Письма в ЭЧАЯ. 2017. Т. 14, № 5(210). С. 551–554

ФИЗИКА И ТЕХНИКА УСКОРИТЕЛЕЙ

К ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ФОКУСИРОВКЕ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой [1]

Всероссийский электротехнический институт, Москва

Обсуждаются методы построения решения уравнений Максвелла для электрического поля применительно к проблеме фокусировки интенсивных пучков заряженных частиц.

The methods of solution construction of Maxwell equation for electric field in problem of intense charged particles beam electrostatic focusing are discussed.

PACS: 41.85.Lc

В работе [1] и предшествующих публикациях [2, 3] предложен итеративный способ построения решения для электрического поля $\mathbf{E}$, заданного на координатной поверхности и координатной линии выбранной системы координат. В [1] это плоскость $\psi = 0$ и ось z цилиндрической системы R, ψ, z. Значительная часть результатов [1–3], связанных с решением уравнений Максвелла, относится к случаю мультипликативного или аддитивного разделения переменных в результирующем выражении для скалярного потенциала φ. При этом сформулированный подход приводит к бесконечным рядам, как правило, суммируемым для элементарных функций, но не дает ответа о полном наборе решений рассматриваемого типа, хотя, по сути, речь идет о построении частных точных решений уравнения Лапласа. Автор [1–3] отмечает, что алгоритм отсеивает нефизичные начальные данные. Заметим, что при этом он не обеспечивает исчерпывающего перечня физически реализуемых ситуаций.

При построении решения в системе R, ψ, z в виде

$$\varphi = U(R)V(\psi)W(z) \tag{1}$$

возможны следующие комбинации. Для $W'' = 0$ имеем

$$W = W_1 z + W_2, \quad \frac{V''}{V} = C_V,$$
$$U = U_1 \cos(k \ln R) + U_2 \sin(k \ln R), \quad V = V_1 \operatorname{ch}(k\psi) + V_2 \operatorname{sh}(k\psi), \quad C_V = k^2; \tag{2}$$
$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)R^{\kappa} + \frac{1}{2}(U_1 - U_2)R^{-\kappa}, \quad V = V_1 \cos(\kappa\psi) + V_2 \sin(\kappa\psi), \quad C_V = -\kappa^2.$$

[1] E-mail: olga1606@rambler.ru

Здесь и далее в выражениях для U, V, W символы с нижними индексами — константы.

Решение 3.3.1 в [2] получается из (2) при $W_1 = 0$, $W_2 = 1$, $V_2 = 0$, $U_1 = U_2$, $C_V = -\kappa^2$.

При $W''/W = C_W$, $V''/V = C_V$ решение определяется формулами

$$\begin{gathered} C_W = l^2, \quad W = W_1 \operatorname{ch}(lz) + W_2 \operatorname{sh}(lz), \\ C_V = k^2, \quad U = Z_{ik}(lR); \quad C_V = -\kappa^2, \quad U = Z_\kappa(lR); \\ C_W = -\lambda^2, \quad W = W_1 \cos(\lambda z) + W_2 \sin(\lambda z), \\ C_V = k^2, \quad U = Z_{ik}(i\lambda R); \quad C_V = -\kappa^2, \quad U = Z_\kappa(i\lambda R), \end{gathered} \tag{3}$$

где Z_ν — произвольная линейная комбинация бесселевых функций первого и второго рода.

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах инвариантно относительно преобразования

$$\bar{\varphi} = \varphi + a\psi + bz, \quad a, b = \mathrm{const}, \tag{4}$$

которое при $a = 0$ позволяет добавить к любому двумерному решению $\varphi(R, \psi)$ однородное электрическое поле E_z. В [1] построен частный случай решения (2) при $W_1 = 0$, $W_2 = 1$, $V_2 = 0$, $\kappa = 2$ с использованием свойства (4).

В сферических координатах r, θ, ψ для решения в виде

$$\varphi = U(r)V(\psi)W(\theta) \tag{5}$$

возможные варианты решений сводятся к следующему:

$$U'' + \frac{2}{r}U' = 0, \quad U = U_1 + \frac{U_2}{r}, \quad \frac{V''}{V} = C_V. \tag{6}$$

Для $C_V = -\kappa^2$ функция V определена формулами из (2), а W описывается выражением

$$W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)\operatorname{tg}^\kappa \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(W_1 - W_2)\operatorname{tg}^{-\kappa} \frac{\theta}{2}. \tag{7}$$

При $U_1 = 1$, $U_2 = 0$, $W_1 = W_2$, $V_2 = 0$ получаем точное решение с $E_r = 0$, $E_\theta(r, \theta, 0) = E(\theta)$, $E_\psi = 0$ в виде[1]

$$\varphi = \cos(\kappa\psi)\operatorname{tg}^\kappa \frac{\theta}{2}, \quad E_\theta = \frac{\kappa}{r}\cos(\kappa\psi)\left[\operatorname{tg}^\kappa \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\right], \tag{8}$$

для которого при малых θ поле $E_\theta \sim \theta^{\kappa-1}$. Приближенное решение этого типа указано в [2] (пример 3.4). Эквипотенциаль $\varphi = \varphi_*$ решения (8) описывается формулой

$$\theta = 2\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{\varphi_*}{\cos(\kappa\psi)}\right)^{1/\kappa}\right]. \tag{9}$$

[1] При начальных данных этого типа суммирование возникающего в соответствии с [1] ряда, по-видимому, затруднительно, а тангенсу половинного угла в базовых функциях взяться просто неоткуда.

При $C_V = k^2$ функция W определяется выражением

$$\begin{aligned} &W = W_1 \cos(k\xi) + W_2 \sin(k\xi), \quad \xi = \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}; \\ &W = W_1 \xi + W_2, \quad k = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Вторая возможность для решения (5) связана с соотношением

$$\begin{gathered} \frac{r^2}{U}\left(U'' + \frac{2}{r}U'\right) = C_U, \quad U = U_1 \exp(\lambda_1 \xi) + U_2 \exp(\lambda_2 \xi), \\ \xi = \ln r, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + C_U}, \end{gathered} \tag{11}$$

где константы λ_1, λ_2 могут быть как действительными, так и комплексными.

Функция W при этом выражается через произвольную линейную комбинацию присоединенных функций Лежандра

$$W = \mathcal{P}_\nu^\mu(\cos\theta), \quad C_U = \nu(\nu+1), \quad C_V = \mu^2. \tag{12}$$

Пример 3.5 из [2] при $C_2 = -C_1 \cos\theta_0$, $C_3 = 0$ является частным случаем потенциала с аддитивным разделением переменных:

$$\varphi = C_1 \ln r + \left(C_1 \ln \sin\theta + C_2 \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + C_3 \psi. \tag{13}$$

Заметим, что напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ удовлетворяет тем же уравнениям, что и $\mathbf{E}$. При исследовании точных решений уравнений интенсивного пучка был сформулирован функциональный вид допустимых магнитных полей. В работе [4] приведены компоненты $\mathbf{H}$, соответствующие формуле (13):

$$H_r = \frac{C_1}{r}, \quad H_\theta = \frac{1}{r}\left(C_1 \operatorname{ctg}\theta + \frac{C_2}{\sin\theta}\right), \quad H_\psi = \frac{C_3}{r\sin\theta}, \tag{14}$$

а в [5–7] — таблицы решений для $\mathbf{H}$.

Еще один пример искривленной базовой поверхности, помимо конуса, дает рассмотрение спиральной цилиндрической системы p, q, z:

$$\begin{gathered} p = \bar{a}\ln R - \bar{b}\psi, \quad q = \bar{b}\ln R + \bar{a}\psi, \quad \bar{a} = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a^2+b^2}, \\ \varphi = U(p)V(q)W(z), \quad \frac{V''}{V} = C_V = k^2, \quad W = W_1 z + W_2, \\ U = U_1 \cos(kp) + U_2 \sin(kp), \quad V = V_1 \operatorname{ch}(kq) + V_2 \operatorname{sh}(kq). \end{gathered} \tag{15}$$

Как и цилиндрическая система R, ψ, z, координаты (15) допускают введение однородного поля E_z.

Исследование точных решений при использовании известных в математической физике криволинейных ортогональных систем [8, 9], аналогичное проведенному в [10] при изучении бриллюэновских потоков в неоднородных внешних магнитных полях, позволит существенно расширить число искривленных базовых поверхностей при полном перечислении возможностей, предоставляемых этими решениями с мультипликативным или аддитивным разделением переменных. В случае комплексных сомножителей возникают более сложные структуры, определяемые действительной и мнимой частями соответствующих выражений. Последующая интерпретация позволит выявить варианты, представляющие практический интерес при электростатической фокусировке интенсивных пучков заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарантин Н. И.* // Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2, № 3(126). С. 46.
2. *Тарантин Н. И.* Аналитическое рассмотрение и расчет электростатических устройств путем решения обратной задачи. Препринт ОИЯИ Р9-88-149. Дубна, 1988.
3. *Тарантин Н. И.* // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, № 2. С. 405.
4. *Сыровой В. А.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 3.
5. *Сыровой В. А.* // РЭ. 2003. Т. 48, № 4. С. 467.
6. *Сыровой В. А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
7. *Syrovoy V. A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. Amsterdam; New York; Tokyo: Elsevier, 2011.
8. *Eisenhart L. P.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1949. V. 35, No. 7. P. 412.
9. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
10. *Сыровой В. А.* // РЭ. 2014. Т. 59, № 4. С. 375.

Получено 25 января 2017 г.