

## ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЦЕНТРАЛЬНУЮ ПЛОТНОСТЬ И ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ БЕЛОГО КАРЛИКА RX J0648.0-4418 С РЕКОРДНЫМ ПЕРИОДОМ ВРАЩЕНИЯ В МОДЕЛИ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

*С. А. Михеев<sup>1</sup>, В. П. Цветков*

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

В работе получена система уравнений и неравенств, позволяющая найти ограничения на значения центральной плотности  $\rho_c$  и химический состав, определяемый параметром  $\mu_e$ , белого карлика RX J0648.0-4418 с рекордно быстрым периодом вращения  $T = 13,18$  с и массой  $m = (1,28 \pm 0,05)m_\odot$ . Анализ их численных решений показал наличие сложного характера зависимости  $\mu_e$  от  $\rho_c$ . При этом параметры  $\mu_e$  и  $\rho_c$  изменяются в интервалах  $1,09 \leq \mu_e \leq 1,21$ ,  $9,04 \leq \rho_c/\rho_0 \leq 10^3$  ( $\rho_0 = 0,98 \cdot 10^6$  г/см<sup>3</sup>). Данный интервал значений параметра  $\mu_e$  указывает на то, что белый карлик RX J0648.0-4418 не может быть полностью водородным. Он должен содержать не менее 9% и не более 21% тяжелых элементов. Расчеты проводились с уравнением состояния идеального вырожденного электронного газа. Получены с точностью  $10^{-3}$  приближенные аналитические выражения минимального периода  $T_{\min}$  и массы белого карлика  $m$ . Показано, что при приближении периода  $T$  к  $T_{\min}$  масса белого карлика возрастает почти вдвое по сравнению с отсутствием вращения при фиксированной центральной плотности.

In this paper, we derive a system of equations and inequalities, allowing one to find constraints on the values of the central density  $\rho_c$  and the chemical composition (parameter  $\mu_e$ ) of white dwarf RX J0648.0-4418 with the shortest period of rotation  $T = 13.18$  s and mass  $m = (1.28 \pm 0.05)m_\odot$ . Analysis of their numerical solutions showed the presence of the complex nature of the dependence  $\mu_e$  on  $\rho_c$ . The parameters  $\mu_e$  and  $\rho_c$  change in the ranges  $1.09 \leq \mu_e \leq 1.21$ ,  $9.04 \leq \rho_c/\rho_0 \leq 10^3$  ( $\rho_0 = 0.98 \cdot 10^6$  g/cm<sup>3</sup>). Given range of values of the parameter  $\mu_e$  indicates that white dwarf RX J0648.0-4418 cannot be fully hydrogen. It should contain not less than 9% and not more than 21% of heavy elements. The calculations were performed with the equation of state of an ideal degenerate electron gas. Close analytical expressions of the minimum period  $T_{\min}$  and weight of white dwarf  $m$  are obtained with an accuracy of  $10^{-3}$ . It is shown that during the approach period  $T$  to  $T_{\min}$  mass of the white dwarf increases almost two times compared with absence of rotation at a fixed central density.

PACS: 97.10.Kc; 02.60.Cb; 02.60.Nm; 02.70.Wz; 05.30.Fk; 47.85.Dh

---

<sup>1</sup>E-mail: sergjan800@rambler.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемые периоды вращения белых карликов колеблются в диапазоне от рекордно низкого 13,18 с у RX J0648.0-4418 с массой  $(1,28 \pm 0,05)m_{\odot}$  [1] до 100 и более часов [2].

Минимально возможные периоды вращения белых карликов определяются значениями их плотности в центре  $\rho_c$  (массы  $m$ ) и уравнениями состояния составляющего их вещества.

Характерный диапазон плотностей белых карликов имеет порядок  $10^6 - 10^9$  г/см<sup>3</sup>, что соответствует массам  $(0,3 - 1,4)m_{\odot}$  [3].

Хорошо известно [4], что равновесные конфигурации белых карликов определяются давлением вырожденного электронного газа. В достаточно хорошем приближении этот ферми-газ можно считать идеальным и полностью вырожденным [3].

Уравнение состояния идеального вырожденного электронного газа

$$\rho = \frac{8\pi}{3} \frac{m_e^3 m_n c^5}{\hbar^3} \mu_e x^3,$$

$$P = \frac{\pi}{3} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \left( x(2x^2 - 3)\sqrt{1 + x^2} + 3 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right)$$

впервые использовал Чандрасекар, который применил его для описания белых карликов. С помощью этого уравнения состояния, в литературе получившего название уравнения Чандрасекара (Ch), он дал оценку максимальной массе белых карликов без учета вращения, равную  $1,4m_{\odot}$ .

Реально к уравнению состояния Ch относятся две поправки. Первая из них связана с необходимостью учета электростатического взаимодействия между электронами и ионами. Вторая поправка связана с необходимостью учета обратного  $\beta$ -распада при высоких плотностях. Эти поправки учитываются в уравнениях состояния Гаррисона–Уилера (HW), Бейма–Петика–Сазерленда (BPS) и др. [3].

Из наблюдений минимально возможного периода вращения белых карликов  $T_{\min}$  и их вычислений с использованием различных уравнений состояния можно получить уникальную информацию об этих уравнениях.

Использование новых математических подходов в теории вращающихся гравитирующих конфигураций, а именно, методов символично-численных вычислений, позволяет поднять ее на новый качественный уровень [5–7]. В данной работе мы будем использовать развитые нами в этих работах методы, в основе которых лежит систематическое использование полиномов наилучшего приближения в  $L_2$  по степеням координат конфигурации белых карликов.

Обычно считают, что минимально возможному периоду данных конфигураций соответствует момент равенства нулю ускорения свободного падения на экваторе [2]. Это экстремальное состояние соответствует нулевому значению давления в данной области или состоянию невесомости в ней, когда сила тяжести уравновешивается центробежной силой. Самым простым способом оценки минимального периода вращения  $T_{\min}$  является представление вращающегося белого карлика сферически-симметричным с радиусом  $R$ . Приравнявая силу тяготения на единицу массы на его поверхности  $Gm/R^2$  ( $G$  — гравитационная постоянная) и величину центробежной силы  $(2\pi/T_{\min})^2 R$ , мы получаем

оценку

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\odot}^3}{Gm_{\odot}} \frac{(R/R_{\odot})^{3/2}}{(m/m_{\odot})^{1/2}}} = 0,116 \frac{(R/R_{\odot})^{3/2}}{(m/m_{\odot})^{1/2}} d, \quad (1)$$

где  $d = 1$  суг.

Значение коэффициента в (1) 0,116 несколько отличается от значения 0,143, приведенного в [2]. Это расхождение, на наш взгляд, связано с небольшими неточностями при выполнении числовых оценок в этой работе. Существенным недостатком формулы (1) является зависимость  $T_{\min}$  от двух параметров:  $R$  и  $m$ . Если масса определяется экспериментально, то радиус должен быть вычислен в рамках какой-либо модели. При получении не учитывается конкретное распределение плотности вращающегося белого карлика, которое существенно отличается от однородного и сферически-симметричного в случае быстрого вращения.

В данной работе проведено вычисление минимального периода вращения белых карликов  $T_{\min}$  с максимально возможной точностью в математической модели с использованием уравнения состояния идеального вырожденного электронного газа. Как будет показано нами, минимальное значение периода  $T_{\min}$  достигается задолго до наступления неустойчивости конфигурации в отличие от способа получения оценки значения  $T_{\min}$  по формуле (1), когда используется условие истечения вещества конфигурации с экватора и не учитывается характер уравнения состояния вещества, особенности распределения плотности вещества конфигурации и другие факторы.

Выражение для  $T_{\min}$  в отличие от (1) нами будет получено зависящим только от одного параметра, а именно, центральной плотности конфигурации  $\rho_c$ .

При анализе ограничений на значения центральной плотности  $\rho_c$  и химический состав белого карлика, характеризуемого параметром  $\mu_e = A/Z$  ( $A$  — атомный номер элемента,  $Z$  — его порядковый номер), мы будем исходить из соотношения  $T \geq T_{\min}$ . Из него следует, что  $\mu_e = \mu_e(\rho_c)$  и имеют место соотношения  $\mu_{e \min} \leq \mu_e \leq \mu_{e \max}$ ,  $\rho_{c \min} \leq \rho_c \leq \rho_{c \max}$ .

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Уравнение гидростатического равновесия ньютоновской вращающейся гравитирующей конфигурации имеет вид [8]

$$\Phi + \int_0^{\rho} \frac{dP(\rho')}{\rho'} - \frac{\omega^2}{2} \mathbf{x}_{\perp}^2 = \text{const}, \quad (2)$$

где  $P$  — давление;  $\rho$  — плотность конфигурации;  $\Phi$  — ньютоновский гравитационный потенциал;  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $\mathbf{x}_{\perp}^2 = \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})/\omega^2$ ,  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор.

Как показано в [5, 9], для идеального вырожденного ферми-газа имеет место соотношение

$$\int_0^{\rho} \frac{dP(\rho')}{d\rho'} = \frac{m_e c^2}{2\mu_e m_n} \left( \sqrt{1 + k_0 \tilde{\rho}^{2/3}} - \sqrt{1 + k_0} \right), \quad (3)$$

где  $c$  — скорость света;  $m_e$  — масса электрона;  $m_n$  — масса нейтрона;  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_c$ ;  $k_0 = (\rho_c/\rho_0^{(e)})^{2/3}$ .

Значение параметра  $\rho_0^{(e)}$  равно

$$\rho_0^{(e)} = \mu_e \rho_0, \quad \rho_0 = \frac{m_n m_e^3 c^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (4)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\rho_0 = 0,9823 \cdot 10^6$  г/см<sup>3</sup>.

Подставляя (3) в (2), получаем уравнение для определения плотности  $\tilde{\rho}$  вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  конфигурации

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{x}') \left( \frac{1}{|\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' + K_0 \left( \sqrt{\frac{1}{k_0} + \tilde{\rho}^{2/3}} - \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} \right) - \varepsilon \frac{\mathbf{x}_\perp^2}{a_1^2} = 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon = \omega^2 / (4\pi G \rho_c)$ ,  $K_0 = g^{(e)} c^2 / (4\pi G \rho_0^{(e)} k_0^{1/2} a_1^2)$ ,  $\mathbf{x}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ,  $x_1 = x/a_1$ ,  $x_2 = y/a_1$ ,  $x_3 = z/a_3$ ,  $a_1$  и  $a_3$  — соответственно большая и малая полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации. Область  $D$  в (5) определяется условием  $\tilde{\rho} \geq 0$ .

Уравнение (5) представляет собой нелинейное интегральное уравнение в  $\mathbf{R}^3$  с подвижной границей. Границу  $\delta D$  области  $D$  будем искать в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности [10]:

$$\delta D: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i+j+k=L}^{i+j+k=2} Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 1. \quad (6)$$

Полуоси аппроксимирующего сфероида  $a_1$ ,  $a_3$  и коэффициенты  $Z_{ijk}$  находим из условия минимизации функционала  $\Lambda$  [10]:

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta D} \tilde{\rho}^2 d\Omega, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} = 0, \quad a_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_3} = 0. \quad (7b)$$

Система уравнений (5), (7б) представляет собой замкнутую систему для нахождения параметров конфигурации  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $Z_{ijk}$ ,  $\tilde{\rho}$ .

Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса выражение  $\tilde{\rho}$  аппроксимируется с любой степенью точности полиномом по степеням координат  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ :

$$\tilde{\rho} \cong \sum_{a+b+c=0}^{a+b+c=P} \rho_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (8)$$

Для этого достаточно выбрать  $P$  большим.

Коэффициенты  $\rho_{abc}$  и  $Z_{ijk}$ , определяющие структуру конфигурации для фигур вращения, имеют вид

$$\rho_{abc} = \left( \frac{a+b}{2} \right)! \left[ \left( \frac{a}{2} \right)! \left( \frac{b}{2} \right)! \right]^{-1} \rho_{a+b,c}, \quad (9)$$

$$Z_{ijk} = \left( \frac{i+j}{2} \right)! \left[ \left( \frac{i}{2} \right)! \left( \frac{j}{2} \right)! \right]^{-1} Z_{i+j,k}.$$

У нас индексы  $a, b, c$  и  $i, j, k$  являются четными.

Уравнение (5) существенно нелинейно из-за члена  $\sqrt{1 + k_0 \tilde{\rho}^{2/3}}$ . Упростим его, аппроксимируя эту функцию полиномом степени  $N$  согласно формуле

$$\sqrt{\frac{1}{k_0} + \tilde{\rho}^{2/3}} - \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} = \sum_{i=1}^N \delta_i(k_0) \tilde{\rho}^i + \Delta_N(k_0, \tilde{\rho}) - \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \frac{1}{\sqrt{k_0}}. \quad (10)$$

Для нахождения коэффициентов  $\delta_i$  в системе символьной математики MAPLE нами составлена программа. Она позволяет получить аналитические представления  $\delta_i(k_0)$  и  $\Delta_N(k_0, \tilde{\rho})$  в метрике  $L_2$  для любых заданных значений  $N$ .

Для случая  $N = 6$  аналитический вид коэффициентов  $\delta_i(k_0)$  дается в приложении.

Оценки дают значение  $\max \Delta_6(k_0, \tilde{\rho}) \cong 2,5 \cdot 10^{-3}$ .

С учетом (10) уравнение (5) с точностью до членов порядка  $10^{-3}$  приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{x}') \left( \frac{1}{|\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' + K_0 \times \\ \times \left( \sum_{i=1}^6 \delta_i(k_0) \tilde{\rho}^i(\mathbf{x}) - \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \frac{1}{\sqrt{k_0}} \right) - \varepsilon \frac{\mathbf{x}_1^2}{a_1^2} = 0. \quad (11)$$

Методы решения уравнения (11) мы изложим в следующем разделе.

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

При решении (11) нам будет удобно считать все параметры конфигурации функциями сплюснутости конфигурации  $e = a_3/a_1$ :

$$\rho_{ab} = \rho_{ab}(e), \quad Z_{ij} = Z_{ij}(e), \quad K_0 = K_0(e), \quad \varepsilon = \varepsilon(e). \quad (12)$$

Для аналитического вычисления левой части (11) нами в системе MAPLE составлена и реализована программа [6, 7]. Она позволяет представить уравнение (11) в виде полинома по степеням координат  $x_1, x_2, x_3$  при любых значениях степеней аппроксимации  $P, L, s$ . Здесь  $s = 0, 1, 2, \dots$  определяет вычисленный в программе наивысший член ряда Бурмана–Лагранжа [10]. Степень многочлена левой части (11)  $S$  находится из условия  $S = \max \{P + s(L - 2) + 2, NP\}$ .

Для решения полученной алгебраической системы используем моментный метод. Составленная нами программа в системе MAPLE позволяет найти аналитические выражения моментов левой части (11)  $M_{abc}$  и свести (11) к системе уравнений:

$$M_{abc} = 0. \quad (13)$$

Переведа двумерные массивы неизвестных  $\rho_{ab}, Z_{ij}$  в одномерные и добавив к ним  $K_0, \varepsilon$ , получим полный набор неизвестных  $y_m(e, k_0)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_1$ . Легко найти выражение

$$N_1 = \frac{1}{8}(P + 2)(P + 4) + \frac{1}{8}(L + 2)(L + 4). \quad (14)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в приближении  $P = 6$ ,  $L = 2$ ,  $s = 1$ . Тогда имеем  $N_1 = 13$ . В этом случае уравнения (13) и (76) представляют собой систему из 13 алгебраических уравнений. Для ее решения мы будем использовать регуляризованный аналог метода Ньютона [11] с параметром регуляризации  $\alpha = 10^{-6}$ . Интересующие нас интервалы значений параметров  $e$  и  $k_0$  разобьем на участки с шагами  $h_e$  и  $h_{k_0}$  соответственно. Мы использовали для расчетов следующие значения  $h_e = 0,01$ ,  $h_{k_0} = 0,02$ . Тогда

$$e \rightarrow e_\mu = 1 - \mu h_e, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{0,1}{h_e} \right],$$

$$k_0 \rightarrow k_{0\nu} = 0,003 + \nu h_{k_0}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{0,2}{h_{k_0}} \right].$$
(15)

Составленная и реализованная нами программа в системе MAPLE позволила найти массив численных решений  $y_m(e_\mu, k_{0\nu})$ . В метрике  $L_2$  погрешность численного решения системы (11), (76) моментным методом оказалась порядка  $10^{-4}$ .

Далее в пакете CurveFitting системы MAPLE нами составлена программа аппроксимации полученных численных решений  $y_m(e_\mu, k_{0\nu})$  многочленами от  $e$  и  $k_0$ . Конкретные значения коэффициентов аппроксимации  $y_m(q, p)$  нами были найдены. В результате имеем

$$y_m(e, k_0) = \sum_{q+p=0}^{q+p=Q} y_m(q, p) e^q k_0^p.$$
(16)

В нашем случае мы выбрали значение  $Q = 20$ , что позволило получить величину погрешности данной аппроксимации  $\sim 10^{-9}$  в метрике  $L_2$ . Это значение на несколько порядков меньше, чем погрешность символьно-численного решения уравнения (11). Тем самым разработанный нами метод позволяет находить приближенное аналитическое решение уравнения (11) с высокой степенью точности.

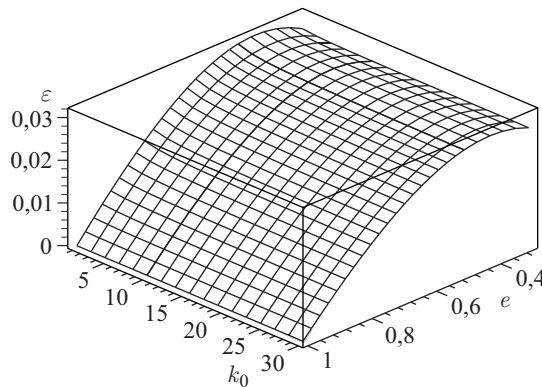


Рис. 1. График функции  $\varepsilon(e, k_0)$

Поскольку для расчетов периода  $T_{\min}$  нам потребуется аналитическая зависимость функции  $\varepsilon(e, k_0)$ , то для представления о ее характере поведения мы приведем график этой функции на рис. 1 в интересующей нас области значений параметров  $e$  и  $k_0$ .

### 3. МИНИМАЛЬНЫЙ ПЕРИОД И МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА БЫСТРОТЫ ВРАЩЕНИЯ $\varepsilon_m$ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ

Минимальный период  $T_{\min}$  легко выражается через значение максимума функции  $\varepsilon_m(k_0) = \varepsilon(k_0, e_m)$ ,  $e_m$  — значение параметра  $e$  в точке максимума функции  $\varepsilon(k_0, e)$  при фиксированном параметре  $k_0$ . Отсюда следует зависимость  $e_m = e_m(k_0)$ . При этом имеет место соотношение  $e_m > e_k$  ( $e_k$  — значение параметра сплюснутости  $e$ , ниже которого равновесной конфигурации не существует [12]). Это значит, что минимум периода вращения достигается до приближения параметра  $e$  к критическому значению  $e_k$ . Конкретный вид этой зависимости приводится на рис. 2.

В результате имеет место следующая формула для определения  $T_{\min}(k_0)$ :

$$T_{\min}(k_0) = \mu_e^{-1/2} \tilde{T}_{\min}(k_0) = \mu_e^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0 k_0^{3/2} \varepsilon_m(k_0)}}. \quad (17)$$

Из (17) видно, что величина периода вращения  $T_{\min}$  зависит от двух параметров:  $\mu_e$  и  $k_0$ .

Вследствие важности для данного исследования функции  $\varepsilon_m(k_0)$  более подробно изучим характер ее поведения при больших значениях параметра  $k_0$ , которые соответствуют максимально возможным значениям масс вращающихся белых карликов. График этой функции представим на рис. 3.

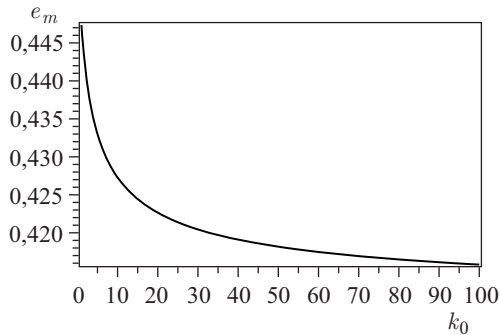


Рис. 2. График функции  $e_m(k_0)$

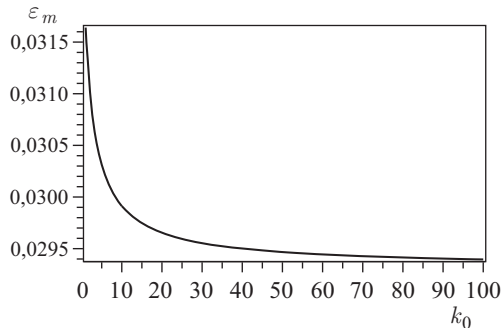


Рис. 3. График функции  $\varepsilon_m(k_0)$

Из рис. 3. видно, что кривая графика функции  $\varepsilon_m(k_0)$  монотонно убывает с ростом значения параметра  $k_0$  и при значениях  $k_0$ , превышающих  $10^3$ , стремится к постоянному значению  $\varepsilon_{mm}$ . Обнаруженный нами эффект стремления параметра быстроты вращения к константе возникает для любых конфигураций гравитирующих вращающихся масс с уравнением состояния не только идеального вырожденного электронного, но и нейтронного газа.

Полученное численное значение параметра  $\varepsilon_{mm}$  равно 0,0293. Это значение является фундаментальным для вращающихся конфигураций идеального вырожденного ферми-газа.

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ И МИНИМАЛЬНОГО ПЕРИОДА ВРАЩЕНИЯ БЕЛОГО КАРЛИКА

Вычисленные нами в разд. 2 значения коэффициентов  $\rho_{ab}$  позволяют провести вычисление массы исследуемой конфигурации  $m$ . После простых преобразований мы получаем следующую формулу для  $m$ :

$$m(e, k_0) = \frac{1}{\mu_e^2} \left( \frac{m_e c^2 k_0^{1/2}}{4\pi m_n G \rho_0^{1/3} K_0} \right)^{3/2} e \int_D \tilde{\rho}(e, k_0) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{\mu_e^2} \tilde{m}(e, k_0) m_\odot. \quad (18)$$

Как следует из (18), значения величины  $\tilde{m}(e, k_0)$  будут зависеть от параметра  $k_0$  и параметра сплюснутости конфигурации  $e$ , определяемого моментом конфигурации. Очевидно, что параметр  $e$  изменяется в интервале  $e_k(k_0) \leq e \leq 1$ .

Построим семейство графиков, определяющих зависимость  $\tilde{m}(e, k_0)$  при различных значениях  $e$ . Множество значений  $\tilde{m}(e, k_0)$  будет расположено между графиками кривых для случаев  $\tilde{m}(e = 1, k_0)$  и  $\tilde{m}(e = e_k(k_0), k_0)$ . Результаты вычислений приводятся в виде графика рис. 4.

Чтобы оценить влияние вращения на значение массы вращающейся конфигурации для различных значений параметра  $e$ , построим график разности  $\tilde{m}(e = e_k(k_0), k_0) - \tilde{m}(e = 1, k_0) = \tilde{m}_-(k_0)$ . Она представлена на рис. 5.

Как видно из рис. 5, вращение существенно изменяет значение массы конфигурации при увеличении момента вращения от нуля до максимально возможного значения. Разность масс конфигураций не вращающейся и вращающейся с предельным значением момента вращения может достигать значения порядка  $2m_\odot$  при фиксированном значении параметра  $k_0$  (центральной плотности конфигурации). Данная зависимость массы белого карлика от момента вращения приводит к тому, что чандрасекаровский предел при  $\mu_e = 1$  (водородный белый карлик), равный  $1,87m_\odot$ , увеличивается до  $3,96m_\odot$  для уравнения состояния вырожденного электронного газа. Для гелиевого белого карлика ( $\mu_e = 2$ ) чандрасекаровские пределы масс соответственно будут равны  $0,47m_\odot$  и  $0,99m_\odot$ . Реальные белые карлики не могут быть чисто водородными ( $\mu_e = 1$ ) или гелиевыми ( $\mu_e = 2$ ). Если они состоят из водорода и более тяжелых элементов с  $A \leq 2Z$ ,

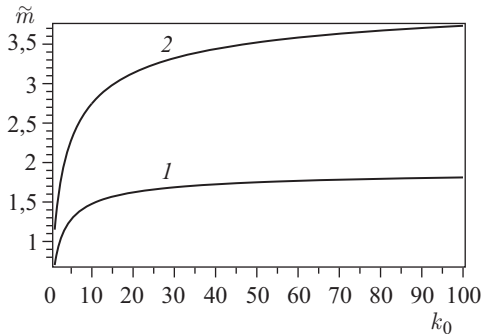


Рис. 4. Графики функций: 1 —  $\tilde{m}(e = 1, k_0)$ ; 2 —  $\tilde{m}(e = e_k(k_0), k_0)$

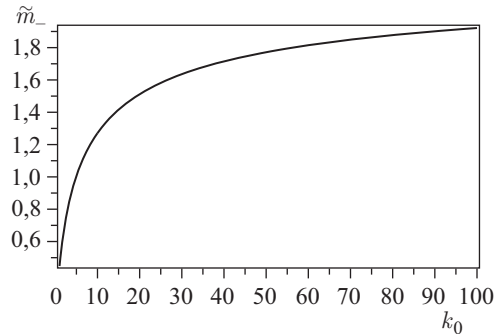


Рис. 5. График функции  $\tilde{m}_-(k_0)$



то параметр  $\mu_e$  удовлетворяет соотношению  $1 < \mu_e \leq 2$ . Если линии водорода в спектре белого карлика отсутствуют, то для более тяжелых элементов с  $A \geq 2Z$  значение параметра  $\mu_e > 2$ .

Стандартный чандрасекаровский предел массы белого карлика  $m_{\text{Ch}} = 1,4m_{\odot}$  имеет место в случае без вращения при  $\mu_e = 1,16$ , а в случае предельного вращения при  $\mu_e = 1,68$ . Это означает, что в первом случае белый карлик должен содержать 84% водорода и 16% более тяжелых элементов. В случае предельного вращения водорода будет содержаться не более 32%. Проведенные нами оценки указывают на возможность существенного увеличения чандрасекаровского предела для белых карликов с уравнениями состояния электронного вырожденного ферми-газа. Этот вопрос уже обсуждался в ряде работ [13]. В них приводится оценка предельной массы белого карлика  $m_{\text{Ch}}$ , равная  $2,58m_{\odot}$ . В нашем случае чандрасекаровский предел без вращения при  $\mu_e = 1$  будет  $1,87m_{\odot}$ , а для предельно вращающегося белого карлика при  $\mu_e = 1$  —  $3,96m_{\odot}$ . Согласно теории эволюции звезд белые карлики возникают на конечной ее стадии. Поэтому реально в составе большей части белых карликов водород не может быть основным элементом, вследствие чего значение параметра  $\mu_e$  должно существенно отличаться от единицы и предельная масса белых карликов будет достаточно близка к стандартному чандрасекаровскому пределу  $1,4m_{\odot}$ .

В процессе эволюции значение параметра  $e$ , по мере уменьшения углового момента, будет изменяться от начального значения  $e_0 \geq e_m$  до значения, близкого к 1. Поэтому все точки графика рис. 4, описывающего  $\tilde{m}(e_m(k_0), k_0)$ , будут приближаться по мере потери углового момента к нижней кривой  $e = 1$ .

## 5. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ БЕЛОГО КАРЛИКА С РЕКОРДНО МАЛЫМ ПЕРИОДОМ ВРАЩЕНИЯ

Используя полученное нами предельное значение параметра быстроты вращения, получаем асимптотическую ( $k_0 \gg 1$ ) формулу для  $T_{\min}$  от  $\rho_c$ :

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0\varepsilon_{mm}}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_c}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \text{ с.} \quad (19)$$

Подставляя в (19) численные значения, получаем

$$T_{\min} = 40,44 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_c}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \text{ с.} \quad (20)$$

Наряду с асимптотическими формулами (19) и (20) имеет смысл получить формулу степенной аппроксимации функции  $T_{\min}(\rho_c)$ , которая справедлива для всего интервала значений  $\rho_c$ :

$$T_{\min} \approx 39,16 \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{0,496} \text{ с.} \quad (21)$$

Измеренные на опыте значения периода самого быстрого белого карлика  $T = 13,18$  с и его массы  $m = 1,28m_{\odot}$  позволяют, на основе проведенных нами расчетов в математической модели с уравнением состояния идеального вырожденного электронного ферми-газа,

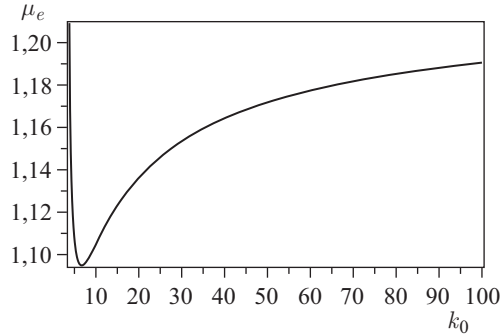


Рис. 6. График функции  $\mu_e(k_0)$

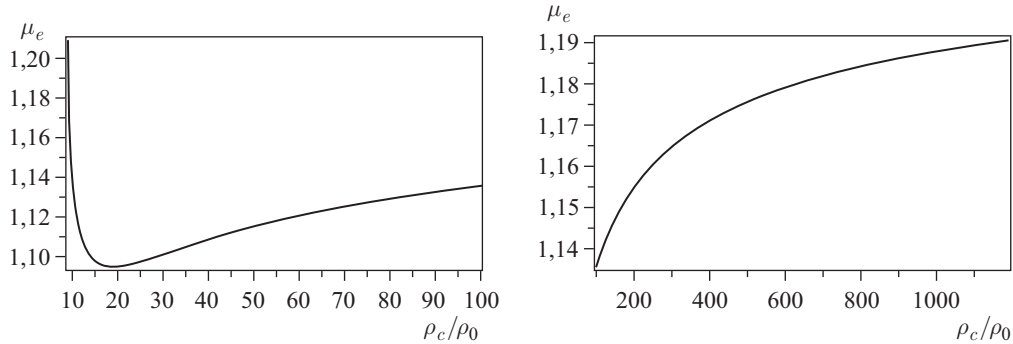


Рис. 7. Графики функции  $\mu_e(\rho_c/\rho_0)$

получить ограничения на химический состав ( $\mu_e$ ) и величину центральной плотности ( $\rho_c$ ) этого объекта.

Для этого мы будем использовать следующие соотношения:

$$\mu_e = \sqrt{\frac{\tilde{m}(e, k_0)}{1,28}}, \quad \mu_e = \frac{\pi}{T^2 G \rho_0} \frac{1}{\varepsilon(e, k_0) k_0^{3/2}}, \quad T \geq T_{\min} \approx 39,16(\mu_e k_0^{3/2})^{-0,496}. \quad (22)$$

Решение системы (27) может быть проведено численно. Оно нам дает зависимость  $\mu_e$  от  $k_0$  или от  $\rho_c$ . Графики функций  $\mu_e(k_0)$  и  $\mu_e(\rho_c)$ , описывающие эту зависимость, приведены на рис. 6 и 7 соответственно.

Из рис. 6 следует, что параметр  $k_0$  не может быть меньше 3,82, а параметр  $\mu_e$  больше 1,21. При этом максимальное значение  $\mu_e = 1,21$  достигается при минимальном значении  $k_0 = 3,82$ . Далее с ростом  $k_0$  от 3,82 до 6,70 параметр  $\mu_e$  уменьшается до минимального значения 1,09. Затем, с ростом  $k_0$  до 100, параметр  $\mu_e$  растет до значения 1,19.

Качественный характер зависимости  $\mu_e$  от  $\rho_c/\rho_0$  в целом повторяет зависимость  $\mu_e$  от  $k_0$ . Значение  $\mu_e$  минимально при  $\rho_c/\rho_0 = 9,04$ . При этом  $\rho_c/\rho_0 \geq 9,04$ . Минимум  $\mu_e = 1,09$  достигается при  $\rho_c/\rho_0 = 18,97$ . С ростом  $\rho_c/\rho_0$  до значений порядка  $10^3$  параметр  $\mu_e$  приближается к значению 1,19.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые получены ограничения на величину центральной плотности  $\rho_c$  и параметр  $\mu_e$ , определяемый химическим составом, белого карлика RX J0648.0-4418 с рекордно быстрым периодом вращения  $T = 13,18$  с и массой  $m = (1,28 \pm 0,05)m_\odot$ . Расчеты проводились с максимальной погрешностью порядка  $10^{-3}$  и с использованием уравнения состояния идеального вырожденного электронного газа. Они сделаны на основе разработанного и реализованного авторами комплекса символьно-численных программ в системе символьной математики MAPLE с систематическим применением полиномов наилучшего приближения в  $L_2$  по степеням координат конфигурации белых карликов.

Для расчета конфигурации вращающегося белого карлика использовалась полученная ранее авторами система интегральных уравнений в  $\mathbf{R}^3$ , которая учитывает сложный характер поверхности конфигурации в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности. Решение данной системы позволило построить приближенное аналитическое решение с точностью  $10^{-9}$  в метрике  $L_2$ , описывающее конфигурацию белого карлика. Это дало возможность получить аналитические выражения для минимального периода  $T_{\min}$  (17) и массы вращающихся белых карликов  $m$  (18). При этом показано, что при приближении периода  $T$  к  $T_{\min}$  масса белого карлика возрастает почти вдвое по сравнению со случаем отсутствия вращения при фиксированной центральной плотности.

Далее получена система уравнений и неравенств (22), позволяющая найти ограничения на значения параметров  $\rho_c$  и  $\mu_e$  белого карлика RX J0648.0-4418 с известными значениями периода вращения и массы. Ее численное решение представлено в виде графиков на рис. 6, 7. Анализ этих графиков показывает, что зависимость  $\mu_e$  от  $k_0$  и  $\rho_c$  имеет достаточно сложный характер. При этом параметры  $\mu_e$ ,  $k_0$  и  $\rho_c$  изменяются в интервалах:  $1,09 \leq \mu_e \leq 1,21$ ,  $3,82 \leq k_0 \leq 100$ ,  $9,04 \leq \rho_c/\rho_0 \leq 10^3$  ( $\rho_0 = 0,98 \cdot 10^6$  г/см<sup>3</sup>). Полученный интервал значений параметра  $\mu_e$  указывает на то, что белый карлик RX J0648.0-4418 не может быть полностью водородным. Он должен содержать не менее 9% и не более 21% тяжелых элементов.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты  $\delta_i(k_0)$  многочлена, аппроксимирующего функцию, определяющую вклад давления в конфигурацию белого карлика с уравнением состояния идеального вырожденного электронного газа, следующие:

$$\begin{aligned} \delta_1 = & -21 - \frac{16515072}{4199k_0^9} + \frac{1935360}{143k_0^6} - \frac{1344}{k_0^3} + \\ & + \left( \frac{16515072}{4199k_0^9} - \frac{915899698665}{94595072k_0^6} - \frac{105709610223}{17199104k_0^7} - \frac{8257536}{4199k_0^8} + \frac{4390407}{184756k_0} - \right. \\ & \left. - \frac{48785163}{739024k_0^2} + \frac{694262247}{1478048k_0^3} + \frac{21069725103}{11824384k_0^4} + \frac{89341300629}{23648768k_0^5} + \frac{3927}{494} \right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \left( -\frac{138915}{32} + \frac{31216185}{4096k_0^3} \right) F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \frac{192675840}{4199k_0^9} + 140 - \frac{21504000}{143k_0^6} + \frac{13440}{k_0^3} + \\ & + \left( -\frac{192675840}{4199k_0^9} + \frac{630542467275}{5912192k_0^6} + \frac{75129377085}{1074944k_0^7} + \frac{96337920}{4199k_0^8} - \frac{8782308}{46189k_0} + \right. \\ & \left. + \frac{26778981}{46189k_0^2} - \frac{417712215}{92378k_0^3} - \frac{13625877285}{739024k_0^4} - \frac{61018465935}{1478048k_0^5} - \frac{10472}{247} \right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \left( 46305 - \frac{22297275}{256k_0^3} \right) F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_3 = & -\frac{770703360}{4199k_0^9} - \frac{48384}{k_0^3} + \frac{82944000}{143k_0^6} - 420 + \\ & + \left( \frac{58905}{494} + \frac{770703360}{4199k_0^9} + \frac{3719823539505}{23648768k_0^5} - \frac{38665873895925}{94595072k_0^6} + \frac{111978909}{184756k_0} - \right. \\ & \left. - \frac{385351680}{4199k_0^8} + \frac{1810873809}{113696k_0^3} - \frac{4714653875715}{17199104k_0^7} - \frac{1435103523}{739024k_0^2} + \frac{801005301675}{11824384k_0^4} \right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \left( \frac{1404728325}{4096k_0^3} - \frac{694575}{4} \right) F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_4 = & -\frac{145152000}{143k_0^6} + \frac{1387266048}{4199k_0^9} + 630 + \frac{80640}{k_0^3} + \\ & + \left( -\frac{42840}{247} + \frac{522206263467}{1074944k_0^7} + \frac{693633024}{4199k_0^8} - \frac{1387266048}{4199k_0^9} - \frac{43299900}{46189k_0} + \right. \\ & \left. + \frac{142864659}{46189k_0^2} - \frac{2417938929}{92378k_0^3} - \frac{84576199491}{739024k_0^4} - \frac{403055103465}{1478048k_0^5} + \frac{323729800065}{454784k_0^6} \right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \left( 297675 - \frac{156080925}{256k_0^3} \right) F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_5 = & -462 + \frac{10752000}{13k_0^6} - \frac{1156055040}{4199k_0^9} - \frac{63360}{k_0^3} + \\ & + \left( \frac{30855}{247} - \frac{3437682836175}{8599552k_0^7} - \frac{578027520}{4199k_0^8} + \frac{1156055040}{4199k_0^9} - \frac{2484338747835}{4299776k_0^6} + \right. \\ & \left. + \frac{2940705}{4199k_0} - \frac{79136115}{33592k_0^2} + \frac{684067521}{33592k_0^3} + \frac{48798817137}{537472k_0^4} + \frac{237085667007}{1074944k_0^5} \right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \left( -\frac{7640325}{32} + \frac{1030134105}{2048k_0^3} \right) F, \end{aligned}$$

$$\delta_6 = 132 + \frac{19008}{k^3} - \frac{3317760}{13k^6} + \frac{363331584}{4199k^9} +$$

$$+ \left( -\frac{8712}{247} - \frac{850716}{4199k} + \frac{2901051}{4199k^2} - \frac{50932809}{8398k^3} - \frac{1843271451}{67184k^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{9090184113}{134368k^5} + \frac{95526978165}{537472k^6} + \frac{133647431841}{1074944k^7} + \frac{181665792}{4199k^8} - \frac{363331584}{4199k^9} \right) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{k_0} + 1} + \left( 72765 - \frac{40135095}{256k^3} \right) F,$$

$$F = \frac{1}{k_0^5} \operatorname{Arsh}(\sqrt{k_0}).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mereghetti S.* RX J0648.0-4418: the Fastest-Spinning White Dwarf // Proc. of 13th Marcel Grossman Meeting (MG13), Stockholm, July 1–7, 2012; arXiv:1302.4634v1 [astro-ph.HE]. 2013. P. 1–3.
2. *Scholz A., Eisloffel J.* Rotation and Variability of Very Low Mass Stars and Brown Dwarfs near  $\epsilon$  Ori // *Astron. Astrophys.* 2005. V. 429. P. 1007–1023; arXiv:astro-ph/0410101v1. 2004. P. 1–17.
3. *Шапиро С., Тюкольский С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. 1, 2. М.: Мир, 1985. 656 с.
4. *Фортон В. Е.* Уравнения состояния вещества от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит, 2012. 490 с.
5. *Мухеев С. А., Цветков В. П.* Полиномиальное и политропное приближения в уравнении равновесных постньютоновских вращающихся конфигураций вырожденного нейтронного газа // *Письма в ЭЧАЯ.* 2010. Т. 7, № 1(157). С. 8–13.
6. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // *Матем. моделирование.* 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.
7. *Mikheev S. A., Tsvetkov V. P.* Critical Points and Points of the Bifurcation of the Rotating Magnetized Newtonian Polytropes with a  $1 \leq n \leq 1.6$  Index // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2013. V. 10, No. 3. P. 234–242.
8. *Тассуль Ж. Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.
9. *Мухеев С. А., Цветков В. П.* Математическая модель равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций вырожденного ферми-газа // *Вестн. ТвГУ. Сер. «Прикл. матем.».* 2009. Вып. 2(13). С. 15–22.
10. *Цветков В. П., Масюков В. В.* Метод рядов Бурмана–Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 3, № 5. С. 1099–1102.
11. *Ермаков В. В., Калиткин Н. Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // *Журн. вычисл. матем. физ.* 1981. Т. 21, № 2. С. 491–497.
12. *Mikheev S. A., Tsvetkov V. P.* Critical Points of Density Distribution of Rapidly Rotating Superdense Newtonian Polytropes // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2010. V. 7, No. 6. P. 384–390.
13. *Upasana Das, Vanibrata Mukhopadhyay.* New Mass Limit for White Dwarfs: Super-Chandrasekhar Type Ia Supernova as a New Standard Candle // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. P. 071102; arXiv:1301.5965v1[astro-ph.SR]. 2013. P. 1–7.

Получено 28 апреля 2015 г.