

НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ДЛЯ КВАЗИОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА–КУЛОНА ПРИ $Z > Z_{cr}$

Ю. Воронина, А. Давыдов, К. Свешников

Институт теоретических проблем микромира
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Для модельного сверхкритического кулоновского источника с $Z > Z_{cr}$ в $1 + 1$ D рассмотрены основные непertурбативные свойства вакуумной плотности заряда $\rho_{VP}(x)$ и энергии поляризации вакуума \mathcal{E}_{VP} . Показано, что в широком диапазоне параметров внешнего поля поляризация вакуума в закритической области может приводить к существенно отличному от пертурбативного квадратичного роста поведению вакуумной энергии вплоть до убывания в глубоко отрицательную область.

Nonperturbative vacuum polarization effects are explored for a supercritical Coulomb source with $Z > Z_{cr}$ in $1 + 1$ D. Both the vacuum charge density $\rho_{VP}(x)$ and vacuum energy \mathcal{E}_{VP} are considered. It is shown that in the overcritical region the behavior of vacuum energy could be significantly different from perturbative quadratic growth up to decrease reaching large negative values.

PACS: 12.20.Ds

ВВЕДЕНИЕ

Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в сверхкритических статических или адиабатически медленно меняющихся кулоновских полях, в которых дискретные уровни спектральной задачи Дирака–Кулона достигают порога нижнего континуума, уже длительное время являются предметом постоянного интереса. Но если в $3 + 1$ D таким КЭД-эффектам посвящено большое число работ (см. [1–4]), то их $1 + 1$ D аналог практически не исследовался. В то же время в [5–11] показано, что в водородоподобном атоме, находящемся в сверхсильном однородном магнитном поле, эффективная релятивистская динамика электронной компоненты становится квазиодномерной. Как следствие, в магнитных полях с напряженностью $H \gg Z^2 \cdot 10^9$ Э за счет поляризации вакуума и радиационных эффектов экранировки кулоновского потенциала первый критический заряд $Z_{cr,1}$ становится меньше чем $\simeq 170$ при отсутствии поля [8–11].

В настоящей работе рассматриваются существенно непertурбативные эффекты поляризации вакуума для модельной квазиодномерной системы Дирака–Кулона при $Z > Z_{cr,1}$, основными характеристиками которых являются вакуумная плотность ρ_{VP} и вакуумная

энергия \mathcal{E}_{VP} . При этом внешнее кулоновское поле выбирается в виде одномерной проекции потенциала равномерно заряженной сферы с радиусом R_0 :

$$V(x) = -Z\alpha \left[\frac{1}{R_0} \theta(R_0 - |x|) + \frac{1}{|x|} \theta(|x| - R_0) \right]. \quad (1)$$

По сравнению с моделью однородно заряженного шара такой потенциал более предпочтителен, поскольку позволяет провести большую часть вычислений в аналитическом виде, а расчеты по критическим зарядам показывают, что окончательные результаты в обоих случаях оказываются весьма близкими [1–4]. Кроме того, такая задача имеет значение для моделирования существенно непертурбативных эффектов поляризации вакуума в сверхкритических кулоновских полях при $Z > Z_{\text{cr},1}$ для большого числа пространственных измерений, поскольку для потенциала (1) эти эффекты имеют целый ряд общих свойств с квазиодномерным случаем.

Как и в других работах по поляризации вакуума кулоновским полем [12–15], вклад процессов с обменом виртуальными фотонами опускается. Далее везде используется релятивистская система единиц $\hbar = m_e = c = 1$. При этом электромагнитная константа связи $\alpha = e^2$ также становится безразмерной, что существенно упрощает все дальнейшие выкладки, а конкретные расчеты проводятся для $\alpha = 1/137,036$.

1. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ В 1 + 1 D

В 1 + 1 D энергия поляризации вакуума в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) A_0^{\text{ext}}(x), \quad (2)$$

где A_0^{ext} — электростатический потенциал внешнего кулоновского источника; $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ — вакуумная плотность заряда, которая находится через поляризационный потенциал:

$$\rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dx^2} A_{\text{VP},0}^{(1)}(x). \quad (3)$$

В свою очередь, однопетлевой потенциал поляризации вакуума $A_{\text{VP},0}^{(1)}$ выражается через регуляризованную поляризационную функцию $\Pi^R(-q^2)$ и фурье-образ внешнего потенциала $\tilde{A}_0(q)$ [16]:

$$\begin{aligned} A_{\text{VP},0}^{(1)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{iqx} \Pi^R(-q^2) \tilde{A}_0(q), \\ \tilde{A}_0(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iqy} A_0^{\text{ext}}(y), \quad q = q_x, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\Pi^R(-q^2) = \frac{4\alpha}{q^2} \left(1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) \right). \quad (5)$$

Из (3)–(5) для потенциала внешнего источника (1) получаем выражение для вакуумной плотности заряда в виде

$$\rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) = Z\alpha|e| \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \cos(qx) \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) \right] \times \\ \times \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \operatorname{Ci}(qR_0) \right], \quad (6)$$

где $\operatorname{Ci}(x)$ — интегральный косинус. Далее из (2) с учетом (6) находим однопетлевую энергию поляризации вакуума

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)} = (Z\alpha)^2 \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) \right] \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \operatorname{Ci}(qR_0) \right]^2. \quad (7)$$

Из (6) прямым вычислением легко проверяется, что в рамках теории возмущений интегральный вакуумный заряд в линейном приближении тождественно равен нулю:

$$Q_{\text{VP}}^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) = Z\alpha|e| \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} dq \delta(q) \left(1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{q}{2}\right) \right) \times \\ \times \left(\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \operatorname{Ci}(qR_0) \right) = \frac{2Z|e|\alpha}{\pi} \lim_{q \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{q}{2}\right) \right) \times \\ \times \left(\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \operatorname{Ci}(qR_0) \right) = -\frac{Z|e|\alpha}{12\pi} \lim_{q \rightarrow 0} (q^2 \ln(qR_0)) = 0. \quad (8)$$

И, хотя в данном случае соотношение (8) является очевидным следствием явного вида пертурбативной вакуумной плотности (6), на самом деле его следует рассматривать как дополнительный критерий правильности пертурбативных вычислений, поскольку при локализованном кулоновском источнике и без специальных граничных условий следует ожидать, что в докритической области при $Z < Z_{\text{cr},1}$ интегральный вакуумный заряд будет нулевым, поляризация вакуума может только исказить его пространственное распределение [16, 17]. В то же время при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет непертурбативных эффектов, обусловленных опусканием дискретных уровней в нижний континуум, интегральный заряд вакуума становится ненулевым [1, 2, 4], и далее мы покажем, как это обстоятельство проявляется на поведении вакуумной энергии в закритической области.

2. ФОРМАЛИЗМ ВИХМАННА–КРОЛЛА ДЛЯ 1 + 1 D

Наиболее эффективный непертурбативный подход к вычислению вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}(x)$ основан на методе Вихманна–Кролла (ВК) [12–15] (см. также [17]).

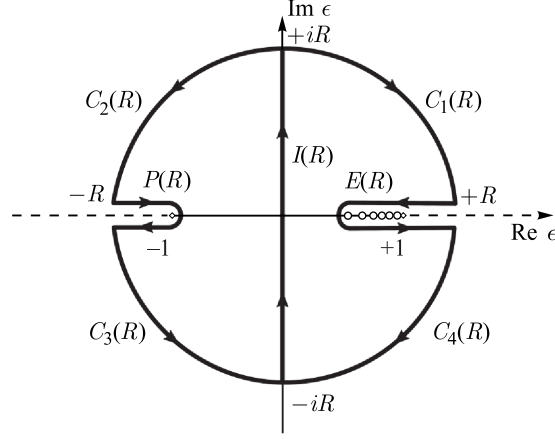


Рис. 1. Специальные контуры в комплексной плоскости по энергии, используемые для представления вакуумной плотности заряда в виде контурных интегралов. Направление обхода контуров находится в соответствии с (11)

Отправной точкой является выражение для вакуумной плотности заряда

$$\rho_{VP}(x) = -\frac{|e|}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) \right), \quad (9)$$

где ϵ_F — энергия Ферми, которая в таких задачах с внешним кулоновским источником выбирается на пороге нижнего континуума ($\epsilon_F = -1$), а ϵ_n и $\psi_n(x)$ — собственные значения и собственные функции соответствующей спектральной задачи Дирака–Кулона (ДК).

Основное содержание метода ВК состоит в наблюдении, что вакуумная плотность (9) может быть представлена в виде интегралов по контурам в комплексной плоскости по энергической переменной от следа функции Грина спектральной задачи ДК. Последняя определяется как

$$(-i\alpha\partial_x + V(x) + \beta - \epsilon) G(x, x'; \epsilon) = \delta(x - x'), \quad (10)$$

где для максимально простого вида операции пространственной инверсии $\alpha = \sigma_y, \beta = \sigma_z$.

Формальное решение (10) записывается в виде

$$G(x, x'; \epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon}. \quad (11)$$

По аналогии с [12, 13] вакуумная плотность заряда выражается через интегралы по контурам $P(R)$ и $E(R)$ на первом листе римановой энергетической поверхности (рис. 1):

$$\rho_{VP}(x) = -\frac{|e|}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{P(R)} d\epsilon \operatorname{Tr} G(x, x; \epsilon) + \frac{1}{2\pi i} \int_{E(R)} d\epsilon \operatorname{Tr} G(x, x; \epsilon) \right). \quad (12)$$

Далее след функции Грина представляется в виде

$$\text{Tr } G(x, x; \epsilon) = \frac{1}{J(\epsilon)} \psi_L(x)^T \psi_R(x), \quad (13)$$

где $\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ — регулярные соответственно на $-\infty$ и $+\infty$ решения спектральной задачи ДК; $J(\epsilon)$ — их вронскиан:

$$\begin{aligned} J(\epsilon) &= [\psi_L(x), \psi_R(x)] \\ ([f(x), g(x)]_a &= f_2(a)g_1(a) - f_1(a)g_2(a)). \end{aligned} \quad (14)$$

Определенный таким образом $\text{Tr } G$ имеет нужную нормировку. Отметим также, что нули $J(\epsilon)$ на первом листе являются вещественными и соответствуют дискретному спектру, а на втором листе становятся комплексно-сопряженными парами и определяют положение упругих резонансов.

Построим теперь $\text{Tr } G$ для внешнего потенциала (1). Спектральная задача ДК имеет вид системы

$$\varphi' = [\epsilon + 1 - V(x)] \chi, \quad \chi' = -[\epsilon - 1 - V(x)] \varphi, \quad (15)$$

где φ, χ — верхняя и нижняя компоненты дираковского спинора.

Для $|x| \leq R_0$ линейно независимые решения (15) удобно сразу разделить по четности:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + V_0 + 1} \cos(\xi x) \\ -\sqrt{\epsilon + V_0 - 1} \sin(\xi x) \end{pmatrix}, \quad W(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + V_0 + 1} \sin(\xi x) \\ \sqrt{\epsilon + V_0 - 1} \cos(\xi x) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$V_0 = \frac{Z\alpha}{R_0}, \quad \xi = \sqrt{(\epsilon + V_0)^2 - 1}, \quad \text{Im } \xi \geq 0. \quad (17)$$

Для $x > R_0$ фундаментальная пара решений (15) выбирается в виде

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x; \epsilon) \\ \Phi_2(x; \epsilon) \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x; \epsilon) \\ \Psi_2(x; \epsilon) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x; \epsilon) &= \sqrt{1 + \epsilon} e^{-\gamma x} (2\gamma x)^{iQ} \left(\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma x) + b \Phi(b + 1, c, 2\gamma x) \right), \\ \Phi_2(x; \epsilon) &= \sqrt{1 - \epsilon} e^{-\gamma x} (2\gamma x)^{iQ} \left(-\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma x) + b \Phi(b + 1, c, 2\gamma x) \right), \\ \Psi_1(x; \epsilon) &= \sqrt{1 + \epsilon} e^{-\gamma x} (2\gamma x)^{iQ} \left(\Psi(b, c, 2\gamma x) + \frac{Q}{\gamma} \Psi(b + 1, c, 2\gamma x) \right), \\ \Psi_2(x; \epsilon) &= \sqrt{1 - \epsilon} e^{-\gamma x} (2\gamma x)^{iQ} \left(-\Psi(b, c, 2\gamma x) + \frac{Q}{\gamma} \Psi(b + 1, c, 2\gamma x) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

а $\Phi(b, c, x)$, $\Psi(b, c, x)$ — вырожденные гипергеометрические функции 1-го и 2-го рода соответственно [18],

$$Q = Z\alpha, \quad b = iQ - Q\epsilon/\gamma, \quad c = 1 + i2Q, \quad \gamma = \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad \text{Re } \gamma \geq 0. \quad (20)$$

$\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ строятся как линейные комбинации решений (16) и (18), удовлетворяющие условиям регулярности на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно и связанные между собой операцией пространственной инверсии $\psi_L(x) = \beta\psi_R(-x)$ (последнее есть прямое следствие четности задачи с потенциалом (1)):

$$\begin{aligned} \psi_R(x) = & \theta(-x - R_0)\beta[C\Phi(-x) + D\Psi(-x)] + \\ & + \theta(R_0 - |x|)[AY(x) - BW(x)] + \theta(x - R_0)\Psi(x), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \psi_L(x) = & \theta(-x - R_0)\beta\Psi(-x) + \theta(R_0 - |x|)[AY(x) + BW(x)] + \\ & + \theta(x - R_0)[C\Phi(x) + D\Psi(x)]. \end{aligned}$$

Условие непрерывности при $x = R_0$ дает выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} A &= \frac{[\Psi(x), W(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0}}, \quad B = \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0}}, \\ C &= -2 \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0} [W(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0} [\Phi(x), \Psi(x)]_{R_0}}, \\ D &= \frac{[Y(x), \Phi(x)]_{R_0} [W(x), \Psi(x)]_{R_0} + [Y(x), \Psi(x)]_{R_0} [W(x), \Phi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0} [\Phi(x), \Psi(x)]_{R_0}}. \end{aligned} \quad (22)$$

При этом

$$[\Phi(x), \Psi(x)] = 2\gamma\Gamma(c)/\Gamma(b), \quad [Y(x), W(x)] = -\xi, \quad (23)$$

а вронскиан, входящий в выражение для $\text{Tr } G$, имеет вид

$$J(\epsilon) = [\psi_L(x), \psi_R(x)] = -2 \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0} [W(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]}. \quad (24)$$

Из (16)–(24) и (13) находим следующее выражение для следа функции Грина:

$$\begin{aligned} \text{Tr } G(x, x; \epsilon) = & \\ = & \begin{cases} \frac{1}{[\Phi(x), \Psi(x)]} \left[\Phi(x)^T \Psi(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{[Y(x), \Phi(x)]_{R_0}}{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}} + \frac{[W(x), \Phi(x)]_{R_0}}{[W(x), \Psi(x)]_{R_0}} \right) \Psi(x)^T \Psi(x) \right], \\ x > R_0, \\ -\frac{1}{2[Y(x), W(x)]} \left[\frac{[W(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}} Y(x)^T Y(x) - \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[W(x), \Psi(x)]_{R_0}} W(x)^T W(x) \right], \\ |x| \leq R_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

При этом по построению $\text{Tr } G(x, x; \epsilon) = \text{Tr } G(-x, -x; \epsilon)$.

На следующем шаге находим асимптотику $\text{Tr } G$ на дугах большого круга в верхней полуплоскости $C_1(R)$ и $C_2(R)$ (см. рис. 1):

$$|\epsilon| \rightarrow \infty, \quad 0 < \text{Arg } \epsilon < \pi,$$

$$\text{Tr } G(x, x; \epsilon) \rightarrow \begin{cases} i + \frac{i}{2\epsilon^2} - V_0 \frac{i}{\epsilon^3} + O(|\epsilon|^{-4}), & |x| \leq R_0, \\ i + \frac{i}{2\epsilon^2} - \frac{Q}{|x|} \frac{i}{\epsilon^3} + O(|\epsilon|^{-4}), & |x| > R_0, \end{cases} \quad (26)$$

на дугах большого круга в нижней полуплоскости $C_3(R)$ и $C_4(R)$:

$$|\epsilon| \rightarrow \infty, \quad -\pi < \text{Arg } \epsilon < 0,$$

$$\text{Tr } G(x, x; \epsilon) \rightarrow \begin{cases} -i - \frac{i}{2\epsilon^2} + V_0 \frac{i}{\epsilon^3} + O(|\epsilon|^{-4}), & |x| \leq R_0, \\ -i - \frac{i}{2\epsilon^2} + \frac{Q}{|x|} \frac{i}{\epsilon^3} + O(|\epsilon|^{-4}), & |x| > R_0. \end{cases} \quad (27)$$

Из (26) и (27) следует, что интегрирование по контурам $P(R)$ и $E(R)$ в (12) может быть сведено к мнимой оси, откуда находим окончательное выражение для вакуумной плотности заряда

$$\rho_{\text{VP}}(x) = \frac{|e|}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\epsilon \text{Tr } G(x, x; \epsilon) = \frac{|e|}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \text{Tr } G(x, x; iy). \quad (28)$$

При наличии отрицательных дискретных уровней с $-1 \leq \epsilon_n < 0$

$$\rho_{\text{VP}}(x) = |e| \left[\sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \text{Tr } G(x, x; iy) \right]. \quad (29)$$

Далее отметим общее свойство $\text{Tr } G$ при смене знака внешнего поля ($Q \rightarrow -Q$) и комплексном сопряжении:

$$\begin{aligned} \text{Tr } G_Q(x, x; \epsilon) &= -\text{Tr } G_{-Q}(x, x; -\epsilon), \\ \text{Tr } G_Q(x, x; \epsilon)^* &= \text{Tr } G_Q(x, x; \epsilon^*), \end{aligned} \quad (30)$$

а также вытекающее из этих двух свойств соотношение

$$\text{Tr } G_Q(x, x; iy)^* = -\text{Tr } G_{-Q}(x, x; iy). \quad (31)$$

Из (30) и (31) следует, что $\rho_{\text{VP}}(x)$ определяется только через $\text{Re Tr } G_Q(x, x; iy)$ и является заведомо действительной величиной, нечетной по Q (в полном согласии с теоремой Фарри). Заметим также, что в чисто пертурбативной области нечетность $\rho_{\text{VP}}(x)$ по внешнему полю есть прямое следствие свойств $\text{Re Tr } G_Q(x, x; iy)$. При наличии отрицательных дискретных уровней и тем более в закритической области при $Z > Z_{\text{cr},1}$ нечетность

$\rho_{\text{VP}}(x)$ по Q по-прежнему имеет место [13], но теперь зависимость от внешнего поля более степенным рядом не описывается, поскольку в $\rho_{\text{VP}}(x)$ появляются существенно непертурбативные и тем самым неаналитические по Q составляющие.

Приведенные в (28), (29) выражения для вакуумной плотности заряда не удовлетворяют сформулированному выше условию обращения в нуль полного вакуумного заряда при $Z < Z_{\text{cr},1}$. Более того, из асимптотики

$$\text{Tr } G(x, x; iy) \rightarrow \frac{iy}{(1+y^2)^{1/2}} + \frac{Q}{(1+y^2)^{3/2}} \frac{1}{x} + O(|x|^{-2}), \quad (32)$$

$$\text{Re } x > 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

следует, что неперенормированная $\rho_{\text{VP}}(x)$ убывает при $|x| \rightarrow \infty$ как $1/|x|$, и в результате интегральный вакуумный заряд логарифмически расходится.

Общий результат, установленный в [13] через разложение $\rho_{\text{VP}}(x)$ по степеням Q и справедливый для любого числа пространственных измерений, состоит в том, что все расходимости $\rho_{\text{VP}}(x)$ содержатся только в однопетлевой диаграмме с двумя внешними концами, а следующие порядки разложения уже свободны от расходимостей (см. также [17]). Таким образом, для вычисления перенормированной вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ необходимо выделить в выражении для $\text{Tr } G$ (25) члены первого порядка по Q и заменить их на $\rho_{\text{VP}}^{(1)}(x)$ (6). Для этого сначала находим компоненту вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$, которая определяется следующим образом:

$$\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x) = |e| \left[\sum_{-1 \leq E_n < 0} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\text{Tr } G(x, x; iy) - \text{Tr } G^{(1)}(x; iy) \right) \right], \quad (33)$$

где $G^{(1)} = Q \partial G / \partial Q|_{Q=0}$, и находится через первое борновское приближение $G^{(0)}(-V)G^{(0)}$:

$$\text{Tr } G^{(1)}(x; iy) = \begin{cases} \frac{2Q}{\tilde{\gamma}^2} \left(-\cosh(2\tilde{\gamma}x) \left[\text{Ei}(-2\tilde{\gamma}R_0) + \frac{e^{-2\tilde{\gamma}R_0}}{2\tilde{\gamma}R_0} \right] + \frac{1}{2\tilde{\gamma}R_0} \right), \\ |x| \leq R_0, \\ \frac{Q}{\tilde{\gamma}^2} e^{-2\tilde{\gamma}|x|} \left[\frac{\sinh(2\tilde{\gamma}R_0)}{\tilde{\gamma}R_0} - \text{Ei}(-2\tilde{\gamma}R_0) - \text{Ei}(2\tilde{\gamma}R_0) + \text{Ei}(2\tilde{\gamma}|x|) - e^{4\tilde{\gamma}|x|} \text{Ei}(-2\tilde{\gamma}|x|) \right], \\ |x| > R_0, \end{cases} \quad (34)$$

где $\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция, а $\tilde{\gamma} = \sqrt{1+y^2}$.

При $Z < Z_{\text{cr},1}$ интегральный заряд от $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ обращается в нуль. В рассматриваемом случае при отсутствии отрицательных дискретных уровней, которые не позволяют осуществить аналитическое продолжение, этот факт доказывается переходом в комплексную

плоскость по x . В этом случае $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$, представленная в виде сходящегося интеграла $\int dy (\text{Tr} G(x, x; iy) - \text{Tr} G^{(1)}(x; iy))$, оказывается аналитической функцией от x всюду, кроме разреза, который возникает за счет наличия в $\text{Tr} G$ функции Трикоми и который всегда можно направить по отрицательной мнимой полуоси. Тогда интегральный вакуумный заряд $Q_{\text{VP}}^{(3+)} = \int dx \rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ выражается через контурный интеграл по дуге большого круга в верхней полуплоскости, который обращается в нуль, что проверяется непосредственным вычислением асимптотики $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$. Действительно, главный член асимптотики (32) чисто мнимый, четный по Q и нечетный по y , и поэтому исчезает при интегрировании по dy , следующий первый нечетный по Q уничтожается вычитанием $\text{Tr} G^{(1)}$, а остальные члены убывают как $O(|x|^{-2})$. При $\text{Re} x < 0$ асимптотика $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ находится из симметрии отражения относительно мнимой оси $f^*(x) = f(-x^*)$, поэтому на всей дуге большого круга в верхней полуплоскости $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ равномерно убывает как $O(|x|^{-2})$. Этот результат еще раз подтверждает вывод о том, что все расходимости в $\rho_{\text{VP}}(x)$ возникают за счет членов порядка Q .

Таким образом, перенормированная вакуумная плотность заряда принимает вид

$$\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x) = \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) + \rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x), \quad (35)$$

где $\rho_{\text{VP}}^{(1)}(x)$ — однопетлевая вакуумная плотность заряда (6), рассчитанная с помощью поляризационной функции (5). Такое выражение для $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ гарантирует обращение в нуль полного вакуумного заряда при $Z < Z_{\text{cr},1}$. Этот факт следует рассматривать как дополнительную проверку правильности вычисления вакуумной плотности через пертурбативную перенормировку [16,17]. При наличии отрицательных дискретных уровней исчезновение полного заряда при $Z < Z_{\text{cr},1}$ следует из модельно-независимых аргументов, в основе которых лежит исходное выражение для вакуумной плотности (9). Из последнего следует, что изменение интегрального заряда возможно только при $Z > Z_{\text{cr},1}$, когда дискретные уровни достигают нижнего континуума. При этом каждый дискретный уровень при погружении в нижний континуум приводит к изменению интегрального заряда на $(-|e|)$. Более детальная картина происходящих при этом изменений в $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ вполне аналогична рассмотренной в [1, 2, 4, 16] для $3 + 1$ D на основе формализма Фано [19]. Основной результат состоит в том, что когда дискретный уровень $\psi_n(x)$ достигает нижнего континуума, изменение вакуумной плотности имеет вид

$$\Delta \rho_{\text{VP}}(x) = -|e| \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x). \quad (36)$$

На рис. 2 для внешнего потенциала (1) при $R_0 = 0,1$ показана перенормированная вакуумная плотность для чисто пертурбативного режима при $Z = 10$, далее для $Z = 81$, когда первое $Z_{\text{cr},1} \simeq 81,5$ еще не достигается, для $Z = 82$, когда первый (четный) дискретный уровень только что опустился в нижний континуум, далее для $Z = 154$, когда еще не достигается второе критическое $Z_{\text{cr},2} \simeq 154,14$, и наконец для $Z = 155$, т. е. почти сразу после опускания в нижний континуум второго (нечетного) дискретного уровня. Критические заряды при этом находятся из трансцендентных уравнений, которые следуют из условия сшивки регулярных решений для $|x| < R$ (16) и $|x| > R$ (18) при $\epsilon = -1$:

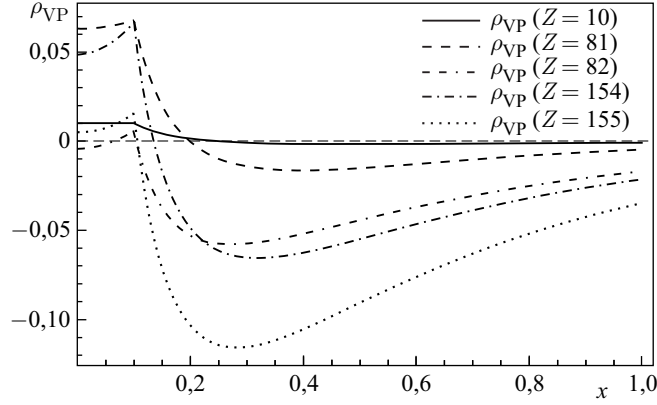


Рис. 2. $\rho_{VP}^{ren}(x)$ для внешнего потенциала (1) при $R_0 = 0,1$ для $Z = 10, 81, 82, 154, 155$

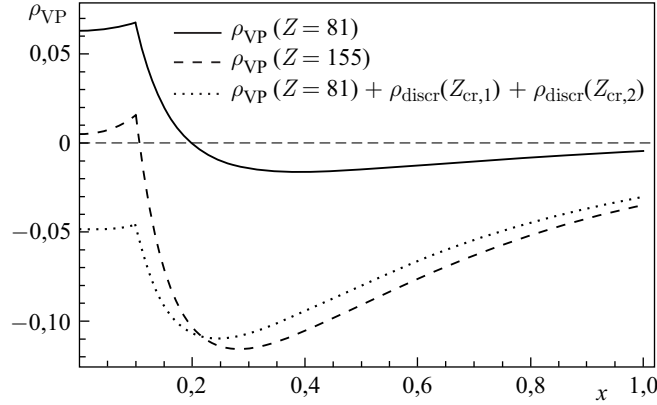


Рис. 3. Изменение $\rho_{VP}^{ren}(x)$ для внешнего потенциала (1) с $R_0 = 0,1$ при переходе через первое и второе Z_{cr} . Сумма вакуумной плотности при $Z = 81$ и первых двух дискретных уровней, взятых на пороге нижнего континуума, уже не воспроизводит $\rho_{VP}^{ren}(x)$ при $Z = 155$

для четных уровней

$$\sqrt{2(V_0 - 2)} \operatorname{tg}(\sqrt{V_0(V_0 - 2)}R) K_{2iQ}(\sqrt{8QR}) - \left[K_{1+2iQ}(\sqrt{8QR}) + K_{1-2iQ}(\sqrt{8QR}) \right] = 0 \quad (37)$$

и для нечетных

$$\sqrt{2(V_0 - 2)} K_{2iQ}(\sqrt{8QR}) + \operatorname{tg}(\sqrt{V_0(V_0 - 2)}R) \times \left[K_{1+2iQ}(\sqrt{8QR}) + K_{1-2iQ}(\sqrt{8QR}) \right] = 0. \quad (38)$$

В (37), (38) $K_\nu(x)$ — функция Макдональда, в которую вырождаются гипергеометрические функции при $\epsilon \rightarrow -1$. При этом непосредственным численным интегрированием

подтверждается, что полный вакуумный заряд при $Z = 10, 81$ равен нулю, при $Z = 82, 154$ равен $(-|e|)$, а при $Z = 155$ — соответственно $(-2|e|)$. Отметим также, что разрыв производной в $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ на радиусе R_0 обусловлен соответствующим разрывом в исходном потенциале (1). В большем числе измерений такой разрыв производной в потенциале приводит к тому, что $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ на радиусе сферы становится сингулярным, но интегральный заряд при этом сохраняет свое целочисленное значение [16, 17].

Отдельно отметим, что в закритической области при $Z > Z_{\text{cr},1}$ с ростом Z изменение $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ происходит не только дискретным образом за счет формирования вакуумных оболочек из погружающихся в нижний континуум дискретных уровней, но и непрерывно за счет изменения плотности состояний непрерывного спектра и эволюции дискретных уровней. На рис. 3 показано суммарное изменение $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ при переходе через два первых Z_{cr} . Сумма $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ при $Z = 81$ и вакуумных плотностей, соответствующих первым двум дискретным уровням, взятым на пороге нижнего континуума, уже не воспроизводит $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ при $Z = 155$.

Таким образом, корректный способ вычисления $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ для всех областей по Z состоит в использовании соотношений (33) и (35) с последующей проверкой ожидаемого целочисленного значения интегрального заряда через прямое численное интегрирование $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$.

3. ВАКУУМНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ $Z > Z_{\text{cr},1}$

Рассмотрим теперь способ вычисления \mathcal{E}_{VP} , который максимально полно учитывает такие непертурбативные эффекты в закритической области. Исходным выражением для вакуумной энергии является

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \langle H_D \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n \right), \quad (39)$$

которое выводится из дираковского гамильтониана, записанного в инвариантном относительно зарядового сопряжения виде, и определено с точностью до константы, зависящей от выбора начала отсчета энергии [1, 2]. Из (39) следует, что \mathcal{E}_{VP} даже при отсутствии внешних полей $A_{\text{ext}} = 0$ отрицательна и расходится. В то же время исходное определение вакуумной плотности заряда (9) таково, что при $A_{\text{ext}} = 0$ она тождественно равна нулю. Следовательно, с этой точки зрения наиболее естественной является нормировка \mathcal{E}_{VP} на свободное поле. Кроме того, при наличии внешних кулоновских потенциалов типа (1) имеется еще и (бесконечный) набор связанных состояний. Для выделения исключительно эффектов взаимодействия необходимо поэтому еще вычесть из каждого дискретного уровня массу покоя. Таким образом, в физически мотивированном виде, согласованном с (9), исходное выражение для вакуумной энергии приобретает вид

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n + \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 1} 1 \right)_A - \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < 0} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n > 0} \epsilon_n \right)_0. \quad (40)$$

Определенная таким образом вакуумная энергия при выключении внешнего поля исчезает, а при включении содержит только эффекты взаимодействия, так что разложение \mathcal{E}_{VP} по (четным) степеням внешнего поля будет начинаться с $O(Z^2)$.

Теперь выделим в (40) по отдельности вклады от дискретного и непрерывного спектров и для разности интегралов по непрерывному спектру $(\int dk \sqrt{k^2 + 1})_A - (\int dk \sqrt{k^2 + 1})_0$ используем известный прием, представляющий эту разность в виде интеграла от фазы упругого рассеяния $\delta(k)$. Такая техника вполне эффективно применялась при вычислении однопетлевых квантовых поправок к массе солитонов в существенно нелинейных моделях теории поля в $1 + 1$ D (см. [20, 21]). Опуская ряд почти очевидных выкладок, приведем сразу окончательный ответ:

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \delta_{\text{tot}}(k) + \frac{1}{2} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 1} (1 - \epsilon_n), \quad (41)$$

где $\delta_{\text{tot}}(k)$ — суммарный фазовый сдвиг при данном волновом числе k , включающий вклады от состояний рассеяния из нижнего и верхнего континуумов обеих четностей, а $(1 - \epsilon_n)$ — энергия связи соответствующего дискретного уровня. Такой подход к вычислению \mathcal{E}_{VP} оказывается весьма эффективен, поскольку $\delta_{\text{tot}}(k)$ ведет себя как в инфракрасном, так и в ультрафиолетовом пределах по k гораздо лучше, чем каждая из упругих фаз по отдельности (см. ниже). Кроме того, $\delta_{\text{tot}}(k)$ автоматически будет четной функцией внешнего поля. В свою очередь, для полной энергии связи дискретных уровней $\sum_n (1 - \epsilon_n)$ точка сгущения $\epsilon_n \rightarrow 1$ также становится регулярной, и в результате представление \mathcal{E}_{VP} в виде (41) позволяет обойтись без промежуточной регуляризации кулоновской асимптотики внешнего потенциала при $|x| \rightarrow \infty$, что существенно упрощает все дальнейшие вычисления.

Более того, в $1 + 1$ D для внешних потенциалов типа (1) \mathcal{E}_{VP} сразу оказывается конечной величиной без какой-либо специальной УФ-перенормировки. Это непосредственно следует из (41), поскольку, как это будет показано ниже явным вычислением, $\delta_{\text{tot}}(k)$ регулярна при $k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(1/k^3)$, поэтому фазовый интеграл в (41) всегда сходится, а полная энергия связи дискретных уровней также конечна, поскольку $1 - \epsilon_n$ ведут себя при $n \rightarrow \infty$ как $O(1/n^2)$. Заметим, однако, что конечность \mathcal{E}_{VP} после вычитания (40) (хотя и проводимого под знаком промежуточной УФ-регуляризации) не является результатом настоящей УФ-перенормировки, а обусловлена исключительно спецификой $1 + 1$ D. Необходимость перенормировки через однопетлевую диаграмму поляризации вакуума следует из анализа свойств $\rho_{\text{VP}}(x)$ с помощью контура ВК, который показывает, что без такой УФ-перенормировки интегральный вакуумный заряд не будет иметь того значения, которое вытекает из очевидных физических аргументов. Кроме того, еще одно дополнительное условие на \mathcal{E}_{VP} требует, чтобы при $Z \rightarrow 0$ вакуумная энергия совпадала с результатом для $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$, найденным из ТВ согласно (2)–(7). Поскольку при $Z \rightarrow 0$ связь между вакуумной энергией и вакуумной плотностью описывается теорией возмущений (2)–(4), легко показать, что неперенормированная \mathcal{E}_{VP} в общем случае этому условию не удовлетворяет. Фактически это проделано ниже в терминах перенормировочного коэффициента η (см. (43), (44) и последующие комментарии). Таким образом, несмотря на конечность, \mathcal{E}_{VP} в виде (41) все равно подлежит (конечной) перенормировке в $O(Z^2)$ на соответствующую вакуумную энергию $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$, вычисленную в первом порядке теории возмущений через перенормированную плотность $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ согласно (2)–(7). Метод ВК для $\rho_{\text{VP}}(x)$ фактически здесь играет роль контролера, обеспечивающего выполнение необходимых физических условий для корректного описания эффекта

поляризации вакуума вне рамок ТВ, которые не отслеживаются в рамках вычисления \mathcal{E}_{VP} через выражение (41). Таким образом, по аналогии с (35) мы должны перейти к перенормированной вакуумной энергии через соотношение

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z) = \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z) + \eta Z^2, \quad (42)$$

где

$$\eta = \lim_{Z_0 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0) - \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z_0)}{Z_0^2}. \quad (43)$$

При этом перенормировочный коэффициент η определяется исключительно профилем внешнего кулоновского поля и представляется в виде двойного интеграла от $A_0^{\text{ext}}(x)$, для чего $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$ выражается через (2)–(4), а \mathcal{E}_{VP} — через первое борновское приближение для $\text{Tr } G$, откуда

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0) - \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z_0) = \frac{1}{2} \int dx A_0(x) \left[\left(\rho_{\text{VP}}^{(1)} \right)_{\text{ren}}(x) - \left(\rho_{\text{VP}}^{(1)} \right)_{\text{nonren}}(x) \right], \quad (44)$$

где $\left(\rho_{\text{VP}}^{(1)} \right)_{\text{ren}}(x)$ — перенормированная пертурбативная вакуумная плотность (3)–(6), а $\left(\rho_{\text{VP}}^{(1)} \right)_{\text{nonren}}(x) = (|e|/2\pi) \int \text{Tr} (G^{(0)} V G^{(0)})$ — неперенормированная пертурбативная вакуумная плотность, и обе плотности, в свою очередь, выражаются через интегралы от $A_0^{\text{ext}}(x)$. В рассматриваемом случае перенормировочный коэффициент имеет вид

$$\eta = \alpha^2 (\eta_1 - \eta_2), \quad (45)$$

где

$$\eta_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dq \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \text{Ci}(qR_0) \right]^2 \left(1 - \frac{4}{q\sqrt{4+q^2}} \text{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) \right), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \left[\frac{4R_0\sqrt{1+y^2} + e^{-4R_0\sqrt{1+y^2}} - 1}{4(1+y^2)} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \left[-2 \frac{\sinh(2R_0\sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2}R_0} + \text{Ei}(-2\sqrt{1+y^2}R_0) + \right. \\ & \left. + \text{Ei}(2\sqrt{1+y^2}R_0) \right] \text{Ei}(-2\sqrt{1+y^2}R_0) + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \int_{R_0}^\infty \frac{dx}{x} \left[e^{-2x\sqrt{1+y^2}} \text{Ei}(2x\sqrt{1+y^2}) - e^{2x\sqrt{1+y^2}} \text{Ei}(-2x\sqrt{1+y^2}) \right]. \quad (47) \end{aligned}$$

Отметим, что η в зависимости от параметров кулоновского источника может быть как любого знака, так и равным нулю (см. ниже рис.7).

Рассмотрим теперь вычисление \mathcal{E}_{VP} через выражение (41). Решения УД различной четности при $|x| \leq R_0$ задаются формулами (16). При $|x| > R_0$ спинорные компоненты дираковской ВФ в непрерывном спектре для верхнего и нижнего континуумов (\pm) выбираются в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1^\pm(x, \epsilon) &= \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon+1}}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right\} \text{Re} \left[e^{i\lambda^\pm} e^{ikx} (-2ikx)^{iQ} \left(i \frac{Q}{k} \Phi_x + b \Phi_x(b+) \right) \right], \\ \Phi_2^\pm(x, \epsilon) &= \left\{ \frac{-\sqrt{\epsilon-1}}{\sqrt{|\epsilon|+1}} \right\} \text{Re} \left[i e^{i\lambda^\pm} e^{ikx} (-2ikx)^{iQ} \left(-i \frac{Q}{k} \Phi_x + b \Phi_x(b+) \right) \right],\end{aligned}\quad (48)$$

где

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{\epsilon^2 - 1}, \quad b = iQ(1 - \epsilon/k), \\ c &= 1 + 2iQ, \quad \Phi_x = \Phi(b, c, -2ikx), \quad \Phi_x(b+) = \Phi(b+1, c, -2ikx).\end{aligned}\quad (49)$$

Фазовые множители $e^{i\lambda^\pm}$ определяются из сшивки внешнего и внутреннего решений при $x = R_0$:

$$\lambda_{\text{even}}^\pm = -\text{Arg} \left[e^{ikR_0} (2kR_0)^{iQ} \left(i \frac{Q}{k} \Phi_{R_0} [1 - iW_{\text{even}}^\pm] - \Phi_{R_0}(b+) [1 + iW_{\text{even}}^\pm] \right) \right], \quad (50)$$

$$\lambda_{\text{odd}}^\pm = -\text{Arg} \left[i e^{ikR_0} (2kR_0)^{iQ} \left(i \frac{Q}{k} \Phi_{R_0} [1 - iW_{\text{odd}}^\pm] + \Phi_{R_0}(b+) [1 + iW_{\text{odd}}^\pm] \right) \right], \quad (51)$$

где

$$W_{\text{even}}^+ = \sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0-1}{\epsilon+V_0+1}} \text{tg} \left(R_0 \sqrt{(V_0+\epsilon)^2 - 1} \right), \quad (52)$$

$$W_{\text{even}}^- = (-1)^{1+\theta(|\epsilon|-V_0-1)} \sqrt{\frac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}} \sqrt{\frac{|\epsilon|-V_0+1}{|\epsilon|-V_0-1}} \text{tg} \left(R_0 \sqrt{(V_0-|\epsilon|)^2 - 1} \right),$$

$$W_{\text{odd}}^+ = \sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0+1}{\epsilon+V_0-1}} \text{tg} \left(R_0 \sqrt{(V_0+\epsilon)^2 - 1} \right), \quad (53)$$

$$W_{\text{odd}}^- = (-1)^{1+\theta(|\epsilon|-V_0-1)} \sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}} \sqrt{\frac{|\epsilon|-V_0-1}{|\epsilon|-V_0+1}} \text{tg} \left(R_0 \sqrt{(V_0-|\epsilon|)^2 - 1} \right).$$

Дискретный спектр в четном случае определяется из уравнения

$$\begin{aligned}\text{Im} \left[(2\gamma R_0)^{iQ} \left(-\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma R_0) [1 + W_{\text{even}}] + \right. \right. \\ \left. \left. + b \Phi(b+1, c, 2\gamma R_0) [1 - W_{\text{even}}] \right) \Gamma(b) \Gamma(c^*) \right] = 0, \quad (54)\end{aligned}$$

$$W_{\text{even}} = -\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0-1}{\epsilon+V_0+1}} \text{tg} \left(R_0 \sqrt{(V_0+\epsilon)^2 - 1} \right), \quad (55)$$

а в нечетном случае — из

$$\operatorname{Im} \left[(2\gamma R_0)^{iQ} \left(\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma R_0)[1 + W_{\text{odd}}] + b \Phi(b + 1, c, 2\gamma R_0)[1 - W_{\text{odd}}] \right) \Gamma(b) \Gamma(c^*) \right] = 0, \quad (56)$$

$$W_{\text{odd}} = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \sqrt{\frac{\epsilon + V_0 + 1}{\epsilon + V_0 - 1}} \operatorname{tg} \left(R_0 \sqrt{(V_0 + \epsilon)^2 - 1} \right). \quad (57)$$

В (54)–(57) параметры b, c, γ определены, как в (18)–(20).

Полная фаза

$$\delta_{\text{tot}}(k) = \delta_{\text{even}}^+(k) + \delta_{\text{even}}^-(k) + \delta_{\text{odd}}^+(k) + \delta_{\text{odd}}^-(k) \quad (58)$$

представляет собой сумму отдельных фазовых сдвигов для верхнего и нижнего континуумов обеих четностей, которые находятся из асимптотики решений (48) при $|x| \rightarrow \infty$:

$$\delta_{\sigma}^{\pm}(k) = Q \frac{\epsilon}{k} \ln(2k|x|) + \operatorname{Arg} \left[e^{i\phi_{\sigma}^{\pm}} \left(\frac{\Gamma(c) e^{i\lambda_{\sigma}^{\pm}} e^{\pi Q}}{(\epsilon + k)\Gamma(c - b - 1)} + \frac{\Gamma(c^*) e^{-i\lambda_{\sigma}^{\pm}}}{\Gamma(b^*)} \right) \right], \quad (59)$$

$$\sigma = \text{even, odd},$$

где $\phi_{\text{even}}^+ = 1, \phi_{\text{even}}^- = \pi, \phi_{\text{odd}}^+ = \pi/2, \phi_{\text{odd}}^- = -\pi/2$. Первые слагаемые в $\delta_{\sigma}^{\pm}(k)$ представляют собой кулоновские логарифмы, которые не дают вклада в суммарную фазу и сразу могут быть опущены. Вторые слагаемые в (59) также содержат УФ-особенности вида $-Q\epsilon \ln(2kR_0)/k$, взаимно компенсирующиеся в полной фазе. Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ суммарная фаза (58) оказывается регулярной убывающей функцией волнового числа с асимптотикой

$$\delta_{\text{tot}}(k \rightarrow \infty) = -\frac{Q^2}{k^3 R_0} \left[4 + \frac{1 + 16Q^2}{6(kR_0)^2} + \frac{\cos(4Q) \sin(4kR_0)}{8(kR_0)^3} \right] + O(1/k^7). \quad (60)$$

В области малых значений k вторые слагаемые в отдельных фазах $\delta_{\sigma}^{\pm}(k)$ имеют инфракрасные особенности $\pm(1 - \ln(Q/k))Q/k \mp kQ \ln[Q/k]/2$, которые, как в ультрафиолетовом случае, в сумме сокращают друг друга. Таким образом, при $k \rightarrow 0$ полная фаза также не содержит особенностей, а вычисление ее асимптотики дает

$$\delta_{\text{tot}}(k \rightarrow 0) = \operatorname{Arg} \left[-\left(e^{i\xi_{\text{even}}^+} - e^{-2\pi Q} e^{-i\xi_{\text{even}}^+} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{i\xi_{\text{odd}}^+} - e^{-2\pi Q} e^{-i\xi_{\text{odd}}^+} \right) \sin(\xi_{\text{even}}^-) \sin(\xi_{\text{odd}}^-) \right], \quad (61)$$

где введены вспомогательные фазы

$$\begin{aligned} \xi_{\text{even}}^+ &= -\operatorname{Arg} \left[Q J_{2iQ}(\sqrt{8QR_0}) [1 - iw_{\text{even}}^+] + w_{\text{even}}^+ \sqrt{2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{8QR_0}) \right], \\ \xi_{\text{odd}}^+ &= -\operatorname{Arg} \left[Q J_{2iQ}(\sqrt{8QR_0}) [i + w_{\text{odd}}^+] - \sqrt{2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{8QR_0}) \right], \\ \xi_{\text{even}}^- &= -\operatorname{Arg} \left[Q J_{2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) [i + w_{\text{even}}^-] - \sqrt{2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) \right], \\ \xi_{\text{odd}}^- &= -\operatorname{Arg} \left[Q J_{2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) [1 - iw_{\text{odd}}^-] + w_{\text{odd}}^- \sqrt{2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) \right] \end{aligned} \quad (62)$$

с коэффициентами w_{σ}^{\pm} :

$$\begin{aligned}
 w_{\text{even}}^{+} &= \sqrt{\frac{V_0}{V_0+2}} \operatorname{tg}\left(R_0 \sqrt{V_0(V_0+2)}\right), & w_{\text{odd}}^{-} &= \sqrt{\frac{V_0}{V_0-2}} \operatorname{tg}\left(R_0 \sqrt{V_0(V_0-2)}\right), \\
 w_{\text{odd}}^{+} &= \sqrt{\frac{V_0+2}{V_0}} \operatorname{tg}\left(R_0 \sqrt{V_0(V_0+2)}\right), & w_{\text{even}}^{-} &= \sqrt{\frac{V_0-2}{V_0}} \operatorname{tg}\left(R_0 \sqrt{V_0(V_0-2)}\right).
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

Характерной чертой в поведении $\delta_{\text{tot}}(k)$ является появление (позитронных) упругих резонансов при достижении каждым следующим уровнем нижнего континуума. На рис. 4 приведены графики зависимости полной фазы от волнового числа для различных значений Z при $R_0 = 0,1$. Рис. 4, *a* отвечает $Z = 80$, при котором еще ни один уровень не достиг нижнего континуума. При $Z = 82$ (рис. 4, *б*) нижнего континуума уже достиг первый четный уровень ($Z_{\text{cr},1} \simeq 81,500$), что на фазе отражается в виде предельно узкого низкоэнергетического упругого резонанса. При дальнейшем увеличении Z вплоть до следующего критического значения $Z_{\text{cr},2} \simeq 154,136$ этот скачок на π постепенно сглаживается и смещается в сторону больших k . На рис. 4, *в* продемонстрировано поведение фазы для $Z = 221$, при котором в нижний континуум погрузилось уже три уровня, причем последний (второй четный) соответствует $Z_{\text{cr},3} \simeq 220,047$. Этому уровню в фазе соответствует первый узкий резонанс. Два других резонанса, отвечающие двум предыдущим уровням, расположены правее и имеют существенно менее выраженную форму. Таким образом, фаза $\delta_{\text{tot}}(k)$ регулярна на всем диапазоне изменения волнового числа,

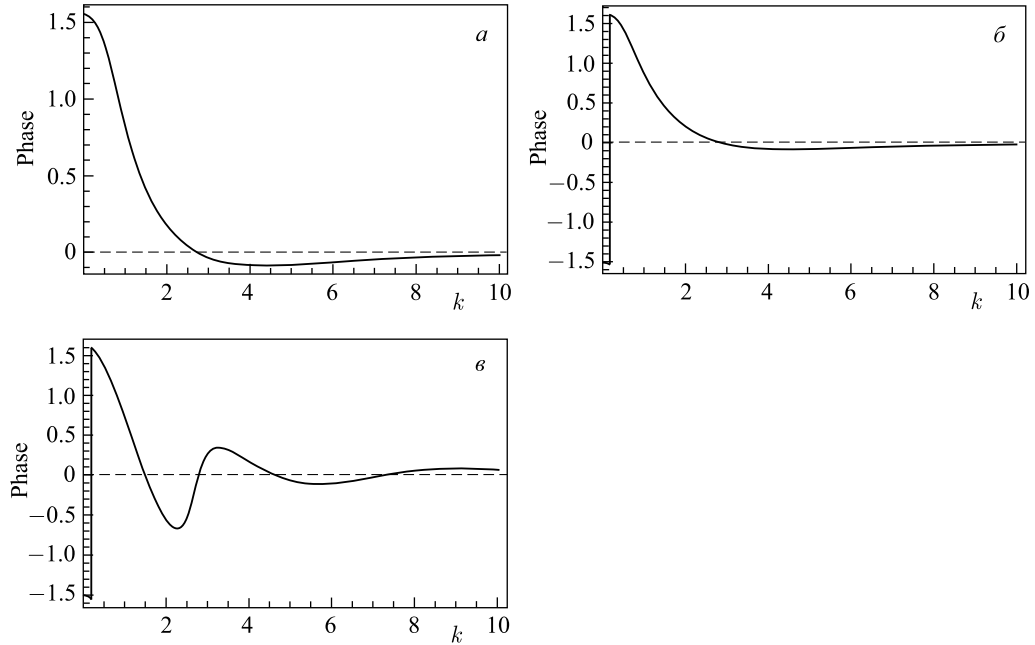


Рис. 4. Зависимость полной фазы δ_{tot} от волнового числа k при $R_0 = 0,1$ для $Z = 80$ (*a*), $Z = 82$ (*б*), $Z = 221$ (*в*)

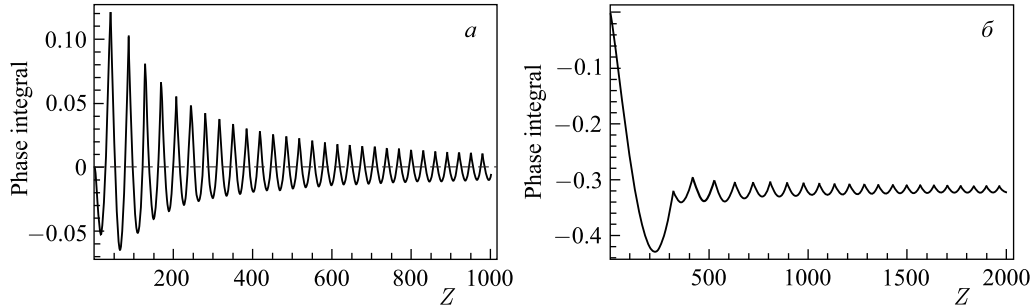


Рис. 5. Зависимость фазового интеграла от Z : а) $R_0 = 0,01$; б) $R_0 = 1$

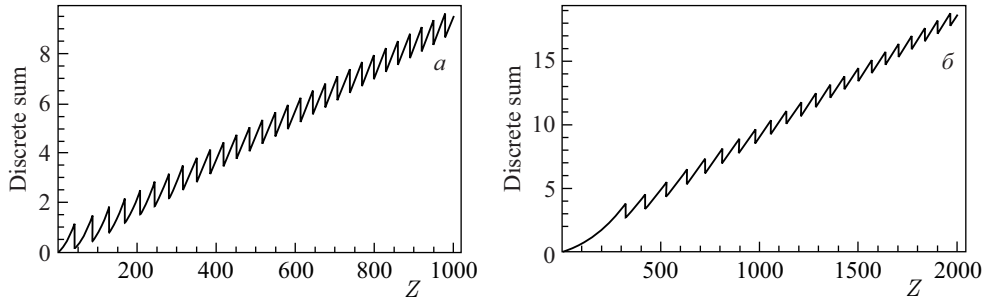


Рис. 6. Зависимость полной энергии связи дискретного спектра от Z : а) $R_0 = 0,01$; б) $R_0 = 1$

а в области больших k убывает достаточно быстро, чтобы гарантировать сходимость фазового интеграла в (41).

Характерная зависимость фазового интеграла от заряда приведена на рис. 5. Как следует из рис. 5, фазовый интеграл как функция Z имеет немонотонное поведение. При $Z = Z_{cr}$ производная этой функции терпит разрыв со сменой знака, а на интервалах между двумя соседними Z_{cr} изначальное убывание сменяется ростом. Типичное поведение $1/2$ от суммарной энергии связи дискретных уровней показано на рис. 6. Суммарная энергия связи представляет собой разрывную функцию, скачки которой возникают при достижении зарядом источника соответствующих критических значений, когда в нижний континуум погружается очередной дискретный уровень, за счет чего энергия связи убывает на $(-2)mc^2$. На интервалах между двумя соседними Z_{cr} энергия связи, в отличие от фазового интеграла, всегда положительна и монотонно растет, поскольку растут энергии связи $(1 - \epsilon_n)$ каждого из дискретных уровней. Следует также отметить, что в пертурбативной области при $Z \ll Z_{cr,1}$ энергия связи и фазовый интеграл имеют сравнимые по модулю значения противоположного знака. В то же время в отличие от фазового интеграла, при больших Z энергия связи дискретных уровней проявляет степенную скорость роста. Более конкретно, при сглаживании разрывов из энергии связи получим непрерывную функцию, которая при $Z > Z_{cr,1}$ аппроксимируется как $\sim Z^p$, где степень p для рассмотренных параметров внешнего источника находится в диапазоне $1 < p < 2$. Учет скачков приводит к некоторому снижению скорости роста, однако даже при этом в закритической области вклад от энергии связи в неперенормированную $\mathcal{E}_{VP}(Z)$ будет играть доминирующую роль.

В свою очередь, перенормированная энергия помимо $\mathcal{E}_{\text{VP}}(Z)$ содержит слагаемое ηZ^2 , которое при фиксированном радиусе источника R_0 является квадратичной функцией в отличие от $\mathcal{E}_{\text{VP}}(Z)$. Таким образом, именно ηZ^2 будет определять поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ для больших $Z \gg Z_{\text{cr},1}$. Рассмотрим теперь наиболее общие свойства η как функции R_0 , следующие из (45)–(47).

Для этого перепишем сначала η_1 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \text{Ci}(qR_0) \right]^2 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty (1 - \gamma_E - \ln(qR_0))^2 \frac{4}{q\sqrt{4+q^2}} \text{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) - \\ & - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \text{Ci}(qR_0) \right]^2 - (1 - \gamma_E - \ln(qR_0))^2 \right) \frac{4}{q\sqrt{4+q^2}} \text{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right), \quad (64) \end{aligned}$$

где γ_E — постоянная Эйлера. Покажем, что последний интеграл в (64) стремится к нулю при $R_0 \rightarrow 0$. Для этого разобьем всю область интегрирования на два интервала: $[0, 1/R_0] \cup [1/R_0, \infty]$. Интеграл по первому интервалу оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{1/R_0} \left(\left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \text{Ci}(qR_0) \right]^2 - (1 - \gamma_E - \ln(qR_0))^2 \right) \frac{4}{q\sqrt{4+q^2}} \text{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) \right| \leq \\ & \leq \int_0^{1/R_0} qR_0 \frac{4}{q\sqrt{4+q^2}} \text{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) = 2R_0 \text{arcsch}^2 R_0 \rightarrow 2R_0 \ln^2 R_0 \rightarrow 0, \quad (65) \end{aligned}$$

а на втором интервале в случае достаточно малого R_0 мажорирующий интеграл может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \left| \int_{1/R_0}^\infty \left(\left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \text{Ci}(qR_0) \right]^2 - (1 - \gamma_E - \ln(qR_0))^2 \right) \frac{4}{q\sqrt{4+q^2}} \text{arcsch}\left(\frac{q}{2}\right) \right| \leq \\ & \leq \int_0^{1/R_0} (1 - \gamma_E - \ln(qR_0))^2 \frac{4 \ln q}{q^2} = 4R_0 [3 + \gamma_E(2 + \gamma_E) - (1 - \gamma_E)^2 \ln R_0] \rightarrow 0. \quad (66) \end{aligned}$$

Первый и второй интегралы в (64) вычисляются аналитически. В результате получаем следующую асимптотику для η_1 при $R_0 \rightarrow 0$:

$$\eta_1 \rightarrow 2/\pi R_0 - \ln^2 R_0 + 2(1 - \gamma_E - 2 \ln 2) \ln R_0 - (1 - \gamma_E - 2 \ln 2)^2 - \pi^2/3. \quad (67)$$

Теперь рассмотрим η_2 при $R_0 \rightarrow 0$. Для оценки первого интеграла в (47) разобьем интегрирование по y на интервалы $[0, y^*] \cup [y^*, \infty]$, где $y^* = \sqrt{1/(4R_0)^2 - 1}$. На втором интервале экспонентой в подынтегральном выражении можно пренебречь. На первом интервале аргумент экспоненты в подынтегральном выражении не превышает единицы,

так что она может быть разложена в ряд по малому аргументу. В результате получаем следующую оценку на первый интеграл при $R_0 \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \left[\frac{4R_0 \sqrt{1+y^2} + e^{-4R_0 \sqrt{1+y^2}} - 1}{4(1+y^2)} \right] \rightarrow 1. \quad (68)$$

Второй интеграл в (47) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \left[-2 \frac{\sinh(2R_0 \sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2} R_0} + \text{Ei}(-2\sqrt{1+y^2} R_0) + \text{Ei}(2\sqrt{1+y^2} R_0) \right] \times \\ & \times \text{Ei}(-2\sqrt{1+y^2} R_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} 2 \left(-2 + \gamma_E + \ln[2R_0 \sqrt{1+y^2}] \right) \times \\ & \times \left(\gamma_E + \ln[2R_0 \sqrt{1+y^2}] \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \left(\left[-2 \frac{\sinh(2R_0 \sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2} R_0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Ei}(-2\sqrt{1+y^2} R_0) + \text{Ei}(2\sqrt{1+y^2} R_0) \right] \text{Ei}(-2\sqrt{1+y^2} R_0) - \right. \\ & \left. - 2 \left(-2 + \gamma_E + \ln[2R_0 \sqrt{1+y^2}] \right) \left(\gamma_E + \ln[2R_0 \sqrt{1+y^2}] \right) \right). \quad (69) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (69) вычисляется аналитически, а второе исчезает при $R_0 \rightarrow \infty$. В третьем слагаемом в (47) при $R_0 \rightarrow 0$ нижний предел интегрирования по x можно положить нулевым, что дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \int_{R_0}^\infty \frac{dx}{x} \left[e^{-2x\sqrt{1+y^2}} \text{Ei}(2x\sqrt{1+y^2}) - e^{2x\sqrt{1+y^2}} \text{Ei}(-2x\sqrt{1+y^2}) \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-t} \text{Ei}(t) - e^t \text{Ei}(-t)) = \frac{\pi^2}{4}. \quad (70) \end{aligned}$$

В результате

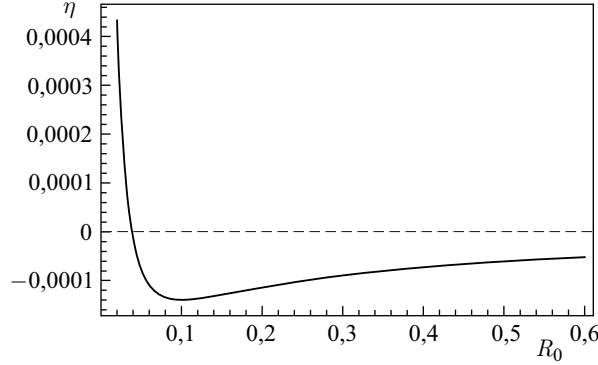
$$\eta_2 \rightarrow \ln^2 R_0 - 2(1 - \gamma_E - 2 \ln 2) \ln R_0 + (1 - \gamma_E - 2 \ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{3}, \quad R_0 \rightarrow 0, \quad (71)$$

и окончательно

$$\frac{\eta}{\alpha^2} \rightarrow 2/\pi R_0 - 2(\ln R_0 + \gamma_E + 2 \ln 2 - 1)^2 - 2\pi^2/3, \quad R_0 \rightarrow 0. \quad (72)$$

Рассмотрим теперь поведение η при $R_0 \rightarrow \infty$. В этом пределе для η_1 можно записать следующее неравенство:

$$0 < \eta_1 \leq \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \text{Ci}(qR_0) \right]^2 \frac{q^2}{6} = \frac{1}{18\pi R_0^3}. \quad (73)$$


 Рис. 7. Зависимость перенормировочного коэффициента η от R_0

Обратимся теперь к оценке η_2 при $R_0 \rightarrow \infty$. В этом пределе экспонента в первом интеграле в (47) может быть опущена, что дает $1/\pi R_0 - 1/16R_0^2$. Во втором интеграле для подынтегрального выражения используем асимптотическое разложение для больших значений аргумента $\text{Ei}(t) = e^t(t^{-1} + t^{-2} + O(t^{-3}))$. В результате получаем $1/16R_0^2 + O(1/R_0^3)$. Для третьего интеграла в (47) также используем асимптотическое разложение подынтегрального выражения, что дает $1/\pi R_0 + O(1/R_0^3)$. Таким образом, $\eta_2 \rightarrow 2/\pi R_0$ при $R_0 \rightarrow \infty$, и тем самым для η получаем следующую асимптотику:

$$\frac{\eta}{\alpha^2} \rightarrow -2/\pi R_0 + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right), \quad R_0 \rightarrow \infty. \quad (74)$$

На рис. 7 приведена зависимость η от радиуса R_0 . Как следует из асимптотик (72), (74), при конечных R_0 этот параметр должен обязательно менять знак. В данном случае это происходит один раз при $\tilde{R}_0 \simeq 0,0382$, что составляет $\simeq 14,7$ фм.

Таким образом, в пертурбативной области перенормированная вакуумная энергия квадратично возрастает в соответствии с (7), а далее поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ обусловлено значением параметра η . При $R_0 < \tilde{R}_0$ параметр перенормировки $\eta > 0$ и при достижении достаточно больших Z , когда вкладом от неперенормированной энергии можно пренебречь, $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ квадратично возрастает. При $R_0 > \tilde{R}_0$ коэффициент $\eta < 0$, поэтому на больших Z перенормированная энергия квадратично убывает вплоть до больших отрицательных значений. Если $R_0 = \tilde{R}_0$, то перенормированная энергия совпадает с неперенормированной. В этом случае в закритической области поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ доминируется вкладом дискретного спектра, т.е. аппроксимируется степенным ростом Z^ν , $1 < \nu < 2$.

На рис. 8 показана зависимость перенормированной энергии для $R_0 = 0,01, \tilde{R}_0, 0,1, 1$. Значения перенормировочного параметра при этом будут следующие: $\eta(R_0 = 0,01) = 30,72\alpha^2$, $\eta(R_0 = \tilde{R}_0) = 0$, $\eta(R_0 = 0,1) = -2,63\alpha^2$, $\eta(R_0 = 1) = -0,614\alpha^2$. Не-перенормированная энергия без учета разрывов за счет погружения уровней в нижний континуум аппроксимируется в области больших Z степенными функциями $0,016Z^{1,12}$, $0,012Z^{1,14}$, $0,0085Z^{1,17}$, $0,0030Z^{1,25}$ соответственно. В области больших значений Z , когда ηZ^2 начинает доминировать над этими степенными функциями, при $R_0 = 0,01$ перенормированная энергия почти квадратично растет, при $R_0 = \tilde{R}_0$ скорость роста

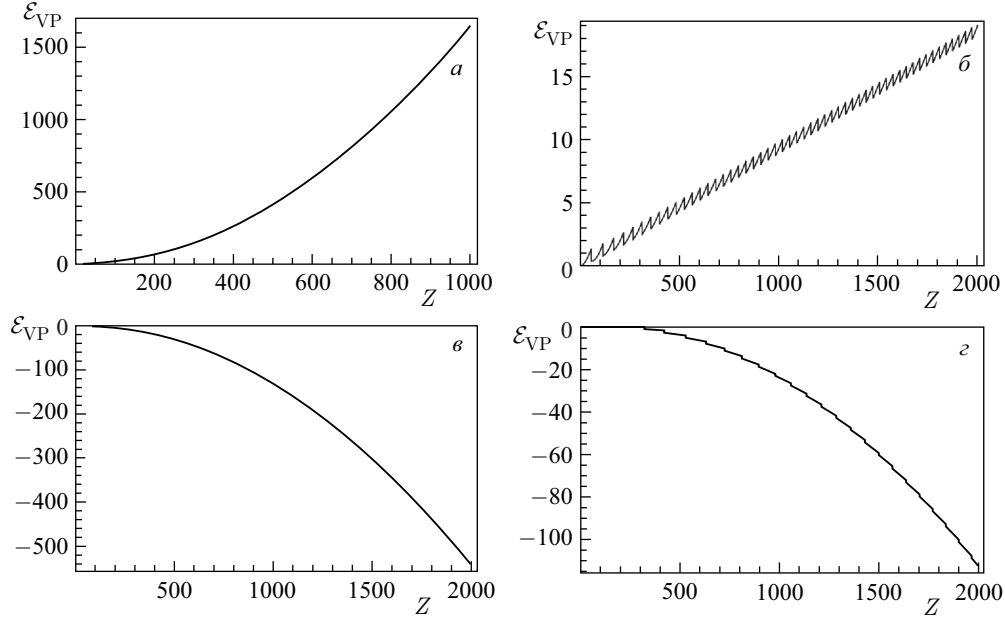


Рис. 8. Перенормированная энергия $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ для $R_0 = 0,01$ (а), $R_0 = \tilde{R}_0$ (б), $R_0 = 0,1$ (в), $R_0 = 1$ (г)

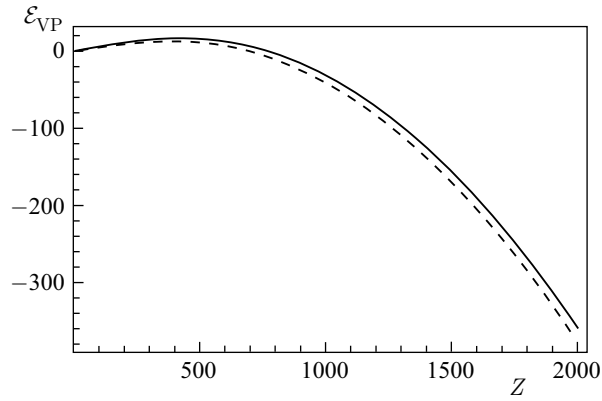


Рис. 9. $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ при $R_0(Z) = 1,2(2,5Z)^{1/3} \Phi_M$. Пунктиром показано поведение члена $\eta(Z)Z^2$

$\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ составляет $\simeq 1,17$, а при $R_0 = 0,1, 1$ первоначальный квадратичный рост сменяется почти квадратичным убыванием вплоть до значительных отрицательных значений.

В заключение рассмотрим случай кулоновского источника с радиусом R_0 , следующим образом зависящим от Z :

$$R_0(Z) = 1,2(2,5Z)^{1/3} \Phi_M, \quad (75)$$

который воспроизводит (приближенное) соотношение между зарядом и радиусом сверхтяжелого атомного ядра. В этом случае η через R_0 также приобретает зависимость от

Z , т.е. слагаемое ηZ^2 уже не является квадратичным. В области малых значений заряда $\eta(Z)Z^2 \sim Z^{5/3}$, а при асимптотически больших $\eta(Z)Z^2 \sim -Z^{5/3}$. Но при этом выход на последнюю асимптотику происходит при настолько больших Z , которые не представляются физически реализуемыми. На рис. 9 случай с $R_0(Z)$ показан на интервале $0 < Z < 2000$. Отметим, что и в этом случае основные закономерности остаются справедливыми. А именно, доминирующий вклад в неперенормированную энергию дает дискретный спектр, $\mathcal{E}_{VP}(Z)$ (без учета скачков) в закритической области может быть аппроксимирована функцией $0,015853Z^{1,1}$. В $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ основной вклад дает перенормировочное слагаемое $\eta(Z)Z^2$, что четко показывает рис. 9, где сплошной линией показана зависимость $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$, а штриховой демонстрируется отдельный вклад от слагаемого $\eta(Z)Z^2$. Первоначальное возрастание $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в области малых Z с последующим прохождением через локальный максимум при $Z \simeq 400\text{--}500$, когда $\eta \simeq 0$, к убыванию до значительных отрицательных значений, в данном случае обусловлено поведением $\eta(Z)Z^2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в $1 + 1$ D поляризация вакуума в закритической области при соответствующих параметрах кулоновских источников может приводить к существенно отличающейся от пертурбативного поведения вакуумной энергии. Специфика $1 + 1$ D состоит в том, что скорость убывания $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ по крайней мере в рассмотренном диапазоне по параметрам кулоновских источников не превышает $-|\eta|Z^2$. Но это обусловлено исключительно медленным ростом числа вакуумных оболочек в одномерном случае. При этом по понятным причинам мы опускаем обсуждение вполне законного вопроса о том, насколько такая сверхкритическая область физически реализуема (как и вообще вся одномерная картина для релятивистского водородоподобного атома).

Следует также специально отметить, что собственно вычисление вакуумной энергии при УФ-перенормировке через однопетлевую диаграмму может быть проведено на основе соотношений (41), (42) и (43) без какого-либо упоминания о вакуумной плотности и оболочечных эффектах. Сам факт убывания $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в закритической области при этом мог быть вполне корректно объяснен через отрицательный вклад от перенормировочного члена ηZ^2 . Однако по существу убывание $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в закритической области обусловлено именно непертурбативными изменениями в вакуумной плотности при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет дискретных уровней, достигающих нижнего континуума. В $1 + 1$ D в силу специфики одномерной задачи Дирака–Кулона рост числа вакуумных оболочек $\sim Z^s$, $1 < s < 2$, по крайней мере в рассмотренном диапазоне параметров внешнего источника. Поэтому их хватает только на то, чтобы понизить в закритической области скорость роста неперенормированной \mathcal{E}_{VP} до $\sim Z^\nu$, $1 < \nu < 2$, и в результате доминирующий вклад возникает от перенормировочного члена ηZ^2 . В $2 + 1$ и $3 + 1$ D оболочечный эффект выражен гораздо более явно. Такое поведение $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в закритической области показывает правильность вывода о превращении нейтрального вакуума в заряженный, который оказывается основным состоянием электрон-позитронного поля в таких полях [1, 2, 4, 16], и тем самым о спонтанном излучении вакуумных позитронов, которые должны возникать при рождении очередной вакуумной оболочки вследствие закона сохранения полного заряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greiner W., Muller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.
2. Plunien G., Muller B., Greiner W. // Phys. Rep. 1986. V. 134. P. 87.
3. Kuleshov V.M. et al. // Phys. Usp. 2015. V. 58. P. 785.
4. Rafelski J. et al. arXiv:1604.08690[nucl-th].
5. Barbieri R. // Nucl. Phys. A. 1971. V. 161. P. 1.
6. Shabad A.E., Usov V.V. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 180401.
7. Shabad A.E., Usov V.V. // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 125021; 2008. V. 77. P. 025001.
8. Krainov V.P. // JETP. 1973. V. 37. P. 406.
9. Oraevskii V.N., Rex A.I., Semikoz V.B. // JETP. 1977. V. 45. P. 428.
10. Karnakov B.M., Popov V.S. // JETP. 2003. V. 97. P. 890.
11. Vysotsky M.I., Godunov S.I. // Phys. Usp. 2014. V. 184. P. 206.
12. Wichmann E.H., Kroll N.M. // Phys. Rev. 1956. V. 101. P. 843.
13. Gyulassy M. // Nucl. Phys. A. 1975. V. 244. P. 497.
14. Brown L.S., Cahn R.N., McLerran L.D. // Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 581.
15. Neghabian A.R. // Phys. Rev. A. 1983. V. 27. P. 2311.
16. Greiner W., Reinhardt J. Quantum Electrodynamics. Springer Science; Business Media, 2012.
17. Mohr P.J., Plunien G., Soff G. // Phys. Rep. C. 1998. V. 293. P. 227.
18. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. V. 1. McGraw-Hill Book Company, 1953.
19. Fano U. // Phys. Rev. 1962. V. 124. P. 1866.
20. Rajaraman R. Solitons and Instantons. Amsterdam: North Holland, 1982.
21. Sveshnikov K. // Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 255.

Получено 3 марта 2017 г.