

КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ ТОМСОНОВСКОГО АТОМА ГЕЛИЯ

*Э. М. Казарян^a, В. А. Шахназарян^a,
А. А. Саркисян^{a, б, 1}, А. А. Гусев^{а, 2}*

^a Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван

^б Ереванский государственный университет, Ереван

^а Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В рамках стационарной теории возмущений рассмотрена квантовая модель томсоновского атома гелия. Показано, что с формальной математической точки зрения данная проблема аналогична задаче о двухэлектронных состояниях в параболической квантовой точке. Приведена оценка энергии основного состояния квантового томсоновского атома гелия на основе соотношения неопределенностей Гейзенберга. Энергии основного состояния, полученные в осцилляторном базисе в первом порядке теории возмущений, и качественная оценка дают соответственно верхнюю и нижнюю оценки собственных значений, вычисленных в рамках метода конечных элементов численным решением задачи для квантовой модели. Обсуждаются условия выполнения теоремы Кона в данной системе, когда значения резонансных частот поглощения не зависят от кулоновского взаимодействия между электронами.

In the framework of the stationary perturbation theory, a quantum model of Thomson helium atom is considered. It is shown that from a formal mathematical point of view this problem is similar to the problem of two-electron states in a parabolic quantum dot. The estimation of the ground state energy of a quantum Thomson helium atom on the basis of Heisenberg's uncertainty principle is provided. Ground-state energy obtained in the oscillator basis and in the first order of perturbation theory and qualitative estimation give, respectively, upper and lower bounds of eigenvalues obtained in the framework of finite element method by numerical solution of the problem for the quantum model. The conditions of realization of Kohn theorem in such a system are discussed, when the values of the resonance frequencies are independent of the Coulomb interaction between electrons.

PACS: 31.15.ve; 73.21.La

ВВЕДЕНИЕ

Среди различных моделей атома особое место занимает модель, предложенная Джо-зефом Томсоном в 1904 г. [1]. Согласно модели Томсона, атом представляет собой равномерно положительно заряженную среду, в которую имплантированы электроны. В дальнейшем рядом авторов рассмотрены различные аспекты этой модели. В частности,

¹E-mail: shayk@ysu.am

²E-mail: gooseff@jinr.ru

в [2] обсуждаются основные идеи модели и сделан акцент на важность модели Томсона в методическом плане, а именно: она является хорошим примером применения теорем Кулона и Гаусса–Остроградского, а также полезна с точки зрения моделирования различных квантово-размерных систем. Отметим также, что позже сам Томсон в [3] попытался применить условия квантования Бора для анализа своей модели атома.

Несмотря на свою изначальную ошибочность, эта модель смогла с классической точки зрения объяснить линейчатый характер спектра излучения отдельных атомов. Поскольку электрон внутри такого атома совершает гармонические колебания, частоту ω этих колебаний можно определить с помощью теоремы Гаусса для плотности ρ^+ положительного заряда томсоновского атома [4]:

$$\oint_{4\pi r^2} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \int_{\frac{4\pi}{3} r^3} \rho^+ dv.$$

Отсюда для частоты ω имеем выражение $\omega = \sqrt{Qe/(\mu R^3)}$, где параметры Q и R — заряд ($Q = (4\pi/3)\rho^+ R^3$) и радиус томсоновского атома, а e и μ — заряд и масса электрона. В рамках классической физики электрон в таком «заряженном шарике» радиуса R (томсоновский атом водорода) совершает гармонические колебания с непрерывным спектром. При этом потенциальная энергия электрона будет равна $U(r) = \mu\omega^2 r^2/2$. Если же рассматривать электрон как квантовую частицу, находящуюся в таком поле, то имеем известную задачу в квантовом сферическом гармоническом осцилляторе, энергия основного состояния которого равна $E_0 = 3/2 \hbar\omega$. Следует особо отметить, что еще в 1958 г. в [5] обсуждалась квантовая модель атома водорода по Томсону. В ней, в частности, автор рассматривал возможность просачивания электронов из области «моря» положительного заряда. При этом внутри «моря» положительного заряда потенциал описывался параболой, а в окружающей среде — кулоновским законом. Вместе с тем, если рассматривать нижние уровни энергии электрона, то он в основном будет локализован внутри положительно заряженного шарика радиусом R .

С математической точки зрения квантовая модель томсоновского атома водорода аналогична модели сферической квантовой точки с параболическим потенциалом ограничения. Однако особенность этой модели заключается в том, что если в обычной квантовой точке локализация электронов обусловлена наличием потенциала ограничения, то в случае томсоновского атома их локализация обусловлена наличием равномерно распределенного положительного заряда внутри атома. Это обстоятельство приводит к тому, что при фиксированном значении заряда $Q \omega \sim 1/R^{3/2}$, тогда как в случае параболической квантовой точки, согласно квантовой вириальной теореме, $\omega \sim 1/R^2$ [6].

Из сказанного ясно, что если рассматривать томсоновский атом гелия в квантовом приближении, то эта задача будет аналогична проблеме двухэлектронных состояний в параболической квантовой точке. Гамильтониан такой системы можно представить в следующем виде:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2\mu} + \frac{\hat{p}_2^2}{2\mu} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{\mu\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{\mu\omega^2 r_2^2}{2}. \quad (1)$$

Целью данной работы является рассмотрение в рамках квантовой механики свойств томсоновского атома гелия, а также специфических оптических переходов в данной системе при взаимодействии с длинноволновым излучением.

Структура работы следующая. В разд. 1 исходя из соотношения неопределенностей и принципа минимума энергии дана качественная оценка возможных значений радиуса локализации электрона и энергии основного состояния в зависимости от параметра — радиуса модели томсоновского атома гелия. В разд. 2 в первом порядке теории возмущений Шредингера в осцилляторном базисе вычислена энергия основного состояния как функция параметра. В разд. 3 приведено уравнение Шредингера модели в гиперсферических координатах. Вычисленные с заданной точностью методом конечных элементов значения энергии основного состояния при различных значениях параметра сравниваются с их оценками. В разд. 4 показана правомерность теоремы Кона для рассмотренной модели.

1. КАЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

Гамильтониан (1) инвариантен относительно перестановки электронов, следовательно, для качественной оценки энергии основного состояния модели томсоновского атома, по аналогии с обычным атомом гелия, положим равными радиус-векторы $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ и импульсы $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. Тогда энергия системы

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E(r) = \frac{\hbar^2}{\mu r^2} + \mu\omega^2 r^2 + \frac{e^2}{2r}.$$

Приравнивая к нулю производную $E(r)$, по r найдем оценку для энергии основного состояния рассматриваемой системы:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{2\hbar^2}{\mu r^3} + 2\mu\omega^2 r - \frac{e^2}{2r^2} = 0.$$

Подставляя значение ω (при $Q = 2e$), имеем

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 - \frac{1}{8} \frac{r}{R} - \frac{\hbar^2}{2\mu e^2 R} = 0.$$

В терминах безразмерных величин радиусов $r' = r/a_B$, $R' = R/a_B$ в единицах радиуса Бора $a_B = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ и энергии $\varepsilon_{\text{est}} = E/E_B$ в единицах энергии основного состояния атома водорода $E_B = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$, получаем систему уравнений

$$\left(\frac{r'}{R'}\right)^4 - \frac{1}{8} \frac{r'}{R'} - \frac{1}{2R'} = 0, \quad \varepsilon_{\text{est}} = \frac{2}{r'^2} + \frac{4r'^2}{R'^3} + \frac{1}{r'}.$$

Зависимость радиуса r' электронов и энергии основного состояния ε_{est} от параметра R' — радиуса атома — показана на рис. 1, 2. Как следует из приведенного рис. 1, с увеличением радиуса атома R' значение $r' = r'_{\text{min}}$, при котором достигается минимум

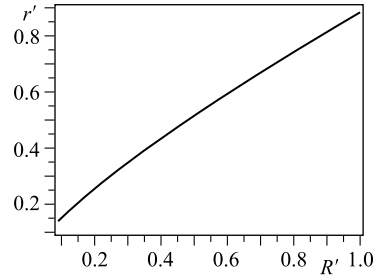


Рис. 1. Радиус r' основного состояния в зависимости от параметра R' — радиуса томсоновского атома (в единицах a_B) (качественная оценка)

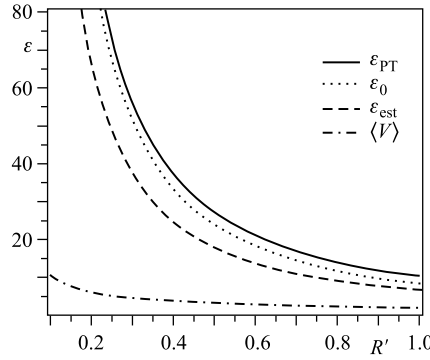


Рис. 2. Зависимость энергии основного состояния ε (в единицах E_B) от радиуса R' томсоновского атома. Качественная оценка ε_{est} (штриховая линия), оценка теории возмущений $\varepsilon = \varepsilon_{PT}$ (сплошная) и ее составляющие: энергия невозмущенной системы ε_0 (пунктирная) и кулоновское возмущение $\langle V \rangle$ (штрихпунктирная)

энергии, также растет. Этого и следовало ожидать, так как отталкивающий потенциал взаимодействия между электронами с увеличением радиуса атома отдаляет их друг от друга благодаря ослаблению локализирующего действия положительного заряда атома (плотность ρ^+ с ростом R уменьшается). Соответственно, как результат ослабления кулоновского взаимодействия между электронами и взаимодействия с положительным зарядом атома, уменьшается и энергия основного состояния.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Гамильтониан томсоновского атома представим в следующем виде:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + V = \sum_{i=1}^2 \hat{H}_i^{(0)} + V, \quad \hat{H}^{(0)} = \sum_{i=1}^2 \hat{H}_i^{(0)}, \quad (2)$$

где $\hat{H}_i^{(0)}$ — гамильтонианы невзаимодействующих электронов:

$$\hat{H}_i^{(0)} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_i + \frac{\mu\omega^2 r_i^2}{2},$$

а кулоновское отталкивание электронов V рассмотрим как возмущение:

$$V = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Волновая функция невозмущенного состояния дается произведением

$$\Psi_{n_1, l_1, m_1; n_2, l_2, m_2}^{(0)}(r_1, \theta_1, \varphi_1, r_2, \theta_2, \varphi_2) = \psi_{n_1, l_1, m_1}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \psi_{n_2, l_2, m_2}(r_2, \theta_2, \varphi_2), \quad (3)$$

где $\psi_{n_i, l_i, m_i}(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ — осцилляторные функции i -го электрона:

$$\psi_{n_i, l_i, m_i}(r_i, \theta_i, \varphi_i) = C(n_i, l_i) \left(\frac{r_i}{a_\omega}\right)^{l_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{a_\omega}\right)^2\right) L_{n_i}^{l_i+\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{r_i}{a_\omega}\right)^2\right) Y_{l_i}^{m_i}(\theta_i, \varphi_i),$$

$$C(n_i, l_i) = \frac{1}{(4\pi)^{1/4}} \frac{1}{a_\omega^{3/2}} \sqrt{\frac{2^{n_i+l_i+3} n_i!}{(2n_i+2l_i+1)!}}, \quad a_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}.$$

Здесь $L_{n_i}^{l_i+\frac{1}{2}}(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра и $Y_{l_i}^{m_i}(\theta_i, \varphi_i)$ — сферические функции. В частности, волновая функция основного состояния имеет следующий вид:

$$\Psi_{0,0,0;0,0,0}^{(0)}(r_1, \theta_1, \varphi_1, r_2, \theta_2, \varphi_2) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}a_\omega)^3} \exp\left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{2a_\omega^2}\right).$$

Отметим, что общая запись волновой функции (3) справедлива только для нижних состояний, когда параболический потенциал можно считать бесконечно высоким. Для энергетического спектра невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 имеем ($Q = 2e$)

$$E_{n_1, n_2}^{(0)} \equiv E_{n_1, l_1, m_1, n_2, l_2, m_2}^{(0)} = \hbar\omega (n_1 + n_2 + 3) = 2(n_1 + n_2 + 3) \sqrt{2/R'^3} E_B.$$

После замены переменных $\rho_1 = r_1/a_\omega$, $\rho_2 = r_2/a_\omega$ для поправки $\langle V \rangle$ к энергии основного состояния ($n_1 = n_2 = 0$) получаем

$$\begin{aligned} \langle V \rangle = & \frac{e^2}{\pi^3 a_\omega^3} \int_0^\infty \rho_1^2 d\rho_1 \int_0^\infty \rho_2^2 d\rho_2 \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \times \\ & \times \frac{\exp(-\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \theta_1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Интеграл, входящий в (4), вычисляется в аналитическом виде ($Q = 2e$):

$$\langle V \rangle = \frac{4e^2}{\sqrt{\pi}a_\omega} \int_0^\infty \rho_1 \exp(-\rho_1^2) \operatorname{erf}(\rho_1) d\rho_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{a_\omega} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{R'^3}} E_B.$$

В терминах безразмерного параметра $\alpha = \sqrt{\hbar\omega/E_B}$ среднее значение энергии $\varepsilon = E/E_B$ в основном состоянии вычисляется согласно формуле

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{\langle \hat{H} \rangle}{E_B} = \frac{\langle \hat{H}^{(0)} \rangle}{E_B} + \frac{\langle V \rangle}{E_B},$$

с учетом приведенных выше выражений для $E_{00}^{(0)}$ и $\langle V \rangle$:

$$\varepsilon_0 = \frac{E_{00}^{(0)}}{E_B} = 3 \frac{\hbar\omega}{E_B} = 3\alpha^2, \quad \frac{\langle V \rangle}{E_B} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{E_B}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha$$

$\varepsilon(\alpha)$ окончательно получим

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{\langle \hat{H} \rangle}{E_B} = 3\alpha^2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha.$$

Аналогично с учетом переопределения невозмущенного оператора

$$\hat{H}_i^{(0)}(\text{He}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_i - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i|}$$

среднее значение энергии $\varepsilon_{\text{He}} = E(\text{He})/E_B$ атома гелия в основном состоянии дается формулой [7]

$$\varepsilon_{\text{He}}(\alpha) = \frac{\langle \hat{H}(\text{He}) \rangle}{E_B} = \frac{3}{2}\alpha^2 - 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha.$$

Минимизируя $\langle \hat{H}(\text{He}) \rangle$ относительно α , получаем

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{He}}(\alpha)}{\partial \alpha} = 3\alpha - 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0, \quad \alpha = \frac{1}{3} \left(8\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right).$$

Соответствующее значение энергии $E_{\text{He}}(\alpha) \approx -4,6 E_B$ составляет 79 % экспериментальной величины.

На рис. 2 приведено сравнение энергии невозмущенной системы и поправка к ней в единицах энергии основного состояния атома водорода. Как и следовало ожидать, с уменьшением R' плотность положительного заряда ρ^+ увеличивается и доля кулоновской энергии взаимодействия между электронами уменьшается. При значении $R = 0,64a_B$ энергия томсоновского атома гелия окажется в три раза больше экспериментального значения энергии связи атома гелия $\varepsilon = -E_{\text{He}} = 5,8 E_B$. На рис. 2 представлена также полная энергия основного состояния системы с учетом возмущения $\varepsilon = (E_{00}^{(0)} + \langle V \rangle)/E_B$ и ее качественная оценка. Выше уже отмечалось, что с ростом R' эта энергия будет уменьшаться, что и изображено на графике. Как видим, при значениях приведенного радиуса $R' \sim 0,6-1$, соответствующих реальным атомным размерам, качественная оценка оказывается довольно близкой к результату теории возмущений.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Уравнение Шредингера томсоновского атома при значениях заряда $Q = 2e$ и квадрата частоты $\omega^2 = 2e^2/(\mu R^3)$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_2 + \frac{\mu\omega^2}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - E \right) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$$

в безразмерных переменных $r'_1 = r_1/a_B$ и $r'_2 = r_2/a_B$, $R' = R/a_B$ и энергии $E' = E/2E_B$, т. е. $\varepsilon(R') = 2E'$, имеет вид

$$\left(-\Delta'_1 - \Delta'_2 + \frac{2}{R'^3}(r'^2_1 + r'^2_2) + \frac{2}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|} - 2E' \right) \psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = 0. \quad (5)$$

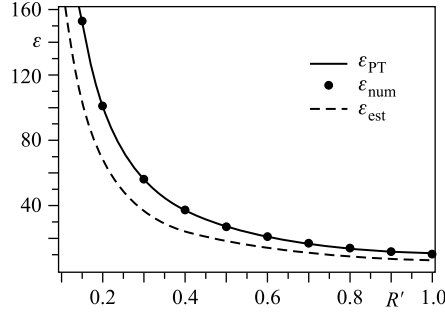


Рис. 3. Энергия основного состояния ε в зависимости от радиуса R' томсоновского атома: сплошная линия — результаты теории возмущений ε_{PT} , штриховая — качественная оценка ε_{est} , точки — результаты численных расчетов ε_{num}

При значении полного углового момента, равного нулю, достаточно ограничиться волновой функцией $\psi(\rho, \beta, \theta)$, зависящей от трех гиперсферических координат: $\rho = \sqrt{r_1'^2 + r_2'^2}$, $\text{tg } \beta/2 = r_1'/r_2'$, $\cos \theta = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2|$, тогда уравнение (5) принимает вид [8]

$$\left(\frac{1}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^5 \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2}{R'^3} \rho^2 + H(\beta, \theta; \rho) + \frac{2}{\rho \sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \theta}} - 2E' \right) \psi(\rho, \beta, \theta) = 0, \quad (6)$$

$$H(\beta, \theta; \rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{4}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \sin^2 \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right].$$

На рис. 3 приведены собственные значения энергии основного состояния $\varepsilon(R') = 2E'$ томсоновского атома, вычисленные при фиксированных значениях параметра конфинмента R' с точностью восьми значащих цифр при решении задачи на собственные значения для уравнения (6) с помощью программ [9, 10]. Для сравнения приведены также результаты, полученные в первом порядке теории возмущений, и качественная оценка. Как и следует из общей теории, значения энергии основного состояния, найденные в первом порядке теории возмущений, и качественная оценка дают соответственно верхнюю (с точностью $\sim 0,2\%$) и нижнюю (с точностью $\sim 5-20\%$) оценки полученных численных собственных значений.

4. ЭКЗОТИЧЕСКАЯ ОПТИКА ТОМСОНОВСКОГО АТОМА ГЕЛИЯ

Тот факт, что оба электрона находятся в сферической осцилляторной яме, приводит к интересному поведению характера поглощения длинноволнового излучения томсоновским атомом гелия. Дело в том, что еще в 1960-е гг. Вальтером Коном была доказана [11], а в дальнейшем другими авторами обобщена теорема о квантовых переходах в попарно взаимодействующей многочастичной системе, находящейся в осцилляторном поле, под действием длинноволнового излучения. Согласно обобщенной теореме Кона, при некоторых специфических условиях, обусловленных характером квантового ограничения, а также наложенного возмущения, в многочастичной системе будут иметь место переходы идентичные переходам в одночастичной системе [12–14].

Гамильтониан квантовой модели томсоновского атома гелия (1) в вышеуказанном предположении, что нижние уровни такого атома ограничены бесконечно высокими стенками параболического потенциала, совпадает с двухчастичным гамильтонианом в случае параболической квантовой точки. Следовательно, теорема Кона имеет место в случае томсоновского атома гелия.

Для наглядности ограничимся рассмотрением двумерного томсоновского атома (2), помещенного в однородное вращающееся микроволновое поле с частотой Ω , электрическая составляющая которого имеет вид

$$\mathbf{F}(t) = (\mathbf{e}_x F_0 \cos \theta_0 + \mathbf{e}_y F_0 \sin \theta_0) \exp(-i\Omega t).$$

Тогда оператор возмущения в дипольном приближении можно представить в следующей форме:

$$\hat{H}' = -e((x_1 + x_2)F_0 \cos \theta_0 + (y_1 + y_2)F_0 \sin \theta_0) \exp(-i\Omega t). \quad (7)$$

Введем операторы

$$\hat{C}_x^\pm = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}} \sum_{j=1}^2 \left(x_j \mp i \frac{\hat{p}_{xj}}{\mu\omega} \right), \quad \hat{C}_y^\pm = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}} \sum_{j=1}^2 \left(y_j \mp i \frac{\hat{p}_{yj}}{\mu\omega} \right), \quad (8)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям [13]

$$[U, \hat{C}_x^\pm] = 0, \quad [U, \hat{C}_y^\pm] = 0, \quad [\hat{H}_0, \hat{C}_x^\pm] = \pm \hbar\omega \hat{C}_x^\pm, \quad [\hat{H}_0, \hat{C}_y^\pm] = \pm \hbar\omega \hat{C}_y^\pm. \quad (9)$$

Для компонент x и y имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^2 x_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} (\hat{C}_x^+ + \hat{C}_x^-), \quad \sum_{j=1}^2 y_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} (\hat{C}_y^+ + \hat{C}_y^-).$$

В результате оператор возмущения (7) выражается в терминах операторов (8), удовлетворяющих коммутационным соотношениям (9).

Как показано в [13, 14], из коммутационных соотношений (9) непосредственно следует, что если ψ_{n_x, n_y} — собственная функция оператора \hat{H} , соответствующая энергии E_{n_x, n_y} , то функции $\hat{C}_x^\pm \psi_{n_x, n_y}$ и $\hat{C}_y^\pm \psi_{n_x, n_y}$ также будут собственными функциями оператора \hat{H} , но уже с энергиями $E_{n_x, n_y} \pm \hbar\omega$. Таким образом, если на двумерный томсоновский атом гелия наложить возмущение \hat{H}' , то под его воздействием в системе будут иметь место резонансные переходы, не зависящие от кулоновского взаимодействия между электронами. Иначе говоря, резонансные частоты переходов в томсоновском атоме гелия будут теми же, что и в случае томсоновского водородоподобного атома с той же плотностью положительного заряда ρ^+ . Интересно сравнить резонансные частоты переходов томсоновского атома в электрическом и магнитном полях с результатами, полученными для композитных частиц в квантовых ямах [15].

Работа частично поддержана грантами РФФИ 14-01-00420, 11-01-00523 и 13-01-00668.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson J.* On the Structure of the Atom: An Investigation of the Stability and Periods of Oscillation of a Number of Corpuscles Arranged at Equal Intervals around the Circumference of a Circle with Application of the Results to the Theory of Atomic Structure // *Phil. Mag.* 1904. V. 6, 7(39). P. 237–265.
2. *Walton A.* The Kelvin–Thomson Atom. I. The One- to Six-Electron Atoms // *Phys. Educ.* 1977. V. 12. P. 326–328.
3. *Thomson J. J.* On the Structure of the Atom // *Phil. Mag.* 1913. V. 26. P. 792–799.
4. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука, 1988.
5. *Zatzkis H.* Thomson Atom // *Am. J. Phys.* 1958. V. 26. P. 635–638.
6. *Kazaryan E., Petrosyan L., Sarkisyan H.* Impurity Levels in a Parabolic Quantum Dot under Action of a Strong Magnetic Field // *Intern. J. Mod. Phys. B.* 2001. V. 15. P. 4103–4110.
7. *Мошинский М.* Гармонический осциллятор в современной физике: от атомов до кварков. М.: Наука, 1972.
8. *Ahrashkevich A. G. et al.* Adiabatic Hyperspherical Representation in Barycentric Coordinates for Helium-Like Systems // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 1991. V. 24. P. 1615–1638.
9. *Gusev A. A. et al.* POTHEA: A Program for Computing Effective Potentials, Energy Levels and Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach // *Book of Abstracts of the Intern. Conf. «Mathem. Modeling and Comp. Physics 2013»*, Dubna, July 8–12, 2013. P. 94; <http://www.info.jinr.ru/programs/jinrlib/kantbp>.
10. *Chuluunbaatar O. et al.* KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach // *Comp. Phys. Commun.* 2008. V. 179. P. 685–693.
11. *Kohn W.* Cyclotron Resonance and de Haas–van Alphen Oscillations of an Interacting Electron Gas // *Phys. Rev.* 1961. V. 123. P. 1242–1244.
12. *Maksym P., Chakraborty T.* Quantum Dots in a Magnetic Field: Role of Electron–Electron Interactions // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 65. P. 108–111.
13. *Peeters F.* Magneto-Optics in Parabolic Quantum Dots // *Phys. Rev. B: Condensed Matter.* 1990. V. 42. P. 1486–1487.
14. *Саркисян А.* К вопросу о критериях применимости одночастичных переходов в многочастичной системе // *Письма в ЭЧАЯ.* 2007. Т. 4, № 1(137). С. 85–90.
15. *Ковалев В. М., Чаплик А. В.* Композитные частицы в квантовых ямах // *Письма в ЖЭТФ.* 2008. Т. 88, вып. 7. С. 527–530.

Получено 5 июня 2013 г.