Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 6(183). С. 784–790

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОГО ТЕЛА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

К. А. Модестов [1], *Ю. В. Чугреев* [2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В РТГ вычислен тензор энергии-импульса для метрики Рейсснера–Нордстрема. Найдена внешняя гравитационная энергия коллапсирующего тела. На основании анализа ее поведения вблизи гравитационного радиуса сделан вывод о невозможности гравитационного коллапса.

In RTG the energy-momentum tensor of the Reissner–Nordström metric has been calculated. The external gravitational energy of collapsing body has been obtained. The conclusion on impossibility of gravitational collapse has been deduced from the analysis of its behaviour near gravitational radius.

PACS: 04.20.Cv

В работе [1] рассматривалась структура интеграла, определяющего гравитационную массу статического сферически-симметричного тела в релятивистской теории гравитации (РТГ). Было показано, что соответствующий интеграл по внешней вакуумной области расходится при стремлении радиуса тела к радиусу Шварцшильда. Сингулярность такого типа свидетельствует о невозможности гравитационного коллапса за горизонт событий. Аналогичный вывод был сделан в нашей работе [2] при наличии у тела момента количества вращения.

В настоящей работе мы обобщим полученные в [1, 2] результаты на случай статического сферически-симметричного заряженного тела в РТГ с массой покоя гравитона, равной нулю. В ОТО такое решение описывается метрикой Рейсснера–Нордстрема в шварцшильдовых координатах:

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2mr + q^2}{r^2} dT^2 - \frac{r^2}{r^2 - 2mr + q^2} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, dF^2). \tag{1}$$

Метрика Рейсснера–Нордстрема зависит от двух постоянных параметров, m и q, смысл которых ясен из предельного вида метрики и электромагнитного поля на больших расстояниях r. Анализ этого поведения показывает, что m есть масса источника, а q — его заряд. Мы рассматриваем случай $q^2 < m^2$.

В конце настоящей работы полная энергия источника будет вычислена точно.

[1] E-mail: modestov@goa.bog.msu.ru
[2] E-mail: chugreev@goa.bog.msu.ru

Так как $r^2 - 2mr + q^2 = (r - r_g)(r - m + \sqrt{m^2 - q^2})$, где $r_g \equiv \sqrt{m^2 - q^2} + m$, то легко видеть, что метрика (1) становится сингулярной на поверхности $r = r_g$, которая является горизонтом событий.

Система уравнений РТГ [3] включает в себя, помимо обычного уравнения Гильберта–Эйнштейна общей теории относительности, дополнительное уравнение первого порядка, содержащее ковариантную производную по метрике фонового пространства Минковского и являющееся общековариантным обобщением координатного условия гармоничности Фока. Поэтому необходимо выявить связь шварцшильдовых координат с координатами, в которых решение (1) удовлетворяет этому второму уравнению в заранее заданной метрике фонового пространства $\gamma_{\mu\nu}$. Благодаря этому РТГ позволяет однозначно установить область изменения координат эффективного риманова пространства как область взаимно-однозначного соответствия этих координат координатам пространства Минковского с якобианом, отличным от нуля.

В РТГ решение Рейсснера–Нордстрема впервые было получено Ю. П. Выблым [4]. В работах [5, 6] было показано, что существует единственное вакуумное решение, взаимно-однозначно отображающее (с якобианом, отличным от нуля) область вне горизонта событий вращающегося заряженного источника со сферическими координатами пространства Минковского $\{t, R, \theta, \varphi\}$.

В нашем случае взаимно-однозначная связь этих координат со шварцшильдовскими координатами задается соотношениями

$$t = T, \quad R = r - m, \quad \theta = \vartheta, \quad \varphi = F.$$

Метрика Рейсснера–Нордстрема в этих координатах примет вид

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{R^2 - m^2 + q^2}{(R+m)^2} dt^2 - \frac{(R+m)^2}{R^2 - m^2 + q^2} dR^2 - (R+m)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = \\ = \frac{R^2 - R_g^2}{(R+m)^2} dt^2 - \frac{(R+m)^2}{R^2 - R_g^2} dR^2 - (R+m)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где $R_g \equiv r_g - m = \sqrt{m^2 - q^2}$.

В работе [7] было показано, что это решение удовлетворяет принципу причинности [8] во всей области $R > R_g$.

Тензор электромагнитного поля в сферических координатах имеет вид

$$F \equiv F_{ik}\, dx^i \wedge dx^k = -\frac{2q}{r^2} dR \wedge dt. \quad (3)$$

Координатные «векторы» электрического и магнитного полей вычисляются стандартно:

$$E_R = \frac{q}{r^2}, \quad E_\theta = 0, \quad E_\varphi = 0, \quad B^\alpha = 0. \quad (4)$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T^k_{\mathrm{em}_i} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(-F_{in} F^{kn} + \frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} \delta^k_i \right) = \frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{r^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Рассчитаем теперь для решения Рейсснера–Нордстрема (2) интеграл, определяющий гравитационную массу источника. Для этого выпишем уравнения гравитационного поля РТГ в приближении нулевой массы гравитона в привычном виде [3]

$$D_\alpha D_\beta(\widehat{g}^{\varepsilon\lambda}\widehat{g}^{\alpha\beta} - \widehat{g}^{\varepsilon\alpha}\widehat{g}^{\lambda\beta}) = 16\pi(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}), \quad D_\beta\widehat{g}^{\alpha\beta} = 0, \tag{6}$$

где D_α — ковариантная производная по метрике Минковского $\gamma_{\mu\nu}$, $\widehat{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{g/\gamma}g^{\mu\nu}$, $\widehat{T}^{\mu\nu} \equiv (g/\gamma)\,T^{\mu\nu}$, а тензор энергии-импульса гравитационного поля $\widehat{t}_g^{\mu\nu}$ равен

$$\begin{aligned} 16\pi\widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\left(g^{\varepsilon\alpha}g^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}g^{\varepsilon\lambda}g^{\alpha\beta}\right)\left(g_{\nu\sigma}g_{\tau\mu} - \frac{1}{2}g_{\tau\sigma}g_{\nu\mu}\right)D_\alpha\widehat{g}^{\tau\sigma}D_\beta\widehat{g}^{\mu\nu} + \\ + g^{\alpha\beta}g_{\tau\sigma}D_\alpha\widehat{g}^{\varepsilon\tau}D_\beta\widehat{g}^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}g^{\varepsilon\lambda}g_{\tau\sigma}D_\alpha\widehat{g}^{\sigma\beta}D_\beta\widehat{g}^{\alpha\tau} - \\ - g^{\varepsilon\beta}g_{\tau\sigma}D_\alpha\widehat{g}^{\lambda\sigma}D_\beta\widehat{g}^{\alpha\tau} - g^{\lambda\alpha}g_{\tau\sigma}D_\alpha\widehat{g}^{\beta\sigma}D_\beta\widehat{g}^{\varepsilon\tau}. \end{aligned} \tag{7}$$

Сравнивая эту формулу с выражением для псевдотензора энергии-импульса Ландау–Лифшица [9], убеждаемся, что они отличаются только заменой ковариантных производных на обычные и, следовательно, в галилеевых координатах пространства Минковского совпадают.

Из (6) легко получить дифференциальный закон сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых:

$$D_\lambda(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}) = 0. \tag{8}$$

В искривленном пространстве подобное соотношение вовсе не означало бы наличия какой-либо сохраняющейся величины в силу отсутствия векторов Киллинга и галилеевых координат. Однако пространство Минковского является плоским, и поэтому оно имеет полную десятипараметрическую группу симметрий и допускает введение галилеевых координат. В этих координатах (8) примет вид

$$\partial_\lambda(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}) = 0, \tag{9}$$

где $\partial_\lambda \equiv \partial/\partial x^\lambda$.

Разбивая полную 4-дивергенцию на пространственную и временную части, получим

$$(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})_{,0} = -(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})_{,k}.$$

Теперь проинтегрируем по трехмерному объему

$$\frac{d}{dt}\int(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})\,dV = -\int(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})_{,k}\,dV.$$

Объемный интеграл в правой части по теореме Остроградского–Гаусса можно преобразовать в поверхностный по ограничивающей этот объем поверхности

$$\frac{d}{dt}\int(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})\,dV = -\int(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})\,dS_k.$$

Введем 4-вектор энергии-импульса системы «вещество + гравитационное поле»

$$P^\varepsilon = \int (\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})\, dV. \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} P^\varepsilon = -\int (\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})\, dS_k = -\int (\widehat{T}^{\varepsilon R} + \widehat{t}_g^{\varepsilon R})\, dS_R.$$

Очевидно, что правая часть представляет собой поток энергии-импульса системы через ограничивающую объем поверхность. Выберем в качестве такой поверхности бесконечно удаленную поверхность $R \to \infty$. Так как площадь растет как R^2 при $R \to \infty$, то для того чтобы интеграл стремился к нулю, подынтегральное выражение должно убывать быстрее, чем $1/R^2$. Непосредственное вычисление показывает, что для $\varepsilon = t, \theta, \varphi$ величина $\widehat{T}^{\varepsilon R} + \widehat{t}_g^{\varepsilon R} = 0$, а величина $\widehat{T}^{\varepsilon R} + \widehat{t}_g^{\varepsilon R}$ убывает как $1/R^4$. Поэтому 4-вектор полных энергии-импульса системы P^ε сохраняется во времени.

Вычислим теперь полную энергию системы P^0. Интеграл (10) может быть сведен к поверхностному интегралу. Записав (6) в виде

$$D_\alpha \widehat{h}^{\varepsilon\lambda\alpha} = 16\pi (\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}),$$

где

$$\widehat{h}^{\alpha\varepsilon\lambda} \equiv D_\beta (\widehat{g}^{\varepsilon\lambda} \widehat{g}^{\alpha\beta} - \widehat{g}^{\varepsilon\alpha} \widehat{g}^{\lambda\beta}), \tag{11}$$

найдем энергию внутри сферы радиуса R, причем интеграл в сферических переменных вычисляется точно:

$$P^0(R) = \oint \widehat{h}^{00\alpha} dS_\alpha = \oint \widehat{h}^{00R} dS_R =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \widehat{h}^{00R} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{r^3 (R R_g^2 + 2mR^2 - mR_g^2)}{2R^3 (R^2 - R_g^2)}. \tag{12}$$

Предел $R \to \infty$ приводит к интегралу движения m — гравитационной массе источника:

$$P^0(\infty) = m.$$

Разобьем теперь область интегрирования в (10) на две: область V_0, где присутствует обычное вещество, а не только электромагнитное поле ($T^{\mu\nu} \neq T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}}$), и область V_1, где обычное вещество отсутствует, а присутствует только электромагнитное поле ($T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}}$):

$$P^0 = \int_{V_0} (\widehat{T}^{00} + \widehat{t}_g^{00})\, dV + \int_{V_1} (\widehat{t}_g^{00} + \widehat{T}^{00}_{\mathrm{em}})\, dV.$$

В этой структуре первый член справа определяет энергию вещества и гравитационного поля внутри тела, тогда как второй задает энергию внешних электромагнитного и гравитационного полей.

Поскольку, во-первых, про источник $T^{\mu\nu}$ нам известно только то, что он обладает сферической симметрией, и, во-вторых, что метрика Рейсснера–Нордстрема (2) справедлива только вне вещества $T^{\varepsilon\lambda} = T^{\varepsilon\lambda}_{\rm em}$, мы можем взять в явном виде только второй интеграл. Для начала вычислим $\widehat{t}^{00}_g + \widehat{T}^{00}_{\rm em}$, используя (6):

$$\widehat{t}^{00}_g + \widehat{T}^{00}_{\rm em} = \\ = -\frac{r^2(R^4R_g^2 + R^2R_g^4 + 6mR^3R_g^2 - 2RmR_g^4 + 6R^4m^2 - 7R^2m^2R_g^2 + 3m^2R_g^4)}{8\pi R^6(R^2 - R_g^2)^2}.$$

Легко можно убедиться, например, разлагая многочлен по степеням $R - R_g$, что $\widehat{t}^{00}_g + \widehat{T}^{00}_{\rm em} < 0$, а поскольку из (5) видно, что $\widehat{T}^{00}_{em} > 0$, то объемная плотность энергии гравитационного поля $\widehat{t}^{00}_g$ всюду отрицательна.

Поскольку и интегрируемая функция, и область интегрирования имеют наиболее простой вид в сферических переменных, вычислим в них искомый интеграл. Якобиан этого преобразования переменных равен корню из определителя метрического тензора $\sqrt{-\gamma} = R^2 \sin\theta$:

$$\int\limits_{V_1} (\widehat{t}^{00}_g + \widehat{T}^{00}_{\rm em})\, dV = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_R^{\infty} (\widehat{t}^{00}_g + \widehat{T}^{00}_{\rm em})\, R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрирование по φ и θ дает просто множитель 4π, а интегрируя по R, после длительных вычислений можно найти выражение для энергии гравитационного и электромагнитного полей в вакууме в явном виде:

$$\int\limits_{V_1} (\widehat{t}^{00}_g + \widehat{T}^{00}_{\rm em})\, dV = m - P^0(R). \tag{13}$$

Такой же результат сразу получается из (12).

Поскольку из (5) вытекает

$$\widehat{T}^{00}_{\rm em} = \frac{q^2r^2}{8\pi R^4(R^2 - {R_g}^2)}, \tag{14}$$

тензор энергии-импульса гравитационного поля равен

$$\widehat{t}^{00}_g = -\frac{r^2(2R^2R_g^4 + 6mR^3R_g^2 - 2RmR_g^4 + 7R^4m^2 - 8R^2m^2R_g^2 + 3m^2R_g^4)}{8\pi R^6(R^2 - R_g^2)^2}. \tag{15}$$

Теперь найдем энергию внешнего электромагнитного поля, т. е. вычислим интеграл

$$\int\limits_{V_1} \widehat{T}^{00}_{\rm em}\, dV = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_R^{\infty} \widehat{T}^{00}_{\rm em} R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi = \frac{q^2}{2}\int\limits_R^{\infty} \frac{r^2}{R^2(R^2 - R_g^2)}\, dR = \\ = -\frac{q^2m^2}{2R_g^2}\left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R_g}\left[1 + \frac{R_g^2}{m^2}\right]\ln\left(\frac{R - R_g}{R + R_g}\right) + \frac{1}{m}\ln\left(1 - \frac{R_g^2}{R^2}\right)\right\} = \\ = -\frac{q^2}{4R_g^3}\left\{\frac{2m^2R_g}{R} + (R_g + m)^2\ln\left(1 - \frac{R_g}{R}\right) - (R_g - m)^2\ln\left(1 + \frac{R_g}{R}\right)\right\}. \tag{16}$$

Отметим, что расходимость энергии электромагнитного поля вблизи горизонта имеет логарифмический характер.

Разлагая (13) в окрестности сингулярности $R = R_g = \sqrt{m^2 - q^2}$ в ряд Лорана и удерживая только члены с отрицательными степенями, найдем

$$\int\limits_{V_1} (\widehat{t}_g^{00} + \widehat{T}_{\rm em}^{00})\, dV = -\frac{r_g^4}{4R_g^2}(R - R_g)^{-1} + o((R - R_g)^{-1}). \qquad (17)$$

В силу логарифмичности расходимости электромагнитной энергии аналогичное разложение внешней гравитационной энергии $\int\limits_{V_1} \widehat{t}_g^{00}\, dV$ имеет такой же вид.

Из (17) видно, что при приближении размера коллапсирующего тела к горизонту событий R_g суммарная энергия электромагнитного и гравитационного полей вне тела стремится к бесконечности обратно пропорционально отклонению его поверхности от поверхности горизонта. Для предельного случая незаряженного тела ($q = 0$), внешнее решение для которого дается метрикой Шварцшильда, этот результат переходит в результат работы [1]. Поскольку полная энергия системы P^0, как мы доказали выше, сохраняется, а до коллапса была конечной, то она и будет оставаться конечной. Поэтому, как следует из (13), при гравитационном сжатии должна стремиться к положительной бесконечности и полная энергия вещества и гравитационного поля внутри коллапсирующего тела $P_0(R)$. Но, как отмечалось в [1], тело конечной массы в принципе не может иметь бесконечную внешнюю потенциальную энергию, поэтому такая ситуация невозможна, поскольку она противоречит принципу причинности Гильберта и закону сохранения энергии. Таким образом, именно благодаря тензорному характеру энергии-импульса гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ в РТГ возникает *универсальный механизм* остановки процесса гравитационного сжатия тела большой массы ($M > 3M_\odot$). Когда термоядерные ресурсы звезды исчерпаны, согласно РТГ из-за наличия свойства упругости гравитационного поля коллапсирующая звезда не может уйти под свой гравитационный радиус. Поэтому гравитационный коллапс невозможен, а следовательно, невозможно и образование черных дыр.

Таким образом, следуя [1], мы также приходим к заключению: невозможность гравитационного коллапса возникает не только из-за наличия массы покоя гравитона, но и благодаря тензорной природе энергии-импульса гравитационного поля. Наличие заряда или момента количества вращения у тела на этот вывод влияния не оказывают.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Структура интеграла движения и невозможность гравитационного коллапса // ТМФ. 2012. Т. 171, № 1. С. 150–153.
2. *Модестов К. А., Чугреев Ю. В.* Структура интегралов движения для вращающегося тела в РТГ // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 4(181). С. 501–510.
3. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2011.
4. *Выблый Ю. П.* Поле точечного электрического заряда в релятивистской теории гравитации // Точные решения уравнений Эйнштейна и их физическая интерпретация / Ред. И. Р. Пийр. Тарту: Изд-во Тартуск. ун-та, 1988. С. 74–76.

5. *Карабут П. В., Чугреев Ю. В.* Внешнее аксиально-симметричное решение для вращающегося заряженного тела в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 78, № 2. С. 305–313.
6. *Карабут П. В., Чугреев Ю. В.* Единственность внешнего аксиально-симметричного решения для вращающегося, заряженного тела в релятивистской теории гравитации // Там же. Т. 79, № 3. С. 394–403.
7. *Чугреев Ю. В.* О принципе причинности для рейсснер-нордстремовского поля в РТГ. Случай малых зарядов $q^2 \leqslant m^2$ // ТМФ. 2002. Т. 132, № 3. С. 475–483.
8. *Чугреев Ю. В.* О принципе причинности в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1991. Т. 88, № 1. С. 459–466.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматлит, 2001.

Получено 18 марта 2013 г.