Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 3(180). С. 313–320

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОГОЛЮБОВА РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КАНОНИЧЕСКИХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Ю. С. Вернов [а], *М. Н. Мнацаканова* [б], *С. Г. Салынский* [в]

[а] Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва

[б] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

[в] Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

В настоящей работе рассмотрены преобразования Боголюбова алгебры канонических коммутационных соотношений (ККС) в пространстве с индефинитной метрикой.

In the present work Bogoliubov transformations for regular representation of the canonical commutation relations (CCR) algebra are considered in indefinite metrics spaces.

PACS: 03.65.Ta

ВВЕДЕНИЕ

В основе квантовой механики лежит алгебра канонических коммутационных соотношений (ККС). В простейшем случае одного измерения ККС имеют вид

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -iI, \tag{1}$$

где $\hat{p}$ и $\hat{q}$ — самосопряженные операторы (в квантовой механике операторы импульса и координаты соответственно). В случае произвольного, но конечного числа операторов соотношение (1) заменяется более общим:

$$[\hat{p}_i, \hat{q}_k] = -i\,\delta_{ik} I, \quad 1 \leqslant i, k \leqslant n. \tag{2}$$

Отметим, что основные теоремы, касающиеся представлений ККС, сохраняют силу при переходе от соотношения (1) к соотношениям (2) [1].

В настоящей работе мы покажем, что и результаты, связанные с преобразованиями Боголюбова, могут быть обобщены для соотношения (2). Но сначала вернемся к соотношению (1).

Среди различных представлений ККС основную роль играют представления, получившие название регулярных. Чтобы сформулировать условие регулярности представления, перепишем соотношение (1) в эквивалентной форме:

$$[a, a^+] = I, \tag{3}$$

где $a = (1/\sqrt{2})(\hat{q} + i\hat{p})$, $a^+ = (1/\sqrt{2})(\hat{q} - i\hat{p})$. Аналогично, систему соотношений (2) можно переписать в виде

$$[a_i, a_j^+] = I, \quad 1 \leqslant i, k \leqslant n. \tag{4}$$

Рассмотрим соотношение (3). Если у оператора

$$N = a^+ a \tag{5}$$

есть собственный вектор:

$$N\psi_\lambda = \lambda\,\psi_\lambda, \tag{6}$$

то, по определению, представление ККС регулярно [2, 3].

Возможны три случая [2]:

1. $\lambda \in \mathbb{N}$ (фоковское представление).

Известно, что в этом случае $\operatorname{Sp} N = \mathbb{N}$ и, следовательно, существует «вакуумный» вектор ψ_0 такой, что

$$a\psi_0 = 0. \tag{7}$$

Легко получить, что фоковское представление реализуется в пространстве Гильберта H, натянутом на собственные векторы оператора N: $\psi_n = (a^+)^n\psi_0$. Из ККС непосредственно следует, что

$$\langle\psi_n, \psi_n\rangle = n!. \tag{8}$$

Поскольку $\langle\psi_n, \psi_n\rangle$ не зависит от конкретного вида операторов a и a^+, то легко получить, что все фоковские представления унитарно эквивалентны.

Ввиду того, что фоковское представление в пространстве с индефинитной метрикой реализуется в гильбертовом пространстве, естественно переписать формулу (3) в виде

$$[a, a^*] = 1, \tag{9}$$

где оператор a^* — сопряженный по отношению к a в пространстве Гильберта. Подчеркнем, что для фоковского представления в пространстве Крейна $a^* = a^+$.

Если $\lambda \notin \mathbb{N}$, то соответствующие представления реализуются в пространстве с индефинитной метрикой, а именно, в пространстве Крейна [4–6].

Подчеркнем, что в ковариантной формулировке теории калибровочных полей неизбежен переход от гильбертова пространства к пространству с индефинитной метрикой [7,8].

Необходимые нам свойства пространства Крейна приведены ниже.

2. $\lambda \in \mathbb{Z}_-$ (антифоковское представление).

В этом случае существует вектор ψ_{-1}, такой что

$$a^+\,\psi_{-1} = 0. \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$\langle\psi_{-k}, \psi_{-k}\rangle = (-1)^{k-1}(k-1)!, \quad \psi_{-k} = a^{k-1}\psi_{-1}. \tag{11}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\langle\psi_{-k}, \psi_{-k}\rangle &= \langle\psi_{-k+1}, a^+ a\psi_{-k+1}\rangle = \\ &= (-k+1)\langle\psi_{-k+1}, \psi_{-k+1}\rangle = \ldots = (-1)^{k-1}(k-1)!\langle\psi_{-1}, \psi_{-1}\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы всегда можем положить $\langle\psi_{-1}, \psi_{-1}\rangle = 1$.

3. $\lambda = \lambda_0 + z$, $z \in \mathbb{Z}$, $-1 < \lambda_0 < 0$ (λ-случай).

В этом случае, с помощью выкладок, аналогичных приведенным для антифоковского случая, получим

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\lambda_0+n}, \psi_{\lambda_0+n} \rangle &= (\lambda_0 + n + 1)\,(\lambda_0 + n)\,\ldots\,(\lambda_0 + 1),\\ \langle \psi_{\lambda_0-n}, \psi_{\lambda_0-n} \rangle &= (\lambda_0 - n + 1)\,(\lambda_0 - n + 2)\,\ldots\,\lambda_0,\end{aligned} \tag{13}$$

где $\psi_{\lambda_0 \pm n}$ определены соотношением

$$\psi_{\lambda_0+n} = (a^+)^n \psi_{\lambda_0}, \quad \psi_{\lambda_0-n} = (a)^n \psi_{\lambda_0}, \quad \langle \psi_{\lambda_0}, \psi_{\lambda_0} \rangle = 1. \tag{14}$$

В этой статье мы рассмотрим преобразования Боголюбова ККС, а именно преобразования следующего вида:

$$\tilde{a} = \alpha a + \beta a^+, \quad \tilde{a}^+ = \bar{\alpha} a^+ + \bar{\beta} a, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^+] = I, \quad \text{если} \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1. \tag{16}$$

Преобразования Боголюбова позволяют получить новые представления ККС. Поэтому интересно изучить свойства этих преобразований, что и является целью настоящей работы. В частности, выяснить, остаются ли регулярные представления регулярными после преобразования Боголюбова.

Отметим, что преобразования Боголюбова нашли широкое применение в теории сверхпроводимости, статистической физике и квантовой теории поля [9–11], а также при изучении ККС [12].

Мы докажем, что при преобразованиях Боголюбова фоковское представление переходит в фоковское, антифоковское — в антифоковское, λ-представление — в λ-представление, причем с тем же самым значением λ_0. Последний случай наименее интересен с точки зрения физики, поэтому мы ограничимся преобразованиями Боголюбова для $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

В фоковском и антифоковском случаях мы найдем соответственно вакуумный и антивакуумный векторы для представлений ККС, заданных операторами $\tilde{a}$ и $\tilde{a}^+$. Для антифоковского случая будет показано, что его преобразования Боголюбова могут быть сведены к соответствующим из фоковского случая. Далее будет рассмотрена комбинация преобразований Боголюбова для системы, состоящей из физической и нефизической частиц (см. (9) и (27)), и будет показано, что эта комбинация приводит к физически эквивалентной картине. После этого приведенные рассуждения будут обобщены на систему из n физических частиц (т. е. частиц, удовлетворяющих фоковскому представлению ККС) и k нефизических частиц (т. е. частиц, удовлетворяющих антифоковскому представлению ККС).

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ ФОКОВСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ККС

Докажем существование вектора $\tilde{\psi}_0$ такого, что

$$\tilde{a}\tilde{\psi}_0 = 0. \tag{17}$$

Для этого определим коэффициенты C_n разложения

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_0^\infty C_n e_n, \tag{18}$$

где e_n — ортонормированные собственные векторы оператора $N = a^* a$ (напомним, что в фоковском случае $a^* = a^+$). Из формулы (8) легко получить, что

$$a^* e_n = a_n e_{n+1}, \quad a e_n = b_n e_{n-1}. \tag{19}$$

Докажем, что

$$a_n = \sqrt{n+1}, \quad b_n = \sqrt{n}. \tag{20}$$

Действительно,

$$\langle a^* e_n, a^* e_n\rangle = \langle e_n, a a^* e_n\rangle = \langle e_n, (n+1) e_n\rangle = (n+1)\langle e_n, e_n\rangle. \tag{21}$$

Учитывая, что $\langle e_n, e_n\rangle = 1$, приходим к первому равенству в формуле (20). Аналогично доказывается и второе равенство в формуле (20). Найдем коэффициенты C_n в разложении (18)

$$\begin{aligned} \alpha a \sum_0^\infty C_n e_n &= \sum_0^\infty \alpha b_n C_n e_{n-1} = C_1 \alpha b_1 + \sum_1^\infty \alpha b_{n+1} C_{n+1} e_n, \\ \beta a^+ \sum_0^\infty C_n e_n &= \beta \sum_0^\infty a_n C_n e_{n+1} = \beta \sum_1^\infty a_{n-1} C_{n-1} e_n. \end{aligned} \tag{22}$$

Из формул (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \left(\alpha a + \beta a^+\right) \sum_0^\infty C_n e_n &= C_1 \alpha b_1 + \sum_1^\infty \left(\alpha b_{n+1} C_{n+1} + \beta a_{n-1} C_{n-1}\right) e_n = \\ &= C_1 \alpha b_1 + \sum_1^\infty \left(\alpha \sqrt{n+1}\, C_{n+1} + \beta \sqrt{n}\, C_{n-1}\right) e_n. \end{aligned} \tag{23}$$

Согласно формуле (23), $C_1 = 0$. Далее, приравнивая нулю коэффициенты при e_n, получаем рекуррентную формулу

$$C_{n+1} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\, C_{n-1}. \tag{24}$$

Из формулы (24) следует, что $C_{2n+1} \sim C_1$, следовательно, все нечетные коэффициенты в формуле (18) равны нулю. Рассмотрим C_{2n}. Полагая $C_0 = 1$, согласно (24), имеем

$$C_{2n} = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n d_{2n}, \tag{25}$$

где $d_{2n} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}$. Покажем, что вектор $\tilde{\psi}_0$ корректно определен. Действительно,

$$\sum_{n=0}^\infty |C_{2n}|^2 = \sum_{n=0}^\infty \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n d_{2n} < \infty,$$

поскольку, согласно формулам (16) и (25), $|\beta/\alpha| < 1$, $d_{2n} < 1$.

АНТИФОКОВСКИЙ СЛУЧАЙ

В этом случае можно было бы провести вычисления, аналогичные тем, что были сделаны в фоковском случае. Однако можно свести преобразования Боголюбова в антифоковском случае к преобразованиям Боголюбова в фоковском случае, однозначно связанном с антифоковским. Прежде всего заметим, что, вводя операторы

$$b = a^+, \quad b^+ = a, \quad N' = -N - 1, \tag{26}$$

можно переписать антифоковское представление в виде

$$[b, b^+] = -1, \quad b\psi_0' = 0, \tag{27}$$

где $\psi_0' = \psi_{-1}$. Вводя векторы $\psi_n' = \psi_{-1-n}$, получим, согласно формуле (11), что

$$N\psi_n' = n\psi_n', \quad \langle \psi_n', \psi_n' \rangle = (-1)^n n!. \tag{28}$$

Отметим, что в теории калибровочных полей ККС для нефизических частиц обычно записываются именно в форме (27). Поскольку пространство K натянуто на векторы ψ_n', K является пространством Крейна, т. е. пространством, допускающим следующее разложение:

$$K = K^+ + K^-, \quad K^+ \perp K^-, \tag{29}$$

где $K^\pm$ — замкнутые пространства соответственно с положительной и отрицательной метрикой. По определению пространства K если x — произвольный вектор этого пространства, то

$$x = x^+ + x^-, \quad x^\pm \in K^\pm. \tag{30}$$

Следовательно, скалярное произведение произвольных векторов имеет вид

$$\langle x, y \rangle = x^+ y^+ + x^- y^-. \tag{31}$$

В пространстве Крейна, помимо индефинитного, можно ввести и положительно определенное (гильбертово) скалярное произведение:

$$(x, y) = x^+ y^+ - x^- y^-. \tag{32}$$

Действительно,

$$(x, x) = (x^+ x^+ - x^- x^-) > 0, \quad \forall x \neq 0. \tag{33}$$

Индефинитное и гильбертово скалярное произведения связаны между собой оператором канонической симметрии J. По определению

$$J(x^+ + x^-) = x^+ - x^-. \tag{34}$$

Прямое вычисление дает

$$\langle x, y \rangle = (x, Jy), \quad (x, y) = \langle x, Jy \rangle. \tag{35}$$

Из формулы (33) следует связь операторов A^+ и A^*, сопряженных оператору A относительно индефинитного и гильбертова скалярных произведений соответственно:

$$A^* = JA^+J, \quad A^+ = JA^*J, \tag{36}$$

поскольку легко получить, что

$$J^2 = 1, \quad J = J^* = J^+. \tag{37}$$

Из формул (28) и (34) следует, что

$$\{J, b\} = \{J, b^+\} = 0, \tag{38}$$

где $\{x, y\} = xy + yx$. Действительно, пусть $n = 2m$, тогда

$$\begin{aligned} b^+ J\psi_n' &= b^+\psi_{2m}' = \psi_{2m+1}', \\ Jb^+\psi_n' &= J\psi_{2m+1}' = -\psi_{2m+1}'. \end{aligned} \tag{39}$$

Доказательство для нечетных n аналогично. Из условия $\{J, b^+\} = 0$ непосредственно следует, что $\{J, b\} = 0$, так как $J = J^+$. Соотношения (36) и (38) позволяют сопоставить антифоковскому представлению ККС фоковское с помощью следующей замены:

$$b^+ \to Jb^+J = -b^+ = b^*. \tag{40}$$

Напомним, что $J^2 = 1$. Очевидно, что

$$[b, b^*] = I, \quad b\,\psi_0' = 0. \tag{41}$$

Применив к соотношению (41) преобразование Боголюбова, получим, что $\tilde{\psi}_0'$ так же связан с ψ_0', как $\tilde{\psi}_0$ с ψ_0 (см. формулу (25)). Чтобы получить преобразования Боголюбова в терминах b и b^+, достаточно учесть, что $b^+ = -b^*$. Следовательно, преобразование вида $\alpha b + \beta b^*$ переходит в $\alpha b - \beta b^+$.

Рассмотрим систему из физической частицы, удовлетворяющей ККС вида $[a, a^*] = I$, и нефизической, удовлетворяющей ККС вида $[b, b^+] = -I$. Пусть $\psi_0 = \psi_0'$. Тогда, в соответствии с полученными результатами, преобразования Боголюбова для физической частицы $\alpha a + \beta a^*$ и $\alpha b - \beta b^+$ для нефизической приводят к новой системе операторов такой, что $\tilde{\psi}_0' = \tilde{\psi}_0$.

Рассмотрим теперь соотношение (4) для фоковского случая. Предположим, что вакуумный вектор ψ_0 не зависит от индекса i, т. е. что

$$a_i\psi_0 = 0, \ \forall i. \tag{42}$$

Применяя преобразование Боголюбова (15) для каждой пары операторов a_i и $a_i{}^+$, получим новую систему операторов $\tilde{a}_i$ и $\tilde{a}_i{}^+$, удовлетворяющих фоковскому представлению ККС снова с единым вакуумным вектором $\tilde{\psi}_0$. Аналогично, если соотношение (27) заменено следующим образом:

$$[b_i, b_j^+] = -\delta_{ij}\, I, \quad i, j \leqslant k, \tag{43}$$

причем

$$b_i\,\psi_0' = 0, \ \forall i, \tag{44}$$

то после преобразований Боголюбова система операторов b_i, b_i^+ переходит в систему операторов $\tilde{b}_i$, $\tilde{b}_i^+$, снова удовлетворяющих соотношению (43) с единым вакуумным вектором $\tilde{\psi}_0'$.

λ-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ККС

Докажем, что после преобразования Боголюбова λ-представление снова переходит в λ-представление с тем же самым λ_0 (коротко, λ_0-представление ККС переходит в λ_0-представление). Для этого прежде всего заметим, что если операторы a, a^+ и a', a'^+ реализуют λ_0-представление ККС, то, согласно формулам (13), они связаны унитарным преобразованием:

$$a' = VaV, \quad a'^+ = Va^+V, \quad VV^+ = V^+V = 1. \tag{45}$$

Покажем, что если операторы $\tilde{a}$, $\tilde{a}^+$ и $\tilde{a'}$, $\tilde{a'}^+$ связаны с операторами a, a^+ и a', a'^+ преобразованием Боголюбова, то и операторы $\tilde{a'}$, $\tilde{a'}^+$ и $\tilde{a}$, $\tilde{a}^+$ связаны тем же самым унитарным преобразованием V. Действительно, если $\tilde{a} = \alpha a + \beta a^+$, $\tilde{a}^+ = \bar{\alpha} a^+ + \bar{\beta} a$, то

$$\tilde{a'} = \alpha VaV^+ + \beta Va^+V^+ = V(\alpha a + \beta a^+)V^+ = V\tilde{a}V^+. \tag{46}$$

Доказательство для $\tilde{a}^+$ аналогично. Поскольку любой оператор, связанный унитарным представлением с некоторым оператором, реализующим λ_0-представление ККС, также является оператором, реализующим λ_0-представление, нам достаточно рассмотреть преобразования Боголюбова только для конкретных операторов. В качестве таковых рассмотрим операторы

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right), \tag{47}$$

очевидным образом удовлетворяющие ККС. Условие

$$N\psi_{\lambda_0}(q) = a^+a\psi_{\lambda_0}(q) = \lambda_0\psi_{\lambda_0}(q) \tag{48}$$

для этих операторов сводится к уравнению

$$\left(q^2 - \frac{d^2}{dq^2}\right)\psi_{\lambda_0}(q) = (2\lambda_0 - 1)\psi_{\lambda_0}(q). \tag{49}$$

Напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением вещественных коэффициентов α и β в преобразовании Боголюбова. Тогда

$$\tilde{a} = \alpha a + \beta a^+, \quad \tilde{a}^+ = \alpha a^+ + \beta a, \tag{50}$$

т. е.

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\alpha+\beta)q - (\alpha-\beta)\frac{d}{dq}\right], \quad \tilde{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\alpha+\beta)q + (\alpha-\beta)\frac{d}{dq}\right]. \tag{51}$$

Непосредственное вычисление $\tilde{a}^+\tilde{a}$ дает

$$\tilde{a}^+\tilde{a} = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^2q^2 - (\alpha-\beta)^2\frac{d^2}{dq^2} + 1\right]. \tag{52}$$

Положив $q = \tilde{q}\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ и учитывая, что $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, получим уравнение

$$\tilde{a}^+\tilde{a} = \left(\tilde{q}^2 - \frac{d^2}{d\tilde{q}^2}\right)\psi_{\lambda_0}(\tilde{q}) = (2\lambda_0 - 1)\psi_{\lambda_0}(\tilde{q}). \tag{53}$$

Таким образом, сделав замену переменной $q \to \tilde{q}$, мы приходим к тому же самому уравнению, что и доказывает тот факт, что $\psi_{\lambda_0}(\tilde{q})$ является собственным вектором оператора $\tilde{a}^+\tilde{a}$ с собственным значением λ_0.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье доказано, что преобразования Боголюбова переводят фоковское представление ККС в фоковское, антифоковское — в антифоковское, λ-представление — в λ-представление с тем же самым значением λ_0. В первых двух случаях найдены новые вакуумные векторы. Определена комбинация преобразований Боголюбова для системы из физической и нефизической частиц с одним и тем же вакуумом, при которой новый вакуум остается одинаковым для физических и нефизических частиц. Результаты обобщены на систему из произвольного, но конечного числа физических и нефизических частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Putnam C. R.* Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1967. Ch. IV. P. 63.
2. *Mnatsakanova M. et al.* // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2969.
3. *Mnatsakanova M., Morchio G., Vernov Yu.* // Proc. of Intern. Seminar «Quarks-96». M., 1997. V. 2. P. 51.
4. *Bognar J.* Indefinite Inner Product Spaces. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1974.
5. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
6. *Krein M. G.* // Am. Math. Soc. Transl. 1970. V. 93. P. 103.
7. *Morchio G., Strocchi F.* // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1980. V. 33. P. 251.
8. *Kugo T., Ojima I.* // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1979. V. 66. P. 1.
9. *Боголюбов Н. Н.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58.
10. *Боголюбов Н. Н.* Статистическая физика и квантовая теория поля. М.: Наука, 1973.
11. *Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.* // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. С. 345.
12. *Mnatsakanova M. et al.* // Lett. Math. Phys. 2003. V. 65. P. 159.

Получено 4 сентября 2012 г.