2,2}^{(3)} \right) - \\ & - c_7 k_{3,2}^{(4)} - c_8 k_{3,2}^{(1)} - c_9 k_{3,2}^{(2)} - c_{10} k_{3,2}^{(3)} = 0, \quad (\text{П.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_3 \alpha_3^2} \left(c_3 k_{2,2}^{(3)} + c_4 k_{2,2}^{(4)} + c_5 k_{2,2}^{(1)} + c_6 k_{2,2}^{(2)} \right) - \\ & - c_7 k_{3,2}^{(3)} - c_8 k_{3,2}^{(4)} - c_9 k_{3,2}^{(1)} - c_{10} k_{3,2}^{(2)} = 0, \quad (\text{П.25}) \end{aligned}$$

$$\frac{E_2 \alpha_2^3}{E_3 \alpha_3^3} \left(c_3 k_{2,2}^{(2)} + c_4 k_{2,2}^{(3)} + c_5 k_{2,2}^{(4)} + c_6 k_{2,2}^{(1)} \right) - c_7 k_{3,2}^{(2)} - c_8 k_{3,2}^{(3)} - c_9 k_{3,2}^{(4)} - c_{10} k_{3,2}^{(1)} = 0, \quad (\text{П.26})$$

$$c_3 k_{2,2}^{(1)} + c_4 k_{2,2}^{(2)} + c_5 k_{2,2}^{(3)} + c_6 k_{2,2}^{(4)} - c_7 k_{3,2}^{(1)} - c_8 k_{3,2}^{(2)} - c_9 k_{3,2}^{(3)} - c_{10} k_{3,2}^{(4)} = 0, \quad (\text{П.27})$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \left(c_7 k_{3,3}^{(4)} + c_8 k_{3,3}^{(1)} + c_9 k_{3,3}^{(2)} + c_{10} k_{3,3}^{(3)} \right) - c_{11} k_{4,3}^{(4)} - c_{12} k_{4,3}^{(1)} - c_{13} k_{4,3}^{(2)} - c_{14} k_{4,3}^{(3)} = 0, \quad (\text{П.28})$$

$$\frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} \left(c_7 k_{3,3}^{(3)} + c_8 k_{3,3}^{(4)} + c_9 k_{3,3}^{(1)} + c_{10} k_{3,3}^{(2)} \right) - c_{11} k_{4,3}^{(3)} - c_{12} k_{4,3}^{(4)} - c_{13} k_{4,3}^{(1)} - c_{14} k_{4,3}^{(2)} = 0, \quad (\text{П.29})$$

$$\frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} \left(c_7 k_{3,3}^{(2)} + c_8 k_{3,3}^{(3)} + c_9 k_{3,3}^{(4)} + c_{10} k_{3,3}^{(1)} \right) - c_{11} k_{4,3}^{(2)} - c_{12} k_{4,3}^{(3)} - c_{13} k_{4,3}^{(4)} - c_{14} k_{4,3}^{(1)} = 0, \quad (\text{П.30})$$

$$c_7 k_{3,3}^{(1)} + c_8 k_{3,3}^{(2)} + c_9 k_{3,3}^{(3)} + c_{10} k_{3,3}^{(4)} - c_{11} k_{4,3}^{(1)} - c_{12} k_{4,3}^{(2)} - c_{13} k_{4,3}^{(3)} - c_{14} k_{4,3}^{(4)} = 0, \quad (\text{П.31})$$

$$c_{11} k_{4,4}^{(3)} + c_{12} k_{4,4}^{(4)} + c_{13} k_{4,4}^{(1)} + c_{14} k_{4,4}^{(2)} = 0, \quad (\text{П.32})$$

$$c_{11} k_{4,4}^{(2)} + c_{12} k_{4,4}^{(3)} + c_{13} k_{4,4}^{(4)} + c_{14} k_{4,4}^{(1)} = 0. \quad (\text{П.33})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stolarski T., Nakasone Y., Yoshimoto S.* Engineering Analysis with ANSYS Software. Elsevier, 2018.
2. *Vlase S., Marin M., Ochsner A.* Considerations of the Transverse Vibration of a Mechanical System with Two Identical Bars // Proc. of the Institution of Mech. Engineers: Part L. J. Mater.: Design Appl. 2019. V.233, No.7. P. 1318–1323.
3. *Abo-Dahab Sayed M., Abouelregal Ahmed E., Marin Marin.* Generalized Thermoelastic Functionally Graded on a Thin Slim Strip Non-Gaussian Laser Beam // Symmetry. 2020. V. 12, No. 7. P. 1094.
4. *Othman Mohamed I. A., Fekry Montaser, Marin Marin.* Plane Waves in Generalized Magneto-Thermo-Viscoelastic Medium with Voids under the Effect of Initial Stress and Laser Pulse Heating // Struct. Engin. Mech. 2020. V.73, No. 6. P. 621–629.
5. *Abouelregal Ahmed E., Marin Marin, Askar Sameh S.* Generalized MGT Heat Transfer Model for an Electro-Thermal Microbeam Lying on a Viscous-Pasternak Foundation with a Laser Excitation Heat Source // Symmetry. 2023. V. 15, No. 4. P. 814.

6. *Inozemtseva N. G., Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I.* Optimization of Algorithms for Mathematical Physics Problems for Graphics Processors. М.: Moscow State Univ., 2012. 256 p.
7. *Аксенов В. Л., Рзянин М. В., Шабалин Е. П.* Исследовательские реакторы ОИЯИ: взгляд в будущее // ЭЧАЯ. 2021. Т. 52, вып. 6. С. 1349–1376.
8. *Верхоглядов А. Е.* Уравнение плоских вынужденных поперечных колебаний стержня под действием температуры. Численно-аналитическое решение // Письма ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 4(249). С. 657–668.
9. *Шабалин Е. П.* Импульсные реакторы на быстрых нейтронах. М.: Атомиздат, 1976.
10. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Klimenko M. V.* Investigation of the Dynamics of Transverse Oscillations of a Vertical Rod under Gravity, Friction and Thermal Expansion. arxiv: 2311.05293. 2023.
11. *Perepelkin E. E., Verkhoglyadov A. E., Kushnir I. V., Klimenko M. V.* Natural Frequencies and Eigenfunction of a Composite Rod // Phys. Part. Nucl. Lett. 2024. V. 21. P. 154–160.
12. *Ilyushin A. A., Lensky V. S.* Strength of Materials. Pergamon Press, 1967. 442 p.
13. *Belyaev N. M.* Strength of Materials. М.: Mir, 1979. 648 p.
14. *Крылов А. Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: АН СССР, 1931. 154 с.
15. *Thompson M. K., Thompson J. M.* ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis. Elsevier, 2018.