

МЕТОД P-АДИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЛИВНЕЙ

*Т. Г. Дедович*¹, *М. В. Токарев*²

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются законы подобия и их проявления в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях. Предполагается, что партонный каскад преобразуется в адронный ливень с фрактальной структурой. Проведен анализ ВС-метода (Box Counting method), используемого для расчета фрактальной размерности каскада. В качестве тестового фрактала используется партонный ливень с допустимыми $1/3$ -ми частями быстротного пространства, который соответствует триадному канторовскому множеству. Установлено существование оптимального набора бинов (параметр ВС-метода), позволяющего определить фрактальную размерность с максимальной точностью. Показано, что оптимальный набор связан с законом формирования ливня. Предложен метод P-адических покрытий (PaC-метод: P-adic Coverage method), применяемый для фрактального анализа. Он позволяет определить фрактальную размерность ливня с максимальной точностью, количество уровней и партонов в каждом расщеплении в процессе развития ливня, тип каскада (случайный или регулярный) и его структуру. Показано, что PaC-метод применим для анализа регулярных и случайных N -арных каскадов с допустимыми $1/k$ -ми частями исследуемого пространства.

Self-similarity in multiple processes at high energies is considered. It is assumed that a parton cascade transforms into a hadron shower with a fractal structure. The BC method (Box Counting method) used to calculate the fractal dimension of the cascade is analyzed. The parton shower with permissible $1/3$ parts of the pseudorapidity space corresponding to the Triad Cantor set was used as the test fractal. The existence of the optimal set of bins (the parameter of BC method) allowing one to find the fractal dimension with the maximum accuracy was found. The optimal set of bins is shown to depend on the law of fractal generation. The P-adic Coverage method (PaC method) used for fractal analysis is offered. This method allows us to determine the fractal dimension of the shower with the maximum accuracy, the number of fractal levels and of partons at branching in the process of development of the shower, the cascade type (random or regular) and its structure. The method is shown to be applicable for the analysis of the regular and random N -ary cascades with permissible $1/k$ parts of the space under study.

PACS: M89.75.Da; M89.75.Fb

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес вызывают работы по изучению экспериментальных данных, демонстрирующих свойство самоподобия процесса взаимодействия адронов и ядер при высоких энергиях [1, 2]. Описание установленных закономерностей стало критической проверкой предложенных ранее моделей. Развитие теоретических методов описания таких данных позволит более глубоко понять фундаментальные законы и принципы, отражающие динамику процесса взаимодействия адронов и ядер высоких энергий.

¹E-mail: dedovich@sunhe.jinr.ru

²E-mail: tokarev@jinr.ru

Одним из проявлений свойства самоподобия является z -скейлинг, установленный при анализе инклюзивных спектров адронов, прямых фотонов и струй во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий [3]. В z -представлении спектр инклюзивной частицы описывается безразмерной функцией ψ , зависящей от единственной безразмерной переменной z . Обе величины выражаются через экспериментально измеряемые кинематические (импульсы и массы сталкивающихся и регистрируемой частиц) и динамические (дифференциальные и полные инклюзивные сечения, плотность множественности) величины. Установлены свойства функции $\psi(z)$: независимость от энергии и центральности столкновения, угла вылета и типа адрона, степенной закон поведения $\psi(z) \sim z^{-\beta}$ в области малых (режим насыщения) и больших z . Предложен микроскопический сценарий взаимодействия, отражающий самоподобие в структуре сталкивающихся объектов (адронов, ядер), взаимодействия их конститuentов и процесса адронизации.

Хорошо известно, что скейлинговое поведение физических наблюдаемых (самоподобие) связано со степенными законами [4–7].

Степенной закон поведения факториальных моментов в зависимости от ширины бинов в быстротном распределении был установлен при исследовании пион-протонных столкновений при энергии $\sqrt{s} = 250$ ГэВ [8]. Эта закономерность наблюдалась в событиях с большими флуктуациями плотности множественности. Величина флуктуации $\sim 10^2$ превышала среднее значение для данного типа событий в 60 раз. Такая характеристика множественного рождения, по аналогии с гидродинамикой, была названа перемежаемостью. В работах А. Бяласа [9] и Р. Хва [10] было показано, что наблюдаемые флуктуации являются динамическими и отражают самоподобие процесса взаимодействия. Это подтверждалось степенной зависимостью факториальных моментов F_q и G_q порядка q от ширины бинов в быстротном распределении $F_q(\delta y) \sim (\delta y)^{-\phi(q)}$, $G_q(\delta y) \sim (\delta y)^{-\tau(q)}$, где $\phi(q)$ и $\tau(q)$ — фрактальные размерности.

Для анализа взаимодействия адронов и ядер широко используются различные монтекарло-генераторы событий (PYTHIA и JETSET [11], HERWIG [12], SHEPRA [13], HIJING [14], ARIADNE [15], UrQMD [16]). Для описания перемежаемости в генераторах используются как модель партонных каскадов, так и модель фазовых переходов (см. обзоры [17, 18]). В модели партонных каскадов перемежаемость воспроизводится в предположении развития жесткого партонного ливня до очень малых значений виртуальности $Q_0^2 = 0,4$ ГэВ² и локальной партон-адронной дуальности. Струнные механизмы адронизации в модели JETSET также воспроизводят степенной закон поведения факториальных моментов. В модели ARIADNE выбор процедуры обрезания пертурбативного КХД-каскада и относительного вклада мягкой и жесткой компонент взаимодействия существен для описания перемежаемости.

Экспериментально установленные степенные зависимости (перемежаемость, z -скейлинг, ...), характеризующие самоподобие, являются типичными для объектов, называемых фракталами [19]. Они обладают одинаковой (или сходной) структурой при различном разрешении. Одной из важнейших характеристик этих объектов является размерность. Фрактальная размерность (размерность Хаусдорфа–Безикевича) определяется как величина D_F , при которой предел (1) имеет конечное значение. Здесь $N(\delta)$ — количество пробников размера δ , покрывающих объект

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta^{D_F} = \text{const.} \quad (1)$$

Величина δ^{-1} называется разрешением, на котором исследуется структура объекта. Как правило, фракталы имеют дробную размерность.

Обычно предполагается, что адроны, рожденные в неупругом взаимодействии, можно представить как наборы точек в трехмерном фазовом пространстве (p_T, η, ϕ) . Здесь p_T — поперечный импульс, η — псевдобыстрота и ϕ — азимутальный угол частицы. Распределение точек в этом пространстве, определяемое динамикой взаимодействия, не является однородным и рассматривается как фрактал. Показатель степени $\tau(q)$ (характеризующий перемежаемость) определяет спектр фрактальных размерностей $D(q) = \tau(q)/(q-1)$ и демонстрирует связь между фракталами и множественным рождением частиц. Зависимость $D(q)$ является линейной функцией момента q для каскадных процессов и не зависит от значения q для модели фазовых переходов. Таким образом, точное определение фрактальной размерности является важным для реконструкции динамики взаимодействия.

В работе И. Дремина [1] указывается на проблемы, возникающие при определении фрактальных размерностей в неупругих взаимодействиях. Так, конечное значение числа частиц в экспериментальных данных не позволяет перейти к предельному случаю ($\delta \rightarrow 0$). При этом выбор диапазона изменений δ может привести к различной величине фрактальной размерности. При анализе экспериментальных данных линейная зависимость факториальных моментов F_q от ширины бина δy в быстротном распределении наблюдается только для бинов достаточно большой ширины. Таким образом, при практическом определении фрактальных размерностей возникают вопросы: при каких значениях ширины бинов δy в анализе распределения величины y может быть найдено значение «истинной» размерности множества точек? Как влияет изменение числа точек на получаемый результат? В связи с этим представляется важным развивать методы фрактального анализа с целью получения алгоритма, позволяющего максимально точно определять фрактальную размерность и другие характеристики исследуемого фазового пространства.

В данной работе проводится анализ стандартного ВС-метода (Box Counting method), определяющего фрактальную размерность исследуемого объекта. Изучаются возможности и недостатки этого метода. На основе полученных результатов предложен метод Р-адических покрытий (PaC-метод: P-adic Coverage method), имеющий большую область применимости.

В разд. 1 приведено описание стандартного ВС-метода, тестового примера (триадное канторовское множество, ассоциированное с партонным каскадом) и представлены результаты исследования точности восстановления фрактальной размерности в зависимости от параметра этого алгоритма. PaC-метод и его возможности для определения фрактальной размерности и других характеристик фрактала подробно обсуждаются в разд. 2. Основные результаты работы и выводы представлены в заключении.

1. ВС-МЕТОД

Для определения фрактальных размерностей используется несколько базовых методов. К ним относятся ВС-метод [19–21], метод регуляризации [22], метод R/S -нормированного размаха [23], метод максимумов модулей вейвлет-преобразования [24]. ВС-метод впервые был применен для определения фрактальной размерности береговой линии Британии [25] и широко используется в современных исследованиях. В его основе лежит

понятие клеточной размерности D_b ,

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}, \quad (2)$$

где $N(\delta)$ — количество пробников размера δ , покрывающих объект.

В общем случае фрактальная размерность D_F множества меньше или равна клеточной размерности D_b [23]. Для фракталов, образованных при скейлинге с неравными отношениями, фрактальная размерность больше клеточной. Для простых фракталов, таких как триадное канторовское множество, эти размерности совпадают. ВС-метод имеет теоретическую возможность определять фрактальную размерность только простых фракталов. Далее приводится описание ВС-метода и результаты его тестирования (исследование влияния ширины бинов и количества точек множества на точность восстановления фрактальной размерности) на примере триадного канторовского множества.

1.1. Описание ВС-метода. ВС-метод применяется для определения фрактальной размерности множества точек, распределенных в одномерном, двумерном и т.д. пространствах. Опишем алгоритм, реализующий этот метод, на примере множества точек одномерного y -пространства. В качестве y может использоваться любая физическая величина (быстрота, импульс, ...).

Пусть каждая точка исследуемого множества имеет значение y_i . Для определения клеточной размерности D_b исходное множество покрывается $N(\delta)$ пробниками размера δ и анализируются распределения $(1/N) \cdot \Delta N / \Delta y$, построенные с различной шириной бинов. В этом случае ширина бина Δy определяет размер пробника δ , а количество ненулевых бинов (т.е. бинов, содержащих хотя бы одну точку) определяет количество пробников, покрывающих объект. ВС-метод состоит из следующих шагов:

1. Строятся распределения анализируемой величины y . Ширина бинов в распределениях соответствует набору $\{\delta_i\}$, который определяется величинами δ_{\min} , δ_{\max} и законом изменения δ_i .
2. Подсчитывается количество ненулевых бинов $N(\delta_i)$ в каждом распределении.
3. Строится график зависимости $\ln N$ от $\ln \delta_i$.
4. Если анализируемое множество фрактально, то график описывается линейной функцией и клеточная размерность D_b равна величине параметра наклона b .

Отметим, что ВС-метод имеет только один изменяемый параметр — это набор бинов различной ширины, определяющий набор анализируемых распределений.

Для определения клеточной размерности множества точек двумерного (x, y) -пространства исследуются двумерные распределения $(1/N) \cdot \Delta N / \Delta x \Delta y$. В этом случае в качестве пробника выступают бины, имеющие размер $\delta = \Delta x \cdot \Delta y$. Экстраполяция на n -мерный случай очевидна.

1.2. Партонный ливень в конечном состоянии как тестовый фрактал. В данной работе для тестирования ВС-метода, т.е. определения фрактальной размерности, используется ливень в конечном состоянии, имеющий структуру триадного канторовского множества. Далее приведем описание некоторых законов развития партонного ливня, используемых в программе РУТНІА [11]:

1. На каждом шаге развития ливня партон a излучает два дочерних b и c .
2. Ливни в конечном состоянии времениподобны, т.е. виртуальность партона $m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 > 0$, где E и \mathbf{p} — энергия и импульс партона. Максимально разрешенная величина виртуальности Q_{\max}^2 устанавливается процессом жесткого рассеяния. В процессе

развития ливня величина виртуальности партона уменьшается до величины Q_0^2 . Этот предел используется для регуляризации мягких и коллинеарных расходимостей в выражении для вероятности излучения партона. Параметр Q_0 используется для определения эффективных масс глюона $m_{\text{eff},g} = 0,5Q_0$ и кварка $m_{\text{eff},q} = \sqrt{m_q^2 + 0,25Q_0^2}$, где m_q — значение массы кварка.

3. Партон излучает при условии $m_{\text{eff}} \geq Q_0$.

4. Кинематика процесса излучения партона описывается величиной доли энергии z , передаваемой дочерним партонам: $E_b = zE_a$, $E_c = (1 - z)E_a$.

5. Диапазон изменения значений величины z ($z_- < z < z_+$) определяется следующей формулой:

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} + \left\{ 1 + \frac{m_{\text{eff},b}^2 - m_{\text{eff},c}^2}{m_{\text{eff},a}^2} \pm \frac{|\mathbf{p}_a|}{E_a} \times \frac{\sqrt{(m_{\text{eff},a}^2 - m_{\text{eff},b}^2 - m_{\text{eff},c}^2)^2 - 4m_{\text{eff},c}^2 m_{\text{eff},b}^2}}{m_{\text{eff},a}^2} \right\}. \quad (3)$$

6. Угол излучения партона (угол раскрытия) Θ изменяется в диапазоне $\Theta_- < \Theta < \Theta_+$ и в каждом акте излучения определяется выражением

$$\Theta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{z_{\pm}(1 - z_{\pm})}} \frac{m_{\text{eff},a}}{E_a}. \quad (4)$$

7. Углы раскрытия дочерних партонов упорядочены: $\Theta_b, \Theta_c < \Theta_a$.

Далее представлен сценарий развития ливня в η -представлении, учитывающий описанные выше законы и приводящий к структуре триадного канторовского множества. Псевдобыстрота η выражается через угол Θ следующим соотношением: $\eta = -0,5 \ln(\text{tg}(\Theta/2))$.

На первом шаге партон a , выходящий из жесткого взаимодействия и имеющий среднее значение псевдобыстроты $\eta = 0$ из области возможных значений $|\eta| \leq 5$, излучает два партона b и c . Диапазон возможных углов излучения (Θ_+ , Θ_-) определяет допустимые части псевдобыстротного пространства (η -пространства) для рожденных партонов. В рассматриваемом случае каждая из допустимых частей составляет 1/3 от диапазона, допустимого для родительского партона. Отметим, что эти области не пересекаются. Считается, что партоны b и c попадают в середину допустимых интервалов. На каждом последующем шаге развития ливня процесс излучения повторяется. В случае бесконечного числа поколений допустимые части быстротного пространства образуют триадное канторовское множество.

На рис. 1 показаны первые три поколения ливня, демонстрирующие структуру триадного канторовского множества. На правой и левой частях рисунка приведены значения нормированного количества партонов N_i^p/N^p и допустимых частей $\Delta\eta/\eta$ псевдобыстротного пространства на каждом уровне развития ливня. Эти величины связаны степенным законом

$$\frac{N_i^p}{N^p} \sim \left(\frac{\Delta\eta}{\eta} \right)^{D_F}. \quad (5)$$

Величина D_F является фрактальной размерностью этого множества и равна $\ln 2 / \ln 3 \approx 0,630930$. Такие ливни будем называть регулярными, бинарными каскадами с допустимыми 1/3-ми частями и заполняемыми 1-й и 3-й частями η -пространства.

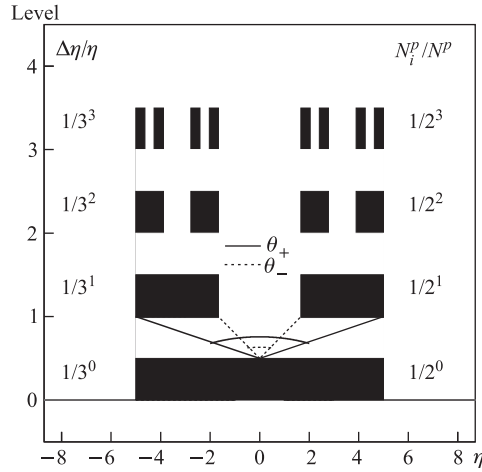


Рис. 1. Партоновый ливень как триадное канторовское множество. Зависимость допустимых частей η -пространства от уровня каскада

1.3. Точность восстановления фрактальной размерности. В данном подразделе для тестирования ВС-метода используются пять уровней описанного каскада, содержащего 32 партона в конечном состоянии. Для определения фрактальной размерности анализируются псевдобыстротные распределения $(1/N) \cdot \Delta N / \Delta \eta$ конечных партонов. Для каждого из партонов величина η выбирается случайно из допустимых областей.

Далее представлены результаты исследования точности восстановления фрактальной размерности триадного канторовского множества в зависимости от набора бинов различной ширины (параметра ВС-метода) в анализируемых быстротных распределениях.

На рис. 2 показана зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M в различных наборах распределений. Количество бинов M определяет ширину бина $\delta = \eta_{\text{range}} / M$, где η_{range} — ширина псевдобыстротного интервала, разрешенного для партона, выходящего из жесткого взаимодействия. На каждом рисунке показаны минимальное (M_0) и максимальное (M_{332} (a), M_9 (б), M_6 (в), M_6 (г)) количество бинов в распределении, а также закон изменения числа бинов в выбранном наборе. Все представленные зависимости имеют плато. Точки, попадающие на плато, соответствуют распределениям, в которых максимальное содержание бина равно единице.

На рис. 2, a первая точка соответствует распределению, содержащему два бина. Каждая последующая точка получена для распределения, в котором количество бинов увеличивается на три. Последнее распределение содержит 1001 бин. Таким образом, в представленном наборе распределений количество бинов изменяется по линейному закону с шагом три $M_{i+1} = M_i + 3$. На рисунке хорошо видны многочисленные промежуточные плато, которые указывают на избыточность используемого набора бинов.

Набор распределений, в котором количество бинов изменяется как степень двойки $M_i = 2^i$ (рис. 2, б), наиболее часто используется в ВС-методе. Фрактальная размерность D_F триадного канторовского множества, определяемая для этого набора, зависит от области, в которой проводится линейная аппроксимация точек. На рис. 2, б область аппроксимации является участок зависимости до плато. Точность определения фрактальной размерности в этом случае составляет $\sim 14\%$.

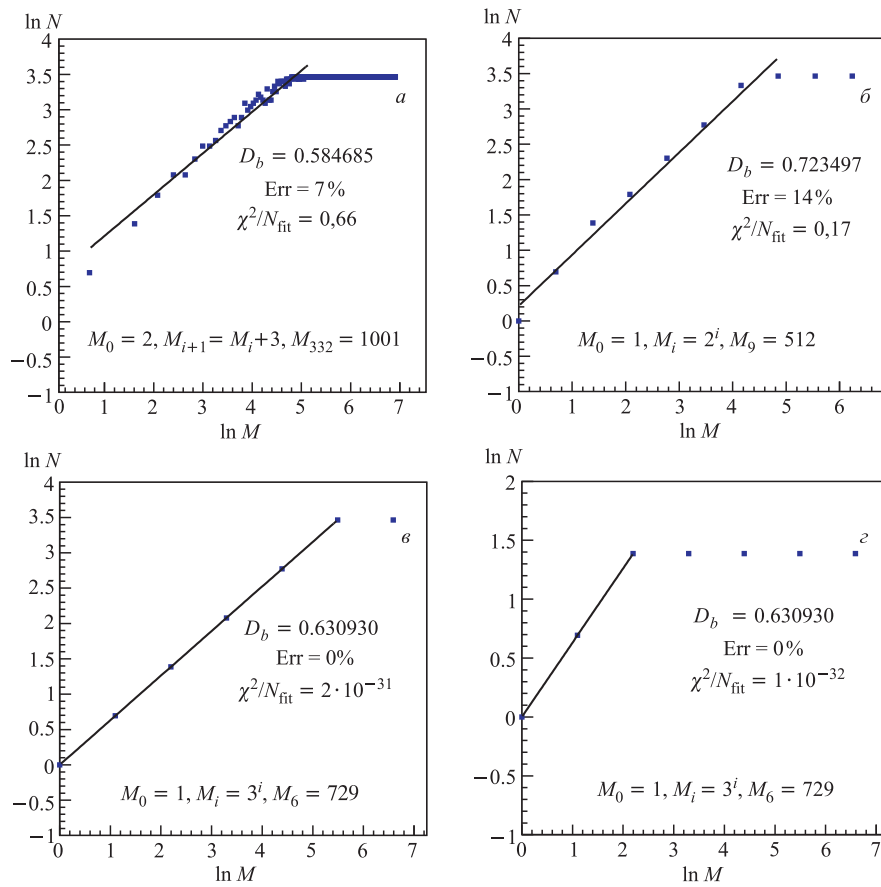


Рис. 2. Зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M в распределениях для триадного канторовского множества. Число бинов в распределениях изменяется по линейному закону с шагом три (а) и по степеням двойки (б) для пяти уровней каскада, по степеням тройки для пяти (в) и двух уровней (г)

Набор распределений, в котором количество бинов изменяется как степень тройки $M_i = 3^i$ (рис. 2, в), является оптимальным для определения фрактальной размерности D_F тестового фрактала. Изменение области аппроксимации (исключая плато) не влияет на значение восстанавливаемой величины D_F . Значение $D_F \approx 0,630930$ в этом случае восстанавливается с максимальной точностью. Отметим, что закон изменения количества бинов в наборе распределений $M_i = 3^i$ соответствует закону изменения ширины допустимых частей η -пространства в процессе формирования ливня $\Delta\eta/\eta = (1/3)^i$. Использование двух уровней каскада (четыре партона в конечном состоянии) также позволяет восстановить значение фрактальной размерности D_F (рис. 2, г).

Таким образом, тестирование ВС-метода на примере триадного канторовского множества показало, что существует оптимальный набор распределений, позволяющий определить с максимальной точностью фрактальную размерность D_F рассматриваемого множества. Количество бинов в распределениях этого набора связано с законом формирования фрактала.

2. МЕТОД P -АДИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ

Основываясь на полученных выше результатах, можно утверждать, что для любого регулярного каскада с допустимыми в процессе формирования $1/k$ -ми частями пространства существует оптимальный набор распределений для определения фрактальной размерности исследуемого множества. Закон изменения количества бинов в этом наборе зависит от значения k . ВС-метод не содержит процедуры поиска величины k .

В этом разделе предложен и описан метод P -адических покрытий (PaC-метод: P-adic Coverage method), который позволяет автоматически выполнить подбор оптимального набора распределений. Этот метод может быть применен к анализу большого числа данных (например, событий по рождению частиц или струй во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий). Он восстанавливает с максимальной точностью как фрактальную размерность самого множества (партонового каскада), так и другие его характеристики (тип и структуру, количество уровней и партонов в расщеплении).

2.1. Описание PaC-метода. Рассмотрим множество точек, образованных в процессе развития каскада (например, партонового) в произвольном пространстве.

Для определения оптимального набора (покрытия этого множества) рассматриваются различные наборы распределений, количество бинов в которых изменяется по степеням основания P . Значения P являются целыми положительными числами и возрастают, начиная с двойки. Эти распределения являются различными P -адическими покрытиями исследуемого пространства, т. е. самоподобными структурами различных масштабов. В каждом наборе число распределений определяется количеством уровней бинарного каскада. Процедура нахождения фрактальной размерности включает построение зависимости количества ненулевых бинов от количества бинов в распределениях в дважды логарифмическом масштабе. В этом представлении проводится линейная аппроксимация участка без плато и определяется величина параметра наклона b и значение χ^2 этой аппроксимации. Для выбора оптимального набора распределений вводится критерий $\chi^2 < \chi_{\text{lim}}^2$. PaC-метод включает блок анализа для определения типа и структуры каскада, количества уровней и партонов в расщеплении. Ниже описан алгоритм метода P -адических покрытий на примере партонового каскада, который соответствует фракталу с допустимыми в процессе формирования $1/k$ -ми частями η -пространства.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Считываются входные данные $\{\eta_i\}$ значения псевдобыстрот конечных партонов в ливнях.
2. Определяется количество уровней бинарного каскада $N_{\text{lev}} = \log N_{\text{part}}$, где N_{part} — количество конечных партонов в каскаде.
3. Строятся различные наборы распределений по псевдобыстроте. В каждом наборе количество распределений равно $N_{\text{lev}} + 1$. Количество бинов в каждом наборе распределений изменяется по закону $M_i = P^i$, где основание степени $P = 2, 3, 4, \dots$
4. Строится зависимость $\ln N$ от $\ln M$ для каждого набора.
5. Проводится линейная аппроксимация зависимостей (пункт 4) на участке без плато. Определяются количество точек $N_{\text{fit}}(P)$ на этом участке, значения $\chi^2(P)$ и параметра наклона $b(P)$.
6. Проводится поиск оптимального набора бинов, удовлетворяющего критерию $\chi^2(P) < \chi_{\text{lim}}^2$. При нахождении такого набора описанная выше процедура останавливается.

7. Анализируются массивы структур для оптимального набора.
8. Определяются характеристики каскада:
 - фрактальная размерность $D_F = b(P)$ с максимальной точностью;
 - количество уровней каскада $N_{lev} = N_{fit}(P) - 1$;
 - количество партонов при расщеплении $N_{part} = N(M_1)$;
 - тип фрактала (регулярный или случайный);
 - структура регулярного каскада (заполняемые части пространства, соответствующие номерам ненулевых элементов массива структур первого уровня).

Анализ массивов структур более детально описан ниже. Для определения значения величины χ^2_{lim} критерия оптимального набора (пункт б) проводились дополнительные

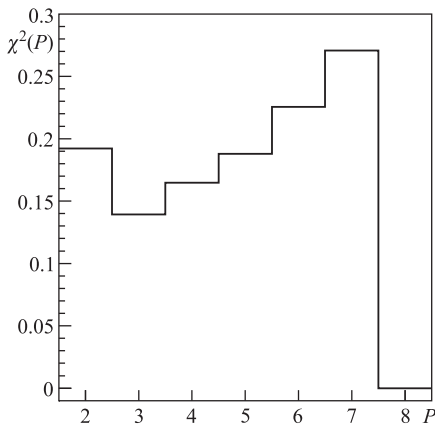


Рис. 3. Зависимость χ^2 от основания P в различных наборах распределений для пяти уровней регулярного бинарного каскада с допустимыми $1/8$ -ми частями и заполняемыми 1 -й, 8 -й частями η -пространства

исследования. Анализировался пятиуровневый регулярный бинарный каскад с допустимыми $1/8$ -ми частями и заполняемыми 1 -й, 8 -й частями η -пространства. На рис. 3 показана зависимость величины $\chi^2(P)$ от значения основания P для различных наборов распределений. Как видно из рисунка, представленная зависимость имеет глобальный и локальный минимумы. Оптимальный набор соответствует глобальному минимуму. Анализ регулярных бинарных пятиуровневых каскадов с различными $1/k$ частями ($k = 3-20$) и заполняемыми первой и последней частями η -пространства показал, что значение $\chi^2_{lim} = 10^{-5}$ достаточно для определения оптимального набора бинов в каждом из рассмотренных каскадов.

Отметим, что предложенный метод позволяет анализировать не только партоновые ливни, но и любые другие фрактальные пространства, имеющие ту же структуру.

Далее демонстрируются возможности РаС-метода для определения размерности и других характеристик фрактала на примерах регулярных и случайных N -арных каскадов с допустимыми $1/k$ -ми частями исследуемого пространства.

2.2. Регулярные бинарные каскады. В данном подразделе рассматриваются различные регулярные бинарные каскады с допустимыми $1/k$ -ми частями псевдобыстротного пространства. Они имеют одинаковую фрактальную размерность, но разные пространственные структуры. Рассмотрим два партоновых каскада с допустимыми $1/5$ -ми η -пространства. В первом заполняются 1 -я, 5 -я, а во втором — 2 -я, 4 -я части. Фрактальная размерность таких множеств равна $D_F = \ln 2 / \ln 5 \approx 0,430677$. На рис. 4, а и б приведены схемы трех уровней этих каскадов. Видно, что в рассматриваемых каскадах углы раскрытия различны. Это значит, что знание фрактальной размерности D_F и допустимых $1/k$ частей быстротного пространства недостаточно для восстановления закона формирования каскада. Анализ массивов структур позволяет установить этот закон. Процедура анализа включает следующие шаги:

1. Нахождение массивов структур различных уровней для оптимального набора бинов.

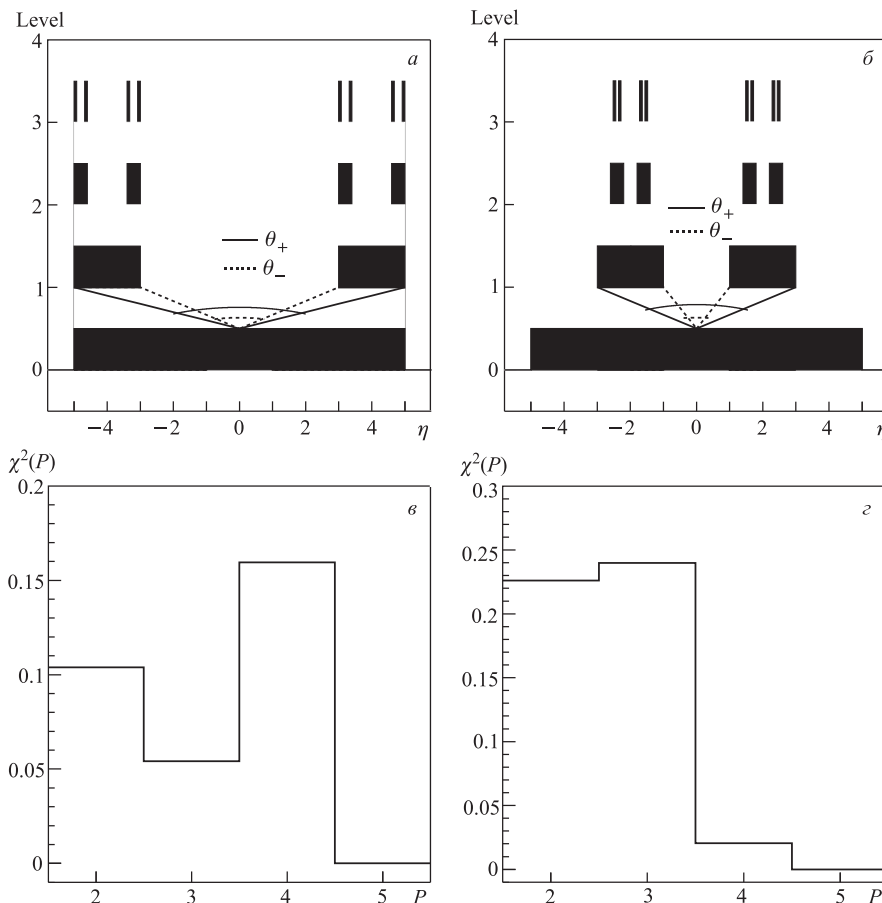


Рис. 4. Регулярные бинарные каскады с допустимыми $1/5$ -ми частями псевдобыстротного пространства. Зависимости допустимых частей η -пространства от уровня каскада (а, б). Зависимости χ^2 от основания P в различных наборах распределений для пяти уровней каскадов с заполняемыми 1-й, 5-й (в) и 2-й, 4-й (г) частями η -пространства

Для примера рассмотрим бинарный регулярный каскад с допустимыми $1/3$ -ми и заполняемыми 1-й, 3-й частями η -пространства (рис. 1). Структура первого уровня отражает его заполнение и определяется единственным массивом, состоящим из трех элементов (101). Второй уровень описывается двумя одинаковыми массивами (101). Каждый массив соответствует структуре заполняемых частей первого уровня. Структура третьего уровня определяется четырьмя одинаковыми массивами (101).

2. Проверка регулярности каждого уровня. Уровень считается регулярным, если структуры внутри уровня самоподобны.

3. Проверка регулярности каскада. Каскад считается регулярным, если каждый уровень регулярный и структуры уровней самоподобны.

4. Определение структуры регулярного каскада. Заполняемые части пространства соответствуют номерам ненулевых элементов массива структур первого уровня.

Приведем в качестве примера результаты восстановления структуры описанных выше каскадов предлагаемым РаС-методом.

На рис. 4, *в, г* показана зависимость χ^2 от величины основания P в различных наборах распределений для каскадов с заполняемыми 1-й, 5-й и 2-й, 4-й частями. Для обоих каскадов оптимальный набор распределений соответствует значению $P = 5$, определяемому по положению глобального минимума. Количество бинов в нем изменяется по степенному закону с основанием пять $M_i = 5^i$.

Рис. 5, *а* демонстрирует зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M для оптимального набора. Представленная зависимость одинакова для обоих каскадов. Как видно из рисунка, фрактальная размерность $D_F \approx 0,430677$, определяемая параметром наклона линейной аппроксимации $b(P)$ участка без плато, восстанавливается с максимальной точностью.

Результаты анализа массивов структур приведены на рис. 5, *б, в*, которые показывают зависимость элементов (ось X) и количества (ось Y) массивов структур от уровня каскада (ось Z) для оптимального набора бинов. Видно, что оба каскада являются регу-

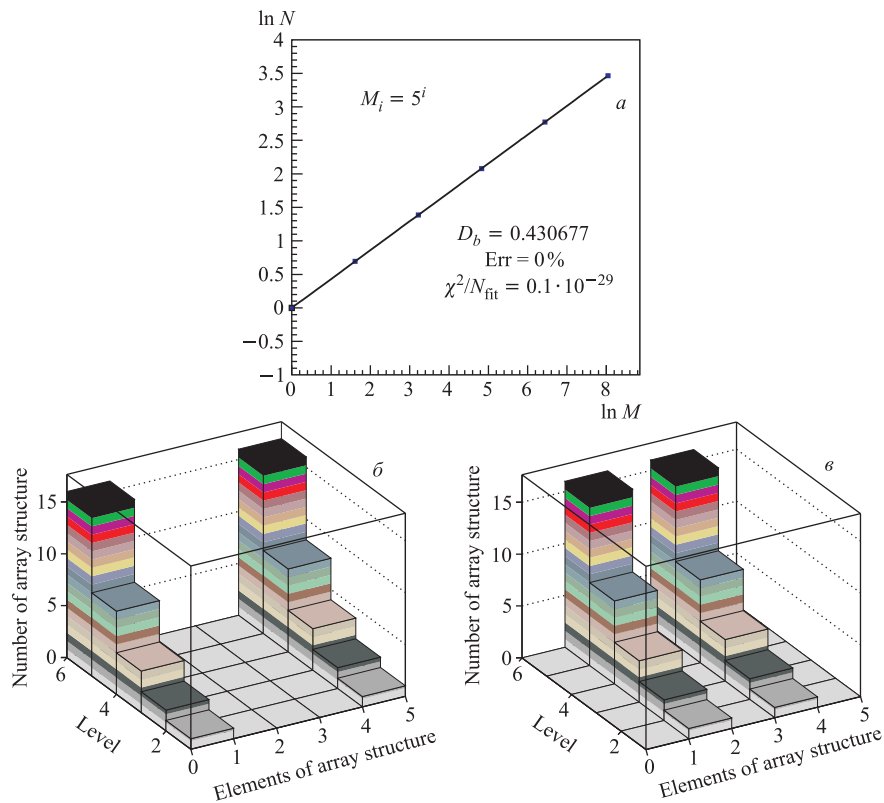


Рис. 5. Фрактальный анализ пяти уровней регулярных бинарных каскадов с допустимыми 1/5-ми частями псевдобыстротного пространства для оптимального набора распределений. Зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M в распределениях (*а*). Зависимости элементов и количества массивов структур от уровня каскада для каскадов с заполняемыми 1-й, 5-й (*б*) и 2-й, 4-й (*в*) частями η -пространства

лярными (т.е. массивы структур внутри уровней одинаковы и совпадают для каждого из уровней). Номера ненулевых элементов массивов структур (например, первого уровня) соответствуют номерам заполняемых частей η -пространства. Это и определяет структуру каскада.

Таким образом, полученные результаты подтверждают, что предлагаемый PaC-метод позволяет найти оптимальный набор распределений для анализа каскада, определить его фрактальную размерность с максимальной точностью, регулярность и структуру.

2.3. N -арные каскады. В описанных выше каскадах в каждом расщеплении образовывались два партона. В реальных событиях партонный ливень может содержать расщепления на три и более партона. PaC-метод также позволяет анализировать каскады, в которых родительский партон расщепляется на N дочерних. По аналогии с бинарным, такие каскады будем называть N -арными.

Предположим, что в процессе развития ливня образовалось 16 партонов. В этом случае возможны два «сценария»: два уровня 4-арного или четыре уровня бинарного кас-

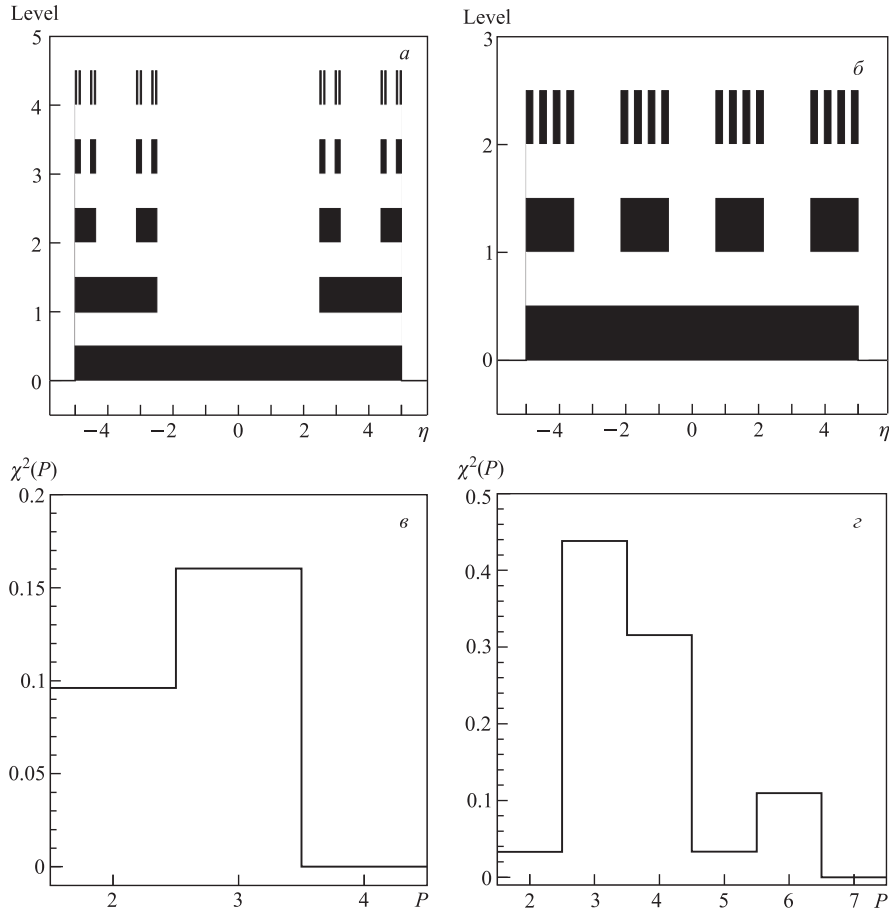


Рис. 6. Регулярный четырехуровневый бинарный (а, в) и двухуровневый 4-арный (б, г) каскады. Зависимости допустимых частей η -пространства от уровня каскада (а, б). Зависимости χ^2 от основания P в различных наборах распределений (в, г)

када. Пусть в бинарном каскаде допустимы 1/4 части псевдобыстротного пространства и заполняются 1-я и 4-я части. В 4-арном каскаде допустимы 1/7-е части псевдобыстротного пространства и заполняются 1-я, 3-я, 5-я и 7-я части. На рис. 6, а, б представлены схемы этих каскадов. Фрактальные размерности бинарного и 4-арного каскадов равны $D_F = \ln 2 / \ln 4 = 0,5$ и $D_F = \ln 4 / \ln 7 \approx 0,712414$ соответственно.

Зависимость χ^2 от величины P в различных наборах распределений для обоих каскадов приведена на рис. 6, в, г. Положение глобальных минимумов $P = 4$ (рис. 6, в) и $P = 7$ (рис. 6, г) определяет оптимальный набор распределений для каждого из каскадов. Количество бинов в оптимальном наборе распределений изменяется по степенному закону с основанием четыре $M_i = 4^i$ для бинарного и основанием семь $M_i = 7^i$ для 4-арного каскадов.

На рис. 7, а, б показана зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M в оптимальном наборе распределений для каждого из каскадов. Значения фрактальной размерности $D_F = 0,5$ для бинарного и $D_F \approx 0,712414$ для 4-арного каскадов, определяемые наклоном b участков графиков без плато, находятся с максимальной точ-

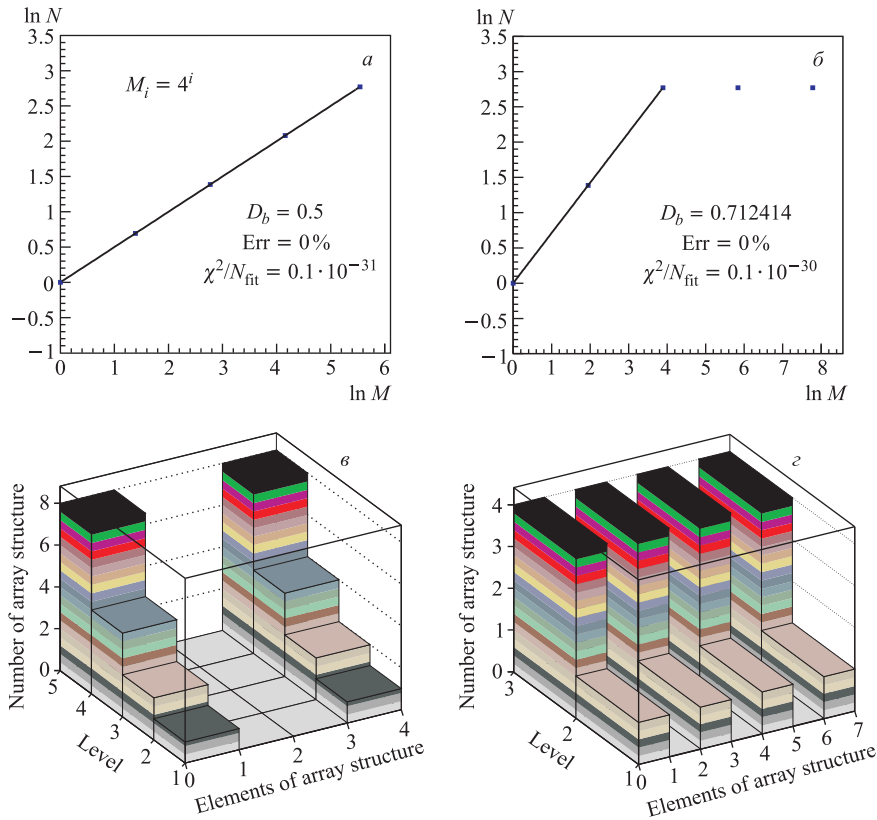


Рис. 7. Фрактальный анализ четырех уровней бинарного (а, в) и двух уровней 4-арного (б, г) регулярного каскада для оптимального набора распределений. Зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M в распределениях (а, б). Зависимость элементов и количества массивов структур от уровня каскада (в, г)

ностью. Количество уровней каскада $N_{lev} = N_{fit} - 1$ зависит от количества точек N_{fit} на участке без плато. Как видно из рисунков, число уровней $N_{lev} = 4$ для бинарного и $N_{lev} = 2$ для 4-арного каскада определяются однозначно. Количество партонов в каждом акте расщепления определяется количеством ненулевых элементов в первом распределении $N_{part} = N(M_1)$. В рассматриваемых каскадах значения $N(M_1) = 2$ и $N(M_1) = 4$ соответствуют количеству партонов в расщеплениях для бинарного и 4-арного каскадов соответственно.

Далее, следуя алгоритму, проведем анализ массивов структур каждого из каскадов. Зависимость элементов (ось X) и количества (ось Y) массивов структур от уровня каскада (ось Z) в оптимальном наборе распределений представлена на рис. 7, *в, г*. Видно, что для обоих каскадов массивы структур внутри каждого уровня одинаковы и совпадают для всех уровней, т. е. представленные каскады являются регулярными. Номера ненулевых элементов массива структур первого уровня равны 1 и 4 для бинарного и 1, 3, 5, 7 для 4-арного, т. е. структуры каскадов восстановлены.

Таким образом, полученные результаты подтверждают, что РаС-метод позволяет анализировать регулярные N -арные каскады. При этом наряду с фрактальной размерностью и структурой каскада восстанавливается также количество уровней и партонов в каждом акте расщепления.

2.4. Случайные каскады. В рассмотренных выше каскадах угол раскрытия при расщеплении партона был симметричен относительно направления родительского партона. Рассмотрим каскады, в которых дочерние партоны могут вылетать не симметрично относительно направления родительского партона и в каждом акте расщепления заполняемые части пространства могут изменяться. Такие каскады будем называть случайными. В качестве примера рассмотрим 3-арный случайный каскад. В процессе развития ливня в каждом акте рождаются три партона. Для каждого из них допустимы только $1/6$ части псевдобыстротного пространства родительского партона. Расположение этих частей в каждом акте расщепления случайно. Рассмотрим три уровня такого каскада (27 партонов в конечном состоянии). Соответствующая зависимость допустимых частей η -пространства от уровня каскада показана на рис. 8. В этом случае множество допустимых интервалов псевдобыстрот образует случайный фрактал с размерностью $D_F = \ln 3 / \ln 6 \approx 0,613147$. Проведем фрактальный анализ этого каскада РаС-методом.

Зависимость χ^2 от величины основания P в различных наборах представлена на рис. 9, *а*. Положение глобального минимума $P = 6$ определяет оптимальный набор

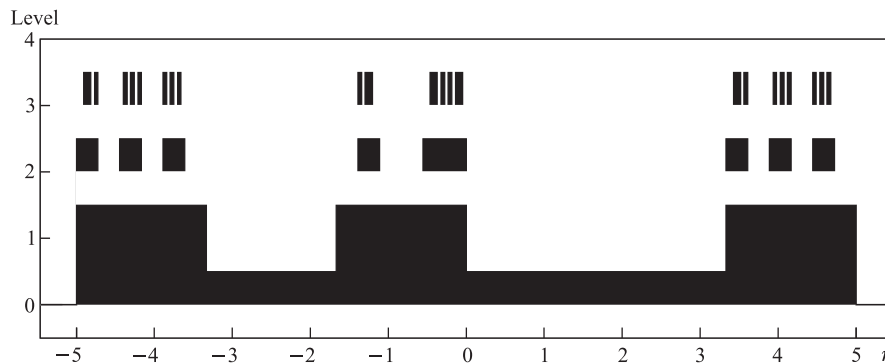


Рис. 8. Зависимость допустимых частей η -пространства от уровня каскада для случайного 3-арного каскада с допустимыми $1/6$ -ми частями псевдобыстротного пространства

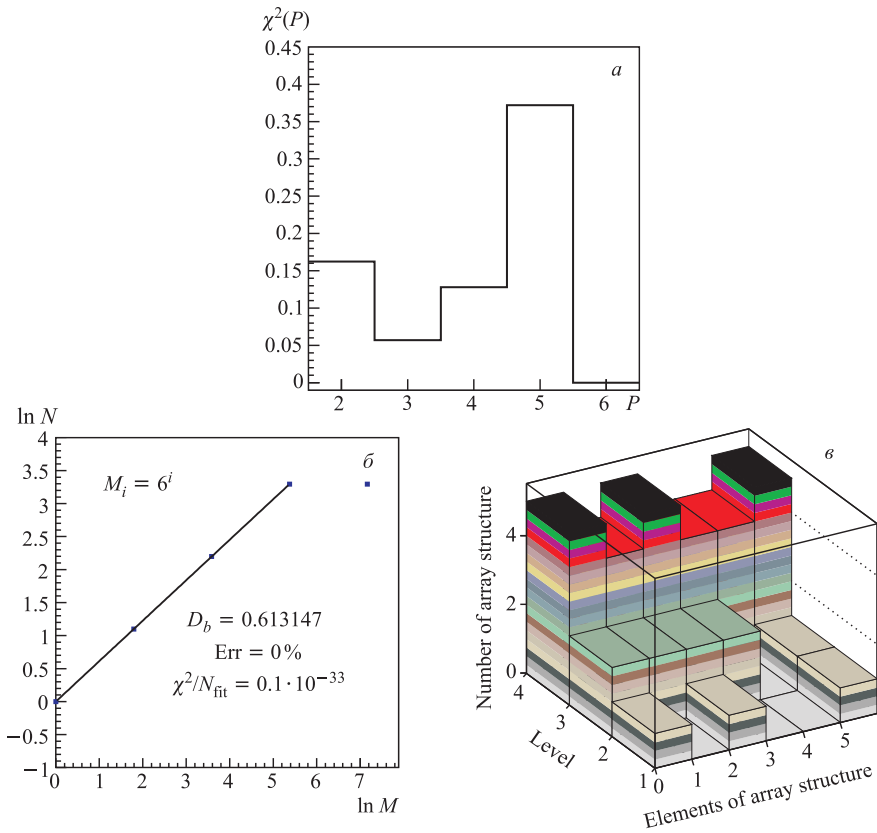


Рис. 9. Фрактальный анализ трех уровней 3-арного случайного каскада с допустимыми $1/6$ -ми частями псевдобыстротного пространства. Зависимость χ^2 от основания P в различных наборах распределений (а). Зависимости количества ненулевых бинов N от количества бинов M в распределениях (б) и элементов и количества массивов структур от уровня каскада (в) для оптимального набора распределений

распределений, количество бинов в котором изменяется как степень основания шесть, $M_i = 6^i$.

Зависимость количества ненулевых бинов N от количества бинов M для оптимального набора распределений показана на рис. 9, б. Значение фрактальной размерности $D_F \approx 0,613147$, количество уровней $N_{\text{lev}} = N_{\text{fit}} - 1 = 3$ и партонов в каждом акте расщепления $N_{\text{part}} = 3$ определяются наклоном b участка без плато, количеством точек на этом участке и количеством ненулевых элементов в первом распределении соответственно.

Зависимость элементов (ось X) и количества (ось Y) массивов структур от уровня каскада (ось Z) для оптимального набора бинов представлена на рис. 9, в. Массивы структур внутри каждого уровня не равны друг другу. Это указывает на случайный тип каскада.

Таким образом, полученные результаты подтверждают, что РаС-метод позволяет анализировать случайные каскады.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многие процессы (множественное рождение, фрагментация, ...) и объекты (адроны, ядра, струи, ...) исследуемые в физике высоких энергий, обладают свойством самоподобия. Оно проявляется в существовании одинаковой структуры на различных масштабах. Изучение свойств самих объектов, механизмов взаимодействия их составляющих и процесса образования адронов и струй требует развития методов, в основе которых заложены самоподобные структуры (объекты, законы их формирования).

В работе предложен новый метод фрактального анализа, учитывающий эти требования. Он включает важные особенности ВС-метода (Box Counting method), применяемого для определения фрактальной размерности множеств.

Приведены результаты тестирования ВС-метода на примере партонного ливня, соответствующего триадному канторовскому множеству. Установлено существование оптимального набора распределений, позволяющего определить фрактальную размерность с максимальной точностью. Показано, что закон формирования фрактала связан с количеством бинов в распределениях этого набора.

Рассмотрен более широкий класс регулярных каскадов с допустимыми в процессе формирования $1/k$ -ми частями пространства. Установлено, что для таких каскадов оптимальные наборы распределений зависят от значения k . Отметим, что ВС-метод не содержит процедуры поиска величины k .

В данной работе предложен новый метод P -адических покрытий (PaC-метод: P -adic Coverage method), который позволяет автоматически выполнить поиск оптимального набора распределений. Описан алгоритм, реализующий предлагаемый метод. Проведен фрактальный анализ регулярных и случайных N -арных партонных каскадов с допустимыми $1/k$ -ми частями η -пространства. Установлено, что данный метод позволяет найти оптимальный набор распределений для исследуемого каскада, определить его фрактальную размерность с максимальной точностью, количество уровней и партонов в каждом расщеплении в процессе развития ливня, а также тип каскада (регулярный или случайный) и его структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dremin I. et al.* // Usp. Fiz. Nauk. 1990. V. 160, No. 8. P. 105.
2. *Rogachevsky O. V.* // Proc. of the 33rd Intern. Conf. on High Energy Physics / Ed. by A. Sissakian, G. Kozlov, E. Kolganova. World Sci., 2006. V. 1. P. 443.
3. *Zborovský I. et al.* // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 5548;
Tokarev M., Dedovich T. // Intern. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 3495;
Tokarev M., Rogachevski O., Dedovich T. // Nucl. Part. Phys. 2000. V. 26. P. 1671;
Zborovský I., Tokarev M. // Part. Nucl., Lett. 2005. V. 2. P. 312;
Zborovský I., Tokarev M. // Phys. At. Nucl. 2007. V. 70. P. 1294;
Zborovský I., Tokarev M. // Intern. J. Mod. Phys. A. 2009. V. 24. P. 1417;
Tokarev M., Zborovsky I., Dedovich T. // Proc. of Very High Multiplicity Physics Workshops / Ed. by A. Sissakian, J. Manjavidze. World Sci., 2008. P. 97.
4. *Polyakov A.* // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1970. V. 59. P. 542; 1971. V. 60. P. 1572.
5. *Koba Z., Nielsen H., Olesen P.* // Nucl. Phys. B. 1972. V. 40. P. 317.

6. *Matveev V., Muradyan R., Tavkhelidze A.* // Part. Nucl. 1971. V. 2. P. 7.
7. *Brodsky S., Farrar G.* // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1153.
8. *Adamus M. et al.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 185. P. 200.
9. *Bjålas A.* // Nucl. Phys. B. 1986. V. 273. P. 703.
10. *Hwa R.* // Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 1456.
11. *Sjostrand T. et al.* // Comp. Phys. Commun. 2008. V. 178. P. 852.
12. *Båhr M. et al.* hep-ph/0809.2002. 2008.
13. *Gleisberg T. et al.* // JHEP. 2009. V. 0902. P. 007.
14. *Gyulassy M. et al.* // Comp. Phys. Commun. 1994. V. 83. P. 307.
15. *Lonnblad L. et al.* // Comp. Phys. Commun. 1992. V. 71. P. 15.
16. *Sjostrand T.* // Comp. Phys. Commun. 2001. V. 135. P. 238.
17. *Dremin I. et al.* // Usp. Fiz. Nauk. 1993. V. 163. P. 1.
18. *Hwa R., Nazirov M.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 741.
19. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
20. *Barabasi A., Stanley H.* Fractal Concepts in Surface Growth. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1995.
21. *Saa A. et al.* // Nonlin. Processes Geophys. 2007. V. 14. P. 603.
22. *Roueff F. et al.* // Proc. of the Conf. «Fractals 98», Malta, Oct. 1998.
23. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
24. *Pavlov A. et al.* // Usp. Fiz. Nauk. 2007. V. 50. P. 8.
25. *Mandelbrot B.* // Science. 1967. V. 155. P. 636.

Получено 20 января 2011 г.