Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 5(168). С. 728–736

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКЕ

НОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Б. П. Кондратьев [1]

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

Разработана теория эквигравитирующих тел, с помощью которых внешние силовые поля объемных осесимметричных фигур можно представлять через однократные интегралы. Теория развивается в трех направлениях. Первое связано с доказательством существования эквигравитирующих стержней. Такие стержни могут иметь как реальное, так и мнимое распределение плотности, однако масса и внешний потенциал стержней остаются вещественными. Границы стержней отмечены особыми точками (это точки изломов на поверхности или особые точки аналитического продолжения внешнего потенциала внутрь тела). При двух особых точках эквигравитирующий стержень один, в противном случае стержни составные или образуют эквигравитирующие «скелеты». При изолированных особых точках внешние гравитационные поля можно представить совокупностью стержней и точечных масс. Второе направление опирается на представление внешнего гравитационного поля объемных тел с помощью потенциалов плоских дисков. Указаны все случаи, когда такие диски находятся по эквигравитирующим стержням. Обратное верно всегда: для однородного или любого неоднородного круглого диска можно найти эквигравитирующий стержень, а значит, и эквигравитирующее ему объемное тело с экваториальной плоскостью симметрии. Удается построить цепочки эквигравитирующих тел типа «сфероид–диск–стержень». Третье направление связано с развитием и расширением области применения метода софокусных преобразований. Этот метод модифицируется и прилагается не только к сплошным однородным эллипсоидам, но и к слоисто-неоднородным эллипсоидам со стратификацией самого общего вида, а также к однородным и неоднородным оболочкам. Любые элементарные или толстые эллипсоидальные оболочки (а также сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды), связанные специальными софокусными преобразованиями, оказываются эквигравитирующими друг другу.

A theory of equigravitating bodies by means of which external force fields of the volume axially symmetric figures can be represented by unitary integrals is developed. The theory develops in three directions. The first one is connected with the proof of existence of equigravitating line segments. Such line segments can have both real, and imaginary distribution of density, however, mass and external potential remain as real values. The ends of line segments coincide with special points (these are cusp points on surfaces or special points of analytical continuation of external potential inside the body). At two special points only the body has one line equigravitating segment, otherwise the line segments are compound or form equigravitating «skeletons». At the isolated special points external gravitational fields can be presented by a set of line segments and mass points. The second direction is based on representation of external gravitational field of volume axially symmetric figures by means of potentials of flat round disks. Such disks are obtained on line segments. The reverse is true always: for homogeneous or any non-uniform round disk it is possible to find an equigravitating line segment. It manages to construct chains of equigravitating bodies of the «spheroid–disk–line segment» type. The third direction of the theory is connected with development and expansion of a scope of the method of confocal transformations. This method is modified and applied not only to continuous homogeneous ellipsoids but also to non-uniform stratified ellipsoids with stratification of the general type, and also to homogeneous and non-uniform shells. Any elementary or thick ellipsoidal shells (and also continuous non-uniform stratified ellipsoids), connected by special confocal transformations, are equigravitating to each other.

PACS: 02.30.Em

[1] E-mail: kond@uni.udm.ru

ВВЕДЕНИЕ

При вычислении потенциалов и силовых полей тел исследователи часто сталкиваются со значительными математическими трудностями. Еще более сложными являются задачи по вычислению взаимного притяжения или гравитационной (потенциальной) энергии тел. В монографиях [1–3] дан ряд новых методов для решения комплекса подобных задач и разработано новое направление в теории потенциала — теория эквигравитирующих тел. Доказано, в частности, что эквигравитирующие тела для однородных объемных тел с азимутальной симметрией могут иметь форму одномерных стержней или круглых дисков.

Эквигравитирующие стержни и диски значительно упрощают представление внешних полей гравитирующих (или заряженных электричеством) тел, а также часто позволяют находить потенциалы тел в конечном аналитическом виде. Это важно как для теоретических, так и практических приложений теории потенциала. Целью данной работы является краткий обзор из $[2, 3]$ некоторых аналитических методов, предназначенных для поиска заменяющих одномерных или двумерных источников притяжения. При этом допускаются как действительные, так и мнимые распределения плотности вещества на стержнях и дисках.

1. ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ СТЕРЖНИ

Новым и продуктивным направлением в теории потенциала является представление внешнего ньютоновского потенциала осесимметричных объемных тел с помощью *круговых дисков и одномерных стержней*. Заменяющие элементы могут иметь чисто мнимое распределение плотности, однако их масса и гравитационное поле остаются реальными.

Теорема 1. *Потенциал однородного круглого диска с радиусом R и плотностью σ можно представить с помощью мнимого стержня с распределением плотности*

$$\mu(\zeta) = -2i\sigma\sqrt{R^2+\zeta^2}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{1}$$

Следствие. Для одномерного кольца радиусом a и постоянной линейной плотностью μ_0 эквигравитирующим является мнимый стержень с бесконечной плотностью на концах

$$\mu(\zeta) = -\frac{2ia\mu_0}{\sqrt{a^2+\zeta^2}}, \quad -a \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant a. \tag{2}$$

С помощью стержня (1) можно, в частности, решить и важную задачу о полном пространственном потенциале однородного круглого диска

$$\varphi(r, x_3) = \frac{2\sqrt{2}G\sigma}{\sqrt{a-c}}\left\{\left[c+2\left(R^2-r^2\right)\right]K(\tilde{k}) + (a-c)\,E(\tilde{k}) - 2x_3^2\Pi\left(\frac{a-b}{2r^2}, \tilde{k}\right)\right\}, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} a = 2\left(r^2+x_3^2\right), \\ b = r^2+x_3^2-R^2+\sqrt{\left(r^2+x_3^2-R^2\right)^2+4R^2x_3^2}, \\ c = r^2+x_3^2-R^2-\sqrt{\left(r^2+x_3^2-R^2\right)^2+4R^2x_3^2} < 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $K\left(\tilde{k}\right)$, $E\left(\tilde{k}\right)$ и $\Pi\left(\dfrac{a-b}{2r^2},\tilde{k}\right)$ — полные эллиптические интегралы, причем

$$\tilde{k}=\frac{1-k'}{1+k'},\quad k'=\sqrt{\frac{\left(r-R\right)^2+x_3^2}{\left(r+R\right)^2+x_3^2}}.$$

1.1. Нахождение стержней методом расслоения тела на диски. Из дисков (и колец) можно сконструировать осесимметричные тела разной формы. Для нахождения эквигравитирующих стержней этих тел применим метод синтеза. Дано однородное осесимметричное тело, меридиональное сечение которого описывается (полностью или частично) функцией $R=R(h)$, и R — радиус диска, расположенного на высоте h. При этом на поверхности и внутри фигуры допускается существование конечного числа особых точек. Эти особые точки служат концами одномерных материальных отрезков. Если особых точек у тела более двух, вместо одного существует уже комбинация заменяющих стержней или же совокупность стержней и реальных точечных масс. Чтобы такие отрезки являлись эквигравитирующими для объемного тела, должна выполняться следующая

Теорема 2. *Для однородного осесимметричного тела плотность распределения гравитирующего вещества в точке ζ на одномерных замещающих стержнях дается интегралом*

$$\mu\left(\zeta\right)=-2i\rho\int\limits_{h_1}^{h_2}\sqrt{R^2\left(h\right)+\left(\zeta-h\right)^2}dh, \tag{5}$$

где $R(h)$ задает контур фигуры, а пределы интегрирования находятся из некоторых дополнительных условий.

Формула (5) позволяет найти эквигравитирующие стержни для многих объемных тел. Так, для однородного сжатого сфероида плотность на заменяющем стержне равна

$$\mu\left(\zeta\right)=-i\pi\rho\frac{a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2-a_3^2}}\left(1+\frac{\zeta^2}{a_1^2-a_3^2}\right),\quad -\sqrt{a_1^2-a_3^2}\leqslant\frac{\zeta}{i}\leqslant\sqrt{a_1^2-a_3^2}. \tag{6}$$

Аналогично доказывается, что однородный шаровой сегмент, меньший полушара, имеет заменяющий стержень с плотностью

$$\mu\left(\zeta\right)=-\frac{2}{3}i\rho\frac{\left(b^2+\zeta^2\right)^{3/2}}{\zeta+R-H},\quad -b\leqslant\frac{\zeta}{i}\leqslant b. \tag{7}$$

Если сегмент больше полушара, к стержню добавляется вещественная материальная точка [3].

1.2. Нахождение стержней методом дифференциации. Рассмотрим семейство соосных сфероидальных поверхностей $S\left(m\right)$:

$$\frac{r^2}{a_1^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2\alpha_3^2\left(m\right)}=m^2\quad\left(0\leqslant m\leqslant 1\right). \tag{8}$$

Две поверхности семейства (8), разделенные бесконечно малым значением параметра dm, образуют элементарную сфероидальную оболочку. Находя известными из [1–3] способами функцию $\alpha_3\left(m\right)$, имеем разные типы оболочек. Подставляя конкретное $\alpha_3\left(m\right)$ в известное выражение $\mu(\zeta, m)$ и дифференцируя его по параметру m, находим эквигравитирующие стержни для той или иной сфероидальной оболочки.

Теорема 3. *Тонкий гомеоид с поверхностью вытянутого сфероида с массой M и полуосями $ma_1 \leqslant ma_3$ имеет эквигравитирующий во внешней точке однородный фокальный стержень с вещественным распределением плотности*

$$d_m\mu(m, \zeta) = \frac{3}{2}\frac{M}{a_3 e} m dm. \tag{9}$$

Следствие. *Эквигравитирующий стержень для однородного вытянутого гомеоида конечной толщины $(m_{\min} = m_0)$ состоит из трех звеньев:*

$$\mu^{\mathrm{I}}(\zeta) = \pi\rho\frac{a_1^2}{e}\left(1 - \frac{\zeta^2}{a_3^2 - a_1^2}\right), \quad \mu^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{III}} = \pi\rho\frac{a_1^2}{e}\left(1 - m_0^2\right) = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Аналогично, для тонкого и толстого фокалоида соответственно имеем

$$d_m\mu(m, \zeta) = \pi\rho a_3^2\frac{3m^2 - e^2}{e}\left(1 - \frac{\zeta^2}{a_3^2 e^2}\right), \tag{11}$$

$$\mu(m_0, \zeta) = \frac{\pi\rho}{e}(1 - m_0)\left(1 - e^2 + m_0 + m_0^2\right)\left(a_3^2 - \frac{\zeta^2}{e^2}\right). \tag{12}$$

Результаты для вытянутых фокалоидов легко переносятся и на сжатые (отличие лишь в том, что одномерные плотности стержней будут теперь мнимые).

1.3. Нахождение стержней с помощью интеграла Коши. Для нахождения стержней мы применили также методы теории функций комплексного переменного. Это позволило: а) доказать само существование эквигравитирующих отрезков у тел с азимутальной симметрией; б) независимым методом находить сами мнимые или вещественные распределения одномерной плотности вещества на них. В основе метода лежит модифицированный интеграл Коши

$$\varphi(x_3) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{x_3 - \zeta}d\zeta \tag{13}$$

(Г — контур на изображающей комплексной плоскости, окружающий тело, причем пробная точка x_3 — вне контура). Доказана

Теорема 4. *Одномерная плотность $\mu(\zeta)$ на выбранном стержне дается выражением*

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi i G}\left[\varphi_{\mathrm{I}}(\zeta) - \varphi_{\mathrm{II}}(\zeta)\right], \tag{14}$$

где через $\varphi_{\mathrm{I}}(\zeta)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}(\zeta)$ обозначены значения потенциала на разных ветвях стягиваемого контура.

Указанный метод часто применяется на практике. В [2] были найдены эквигравитирующие стержни для однородного кругового цилиндра высотой $2H$ и радиусом основания R: система заменяющих элементов для него состоит из двух стержней с чисто мнимой плотностью

$$\mu(\zeta) = -\frac{1}{2}i\rho\left[2(\zeta + H)\sqrt{a^2 + (\zeta + H)^2} + a^2\ln\frac{\zeta + H + \sqrt{a^2 + (\zeta + H)^2}}{\zeta + H - \sqrt{a^2 + (\zeta + H)^2}}\right] \tag{15}$$

и третьего отрезка длиной $-H \leqslant \zeta \leqslant H$ с постоянной вещественной плотностью

$$\mu_3(\zeta) = \pi\rho a^2 = \text{const}. \tag{16}$$

Существенно, что вклад в массу цилиндра дает только отрезок (16):

$$M = 2\pi\rho a^2 H, \tag{17}$$

поскольку мнимые вклады от отрезков

$$M_1 = -i\pi\rho a^3, \quad M_2 = i\pi\rho a^3 \tag{18}$$

при сложении взаимно сокращаются. Однако вклад в потенциал дают все три отрезка.

Данным методом была решена и фундаментальная задача о заменяющих элементах для однородного кругового тора с поверхностью

$$(r - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2$$

и полной массой $M_{\text{тор}} = 2\pi^2\rho r_0^2 R_0$. Пространственный потенциал тора впервые был получен в [3] и имеет вид

$$\frac{\varphi_{\text{тор}}(r,\ x_3)}{2\sqrt{2}G\rho R_0 r_0} = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \left[c + 2\left(R_1^2 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \right] K(k_1) + \right.$$
$$\left. + (a - c)\, E(k_1) - 2\frac{(x_3 - r_0\sin\,\theta)^2}{R_0^2}\Pi(n, k_1) \right\} \frac{\cos\theta\, d\theta}{a - c}. \tag{19}$$

Здесь

$$\begin{gathered} R_1 = 1 + \frac{r_0}{R_0}\cos\theta, \quad a = \frac{2\left(r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2\right)}{R_0^2}, \quad n = \frac{a - b}{2r^2/R_0^2}, \\ \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{2} - R_1^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - R_1^2\right)^2 + 4R_1^2\frac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}}, \quad k = \frac{1 - k'}{1 + k'} \leqslant 1, \\ k' = \sqrt{\frac{(r - R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}{(r + R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}} \leqslant 1. \end{gathered} \tag{20}$$

Потенциал тора (19) был представлен в [3] сложной системой из пяти заменяющих элементов: трехзвенного стержня с чисто мнимым распределением плотности вещества на каждом из этих отрезков:

$$\begin{gathered} \mu_1(\zeta) = -\frac{8}{3} i\rho r_0 R_0 \left(\frac{1}{k} + k\right) E(k) - \left(\frac{1}{k} - k\right) K(k), \\ k = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \leqslant 1, \quad -\sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant \sqrt{R_0^2 - r_0^2}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\mu_2(\zeta) = \mu_3(\zeta) = -\frac{8}{3} i \rho r_0 R_0 \left[\left(1+k^2\right) E\left(\frac{1}{k}\right) + \left(1-k^2\right) K\left(\frac{1}{k}\right)\right],$$
$$k = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2+\zeta^2}} \geqslant 1, \quad -R_0 \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant -\sqrt{R_0^2-r_0^2}, \quad \sqrt{R_0^2-r_0^2} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R_0, \tag{22}$$

а также двух точечных вещественных масс

$$M_4 = M_5 = \frac{4}{3}\pi \rho r_0^3, \tag{23}$$

расположенных в точках $\pm iR_0$ мнимой оси. В [4] было строго доказано, что система заменяющих элементов (21)–(23) действительно представляет потенциал однородного кругового тора.

2. ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ ДИСКИ И ИХ СВЯЗЬ СО СТЕРЖНЯМИ

Следующим пунктом развиваемой теории является переход от заменяющего стержня к эквигравитирующему диску и обратно. Рассмотрим, например, неоднородный диск радиуса R и плотностью $\sigma(R)$.

Теорема 5. *Одномерным эквигравитирующим телом для диска с плотностью* $\sigma(r)$ *является стержень «длиной»* $L = 2iR$ *с мнимой плотностью*

$$\mu(\zeta) = -2i \int\limits_{-i\zeta}^{R} \sigma(r) \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+\zeta^2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{24}$$

Если заменяющий стержень известен, возможен и обратный переход от него к эквигравитирующему диску по формуле

$$\sigma(p) = \frac{i}{\pi}\frac{d}{dp} \int\limits_{-R^2}^{p} \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}} d\zeta^2. \tag{25}$$

Так, для диска с плотностью

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

эквигравитирующий стержень имеет плотность

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0 R \frac{n! 2^{n+1}}{(2n+1)!!} \left(1 + \frac{\zeta^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{27}$$

Много других задач на эту тему дано в [3].

Подчеркнем, однако, что в отличие от стержней заменяющие диски могут существовать только для тел с экваториальной плоскостью симметрии, а в контексте формулы (25) — только для стержней с симметричным относительно центра распределением массы.

3. ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ ТЕЛА. СОФОКУСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК И ЭЛЛИПСОИДОВ

В [2, 3] вводятся и применяются обобщенные софокусные преобразования. Дан эллипсоид с внутренней стратификацией

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 m^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m)} + \frac{x_3^2}{a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m)} = 1 \quad (0 \leqslant m \leqslant 1)\,. \tag{28}$$

На параметры $\alpha_i(m)$ накладываются определенные ограничения. Промежуточная поверхность $S(m)$ семейства (28) имеет квадраты полуосей

$$a_1^2 m^2, \quad a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m)\,, \quad a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m)\,. \tag{29}$$

Преобразуем эту промежуточную поверхность в другую эллипсоидальную поверхность, причем новые квадраты полуосей берем в виде

$$m^2\left(a_1^2 + \mu\right), \quad m^2\left(a_2^2\alpha_2^2(m) + \mu\right), \quad m^2\left(a_3^2\alpha_3^2(m) + \mu\right). \tag{30}$$

Очевидно, фокусы поверхности $S(m)$ окажутся совпадающими с фокусами новой поверхности $S(m,\mu)$. Подчеркнем — здесь расширяется само понятие софокусных преобразований на эллипсоидальные оболочки самого общего вида (классиками изучались лишь тонкие гомеоиды и фокалоиды).

Преобразования (30) изменяют, вообще говоря, объем оболочек. Для *сохранения объема необходимо ввести дополнительное требование.* А именно, если две элементарные софокусные оболочки заполнить однородным по плотности веществом, то условием сохранения их массы будет

$$\rho(m)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \frac{d}{dm}\left[m^3\alpha_2(m)\alpha_3(m)\right] = \\ = \rho'(m)\frac{d}{dm}\left[m^3\sqrt{\left[\alpha_1^2+\mu\right]\left[\alpha_2^2\alpha_2^2(m)+\mu\right]\left[\alpha_3^2\alpha_3^2(m)+\mu\right]}\right], \tag{31}$$

где $\rho(m)$ и $\rho'(m)$ — плотности исходной и преобразованной оболочек.

Будучи примененными ко всем слоям сплошных слоисто-неоднородных эллипсоидов, преобразования (30) *в целом не изменяют структуру этих объектов.* Так, эллипсоид из гомеоидов опять переходит в эллипсоид из гомотетичных слоев (но уже софокусных исходным); эллипсоид из фокалоидов — в новый эллипсоид из фокалоидов, и т. д. Такие софокусные слоисто-неоднородные эллипсоиды будут иметь одинаковую массу, если выполняется условие (31) для отдельных соответствующих слоев.

Пока говорилось только о геометрических свойствах преобразований (30). Далее рассмотрим гравитационные свойства софокусных оболочек и сконструированных из них сплошных слоисто-неоднородных эллипсоидов.

Теорема 6. *Важнейшим свойством двух элементарных оболочек, связанных преобразованием* (30)*, является то, что при одинаковой массе они имеют во внешнем пространстве один и тот же ньютоновский потенциал, т. е. такие софокусные в обобщенном смысле оболочки являются эквигравитирующими.*

Рассмотрим теперь сплошной гравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид. Его внешний потенциал нам известен [1]. Создадим из него другой эллипсоид, преобразуя по формулам (30) каждую из промежуточных элементарных оболочек первого в софокусную оболочку. Массы исходных и преобразованных слоев полагаем равными. Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 7. *Два слоисто-неоднородных эллипсоида данного типа, слои у которых связаны софокусными преобразованиями* (30), *являются эквигравитирующими во внешней точке* $\tilde{x}_i$.

Методом софокусных преобразований в [3] решено много важных задач. Впервые, например, в аналитическом виде удалось получить пространственный потенциал однородных и неоднородных эллиптических дисков. Найдены эквигравитирующие диски и стержни для сплошных слоисто-неоднородных сфероидов с распределением плотности $\rho\,(m)$

$$\begin{aligned} \sigma\,(r) &= 2a_1^2 a_3 \int\limits_{\tilde{m}}^{1} \rho\,(m)\,\frac{d}{dm}\left[\frac{\alpha_3\,(m)}{\tilde{a}_1^2\,(m)}\sqrt{m^2-\frac{r^2}{\tilde{a}_1^2\,(m)}}\right] dm, \\ \mu\,(\zeta) &= -i\pi a_1^2 a_3 \int\limits_{\hat{m}}^{1} \rho\,(m)\,\frac{d}{dm}\left[\frac{\alpha_3\,(m)}{\tilde{a}_1\,(m)}\left(m^2+\frac{\zeta^2}{\tilde{a}_1^2\,(m)}\right)\right] dm. \end{aligned} \tag{32}$$

Так, для сфероида с плотностью $\rho\,(m) = \dfrac{\rho_0}{\left(1+\beta m^2\right)^{3/2}}$, хорошо моделирующего при соответствующем подборе β распределение поверхностной яркости в эллиптических галактиках, заменяющие диск и стержень имеют плотности

$$\sigma\,(r) = \frac{2a_3\rho_0}{e^2\sqrt{1+\beta}}\frac{\sqrt{1-r^2/R^2}}{1+\beta\dfrac{r^2}{R^2}}, \quad \mu\,(\zeta) = -2i\pi\rho_0\frac{a_1^2 a_3}{\beta R}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta\dfrac{\zeta^2}{R^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\right). \tag{33}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитые методы — метод дифференциации оболочек, метод расслоения на диски (а также на кольца) и метод, основанный на применении модифицированного интеграла Коши, — позволяют находить эквигравитирующие отрезки для многих однородных осесимметричных тел. С помощью первых двух методов можно рассматривать тела, содержащие внутри себя пустоты (каверны). Рассмотренные примеры позволяют достигнуть более глубокого понимания развиваемой теории.

Отметим интересную закономерность: если потенциал тела можно представить плоским диском с *вещественным* распределением плотности, тогда этот же потенциал можно представить и одномерным стержнем с *мнимой* плотностью. И наоборот — *вещественному* стержню соответствует мнимый диск.

Для поиска новых эквигравитирующих тел у нас был разработан еще один метод, использующий *специальные софокусные преобразования.* Такие преобразования применяются у нас не только к однородным сплошным эллипсоидам, как это делали классики, но и к отдельным элементарным эллипсоидальным оболочкам *общего* типа (а не только к гомеоидам, как это делал Шаль), а также к *толстым эллипсоидальным оболочкам* и к сплошным *слоисто-неоднородным* эллипсоидам. Главное заключается в том, что любые (*в смысле произвольных функций* $\alpha_i\,(m)$, *задающих тип стратификации и форму оболочки*) элементарные (или конечной толщины) эллипсоидальные оболочки и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды, связанные указанными софокусными преобразованиями, являются *эквигравитирующими.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев Б. П.* Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: Наука, 1989.
2. *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: РХД, 2003.
3. *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007.
4. *Кондратьев Б. П. и др.* Пространственный потенциал однородного кругового тора через эквигравитирующие элементы // Журн. техн. физики. 2008. Т. 78, вып. 7. С. 132–135.