Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 6(183). С. 819–831

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЕРХТОНКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ ПОЗИТРОНИЯ

М. Динейхан [а, б], *С. А. Жаугашева*, [а, б], *А. Исадыков*, [а, б], *Н. Сагимбаева* [а]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

Аналитически вычислены энергии синглетного и триплетного состояний позитрония с учетом аннигиляционной и петлевой поправок в рамках функционального подхода. Определены зависимости конституентной массы составляющих частиц от масс исходного состояния и соответствующего квантового числа. Вычислена волновая функция в начале координат, и определены ширины распада орто- и парапозитрония. Полученный результат удовлетворительно согласуется с существующими экспериментальными данными.

The energy spectrum of the singlet triplet state of positronium annihilation and with the loop corrections is calculated analytically in the functional approach. The dependence of constituent masses on the mass of constituent particles of the initial state with the corresponding quantum numbers is determined. We calculate the wave function at the origin and determine the width of the decay of ortho- and parapositronium. This result is in satisfactory agreement with the available experimental data.

PACS: 36.10.Dr

ВВЕДЕНИЕ

Энергетический спектр связанного состояния может быть определен с хорошей точностью в рамках нерелятивистской квантовой механики (НКМ) при надлежащем подборе потенциала взаимодействия. Однако нерелятивистское уравнение Шредингера (УШ), дающее математически корректное описание связанных состояний, уже не является достаточным, так как требуется учет релятивистского характера взаимодействия, поскольку для описания современных экспериментальных результатов, полученных как в атомной [1], так и в адронной физике [2], требуется учет релятивистских поправок. Тем не менее нерелятивистское УШ является надежным инструментом исследования и определения энергетического спектра связанных состояний. При этом реальные релятивистские поправки малы, так что теоретическая задача сводится к получению релятивистских поправок к нерелятивистскому потенциалу взаимодействия исходя из формализма квантовой теории поля (КТП). Эта идея лежит в основе потенциала Брейта [3] и эффективной нерелятивистской квантовой теории поля Касвелла и Лепажа [4]. В этих подходах используется матрица рассеяния как источник искомых поправок. Авторами работы [4] в рамках квантовой электродинамики (КЭД), с учетом перенормировки и последующим переходом к нерелятивистскому пределу изучена матрица рассеяния с соответствующими диаграммами Фейнмана, т. е. определен потенциал взаимодействия с релятивистской поправкой. В результате сформулирован метод нерелятивистской КЭД (НКЭД) для определения энергетического спектра с релятивистской поправкой. В дальнейшем этот метод усовершенствован в [5]. Однако в этих работах релятивистские поправки в рамках теории возмущения учитываются в основном к потенциалу взаимодействия, а поправка к кинетической части гамильтониана взаимодействия почти не учитывается. Учет релятивистской поправки к кинетической части гамильтониана в обычном квантово-механическом формализме осуществляется только в рамках релятивистского УШ. Известно, что определение энергетического спектра и волновой функции (ВФ) связанного состояния, состоящих из нескольких тел из релятивистского УШ, с точки зрения математического вычисления почти невозможно. Поэтому учет релятивистской поправки при определении свойств релятивистского связанного состояния как потенциальной, так и кинетической части гамильтониана взаимодействия является одной из актуальных проблем современного теоретического исследования.

В работах [6,7] предложен один из вариантов учета релятивистской поправки к кинетической части гамильтониана и потенциального взаимодействия. В этом подходе масса связанного состояния определяется асимптотическим поведением корреляционной функции от соответствующих токов с необходимыми квантовыми числами. Корреляционная функция, которая выражается через квантово-полевые функции Грина, представляется в форме функционального интеграла, что позволяет выделить необходимую асимптотику, а также точно выполнить усреднение по внешнему калибровочному полю. Полученное представление похоже на фейнмановский функциональный интеграл по путям [8] в нерелятивистской квантовой механике. При этом потенциал взаимодействия определяется диаграммой Фейнмана, полученной в результате обмена калибровочного поля, а масса в УШ является конституентной и отличается от массы исходного состояния данной системы, т. е. кинетическая часть гамильтониана выражается через конституентную массу составных частиц. Таким образом, благодаря конституентной массе составных частиц учитываются релятивистские поправки к кинетической части гамильтониана взаимодействия.

В данной работе в рамках этого подхода будем определять расщепление энергетических спектров орта- и парапозитрония. Энергетические спектры пара- и ортопозитрония вычислялись долгое время различными авторами в рамках эффективной теории квантового поля [4,5]. Подробное изложение приводится в обзоре [9], с деталями конкретных результатов можно ознакомиться в цитированной в нем литературе. Экспериментальные данные для ортопозитрония были впервые получены в [10]. Далее результаты были улучшены в [11,12], а последние результаты описаны в [13]. Экспериментальные данные для парапозитрония приведены в [14].

Работа построена следующим образом: в разд. 1 коротко изложен метод определения масс и энергетического спектра связанного состояния с учетом релятивистской поправки в кинетическую часть гамильтониана. В разд. 2 вычислены энергии пара- и ортопозитрония с учетом релятивистской поправки, в разд. 3 — ширины двух- и трехфотонного распада позитрония. В заключении подытожен основной результат.

1. СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Сверхтонкое расщепление энергетического уровня позитрония $\Delta\nu = E(1^3S_1) - E(1^1S_0)$ экспериментально [15,16] определено как

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= 203\ 387{,}5(1{,}6)\ \text{МГц}, \\ \Delta\nu &= 203\ 389{,}10(0{,}74)\ \text{МГц}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

С учетом релятивистской поправки в [17] вычислены петлевой эффект и эффект отдачи в рамках эффективной КЭД.

Кратко изложим детали нашего подхода. Пусть $J(x) = \Phi^+(x)\Phi(x)$ — ток скалярных заряженных частиц. Если пренебречь аннигиляционным каналом, то рассматриваемые корреляторы удобно представить как усреднение по калибровочному полю $A_\alpha(x)$ произведения функций Грина $G_m(x,y|A)$ скалярных частиц во внешнем калибровочном поле:

$$\Pi(x-y) = \langle J(x)J(y)\rangle = \langle \Phi^+(x)\Phi(x)\Phi^+(y)\Phi(y)\rangle = \langle G_{m_1}(x,y|A)G_{m_2}(y,x|A)\rangle_A. \quad (1.2)$$

Функция Грина $G_m(x,y|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется уравнением

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{g}{c\hbar}A_\alpha(x)\right)^2 + \frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right]G_m(x,y|A) = \delta(x-y). \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) представляется в виде функционального интеграла (детали см. в [18])

$$G_m(x,y|A) = \int_0^\infty \frac{ds}{(4s\pi)^2}\exp\left\{-sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s}\right\}\times \\ \times \int d\sigma_\beta \exp\left\{ig\int_0^1 d\xi \frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial \xi}A_\alpha(\xi)\right\}. \quad (1.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{gathered} Z_\alpha(\xi) = (x-y)_\alpha\xi + y_\alpha - 2\sqrt{s}B_\alpha(\xi), \\ d\sigma_\beta = N\delta B_\beta \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 d\xi\,\dot{B}^2(\xi)\right\} \end{gathered} \quad (1.5)$$

с нормировкой

$$B_\beta(0) = B_\beta(1) = 0 \quad \text{и} \quad \int d\sigma_\beta = 1,$$

где N — константа нормировки. Детали вычисления подробно изложены в [19]. Масса связанного состояния определяется как предел:

$$M = -\lim_{|x-y|\to\infty} \frac{\ln \Pi(x-y)}{|x-y|}. \quad (1.6)$$

Таким образом, для определения массы M нам нужно вычислить корреляционную функцию $\Pi(x)$ в асимптотической области $|x| \to \infty$.

Подставляя (1.4) в (1.2) и проводя усреднение по внешнему калибровочному полю, получаем

$$\Pi(x) = \iint_0^\infty \frac{d\mu_1\,d\mu_2}{(8\pi^2x)^2}J(\mu_1,\mu_2)\exp\left\{-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right) - \frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)\right\}. \quad (1.7)$$

Здесь

$$J(\mu_1,\mu_2) = N_1N_2 \iint \delta r_1\,\delta r_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\tau\,\left[\mu_1\dot{r}_1^2(\tau)+\mu_2\dot{r}_2^2(\tau)\right]\right\}\mathrm{e}^{-W},$$
$$W = W_{1,1}+W_{2,2}-2W_{1,2}, \tag{1.8}$$

где введены следующие обозначения:

$$W_{i,j} = \frac{g^2}{2}(-1)^{i+j}\int\limits_0^x\int\limits_0^x d\tau_1\,d\tau_2\,\dot{Z}_\alpha^{(i)}(\tau_1)D_{\alpha\beta}\left(Z^{(i)}(\tau_1)-Z^{(j)}(\tau_2)\right)\dot{Z}_\beta^{(j)}(\tau_2). \tag{1.9}$$

Представление (1.8) имеет смысл квантовой функции Грина в форме функционального интеграла Фейнмана, когда две частицы с массами μ_1 и μ_2 взаимодействуют посредством нелокального потенциала W. Поэтому мы будем называть массы m_1 и m_2 токовыми, а параметры μ_1 и μ_2 — конституентными массами. Отметим, что в (1.8) функциональное интегрирование проводится по четырехмерным векторам $r_1=(\mathbf{r}_1,r_1^{(4)})$ и $r_2=(\mathbf{r}_2,r_2^{(4)})$. При этом величина $W_{i,j}$ определяется вкладом всевозможных типов диаграмм Фейнмана. Существуют два типа взаимодействий: первое — взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{1,2}$; второе — взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т. е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1}$, $W_{2,2}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{1,2}$ соответствует потенциальному взаимодействию, а $W_{1,1}$, $W_{2,2}$ соответствуют непотенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в перенормировку масс частиц.

В асимптотике $|x|\to\infty$ интеграл (1.8) ведет себя как

$$\lim_{|x|\to\infty} J(\mu_1,\mu_2) \Longrightarrow \exp\{-xE(\mu_1,\mu_2)\}, \tag{1.10}$$

где функция $E(\mu_1,\mu_2)$ зависит от константы связи g и от параметров μ_1, μ_2, но не зависит от масс m_1, m_2. При $|x|\to\infty$ интеграл (1.7) вычисляется методом перевала. Масса связанного состояния определяется точкой перевала:

$$M = \frac{1}{2}\min_{\mu_1,\mu_2}\left\{\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1+\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2+2E(\mu_1,\mu_2)\right\}. \tag{1.11}$$

Таким образом, проблема свелась к вычислению функционального интеграла (1.8). В настоящее время точные математические методы вычисления этого интеграла отсутствуют. Поэтому надо привлекать различные физические предположения или приближения, чтобы как-то выполнить интегрирования по четвертым компонентам $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$. Выполнение интегрирования по четвертым компонентам эффективно соответствует переходу к нерелятивистскому пределу. Другими словами, определяется потенциал взаимодействия с поправками, учитывающими непертурбативность, релятивизм и нелокальный характер взаимодействий. В частности, если в функционале $W_{i,j}$ в (1.9) пренебречь зависимостью от $r_1^{(4)}$ и $r_2^{(4)}$, то система (1.8) сводится к фейнмановскому интегралу по траекториям для движения скалярных частиц с массами μ_1, μ_2 в НКМ [8] с локальным потенциалом. В этом приближении, согласно (1.8), гамильтониан взаимодействия скалярных частиц с массами μ_1 и μ_2 записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{2\mu_2}\mathbf{P}_2^2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{1.12}$$

где $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ — потенциал взаимодействия, который выражается через $W_{i,j}$, тогда $E(\mu_1, \mu_2)$ является собственным значением гамильтониана взаимодействия (1.12), т. е.

$$H\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E(\mu_1, \mu_2)\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{1.13}$$

Тогда из условия минимума (1.11) получаем уравнение для μ_j:

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE(\mu_1, \mu_2)}{d\mu_j} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{1.14}$$

Параметры μ_1, μ_2 имеют размерность массы. При дальнейших вычислениях вводим новый параметр

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}. \tag{1.15}$$

Тогда выражение (1.11) принимает вид

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \mu\frac{dE}{d\mu} + E(\mu), \quad E(\mu_1, \mu_2) = E(\mu), \tag{1.16}$$

где

$$\mu_1 = \sqrt{m_1^2 - 2\mu^2\frac{dE}{d\mu}}, \quad \mu_2 = \sqrt{m_2^2 - 2\mu^2\frac{dE}{d\mu}}. \tag{1.17}$$

В нашем подходе энергетический спектр и волновая функция связанного состояния определяются из УШ с конституентной массой μ. Поправка, связанная с релятивистской природой взаимодействия, учитывается не только поправками к потенциалу взаимодействия, но и через параметры μ_1 и μ_2 (конституентные массы), которые представлены в (1.11) и (1.17). Поэтому, используя стандартные потенциалы для описания свойств атомных и адронных связанных состояний, которые определены различными авторами, из УШ с конституентной массой мы сможем определить спектр с релятивистской поправкой. В функционале $W_{1,2}$ из (1.9) необходимо исключить зависимость от $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$, тогда получаем нерелятивистский потенциал плюс непертурбативную и релятивистскую поправки. Если константа связи мала, то в низшем приближении по теории возмущений можно выполнить интегрирование по четвертым компонентам $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$ в (1.8) (детали см. в [19]).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ПОЗИТРОНИЯ

Из УШ будем определять энергетический спектр позитрония. Гамильтониан взаимодействия записываем в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2\mu}\mathbf{p}^2 - \frac{\alpha_{\rm em}}{r} + V_{\rm br} + V_{\rm ann} + V_{\rm lop}. \tag{2.1}$$

Здесь $V_{\rm br}$ — потенциал Брейта [3], который представляется в виде

$$V_{\rm br}(r) = \frac{\pi\alpha}{\mu_e^2}\delta(\mathbf{r}) - \frac{\alpha}{2\mu_e^2}\left[\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{\mathbf{r}^2}\right] + \\ + \frac{3\alpha}{2\mu_e^2 r^2}(\mathbf{S}\boldsymbol{\ell}) + \frac{8\pi\alpha}{3\mu_e^2}(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{\alpha}{\mu_e^2}\frac{1}{r^3}\left[\frac{3(\mathbf{S}_1\mathbf{r})(S_2\mathbf{r})}{r^2} - (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)\right], \quad (2.2)$$

а $V_{\rm ann}$ — потенциал соответствующего аннигиляционного канала — дает вклад только в триплетное состояние и равен:

$$V_{\rm ann}(r) = \frac{\pi e^2}{2\mu_e^2}\delta(\mathbf{r})\,[3 + 4(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)] = \frac{3\pi\alpha}{2\mu_e^2}\delta(\mathbf{r}) + \frac{2\pi\alpha}{\mu_e^2}(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)\delta(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Наконец, $V_{\rm lop}$ — потенциал, определяющий вклад петлевой поправки, представляется в виде [3]

$$V_{\rm lop}(r) = -g_1\int\limits_1^\infty d\xi_1\,W_1(\xi)\frac{\mathrm{e}^{-2m_e\xi r}}{r}, \quad (2.4)$$

где использованы обозначения

$$g_1 = \frac{2\alpha_{\rm em}^2}{3\pi}, \quad W_1(\xi) = \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right)\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2}. \quad (2.5)$$

Потенциалы, представленные в (2.2) и (2.4), определяют релятивистскую поправку к энергетическому уравнению орто- и парапозитрония. Согласно (1.20) поправка к кинетической части гамильтониана учитывается через конституентную массу электрона и позитрона. Теперь из уравнения

$$H\Psi = E\Psi \quad (2.6)$$

определим энергетический спектр и волновую функцию в рамках метода осцилляторного представления (ОП) [20]. Прежде всего будем учитывать вклад потенциала Брейта. Согласно ОП проводим замену переменных

$$r = q^2, \quad \Psi \Rightarrow q^{2\ell}\Phi(q^2). \quad (2.7)$$

Учитывая (2.1) и (2.2), после некоторых упрощений из (2.7) получаем модифицированное УШ:

$$\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right) - 4\alpha_{\rm em}\mu - 4\mu E q^2 + \frac{4\alpha_{\rm em}}{3\mu}\frac{(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)}{\pi}\times\right. \\ \left.\times\lim_{\Lambda\to\infty}\int\limits_0^\Lambda dk\,k^2\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}k^{2j}q^{2(1+2j)} + \frac{3\alpha_{\rm em}}{2\mu q^4}(\mathbf{L}\mathbf{S}) + \frac{\alpha_{\rm em}}{4\mu q^4}S_{12}\right\}\Phi(q^2) = 0, \quad (2.8)$$

где d — размерность вспомогательного пространства:

$$d = 4 + 4\ell, \quad (2.9)$$

и

$$S_{12} = 12\left[\frac{(\mathbf{S}_1\mathbf{r})(\mathbf{S}_2\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3}(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)\right] = \frac{4}{(2\ell+3)(2\ell-1)}\left[\hat{S}^2\hat{L}^2 - \frac{3}{2}(\hat{\mathbf{L}})(\hat{\mathbf{S}}) - 3(\hat{L}\hat{S})^2\right].$$

Согласно ОП [20] канонические переменные представляют через операторы рождения и уничтожения, а гамильтониан взаимодействия — в нормальной форме:

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I, \tag{2.10}$$

где H_0 — гамильтониан свободного осциллятора

$$H_0 = \omega(a^+a), \tag{2.11}$$

$\varepsilon_0(E)$ — энергия основного состояния в нулевом приближении ОП, а H_I — гамильтониан взаимодействия в нормальной форме. Мы будем исследовать энергетический спектр основного состояния. Приведем выражения $\varepsilon_0(E)$ для синглетного и триплетного состояний по отдельности.

Для синглетного состояния

$$\varepsilon_0^s(E) = \frac{d\omega}{4} - 4\mu\alpha_{\rm em} - \frac{2\mu dE}{\omega} - \frac{2\alpha_{\rm em}\omega^2}{2\mu}\delta_{l,0}, \tag{2.12}$$

для триплетного состояния

$$\varepsilon_0^t(E) = \frac{d\omega}{4} - 4\mu\alpha_{\rm em} - \frac{2\mu dE}{\omega} + \frac{\alpha_{\rm em}\omega^2}{6\mu}\delta_{l,0} + \frac{3\alpha_{\rm em}\omega^2\Gamma(d/2-2)}{2\mu\Gamma(d/2)}(\mathbf{LS}) + \frac{\alpha_{\rm em}}{4\mu}\frac{\omega^2\Gamma(d/2-2)}{\Gamma(d/2)}S_{12}. \tag{2.13}$$

Здесь ω — частота осциллятора, определенная в ОП [20], и после стандартных упрощений имеем $\omega_s = \sigma_s\mu$, а для частоты синглетного состояния σ_s и энергетического спектра E_s получаем

$$\sigma_s = \frac{8}{15\alpha_{\rm em}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{15}{2}\alpha_{\rm em}^2}\right), \tag{2.14}$$

$$\frac{E_s}{\mu} = \frac{\sigma_s^2}{8} - \frac{\alpha_{\rm em}\sigma_s}{2} - \frac{5\alpha_{\rm em}\sigma_s^3}{64}. \tag{2.15}$$

Частота триплетного состояния $\omega_t = \sigma_t\mu$ представляется в виде

$$\sigma_t = \frac{8}{9\alpha_{\rm em}}\left(\sqrt{1 + \frac{9}{2}\alpha_{\rm em}^2} - 1\right). \tag{2.16}$$

Энергия триплетного состояния

$$\frac{E_t}{\mu_t} = \frac{\sigma_t^2}{8} - \frac{\alpha_{\rm em}\sigma_t}{2} + \frac{3\alpha_{\rm em}\sigma_t^3}{64}. \tag{2.17}$$

Конституентную массу синглетного μ_s и триплетного μ_t состояний осциллятора определяем из (1.20). Теперь приступим к вычислению вклада аннигиляционного потенциала.

Аннигиляционный канал дает вклад только в триплетное состояние, и после некоторых вычислений для энергетического спектра модифицированного УШ получаем

$$\varepsilon_0^t(E) = \frac{d\omega}{4} - 4\mu\alpha_{\rm em} - \frac{2d\mu E}{\omega} + \frac{\alpha_{\rm em}\omega^2}{8\mu}\times \\ \times\left[\frac{3(\ell+1)}{2(2\ell+1)} + \frac{7}{3}\frac{\ell+1}{2\ell+1} + 2 - \frac{5(\ell+1)}{2\ell+1} + \frac{6}{2\ell+1} - \frac{4}{(2\ell+1)(2\ell+3)}\right]. \quad (2.18)$$

Из ОП [20] следует

$$\frac{\partial\varepsilon_0^t}{\partial\omega} = 0. \quad (2.19)$$

Для частоты осциллятора $\omega_t = \mu\sigma_t$ имеем

$$\sigma_t = \frac{8}{13\alpha_{\rm em}}\left(\sqrt{1 + \frac{13}{2}\alpha_{\rm em}^2} - 1\right). \quad (2.20)$$

Тогда для энергетического спектра ортопозитрония получаем

$$\frac{E_t}{\mu_t} = \frac{\sigma_t^2}{8} - \frac{\alpha_{\rm em}\sigma_t}{2} + \frac{13\alpha_{\rm em}\sigma_t^3}{192}. \quad (2.21)$$

Теперь приступаем к вычислению энергетического спектра с учетом вклада одной петлевой поляризационной диаграммы, учитывая (2.4). После стандартных упрощений для энергетического спектра ортопозитрония имеем

$$\frac{E_s}{\mu_s} = \frac{\sigma_s^2}{8} - \frac{\alpha_{\rm em}\sigma_s}{2} - \frac{5\alpha_{\rm em}\sigma_s^3}{64} - \frac{g_1\sigma_s^3}{2}\int\limits_1^\infty dt\frac{W_1(t)}{(\sigma_s + 4t)^2}, \quad (2.22)$$

где σ_s — параметр, который связан с частотой осциллятора и определяется из следующего уравнения:

$$\sigma_s - 2\alpha_{\rm em} - \frac{15}{16}\alpha_{\rm em}\sigma_s^2 - 2g_1\sigma_s^2\int\limits_1^\infty dt\frac{W_1(t)}{(\sigma_s + 4x)^2}\left[1 + \frac{8x}{\sigma_s + 4x}\right] = 0. \quad (2.23)$$

Из этого уравнения будем определять σ_s численно. Из (2.23) определим энергетический спектр ортопозитрония. Используя эти значения, из (1.20) определим конституентные массы электронов ортопозитрония:

$$\mu_e^s = \frac{m_e}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}E_s^{(0)}}}, \quad (2.24)$$

где $E_s^0 = E_s/\mu_s$ и представлено в (2.23).

Теперь определим энергетический спектр парапозитрония для основного состояния:

$$\frac{E_t}{\mu_t} = \frac{\sigma_t^2}{8} - \frac{\alpha_{\rm em}\sigma_t}{2} + \frac{13\alpha_{\rm em}\sigma_t^3}{192} + \frac{g_1\sigma_t^3}{2}\int\limits_1^\infty dt \frac{W_1(t)}{(\sigma_t+4t)^2}. \tag{2.25}$$

Уравнение для σ_t представляется в виде

$$\sigma_t - 2\alpha_{\rm em} + \frac{13}{16}\alpha_{\rm em}\sigma_t^2 - 2g_1\sigma_t^2 \int\limits_1^\infty dt \frac{W_1(t)}{(\sigma_t+4t)^2}\left[1 + \frac{8t}{\sigma_t+4t}\right] = 0, \tag{2.26}$$

а конституентная масса записывается следующим образом:

$$\mu_e^t = \frac{m_e}{\sqrt{1+\frac{1}{2}E_t^0}}, \tag{2.27}$$

где $E_t^0 = E_t/\mu_t$.

Используя эти значения констант:

$$\alpha_{\rm em} = \frac{1}{137{,}03599976}, \quad m_e = 0{,}510998910 \text{ МэВ}, \quad m_e\alpha_{\rm em}^2 = 18{,}658 \text{ МГц},$$

вычислим энергетический спектр пара- и ортопозитрония и для расщепления этих уровней получим

$$\triangle\nu_{\rm our} = 203393{,}761 \text{ МГц}. \tag{2.28}$$

Для разности конституентной массы пара- и ортопозитрония из (2.24) и (2.27) имеем

$$\triangle\mu = \mu_e^s - \mu_e^t = 51098{,}6953 \text{ МГц}. \tag{2.29}$$

Для безразмерных параметров σ_s и σ_t, которые связаны с частотой осциллятора, получим

$$\sigma_s = 0{,}0145961629, \quad \sigma_t = 0{,}014593456. \tag{2.30}$$

Эти параметры определяются из ВФ пара- и ортопозитрония соответственно.

Наш численный результат (2.28) хорошо согласуется с экспериментальными данными (1.1).

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИН РАСПАДА

В этом разделе вычисляются ширины двухфотонной аннигиляции в случае парапозитрония и трехфотонной аннигиляции в случае ортопозитрония. Ширина (скорость) распада парапозитрония на два фотона представлена в виде [3]

$$\Gamma_{p-p_s\to2\gamma} = \frac{\pi\alpha_{\rm em}^2}{\mu_s^2}\left|\Psi_s(0)\right|^2, \tag{3.1}$$

а ширина распада ортопозитрония на три фотона [3]

$$\Gamma_{o-p_s\to 3\gamma} = \frac{(\pi^2-9)\alpha_{\rm em}}{9\mu_t^2}\,|\Psi_t(0)|^2\,. \tag{3.2}$$

Здесь μ_s и μ_t — приведенные массы пара- и ортопозитрония, а Ψ_s, Ψ_t — ВФ-функции этих состояний в начале координат. Из (3.1) и (3.2) видно, что для определения скорости распада необходимо определить значение ВФ в начале координат.

Теперь приведем некоторые детали вычисления значения ВФ в начале координат. Для этого определим константу нормировки ВФ:

$$1 = C_{n\ell}^2\int d\mathbf{r}\,\Psi_{n\ell}^*(\mathbf{r})\Psi_{n\ell}(\mathbf{r}) = 4\pi C_{n\ell}^2\int\limits_0^\infty dr\,r^2\Psi_{n\ell}^*(r)\Psi_{n\ell}(r), \tag{3.3}$$

где ℓ — орбитальное, n — радиальное квантовое число, а $\Psi_{n\ell}(r)$ — радиальная ВФ. Для вычисления интеграла (3.3) применим метод ОП и проведем замену переменных:

$$r = q^2, \quad \Psi_{n\ell}\to q^{2\ell}\Phi_n(q^2). \tag{3.4}$$

Учитывая (3.4), после некоторых упрощений из (3.3) получаем

$$1 = 4\pi C_{n\ell}^2 2\rho\int\limits_0^\infty dq\,q^{d-1}\Phi_{n\ell}^* q^2\Phi_{n\ell} = 8\pi\rho C_{n\ell}^2\langle n|q^2|n\rangle. \tag{3.5}$$

При дальнейших расчетах используем представление

$$q^{2(2\rho-1)} = \frac{1}{\omega^{2\rho-1}}\int\limits_0^\infty\frac{dx\,x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)}\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \mathrm{e}^{-\eta^2(1+x)} : \mathrm{e}^{2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}, \tag{3.6}$$

а также явный вид радиальной ВФ. После некоторых вычислений из (3.5) для $C_{n\ell}^2$ получаем

$$C_{n\ell}^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^{\frac{d}{2}+2\rho-1}}{\rho\Gamma(d/2+2\rho-1)}\frac{1}{S_n}, \tag{3.7}$$

где

$$S_n = \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2-2\rho-1)}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(d/2+n)}\frac{1}{\Gamma(1-2\rho)}\sum_{k=0}^n\frac{1}{\Gamma^2(n-k+1)}\sum_{k=0}^k\frac{(-1)^s}{s!(k-s)!}\times$$
$$\times\,\Gamma(2n-2k+s-2\rho+1)\Gamma(d/2+k-s+2\rho-1). \tag{3.8}$$

В частности,

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 1-\frac{2\rho(1-2\rho)}{1+\rho+2\rho\ell}. \tag{3.9}$$

Используя (3.7), для ВФ в начале координат получаем выражение

$$|\Psi_n(0)|^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{(\omega^\rho)^{(3+2\ell)}}{\rho\,\Gamma(3\rho+2\rho\ell)}\frac{1}{S_n}. \tag{3.10}$$

Для определения ширин распада пара- и ортопозитрония будем определять ВФ для основного состояния и для кулоновского взаимодействия, т. е. $\rho = 1$. Тогда, учитывая параметризацию, для частоты осциллятора из (3.10) получим

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\mu_j^3 \sigma_j^3}{8\pi}, \quad j = s, t. \tag{3.11}$$

Если будем ограничиваться низшим порядком по $\alpha_{\rm em}$, то из (2.13) и (2.16) получим параметр, который определяет частоты осциллятора:

$$\sigma_s \equiv \sigma_t = 2\alpha_{\rm em}. \tag{3.12}$$

Тогда, учитывая (3.12), из (3.1) и (3.2) получаем для ортопозитрония

$$\Gamma^{(0)}_{o \to p_s \to 2\gamma} = \frac{m_e}{2}\alpha^5_{\rm em} \tag{3.13}$$

и для парапозитрония

$$\Gamma^{(0)}_{p \to p_s \to 3\gamma} = \frac{2m_e(\pi^2 - 9)\alpha^6_{\rm em}}{9\pi}. \tag{3.14}$$

Этот аналитический результат согласуется с результатами, полученными в [17]. Если при определении параметров σ_s и σ_t, а также конституентной массы составляющих частиц мы учтем релятивистские поправки, то можем определить ширины распада позитрония с этими поправками.

В частности, учитывая (3.10) и (2.22), из (3.1) получаем для ширины двухфотонного распада парапозитрония

$$\Gamma^{\rm our}_{p \to p_s \to 2\gamma} = 7987{,}69\ \text{мкс}^{-1}. \tag{3.15}$$

Аналогично для ширины трехфотонного распада ортопозитрония имеем

$$\Gamma^{\rm our}_{o \to p_s \to 3\gamma} = 7{,}037\ \text{мкс}^{-1}. \tag{3.16}$$

Экспериментальные значения ширин распада пара- и ортопозитрония, измеренные в [12, 14], равны:

$$\Gamma^{\rm exp}_{p \to p_s \to 2\gamma} = 7990{,}9(1{,}7)\ \text{мкс}^{-1} \tag{3.17}$$

и

$$\Gamma^{\rm exp}_{o \to p_s \to 3\gamma} = 7{,}0482(16)\ \text{мкс}^{-1}. \tag{3.18}$$

Из сравнения (3.15), (3.16) и (3.18) видно, что наш результат для ширин распада позитрония удовлетворительно согласуется с существующими экспериментальными данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учитывая релятивистские поправки как в потенциале взаимодействия, так и в кинетической части гамильтониана, через конституентные массы электрона и позитрония аналитически определяем энергетический спектр пара- и ортопозитрония. Также вычислены ширины двух- и трехфотонного распада пара- и ортопозитрония. Полученные численные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

Релятивистские поправки к ВФ связанного состояния в нашем подходе учитываются через параметры σ_s и σ_t для синглетного и триплетного состояний позитрония соответственно. Эти параметры различаются между собой, т. е. это приводит к отличию ВФ синглетного и триплетного состояний. Конституентные массы синглетного и триплетного состояний также различаются. Это различие обеспечивает хорошее согласие между расщеплениями энергетических уровней синглетного и триплетного состояний позитрония.

Аналитически определена зависимость ВФ в начале координат от параметров σ_s и σ_t, а также от конституентной массы составляющих частиц для основного и радиального возбужденного состояний. Это позволяет определить вероятности переходов между различными состояниями позитрония.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eides M. I. et al.* Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 61–261.
2. *Amsler C. et al.* Review of Particle Physics // Phys. Lett. B. 2008. V. 667. P. 1–6.
3. *Berestetskii V. B., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Quantum Electrodynamics. 2nd Ed. Oxford: Pergamon Press, 1982.
4. *Caswell W. E., Lepage G. P.* Effective Lagrangians for Bound State Problems in QED, QCD, and Other Field Theories // Phys. Lett. B. 1986. V. 167. P. 437–442.
5. *Kinoshita T., Nio M.* Radiative Corrections to the Muonium Hyperfine Structure // Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 4909–4929.
6. *Dineykhan M. et al.* Mass Spectrum Bound State Systems with Relativistic Corrections // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2009. V. 42. P. 145001.
7. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A., Toinbaeva N. Sh.* Energy Eigenvalues of Spherical Symmetric Potentials with Relativistic Corrections: Analytic Results // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2010. V. 43. P. 015003.
8. *Feynman R. P., Hibbs A. P.* Quantum Mechanics and Path Integrals. N. Y.: McGraw-Hill, 1963.
9. *Karshenboim S. G.* Precision Physics of Simple Atoms: QED Tests, Nuclear Structure and Fundamental Constants // Phys. Rep. 2005. V. 422. P. 1–63.
10. *Gidley D. W., Zitzewitz P. W.* The Decay Rate of Orthopositronium // Phys. Lett. A. 1978. V. 69. P. 97.
11. *Westbrook C. I. et al.* New Precision Measurement of the Orthopositronium Decay Rate: A Discrepancy with Theory // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1328–1331.
12. *Nico J. S., Gidley D. W., Rich A.* Precision Measurement of the Orthopositronium Decay Rate Using the Vacuum Technique // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1344–1347.
13. *Vallery R. S., Zitzewitz P. W., Gidley D. W.* Resolution of the Orthopositronium-Lifetime Puzzle // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 203402.
14. *Al-Ramadhan A. H., Gidley D. W.* New Precision Measurement of the Decay Rate of Singlet Positronium // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1632–1635.
15. *Mills A. P., Bearman G. H.* New Measurement of the Positronium Hyperfine Interval // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 246–250.
16. *Ritter M. W. et al.* Precision Determination of the Hyperfine-Structure Interval in the Ground State of Positronium // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1331–1338.

17. *Czarnecki A., Melnikov K., Yelkhovsky A.* Calculation of Corrections to Parapositronium Decay // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 052502.
18. *Dineykhan M., Efimov G. V., Namsrai Kh.* // Fortschr. Phys. 1991. V. 39. P. 259.
19. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A.* Determination of the Mass Spectrum of Mesons with Relativistic Corrections // Part. Nucl. 2011. V. 42. P. 3.
20. *Dineykhan M. et al.* Oscillator Representation in Quantum Physics. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1995. V. 26.

Получено 8 февраля 2013 г.