Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 1(157). С. 14–22

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И УПОРЯДОЧЕНИЕ КВАНТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. М. Зиновьев [а], *С. В. Молодцов* [б,в]

[а] Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАНУ, Киев
[б] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[в] Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Обсуждается параметр, ответственный за выбор представления квантовых операторов модельных гамильтонианов, и на основе вариационного принципа находится его оптимальное значение. Интерпретация поля отклонений от равновесного значения как динамической переменной приводит к идее скалярного поля совершенно необычной природы, отвечающего за упорядочивание операторов.

The parameter responsible for the choice of quantum operators representation is discussed, and with the help of the variational principle its optimal value is established. Interpretation of deviations from equilibrium value as a dynamical variable leads to an idea of a scalar field of exceptional nature, responsible for ordering of the operators.

PACS: 11.15.Kc, 12.38.-Aw

В квантовой теории довольно часто возникает ситуация, когда не совсем ясно, в какой операторной (квантовой) форме следует представить соответствующее классическое выражение, в частности, не всегда ясен порядок следования операторов. Хотя это и не вызывает серьезных трудностей (в конце концов вопрос можно решить перебором различных вариантов), остается непонятным, какому же из них следует отдать предпочтение. Более того, возникает вопрос: а существует ли вообще какой-нибудь выбор, диктуемый физическими соображениями? В настоящей работе мы приведем, на наш взгляд, весьма содержательный пример, когда выбор квантового представления однозначен и определяется значением некоторого параметра.

Конкретно, мы рассмотрим кварки, находящиеся под воздействием сильного стохастического глюонного поля. Для простоты будут рассматриваться кварки одного аромата. Стохастическое глюонное поле будет характеризоваться некоторой корреляционной функцией, приведенной ниже. Плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_E = \bar{q}\ (i\gamma_\mu D_\mu + im)\ q, \tag{1}$$

где q — поля кварков; $D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu t^a$, A^a_μ — глюонное поле; $t^a = \lambda^a/2$ — генераторы цветовой калибровочной группы $\mathrm{SU}(N_c)$; m — токовая масса, $\mu = 1, 2, 3, 4$. Плотность лагранжиана приведена в евклидовом виде, γ_μ — эрмитовы матрицы Дирака ($\gamma^+_\mu = \gamma_\mu$, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\ \delta_{\mu\nu}$), для определенности взятые в киральном представлении. Для плотности гамильтониана имеем

$$\mathcal{H} = \pi\dot{q} - \mathcal{L}_E, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \dot{q}} = iq^+, \tag{2}$$

в частности, для невзаимодействующих полей

$$\mathcal{H}_0 = -\bar{q}\ (i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} + im)q. \tag{3}$$

В шредингеровском представлении эволюция квантового кваркового поля определяется уравнением на состояние поля Ψ

$$\dot{\Psi} = -H\Psi, \tag{4}$$

причем операторы кваркового поля не зависят от времени явно:

$$q_{\alpha i}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2|\mathbf{p}|)^{1/2}}\ \left[\ a(\mathbf{p},s,c)\ u_{\alpha i}(\mathbf{p},s,c)\ \mathrm{e}^{i\mathbf{px}} + b^{+}(\mathbf{p},s,c)\ v_{\alpha i}(\mathbf{p},s,c)\ \mathrm{e}^{-i\mathbf{px}}\right], \tag{5}$$

всюду подразумевается суммирование по индексам s и c. Вид дираковски-сопряженного спинора будет ясен из последующего (см. ниже). В этом выражении индекс s описывает две возможные спиновые поляризации кварка, а индекс c должен играть аналогичную роль в отношении цвета. Фиксация спиновой поляризации, как известно, осуществляется наложением на спинор соответствующего дополнительного условия (см. ниже). Прямого его аналога для цветовой поляризации не существует, и состояние фиксируется некоторым полным набором соответствующих коммутирующих генераторов, включающих, в частности, казимировские операторы. Однако настолько полная спецификация спинора по цвету нам не понадобится. Наблюдаемые выражаются через суммы по всем поляризациям некоторых билинейных комбинаций спиноров в виде синглетного и октетного состояний, причем синглетная по цвету конфигурация кварков отвечает энергетически более выгодному состоянию.

Плотность гамильтониана взаимодействия выражается как

$$\mathcal{V}_S = \bar{q}(\mathbf{x})\ t^a\gamma_\mu A^a_\mu(t,\mathbf{x})\ q(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Явная зависимость от времени в плотности взаимодействия имеется только у глюонного поля. Мы будем интересоваться стохастическим глюонным полем, точнее, таким случайным процессом, когда можно лишь говорить об определенной вероятности появления той или иной глюонной конфигурации. В таких условиях и само описание кваркового поля, осуществляемое уравнением (4), становится уже вероятностным процессом. Поэтому имеет смысл описывать состояния системы соответствующими средними (по «времени»). Однако по своему физическому смыслу волновая функция Ψ является амплитудой вероятности, и поэтому непосредственное усреднение, $\langle\Psi\rangle$, может оказаться бессодержательным. Более последовательным было бы изучение среднего от плотности вероятности $\langle\overset{*}{\Psi}\Psi\rangle$, которое, кстати сказать, можно также реализовать соответствующим усложнением континуального интеграла [1] или же соответствующей матрицею плотности. По-видимому, можно указать один случай, когда использование усредненной амплитуды вероятности $\langle\Psi\rangle$ оправдано, это — случай основного состояния.

В представлении взаимодействия $\Psi = \mathrm{e}^{H_0 t}\,\Phi$ уравнение (4) перепишется в виде

$$\dot{\Phi} = -V\Phi, \quad V = \mathrm{e}^{H_0 t}\, V_S\, \mathrm{e}^{-H_0 t}. \tag{7}$$

Теперь, наряду с глюонным полем, зависимость от времени появилась и в операторах кварков. Путем усреднения по быстропеременной компоненте для длинноволновой составляющей получают

$$\langle\dot{\Phi}(t)\rangle = +\int\limits_0^\infty d\tau\ \langle V(t)V(t-\tau)\rangle\ \langle\Phi(t)\rangle. \tag{8}$$

Условия, при которых можно факторизовать длинноволновую компоненту, обсуждаются, например, в [2]. Напомним некоторые обстоятельства, связанные с выводом приближения (8). Знак, с которым входит корреляционная функция, строго определен. В силу предполагаемого быстрого спадания корреляций можно распространить интегрирование до бесконечности. Для того чтобы вместо интегродифференциального уравнения иметь дело с обыкновенным дифференциальным уравнением, законно, не выходя за пределы аппроксимации, в правой части уравнения использовать $\langle\Phi(t)\rangle$. В применении приближения (8) к квантовой теории поля мы сталкиваемся с еще одной проблемой: затруднительно получить корреляционную функцию общего вида, когда характерные кварковые и глюонные корреляционные времена сравнимы. Единственный простой предельный случай — это когда кварковые поля рассматриваются как бы постоянными, на фоне глюонных. При этом глюонный вклад факторизуется в виде соответствующей корреляционной функции $\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\rangle$. По-видимому, этот прием оправдан в применении к поиску основного состояния. Заметим также, что усреднение по «времени» (ансамблю) в правой части финальной формулы (8) проводится как бы дважды, и в корреляторе, и в $\langle\Phi(t)\rangle$. Для квантовой теории поля это означает, что путем пересуммирования и усреднения какого-либо класса диаграмм можно по-разному учитывать вклады высших корреляторов, специфицируя вид функции $\langle\Phi(t)\rangle$.

Интересные в применении к квантовой теории поля корреляционные функции должны быть трансляционно-инвариантны, и поэтому коррелятор в формуле (8) должен представляться в виде

$$\langle V(t)V(t-\tau)\rangle = F(\tau),$$

т. е., например, одномерный процесс, после интегрирования в (8), описывается просто константой, характеризующей медленный процесс. В интересующем же нас случае квантовой теории поля вместо константы появится коррелятор, связывающий две пространственные точки,

$$\langle\dot{\Phi}(t)\rangle = \int d\mathbf{x}\,\bar{q}(\mathbf{x},t)t^a\gamma_\mu q(\mathbf{x},t)\times \\ \times\int\limits_0^\infty d\tau\int d\mathbf{y}\ \bar{q}(\mathbf{y},t-\tau)t^b\gamma_\nu\ q(\mathbf{y},t-\tau)g^2\langle A^a_\mu(t,\mathbf{x})A^b_\nu(t-\tau,\mathbf{y})\rangle\langle\Phi(t)\rangle.$$

Предполагая, что корреляционная функция быстро спадает во времени, пренебрежем запаздыванием и заменим приближенно «время» $t-\tau$ в кварковых полях на t, после чего совершим обратное преобразование к представлению Шредингера. Вводя функцию $\chi = \mathrm{e}^{-H_0 t} \langle\Phi\rangle$, получим[1]

$$\begin{gathered}\dot{\chi} = -H_{\rm ind}\ \chi,\\ \mathcal{H}_{\rm ind} = -\bar{q}\ (i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} + im)\ q - \bar{q}t^a\gamma_\mu q \int d\mathbf{y}\ \bar{q}' t^b \gamma_\nu q' \int\limits_0^\infty d\tau\ g^2 \langle A^a_\mu A'^b_\nu\rangle,\end{gathered} \tag{9}$$

где $q = q(\mathbf{x})$, $\bar{q} = \bar{q}(\mathbf{x})$, $q' = q(\mathbf{y})$, $\bar{q}' = \bar{q}(\mathbf{y})$, $A^a_\mu = A^a_\mu(t, \mathbf{x})$, $A'^b_\nu = A^b_\nu(t - \tau, \mathbf{y})$. Исходя из вида индуцированного 4-фермионного взаимодействия, будем искать основное состояние как боголюбовскую пробную функцию [3]

$$\begin{gathered}|\sigma\rangle = T\ |0\rangle,\\ T = \Pi_{p,s,c}\ \exp\{\varphi[\ a^+(\mathbf{p}, s, c)\ b^+(-\mathbf{p}, s, c) + a(\mathbf{p}, s, c)\ b(-\mathbf{p}, s, c)]\}\end{gathered} \tag{10}$$

(здесь $\varphi = \varphi(\mathbf{p})$, $|0\rangle$ — вакуум свободного гамильтониана $a(\mathbf{p}, s, c)\ |0\rangle = 0$, $b(\mathbf{p}, s, c)\ |0\rangle = 0$), которая определяется из условия минимума средней энергии по φ

$$E = \langle\sigma|H|\sigma\rangle. \tag{11}$$

Вводя с помощью одевающего преобразования T операторы рождения и уничтожения квазичастиц

$$A = T\ a\ T^{-1}, \quad B^+ = T\ b^+ T^{-1},\ (T^{-1} = T^+ \text{ —для фермионов}),$$

представим оператор (5) в виде

$$q(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2|p_4|)^{1/2}}\ \left[A(\mathbf{p}, s, c)\ U(\mathbf{p}, s, c)\ \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + B^+(\mathbf{p}, s, c)\ V(\mathbf{p}, s, c)\ \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right], \tag{12}$$

где спиноры U и V задаются как

$$\begin{aligned}U(\mathbf{p}, s, c) &= \cos(\varphi)\ u(\mathbf{p}, s, c) - \sin(\varphi)\ v(-\mathbf{p}, s, c),\\ V(\mathbf{p}, s, c) &= \sin(\varphi)\ u(-\mathbf{p}, s, c) + \cos(\varphi)\ v(\mathbf{p}, s, c).\end{aligned} \tag{13}$$

Дираковски-сопряженный спинор определяется по правилу

$$\bar{q}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2|p_4|)^{1/2}} \left[A^+(\mathbf{p}, s, c)\ \overline{U}(\mathbf{p}, s, c)\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + B(\mathbf{p}, s, c)\, \overline{V}(\mathbf{p}, s, c)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right], \tag{14}$$

где $\overline{U}(\mathbf{p}, s, c) = U^+(\mathbf{p}, s, c)\ \gamma_4$, $\overline{V}(\mathbf{p}, s, c) = V^+(\mathbf{p}, s, c)\ \gamma_4$.

Теперь специфицируем наш выбор спиноров в евклидовых переменных. Они удовлетворяют уравнению Дирака

$$(\hat{p} - im)\ u(p) = 0, \quad (\hat{p} + im)\ v(p) = 0, \tag{15}$$

где $\hat{p} = p_4\gamma_4 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}$, и дополнительному условию, характеризующему поляризацию спинора,

$$i\gamma_5 \hat{s} u(p) = u(p), \quad i\gamma_5 \hat{s} v(p) = v(p), \tag{16}$$

[1] В общем случае это выражение не совпадает с $\langle \mathrm{e}^{-H_0 t}\, \Phi\rangle$.

где $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, а 4-вектор s нормирован на единицу и ортогонален 4-вектору p: $s^2 = 1$, $(ps) = 0$. Например,

$$s_4 = \frac{(\mathbf{pn})}{im}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{pn})\ \mathbf{p}}{im\ (p_4 - im)},$$

а $\mathbf{n}$ — произвольный единичный вектор. Налагая далее ковариантное условие нормировки

$$\bar{u}u = 2im, \quad \bar{v}v = -2im, \tag{17}$$

определим спиноры окончательно, с точностью до фазового множителя. Представленных условий достаточно, чтобы получить следующее матричное представление:

$$u(p)\ \bar{u}(p) = \frac{\hat{p} + im}{2}\ (1 + i\gamma_5\hat{s}), \quad v(p)\ \bar{v}(p) = \frac{\hat{p} - im}{2}\ (1 + i\gamma_5\hat{s}), \tag{18}$$

для простоты записи поляризационный индекс s у спиноров не выписываем. При нахождении среднего (11), как легко видеть из (13), встретятся комбинации спиноров со взаимно противоположными импульсами. Для удобства записи введем 4-вектор $q = (p_4, -\mathbf{p})$. С помощью проекционных операторов выразим, например, спинор $v(q, s)$ через спинор $u(p, s)$

$$v(q, s) = \alpha\ \frac{\hat{q} - im}{-2im}\ \frac{1 + i\gamma_5\hat{s}}{2}\ u(p, s). \tag{19}$$

Коэффициент α находится из ковариантного условия нормировки (17) и определяется с точностью до фазы

$$\overset{*}{\alpha}\quad \alpha = -\frac{2m^2}{(pq) + m^2} = \frac{m^2}{\mathbf{p}^2}, \quad |\alpha| = \frac{m}{|\mathbf{p}|}. \tag{20}$$

В результате для сумм по спинорным состояниям можно получить

$$\begin{gathered}
\sum_s u(q, s)\,\bar{v}(p, s) = \alpha \frac{\hat{q} + im}{2im}\ (\hat{p} - im), \qquad \sum_s v(p, s)\,\bar{u}(q, s) = \overset{*}{\alpha}\ (\hat{p} - im)\ \frac{\hat{q} + im}{2im}, \\
\sum_s u(p, s)\,\bar{v}(q, s) = \overset{*}{\alpha}\ (\hat{p} + im)\ \frac{\hat{q} - im}{2im}, \qquad \sum_s v(q, s)\,\bar{u}(p, s) = \alpha\ \frac{\hat{q} - im}{2im}\ (\hat{p} + im).
\end{gathered} \tag{21}$$

При вычислении среднего (11) нетривиальный вклад, билинейный по кварковым операторам, возникает от комбинаций вида $\langle\sigma|BB^+|\sigma\rangle$. Напомним, что $B|\sigma\rangle = 0$, $A|\sigma\rangle = 0$. Вклад $\langle\sigma|AA^+|\sigma\rangle$ отсутствует в силу применяемого представления билокальных операторов в виде $\bar{q}q$, в результате чего квадратичные вклады выражаются только через V-, $\bar{V}$-спиноры. Аналогичным образом и в четырехкварковых операторах ненулевыми оказываются две комбинации $\langle\sigma|BB^+B'B'^+|\sigma\rangle$ и $\langle\sigma|BAA'^+B'^+|\sigma\rangle$. Первая отвечает вкладу головастичных диаграмм, вторая принадлежит классу так называемых звездчатых[1] диа-

[1] Если интересоваться вкладами стохастических глюонных полей только в старшем одночастичном приближении, то все глюонные линии будут изображаться исходящими из одной точки, соответствующей координате центра глюонной конфигурации.

грамм. В результате вклад четырехфермионного взаимодействия представляется в виде

$$\langle \widetilde{A^a_\mu A^b_\nu}(0)\rangle \int \frac{d\mathbf{p}\, d\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{4|p_4||p'_4|}\times$$

$$\times \overline{V}_{\alpha i}(\mathbf{p},s,c)t^a_{ij}\gamma^\mu_{\alpha\beta}V_{\beta j}(\mathbf{p},s,c)\overline{V}_{\gamma k}(\mathbf{p}',s',c')t^b_{kl}\gamma^\mu_{\gamma\delta}V_{\delta l}(\mathbf{p}',s',c')+$$

$$+\int \frac{d\mathbf{p}\, d\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{4|p_4||p'_4|}\times$$

$$\times \overline{V}_{\alpha i}(\mathbf{p},s,c)t^a_{ij}\gamma^\mu_{\alpha\beta}V_{\delta l}(\mathbf{p},s,c)\overline{U}_{\gamma k}(\mathbf{p}',s',c')t^b_{kl}\gamma^\nu_{\gamma\delta}U_{\beta j}(\mathbf{p}',s',c')\langle \widetilde{A^a_\mu A^b_\nu}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\rangle.$$

Здесь $\langle \widetilde{A^a_\mu A'^b{}_\nu}\rangle$ обозначает фурье-образ глюонного коррелятора, и подразумевается сумма по спинорным и цветовым индексам. Для синглетной по цвету конфигурации кварков вклад первой головастичной диаграммы тождественно обращается в ноль. В октетном канале получаем отталкивание кварков $\sim -1/(4N_c)$, и поэтому этот режим можно не рассматривать при поиске минимума среднего (11). Для сумм спиноров в представленном выражении можно получить

$$V\overline{V} = p_4\gamma_4 + \cos(\theta)\ (\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - im) - \frac{\overset{*}{\alpha}+\alpha}{2im}\ \sin(\theta)\ (\mathbf{p}^2 - im\ \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}),$$

$$U\overline{U} = p_4\gamma_4 + \cos(\theta)\ (\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} + im) + \frac{\overset{*}{\alpha}+\alpha}{2im}\ \sin(\theta)\ (\mathbf{p}^2 + im\ \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}),$$

где угол $\theta = 2\varphi$. Отметим, что $V\overline{V}(m) = U\overline{U}(-m)$, и, следовательно, вклады совпадают только в киральном пределе $m = 0$.

Для того чтобы записать окончательный ответ, зафиксируем вид корреляционной функции. Будем ориентироваться на стохастический ансамбль (анти)инстантонов в сингулярной калибровке. Инстантонное решение представимо в виде

$$A^a_\mu(x) = \frac{2}{g}4\pi^2 i\rho^2\omega^{ab}\bar\eta_{\mu b\nu}\int \frac{dq}{(2\pi)^4}q_\nu\ \phi(q)\ \mathrm{e}^{iq(x-z)}, \quad \phi(q) = \frac{1}{q^2}\ \left(K_2(q\rho) - \frac{2}{q^2\rho^2}\right), \tag{22}$$

где K_2 — модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента; ρ — размер инстантона, матрица ω определяет ориентацию в цветовом пространстве; z — координата центра инстантона; $\bar\eta$ — символ т'Хоофта. В старшем по плотности конфигурации n-порядке проинтегрированный по «временной» координате фурье-образ интересующего нас коррелятора (анти)инстантонного ансамбля можно извлечь из следующего соотношения

$$\int\limits_0^\infty dx_4\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty dx_4\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\rangle =$$

$$= \frac{4(4\pi^2)^2}{g^2}\frac{\delta_{ab}n\rho^4}{N_c^2-1}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta})\int \frac{dp}{(2\pi)^4}p_\alpha p_\beta \mathrm{e}^{ip(x-y)}\phi(-p)\phi(p)\frac{1}{2}2\pi\delta(p_4). \tag{23}$$

Первое равенство выполнено в силу свойств симметрии инстантонного решения. Корреляционная функция представляется в виде

$$\begin{gathered}\langle\widetilde{A^a_\mu A^b_\nu}(\mathbf{p})\rangle = \frac{(4\pi^2)^2 n\rho^4}{g^2}\frac{2\delta_{ab}}{N_c^2-1}\left[I(p)\delta_{\mu\nu} - J_{\mu\nu}(p)\right], \\ I(p) = \mathbf{p}^2\phi(-p)\phi(p), \quad J_{ij}(p) = p_i p_j \phi(-p)\phi(p), \quad J_{0i} = J_{i0} = J_{00} = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Вычисления приводят к следующему выражению для среднего (11):

$$\begin{gathered}\langle\sigma|H_{\rm ind}|\sigma\rangle = -\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{2N_c p_4^2}{|p_4|}\,(1-\cos\theta) + \widetilde{G}\int\frac{d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}}{(2\pi)^6}\left\{(3\widetilde{I}-\widetilde{J})\frac{p_4 q_4}{|p_4||q_4|} - \right. \\ -(4\widetilde{I}-\widetilde{J})\frac{m^2}{|p_4||q_4|}\left(\cos\theta - \frac{\overset{*}{\alpha}+\alpha}{2}\frac{p^2}{m^2}\sin\theta\right)\left(\cos\theta' - \frac{\overset{*}{\alpha}{}'+\alpha'}{2}\frac{q^2}{m^2}\sin\theta'\right) + \\ \left. +(2\widetilde{I}\delta_{ij} + 2\widetilde{J}_{ij} - \widetilde{J}\delta_{ij})\;\frac{p_i q_j}{|p_4||q_4|}\left(\cos\theta + \frac{\overset{*}{\alpha}+\alpha}{2}\sin\theta\right)\left(\cos\theta' + \frac{\overset{*}{\alpha}{}'+\alpha'}{2}\sin\theta'\right)\right\},\end{gathered} \tag{25}$$

здесь $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$, $\widetilde{I} = \widetilde{I}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$, $\widetilde{J}_{ij} = \widetilde{J}_{ij}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$, $\widetilde{J} = \sum\limits_{i=1}^{3}\widetilde{J}_{ii}$, $\widetilde{G} = (4\pi^2)^2\;n\rho^4$, $p^2 = q^2 = -m^2$, $\theta' = \theta(q)$. В первом слагаемом мы ввели регуляризующий вклад, а именно единицу в скобке, содержащий $\cos\theta$, поскольку нормировка функционала на свободный гамильтониан представляется вполне уместной. Напомним также, что в евклидовых переменных p_4^2 является отрицательной величиной. Условие (20) фиксирует только модуль α, а выражение же для средней энергии содержит, вообще говоря, также и некоторую фазу: $\overset{*}{\alpha} + \alpha$. Модуль этого вещественного числа может меняться от нуля до максимального значения m/p. Анализ функционала средней энергии (25) показывает, что наиболее выгодными значениями параметра α оказываются действительные числа $\alpha = \pm|m|/p$. Наименьшее значение средней энергии при положительном α достигается для отрицательной динамической массы кварка, и наоборот, отрицательному α соответствует положительное значение динамической массы. Легко проследить имеющуюся симметрию при изменении знаков m и α. Для определенности мы ниже будем рассматривать случай $\alpha = |m|/p$. Имея выражение (25), можно найти наивыгоднейшее значение угла θ из условия

$$\frac{d\langle\sigma|H_{\rm ind}|\sigma\rangle}{d\theta} = 0.$$

Будем полагать, что различные стохастические ансамбли глюонных полей характеризуются своими профильными функциями $I(p)$, $J(p)$.

Обращает на себя внимание тот факт, что полученное выражение (25) формально не симметрично по отношению к V- и U-спинорам (H_0 выражается через $V\bar{V}$-комбинацию спиноров, $V_{\rm int}$ через $V\bar{V}U\bar{U}$), т. е. частицы и античастицы вне кирального предела приводят к как бы разным вкладам. Причина появления такой формальной несимметрии выше уже была отмечена. Мы молчаливо фиксировали порядок следования операторов рождения и уничтожения в билинейных и квадратичных по кваркам выражениях. Как известно, симметрию можно восстановить, если наряду с $\bar{q}q$ использовать и обратное следование операторов $q\bar{q}$ [4]. Например, запись среднего от оператора импульса $\langle\sigma|\bar{q}_\alpha\;\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}_{\alpha\beta}\;q_\beta|\sigma\rangle$

перейдет в $\langle\sigma|q_\beta\ \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}_{\alpha\beta}\ \bar{q}_\alpha|\sigma\rangle$. Итак, вводя два новых параметра β, β_s для векторных и скалярных билинейных кварковых операторов, произведем следующие замены в модельном гамильтониане $H_{\rm ind}\to H_{\rm sv}$ (см. формулу (9))

$$\begin{aligned}\bar{q}q &\to \beta_s\bar{q}q+(1-\beta_s)q\bar{q},\\ \bar{q}\gamma_\mu q &\to \beta\bar{q}\gamma_\mu q+(1-\beta)\ q\gamma_\mu^T\bar{q}.\end{aligned}\tag{26}$$

Не предлагая еще каких-либо вариантов усложнения следования операторов, приведем окончательный ответ:

$$\begin{aligned}\langle\sigma|H_{\rm ind}|\sigma\rangle = &-\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{2N_cp_4^2}{|p_4|}\,(1-\cos\theta)+4N_c(\beta_s-\beta)m\frac{p}{|p_4|}\left(\sin\theta-\frac{m}{|\mathbf{p}|}\cos\theta\right)\right\}+\\ &+\widetilde{G}\int\frac{d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}}{(2\pi)^6}\left\{(3\widetilde{I}-\widetilde{J})\frac{p_4q_4}{|p_4||q_4|}-(4\widetilde{I}-\widetilde{J})\frac{pq}{|p_4||q_4|}r^2\left(\sin\theta-\frac{m}{p}\cos\theta\right)\left(\sin\theta'-\frac{m}{q}\cos\theta'\right)+\right.\\ &\left.+(2\widetilde{I}\delta_{ij}+2\widetilde{J}_{ij}-\widetilde{J}\delta_{ij})\frac{p_iq_j}{|p_4||q_4|}r^2\left(\cos\theta+\frac{m}{p}\sin\theta\right)\left(\cos\theta'+\frac{m}{q}\sin\theta'\right)\right\},\end{aligned}\tag{27}$$

где $r=2\beta-1$. Легко видеть, что условия минимума функционала по параметрам β_s и β приводят к занулению нетривиальных вкладов, и фактически средняя энергия сводится только ко вкладу свободного гамильтониана. Например, в том частном случае, когда корреляционная функция имеет δ-образный вид в координатном пространстве, мы приходим к модели Намбу–Иона-Лазинио [5] с естественным условием регуляризации, ограничивающим интегрирование по импульсу до значения Λ:

$$\begin{aligned}W=\int^{\Lambda}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\Bigg[&|p_4|\,(1-\cos\theta)-\\ &-Gr^2\frac{p}{|p_4|}\left(\sin\theta-\frac{m}{p}\cos\theta\right)\int^{\Lambda}\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{q}{|q_4|}\left(\sin\theta'-\frac{m}{q}\cos\theta'\right)\Bigg],\end{aligned}\tag{28}$$

где $p=|\mathbf{p}|$, $q=|\mathbf{q}|$ (для простоты положим, что корреляционная функция $J(p)=0$). Условие минимума по β

$$\int^{\Lambda}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\ \frac{p}{|p_4|}\left(\sin\theta-\frac{m}{p}\cos\theta\right)=0\tag{29}$$

означает фактически, что составная масса кварка должна обратиться в ноль. Однако ясно, что эта точка не является устойчивой, и наиболее выгодными оказываются экстремальные значения параметра β, т. е. либо ноль, либо единица.

Можно видеть, что эта ситуация имеет место не только для специального выбора корреляционной функции типа модели Намбу–Иона-Лазинио, но и в общем случае. Если трактовать параметр β как динамическую переменную, то можно считать, что возникает неустойчивое скалярное поле совершенно необычной природы, ответственное за выбор представления операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS-04-84-398 и Отделения физики и астрономии НАН Украины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
2. *Van Kampen N. G.* // Phys. Rep. 1976. V. 24. P. 171; Physica. 1974. V. 74. P. 215; 239.
3. *Боголюбов Н. Н.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77.
4. *Heisenberg W.* // Zs. Phys. 1934. V. 90. P. 209; 692.
5. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* // Phys. Rev. 1961. V. 122. P. 345;
   Волков М. К., Раджабов А. Е. // УФН. 2006. Т. 176. С. 569;
   Ebert D., Reinhardt H., Volkov M. K. // Prog. Part. Nucl. Phys. 1994. V. 33. P. 1.

Получено 24 апреля 2009 г.