Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 7(170). С. 1232–1241

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

И. Ф. Гинзбург[1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
и Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

В этой работе обсуждаются проблемы, которые обычно ускользают от слушателей курса электродинамики. Это вопросы о том, 1) как «выглядит» фотон, наблюдаемый в природе; 2) как может получаться интерференционная картина от источника, содержащего множество некогерентно излучающих атомов; 3) как «замедляется» свет в среде. Ответы на эти вопросы (если они и обсуждаются) разбросаны по разным учебникам. Мы же следуем изложению учебника [1].

In this lecture I discuss issues that usually escape the attention of students in a standard course of electrodynamics. These are the following questions: 1) What is the photon, which we observe in Nature? 2) How can an interference pattern appear from a source that contains very large number of atoms radiating incoherently? 3) How does light slow down in a medium? Answers to these questions (if they are given at all) are spread across different textbooks. Here I follow our textbook [1].

PACS: 03.50.De; 32.80.-t; 42.50.Gy

1. ЧТО ТАКОЕ ФОТОН

Начнем с вопроса о том, как понимать термин «фотон» в применении к наблюдаемым нами объектам. Выполняются ли для него соотношения $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$? Какое отношение имеют те кванты света, фигурирующие в описании эксперимента, к плоским волнам, которые должны быть протяженны во всем пространстве?

Реальные кванты света, очевидно, не длятся вечно и не простираются по всей Вселенной. Это не плоские волны, а волновые пакеты, локализованные в некоторой области пространства и, следовательно, имеющие некоторый разброс частот и волновых векторов. Размер области локализации и разброс частот связаны друг с другом соотношением неопределенностей.

Это означает, что чисто монохроматический свет создать невозможно. Возможен только *почти* монохроматический свет. Представление о монохроматическом свете есть лишь *приближение*, иногда очень хорошее, иногда — недостаточное. Соотношения $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ не являются точными в том смысле, что сами значения ω и k не определяются точно.

[1] E-mail: ginzburg@math.nsc.ru

2. ДЛИНА КОГЕРЕНТНОСТИ

Наблюдать интерференцию от двух действительно разных обычных источников света в оптическом диапазоне невозможно[1]. В обычной ситуации для того чтобы пронаблюдать интерференцию, луч одного цвета (монохроматический или почти монохроматический) разделяют на два луча, которые идут по двум разным путям и приходят на экран с разностью хода L. На экране видны интерференционные полосы, отвечающие разным L; при очень больших значениях L они исчезают.

В любом обычном источнике миллионы атомов излучают свет. Они излучают некогерентно: каждый из них испускает фотон, начиная со своего момента времени, отражающего предшествующую историю этого конкретного атома, а испущенные ими фотоны имеют немного разные частоты. *Почему же видна интерференционная картина?* Почему интерференция не видна, когда разность хода L превышает некоторое значение ρ — *длину когерентности?* Чем определяется длина когерентности для данного источника[2]?

Интерференционное слагаемое, коррелятор. Пусть два луча, получившихся из расщепления одного луча, приходят в точку наблюдения по разным путям. Разность времен прохождения этих лучей от источника до точки наблюдения, умноженную на скорость света c, называют *оптической разностью хода лучей* L. Электрическое поле $\mathbf{E}$ в точке наблюдения $\mathbf{r}$ является суммой двух полей: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$. Интенсивность усредненного наблюдаемого сигнала можно записать в виде $I = I_1 + I_2 + D$, где (с точностью до несущественного множителя)

$$I_1 = \langle \mathbf{E}_1^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad I_2 = \langle \mathbf{E}_2^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad D = 2\langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \rangle. \tag{1}$$

Здесь I_1 и I_2 — интенсивности, создаваемые каждой волной по отдельности, а слагаемое D описывает степень взаимозависимости волн $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Такую усредненную величину для произведения пары случайных величин называют *коррелятором* (или корреляционной функцией) этих величин.

В нашем случае $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = k\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t + L/c)$, т. е. $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ — поле той же волны, что и $\mathbf{E}_1$, но прошедшей до точки наблюдения путь на L длиннее, чем первая. При этом величину D называют (запаздывающим) автокоррелятором поля волны. После усреднения зависимости от $\mathbf{r}$ и t исчезают, и в нашем автокорреляторе остается только зависимость от времени запаздывания L/c, или — что то же — от оптической разности хода L, т. е. $D \equiv D(L)$.

Чтобы не перегружать наше изложение излишними деталями, связанными с поляризацией фотона, далее мы забываем о векторной природе поля волны и рассуждаем так, как будто это поле скалярное (как звук в воздухе), и принимаем $k = 1$. С той же целью мы ограничимся рассмотрением одномерного случая, когда волны движутся вдоль оси z. С этой же целью мы используем далее комплексную запись величин, причем $\langle AB \rangle \Rightarrow \mathrm{Re}\,\langle AB^* \rangle/2$.

Обсудим *некоторые черты процесса излучения отдельными атомами* в среде. Некоторые из этих атомов переходят в возбужденное состояние (под воздействием соседей при

---

[1] Изобретение лазеров открыло такую возможность. Это очень трудный эксперимент. Интерференцию между двумя лазерными лучами впервые удалось наблюдать в 1963 г. [2].

[2] Ниже речь идет только о продольной длине когерентности.

тепловом движении или внешнего электромагнитного поля, в частности света ...). Это состояние нестабильно: возбужденный атом распадается на невозбужденный атом и фотон (собственно излученное поле) — это и есть процесс излучения. Вероятность распада за малое время dt пропорциональна dt, ее записывают как dt/τ, где величина τ определяется только внутренними свойствами возбужденной системы. Число актов излучения за интервал времени dt пропорционально наличному числу возбужденных атомов N, т. е. за это время число возбужденных атомов уменьшается на $dN = -Ndt/\tau$. Отсюда следует, что N убывает со временем по закону $N = N_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. По такому же закону убывает и интенсивность излученного света. Поэтому среднее значение напряженности излученного света убывает по закону $\mathrm{e}^{-t/2\tau}$.

С учетом того, что излучается некоторая (почти) фиксированная частота ω, зависимость от времени *поля волны, создаваемой одним атомом*, описывается множителем $\mathrm{e}^{-(t-t_1)/(2\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0(t-t_1)}\ \theta(t-t_1)$, где t_1 — момент начала излучения и $\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x>0 \\ 0 \text{ при } x<0 \end{cases}$ — ступенчатая функция, т. е. множитель $\theta(t-t_1)$ означает, что при $t-t_1<0$ сигнала нет. Амплитуда электрического поля, порождаемая атомом, расположенным в точке z_1, есть

$$E_1(z,t) = A_1\,\mathrm{e}^{-T_1/(2\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\omega T_1}\theta(T_1), \quad \text{где} \quad T_1 = t - t_1 - \frac{z-z_1}{c}. \tag{2}$$

Величину τ называют *временем жизни* этого возбужденного состояния. Можно говорить, что один атом излучает в течение времени τ и испускает при этом *цуг волн* длиной $c\tau$. Все вышесказанное хорошо описывает ситуацию, когда число колебаний поля внутри этого цуга достаточно велико:

$$\omega\tau \gg 1. \tag{3}$$

(Для обычных атомных систем в оптической области $\omega\tau \sim 10^7$–10^8.) Если это условие не выполнено, однозначно разделить по времени процессы возбуждения и излучения уже не удается.

Такой свет, очевидно, немонохроматичен, и величина $1/\tau$ определяет степень немонохроматичности сигнала, излучаемого отдельным атомом ($\Delta\omega \approx 1/\tau$), или *собственную ширину спектральной линии*. Можно сказать, что наш цуг волн представляет собой классический образ немонохроматического фотона.

2.1. Многоатомные источники. Перейдем теперь к описанию явлений, вызываемых разными источниками света, содержащими много атомов. Мы будем считать, что наш источник почти монохроматического света с частотой ω_0 — разреженный газ.

Рассмотрим луч света, распространяющийся от него в направлении оси z. Свет от источника есть сумма волн, излученных отдельными атомами. Для определенности будем считать, что координаты атомов z_i разбросаны в не очень большом интервале.

2.2. Холодный разреженный газ. Рассмотрим сначала самый простой случай источника с почти неподвижными атомами. Эти атомы возбуждаются и излучают свет одной и той же частоты ω_0 с волновым числом $k_0 = \omega_0/c$. Полное поле излучения — сумма полей волн, создаваемых разными атомами, т. е. одинаковых волновых пакетов с разным временем и позицией старта:

$$E(z,t) = \sum_i A_i\,\mathrm{e}^{-T_i/(2\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\omega T_i}\theta(T_i), \quad \text{где} \quad T_i = t - t_i - \frac{z-z_i}{c} \equiv t - \frac{z}{c} - \eta_i. \tag{4}$$

Вклады отдельных атомов различаются положениями z_i и моментами начала излучения t_i, которые можно считать случайными; взамен них мы ввели одну случайную величину $\eta_i = t_i - z_i/c$.

Вычислим сначала интенсивность света на экране в некоторой точке оси z от одного луча в момент времени t:

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\langle E(z,t)E^*(z,t)\rangle = \left\langle \sum_i \frac{|A_i|^2}{2}\,\mathrm{e}^{-T_i/\tau}\theta(T_i)\right\rangle + \\ + \mathrm{Re}\left\langle \sum_{i\neq j} \frac{A_i A_j^*}{2}\,\mathrm{e}^{-(T_i+T_j)/(2\tau)}\,\mathrm{e}^{i\omega(\eta_j-\eta_i)}\theta(T_i)\theta(T_j)\right\rangle. \quad (5)$$

Далее мы полагаем, что интенсивности, создаваемые каждым атомом по отдельности, одинаковы, $|A_i|^2/2 = I_1$. Второе слагаемое в сумме (5), содержащее произведения полей, излучаемых *разными* атомами ($A_i A_j^*$), при усреднении исчезает в силу случайности величин η_i. Остается только первое слагаемое, представляющее сумму вкладов всех атомов. Из этого вклада в сумме остаются только слагаемые, для которых величина $\mathrm{e}^{-T_i/\tau}$ не слишком мала, т. е. $T_i \leqslant \tau$ (цуг дошел до точки наблюдения). Обозначая через N число таких слагаемых, мы получаем окончательно

$$I = NI_1. \quad (6)$$

Перейдем теперь к вычислению интересующего нас (авто)коррелятора поля излучения (2), который ответственен за наблюдение интерференции, приняв для определенности, что $L > 0$ (в этих формулах $T_j \equiv t - z/c - \eta_j$):

$$D(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\langle E(z,t)E^*\left(z, t+\frac{L}{c}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\left(\left\langle \sum_i |A_i|^2 e^{-(T_i)/\tau}\theta(T_i)\right\rangle + \\ + \mathrm{Re}\left\langle \sum_{i\neq j} A_i A_j^*\,\mathrm{e}^{-(T_i+T_j)/2\tau}\,\mathrm{e}^{i\omega(\eta_j-\eta_i)}\theta(T_i)\theta\left(T_j+\frac{L}{c}\right)\right\rangle\right)\,\mathrm{e}^{-L/(2c\tau)}\,\mathrm{e}^{i\omega L/c}\right].$$

Как и раньше, второе слагаемое в этой сумме исчезает при усреднении в силу случайности величин η_i. Первое слагаемое опять выражается через I_1, и мы получаем в итоге

$$D(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\langle E(z,t)E^*\left(z, t+\frac{L}{c}\right)\right\rangle = NI_1\,\mathrm{e}^{-L/(2c\tau)}\cos{(k_0 L)}. \quad (7)$$

Итак, наш коррелятор не мал и явления интерференции (представляемые множителем $\cos{(k_0 L)}$) наблюдаемы до тех пор, пока экспонента $\mathrm{e}^{-L/(2c\tau)}$ не мала, т. е. при разностях хода, не превышающих величины

$$\rho_c = 2c\tau = \frac{2\pi c}{\Delta\omega_c}. \quad (8)$$

Эту длину называют *корреляционной длиной всего пучка* (*длиной когерентности*), которая показывает, на каком расстоянии поле все еще «помнит» свое начальное значение.

(С точностью до двойки) она совпадает с длиной отдельного цуга, хотя вклады отдельных цугов в сумме и не дают интерференционного эффекта друг с другом[1]. Для видимого света, испускаемого атомами азота или кислорода в воздухе, $\rho_c \sim 1$ м.

2.3. Нагретый разреженный газ. Рассмотрим теперь более реалистический случай, когда *источник — такой же газ, но нагретый до некоторой температуры* T.

Спектральный состав света. В рассматриваемом случае к собственному разбросу частот $\Delta\omega_c = 2\pi/\tau$ добавляется разброс, обусловленный тепловым движением излучающих атомов. Из-за движения атома со скоростью v (в направлении оси z) частота излучаемого им света меняется в силу эффекта Доплера. Поскольку тепловая скорость v намного меньше скорости света c, для изменения частоты можно использовать нерелятивистскую формулу $\omega' = \omega(1 - v/c)$ и, соответственно, $k' = k(1 - v/c)$.

Далее выполняется усреднение по распределению Максвелла $\rho(v)=(\sqrt{\pi}/v_T)\,\mathrm{e}^{-(v/v_T)^2}$, где $v_T = \sqrt{2kT/m}$ — характерная тепловая скорость атомов (молекул), она того же порядка, что и скорость звука. Для излучения при комнатной температуре соответствующее доплеровское (тепловое) уширение спектральной линии составляет $\Delta\omega_M/\omega_0 \sim v_T/c \sim 10^{-6}$, что значительно больше собственного разброса частот.

Коррелятор. В этом случае предыдущие выкладки и рассуждения воспроизводятся с естественной заменой $\omega_0 \to \omega'$. Слагаемые $\propto A_i A_j^*$ по-прежнему исчезают в силу случайности времен излучения. Выражение для коррелятора теперь приобретает вид

$$D(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\langle E(z,t)E^*\left(z, t + \frac{L}{c}\right)\right\rangle =$$
$$= \mathrm{Re}\int dv\rho(v)\left[\frac{1}{2}\left\langle \sum_i |A_i|^2\,\mathrm{e}^{-T_i/\tau}\theta(T_i)\right\rangle \mathrm{e}^{-L/(2c\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\omega' L/c}\right] =$$
$$= NI_1\,\mathrm{e}^{-L/(2c\tau)}\sqrt{\pi}\int\frac{dv}{v_T}\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2} - i\omega_0\frac{L}{c} + \frac{i\omega_0 vL}{c^2}\right). \quad (9)$$

После замены переменных $v \to v - i\omega_0 v_T^2 L/2c^2$ интегрирование по v дает

$$D(L) = \frac{1}{2}\Big\langle E(z,t)E^*(z+L,t)\Big\rangle = NI_1\,\mathrm{e}^{-L/(2c\tau)}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{-ik_0L - L^2/\rho_T^2} =$$
$$= NI_1\,\mathrm{e}^{-L/\rho_c - L^2/\rho_T^2}\cos(k_0L), \quad \text{где} \quad \rho_T = \frac{2c}{k_0 v_T} = \left(\frac{\lambda_0}{\pi}\right)\left(\frac{c}{v_T}\right). \quad (10)$$

Итак, в этом случае *длина когерентности*, показывающая, до каких пор функция корреляции не слишком мала, есть $\rho_T = 2c/(k_0v_T) = 2\pi c/\Delta\omega_T$. Она значительно меньше длины отдельного цуга. Для видимого света, испускаемого атомами воздуха при комнатной температуре, $\rho_T \sim 30$ см. Соответственно, и наблюдаемая ширина линии составляет в разреженном газе $\Delta\omega_T = \omega_0(v_T/c) \gg 1/\tau_c$.

При больших значениях L становятся важными и «хвосты» цугов, давно прошедших экран. Более тонкое рассмотрение показывает, что во всех случаях при $L > \rho_T > c\tau$ корреляционная функция $D(L)$ убывает как e^{-L/ρ_T}.

[1] Различие связано с расхождением в *определении* того, где можно считать, что цуг уже кончился и коррелятор достаточно мал.

2.4. Более плотные среды. В плотном газе важную роль играет *ударное уширение* спектральной линии. Равномерное движение молекул, для которого работает предыдущее описание, прерывается соударениями, среднее время между которыми составляет $\tau_y \sim 1/(v_T N\sigma)$, где N — плотность числа частиц и $\sigma \sim 10^{-15}$ см^2 — сечение взаимодействия молекул друг с другом. В момент удара из-за изменения скорости молекулы частота света меняется из-за эффекта Доплера. Можно сказать, что прежний (почти) монохроматический цуг разбивается на более короткие цуги средней длины $c\tau_y$ с разными частотами. При возрастании плотности газа длина $c\tau_y$ становится меньше длины ρ_T и именно $c\tau_y$ является длиной когерентности ρ_c, при превышении которой первоначальные значения полей в среднем забываются. При этом ударное уширение спектральной линии $\Delta\omega_y = 2\pi/\tau_y$ является определяющим.

В твердом теле соседние молекулы при излучении воздействуют друг на друга, это приводит к дополнительному изменению ширины спектральной линии и длины когерентности.

В любом случае основной вывод сохраняется — *длина когерентности (длина корреляции) равна* $2\pi c/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — разброс частот основного сигнала, вызванный всеми действующими механизмами (полная ширина спектральной линии).

Хочется обратить ваше внимание на то, что предложенные рассуждения можно рассматривать как крайне упрощенное введение в обсуждение осцилляций нейтрино [3].

3. ПОЧЕМУ ДЛЯ БОЛЬШИНСТВА ОПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО МАГНИТНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ $\mu = 1$

Свет — это электромагнитная волна, и, проходя сквозь прозрачную среду, световая волна воздействует на нее как электрической, так и магнитной компонентой. Однако при описании большинства оптических явлений разговор о коэффициенте магнитной проницаемости, связывающем напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ и магнитную индукцию $\mathbf{B}$: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, обычно не заходит, фактически считается, что $\mu = 1$. Почему это — хорошее приближение?

Заметим для начала, что энергия n-го состояния атома водорода есть

$$E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} \equiv -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137. \tag{11}$$

Для атома водорода по теореме вириала средние значения кинетической и потенциальной энергий $\langle T\rangle \equiv \langle p^2/2m\rangle$ и $\langle V\rangle$ связаны соотношением $2\langle T\rangle = -\langle V\rangle$. Поэтому среднее значение кинетической энергии выражается через энергию состояния соотношением $\langle p^2/2m\rangle = -E_n$. Это означает, что характерное значение скорости электрона на n-й «орбите» $v_n = c\alpha/n$, вообще в атоме $v \leqslant c\alpha$.

Когда материальная среда находится под действием внешних электрических и магнитных полей, ее частицы смещаются, создавая отличие $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ от $\mathbf{B}$. При этом $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\boldsymbol{\mathcal{P}}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, где векторы поляризации среды $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ и ее намагниченности $\mathbf{M}$ представляют собой средние суммарные значения электрического дипольного момента частиц среды и их магнитного дипольного момента соответственно. В прозрачных средах обычно $\boldsymbol{\mathcal{P}} = (\varepsilon - 1)\mathbf{E}/4\pi$, $\mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H}/4\pi$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости (и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$). Таким образом, отличие этих проницаемостей от единицы определяется суммарной величиной электрического или магнитного дипольного момента среды.

Даже если внешние электрическое и магнитное поля равны, $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$, как это имеет место в электромагнитной волне, их воздействие на частицы среды неодинаково. Из выражения для силы Лоренца $\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \dfrac{[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]}{c}\right)$ видно, что магнитная сила в $v/c \leqslant \alpha$ раз слабее электрической. Поэтому наведенный магнитный дипольный момент $\mathbf{m} \propto ev/c$ по крайней мере в α раз меньше электрического. Настолько же и величина μ ближе к 1, чем ε. В дальнейшем мы полагаем $\mu = 1$.

4. КАК УМЕНЬШАЕТСЯ СКОРОСТЬ СВЕТА В СРЕДЕ

Обычное вещество, например газ, представляет собой вакуум, в котором на большом расстоянии друг от друга расположены отдельные атомы среды. При прохождении через это вещество большую часть пути свет проходит в вакууме со скоростью c. Поэтому средняя скорость волны в среде должна быть очень близка к c. *Как получается, что скорость света в среде равна* c/n, где n — показатель преломления?

Мы ответим на этот вопрос на примере газа небольшой плотности.

4.1. Модель диэлектрической проницаемости. Среда рассматривается как газ из молекул ($\mathcal{N}$ в единице объема), каждая с одним электроном, который может смещаться из положения равновесия под действием внешнего поля; обозначим этот сдвиг через $\mathbf{r}$. Это смещение приводит к появлению у молекулы дипольного момента $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$. При этом поляризация среды $\boldsymbol{\mathcal{P}} = N\mathbf{p}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

Пренебрегая отличием действующего на электрон поля от среднего, вычислим поляризацию $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, возникающую в поле волны $\mathbf{E} = \boldsymbol{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$.

Мы считаем, что электрическое поле волны невелико по сравнению с внутриатомными полями. Возникающие смещения электрона от положения равновесия $\mathbf{u}$ невелики, и возвращающая сила пропорциональна смещению: $\mathbf{f} = K\mathbf{u}$. Обозначим, как обычно, собственную частоту колебания электрона $\omega_0 = \sqrt{K/m}$, где m — его масса. (Обычно небольшая) сила «трения», пропорциональная скорости электрона с коэффициентом $2\eta m$, описывает затухание, связанное с излучением и (или) с передачей энергии другим степеням свободы молекулы, причем[1] $\eta \ll \omega_0$. Тогда уравнение движения электрона есть $md^2\mathbf{u}/dt^2 = -2\eta m d\mathbf{u}/dt - K\mathbf{u} + e\mathbf{E}$. Для рассматриваемой задачи интерес представляют только смещения с частотой ω, так что мы ищем решение для величины $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (вклады других частот со временем затухают). Теперь в рассматриваемом поле наше уравнение принимает вид $m(-\omega^2 - 2i\eta\omega + \omega_0^2)\mathbf{u} = e\mathbf{E}$. Отсюда получаются дипольный момент одного атома и поляризация всей среды:

$$\mathbf{p} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\eta\omega]} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{N}e^2}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\eta\omega]}\,\mathbf{E}. \tag{12}$$

[1] Если затухание связано только с излучением, то $\eta \sim 1/\tau$ (см. разд. 2) и выписанное условие выглядит как условие большого числа волн в свободно излученном цуге (3).

Далее имеем

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\boldsymbol{\mathcal{P}} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 1 + \frac{\omega_P^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\eta\omega}, \quad \omega_P^2 = \frac{4\pi\mathcal{N}e^2}{m}. \tag{13}$$

Для воздуха ($\mathcal{N} = 3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$) находим $\omega_P \approx 3 \cdot 10^{14}$ Гц. Частота ω_0 для оптически прозрачных сред составляет обычно 10^{16}–10^{17} Гц и $\eta/\omega_0 \sim 10^{-7}$ (сравните с оценкой числа волн в цуге в разд. 2).

Подобное рассуждение для магнитного поля дает намагниченность в $v/c \leqslant \alpha$ раз меньше. Поэтому $\mu \approx 1$ и вдали от резонансов

$$n = \sqrt{\varepsilon} \approx 1 + \frac{2\pi\mathcal{N}e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{14}$$

4.2. Задача об уменьшении скорости волны. *В этом пункте будем следовать рассуждениям* [4], *см. также* [1].

Решим сначала *вспомогательную задачу*. Рассмотрим плоскость $\mathcal{S}$, заполненную осцилляторами (диполями), которые колеблются с одинаковыми по величине и направлению амплитудой и фазой в плоскости $\mathcal{S}$. Вычислим поле, создаваемое этими диполями в точке наблюдения P «над» плоскостью на умеренно большом расстоянии z от нее, выбрав за начало координат проекцию точки наблюдения на нашу плоскость. Во всех физически интересных случаях амплитуды колебаний отдельных электронов $|x_0|$ много меньше z. При вычислении мы считаем, что плотность числа осцилляторов τ медленно сходит на нет при увеличении расстояния от проекции точки наблюдения на плоскость (при отходе от начала координат).

Найдем вклад в поле излучения, создаваемый диполями, расположенными в слое шириной $d\rho$ на расстоянии ρ от начала координат. Это сумма вкладов отдельных диполей:

$$\mathbf{E}_\rho = -\frac{1}{c^2 r}\left\{\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{n}(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{n})\right\}\tau\rho\, d\rho\, d\phi \quad (r^2 = \rho^2 + z^2). \tag{15}$$

Далее запишем с учетом запаздывания $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 e\mathbf{x}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega(t-r/c)}$. Медленное убывание плотности τ с расстоянием учтем, добавив (*регуляризующий*) множитель $\mathrm{e}^{-\varepsilon r}$ ($\varepsilon \to 0$). При азимутальном усреднении слагаемые $\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{p}}\,\mathbf{n})$ исчезают. Учитывая равенство $2\rho d\rho = 2rdr$ и переходя к интегрированию по r, запишем поле в точке наблюдения как

$$\mathbf{E}_P = 2\pi\frac{\omega^2 e\mathbf{x}_0}{c^2}\int\limits_z^\infty \mathrm{e}^{-i\omega(t-r/c)}\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon r}dr =$$
$$= -2\pi\frac{\omega^2 e\mathbf{x}_0}{c^2}\frac{c}{i\omega - \varepsilon}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-z/c)}\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon z} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2\pi\frac{i\omega e\mathbf{x}_0}{c}\tau\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-z/c)}. \tag{16}$$

В этот результат не входит никаких величин размерности длины, кроме амплитуды колебаний диполей x_0. Поэтому фактически он справедлив уже на очень небольших расстояниях от пластинки, но все еще больших по сравнению с x_0 и λ.

Таким образом, *поле перерассеяния имеет ту же зависимость от координат и времени, что и поле падающей волны, но сдвинуто по фазе на* $\pi/2$ (множитель i в ответе). Амплитуда этого поля пропорциональна числу перерассеивателей.

Теперь разберемся, *как происходит «замедление» света в среде*. Рассмотрим упрощенную картину. Пусть внешний источник света расположен на большом расстоянии от стеклянной пластинки небольшой толщины Δz с плотностью числа зарядов $\mathcal{N}$ так, что на пластинку падает плоская волна, перпендикулярная ей. Будем искать поле $\mathbf{E}_P$ по другую сторону пластинки достаточно далеко от нее. Это поле складывается из поля внешнего источника $\mathbf{E}_s$ и суммарного поля излучения электронов в молекулах стекла $\mathbf{E}_m$. Поле всей плоскости дается формулой (16), в которой $\tau = \mathcal{N}\Delta z$ и $\mathbf{x}_0 = e\mathbf{E}_S^0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$. Собирая все множители и вспоминая (14), находим

$$\mathbf{E}_P \equiv \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_m = \mathbf{E}_s^0\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-z/c)} + \frac{i\omega\Delta z}{c}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-z/c)}\,\mathbf{E}_s^0\frac{2\pi\mathcal{N}e^2}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \equiv \\ \equiv \mathbf{E}_s^0\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-z/c)}\left[1 + \frac{i\omega\Delta z}{c}(n-1)\right]. \quad (17)$$

Переходя к толстой пластинке, разбиваем ее мысленно на множество тонких пластинок, разделенных слоями вакуума, и обозначаем через $\mathbf{E}(z)$ поле на расстоянии z от края первой пластинки (сюда включается и волновая зависимость от координат и времени). Это поле определяется из поля перед предшествующей пластинкой полученным соотношением в форме

$$\mathbf{E}(z+\Delta z) = \mathbf{E}(z)\,\mathrm{e}^{i\omega\Delta z/c}\left[1 + \frac{i\omega\Delta z}{c}(n-1)\right]. \quad (18)$$

Переход к пределу $\Delta z \to 0$ дает

$$\frac{d\mathbf{E}(z)}{dz} = \frac{i\omega}{c}\,[1 + (n-1)]\mathbf{E}(z) \equiv \frac{i\omega n}{c}\,\mathbf{E}(z). \quad (19)$$

Решение уравнения (19) с учетом зависимости от времени для поля в толстой пластинке есть

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-nz/c)}. \quad (20)$$

Итак, наш ответ *выглядит* как поле волны, шедшей от источника в вакууме и прошедшей слой толщины z среды с показателем преломления n.

Случаи наклонного падения и плотной среды, для которой показатель преломления заметно отличается от 1, требуют просто более громоздких вычислений.

Стоит отметить, что широко распространено следующее популярное объяснение «замедления» света в веществе: фотоны поглощаются и переизлучаются молекулами, на каждый акт этого процесса тратится время, поэтому в среднем движение фотонов сквозь среду замедляется. Такое объяснение ошибочно. Оно не учитывает важнейшего коллективного эффекта: поле прошедшей волны складывается из полей переизлучения *всех* молекул, свет которых может дойти до точки наблюдения. Именно суммирование их вкладов с учетом геометрического запаздывания и дает тот сдвиг фазы (20), который в популярном объяснении предлагается считать эффектом запаздывания на *каждом* перерассеивателе.

Нетривиальное запаздывание переизлучения имеет место только в узкой области частот порядка $1/\tau \sim \eta$ вблизи резонансной частоты ω_0 (см. (12)). В этой области свет распространяется с затуханием, которое описывается комплексным значением диэлектрической проницаемости ε и, соответственно, комплексным значением показателя преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Затухание отвечает тому факту, что переизлучение дополняется распадом возбужденного состояния. Испускание квантов этого «распадного» света с частотой $\omega_0 \neq \omega$ является случайным процессом (как это обсуждалось в разд. 2). Эти распадные фотоны не коррелированы между собой, получившийся свет распространяется изотропно во всех направлениях. Таким образом, в узкой области частот порядка $1/\tau \sim \eta$ вблизи резонансной частоты $\omega_0 \approx \omega$ распространение света в определенном направлении происходит с затуханием, потерянная энергия волны переходит в энергию рассеянного во все стороны света. Поэтому говорят, что область частот вблизи ω_0 шириной η — *линия поглощения* света.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гинзбург И. Ф., Погосов А. Г.* Электродинамика (Релятивистское описание. Волновые явления). Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 2010. 240 с.
2. *Magyar G., Mandel L.* Interference Fringes Produced by Superposition of Two Independent Maser Light Beams // Nature. 1963. V. 198. P. 255.
3. *Naumov D. V., Naumov V. A.* A Diagrammatic Treatment of Neutrino Oscillations // J. Phys. G. 2010. V. 37. P. 105014;
   Наумов В. А., Наумов Д. В. Релятивистские волновые пакеты в квантово-полевом подходе к теории нейтринных осцилляций // Изв. вузов. Физика. 2010. Т. 53, вып. 6. С. 5.
4. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 3: Излучение, волны, кванты. М.: Едиториал УРСС, 2004.