

## ВКЛАД ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ В СВЕРХТОНКУЮ СТРУКТУРУ СПЕКТРА МЮОННОГО ВОДОРОДА

*А. Е. Дорохов<sup>а, б, 1</sup>, Н. И. Кочелев<sup>а, в, 2</sup>, А. П. Мартыненко<sup>2, 3</sup>,  
Ф. А. Мартыненко<sup>2</sup>, Р. Н. Фаустов<sup>д</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>в</sup> Институт современной физики Китайской академии наук, Ланьчжоу, Китай

<sup>2</sup> Самарский государственный университет, Самара, Россия

<sup>д</sup> Институт образовательной информатики Федерального исследовательского центра  
«Информатика и управление» Российской академии наук, Москва

В рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике выполнен расчет вклада псевдоскалярных мезонов в потенциал взаимодействия мюона и протона в атоме мюонного водорода. Использована параметризация формфактора перехода двух фотонов в  $\pi$ -,  $\eta$ -мезоны, основанная на экспериментальных данных по переходным формфакторам и КХД асимптотик. Представлены численные оценки вкладов в сверхтонкую структуру спектра  $S$ - и  $P$ -уровней.

In the framework of the quasipotential method in quantum electrodynamics we calculate the contribution of pseudoscalar mesons to the interaction operator of a muon and a proton in muonic hydrogen atom. The parametrization of the transition form factor of two photons into  $\pi$ ,  $\eta$  mesons, based on the experimental data on the transition form factors and QCD asymptotics is used. Numerical estimates of the contributions to the hyperfine structure of the spectrum of the  $S$  and  $P$  levels are presented.

PACS: 31.30.Jv; 12.20.Ds; 32.10.Fn

### ВВЕДЕНИЕ

Прецизионное исследование лэмбовского сдвига и сверхтонкой структуры спектра энергии легких мюонных атомов представляет собой фундаментальную задачу для проверки Стандартной модели и установления точных значений ее параметров, а также поиска эффектов новой физики. В настоящее время актуальность этих исследований связана прежде всего с проведенными коллаборацией CREMA (Charge Radius Experiments with Muonic Atoms) экспериментами [1–4] с мюонным водородом и дейтерием методами лазерной спектроскопии. Так, в результате измерения частоты перехода

---

<sup>1</sup>E-mail: dorokhov@theor.jinr.ru

<sup>2</sup>E-mail: nikkochelev@mail.ru

<sup>3</sup>E-mail: a.p.martynenko@samsu.ru

$2P_{3/2}^{F=2} - 2S_{1/2}^{F=1}$  было получено более точное значение зарядового радиуса протона  $r_p = 0,84184(67)$  фм, которое отличается от значения, рекомендованного CODATA, на  $7\sigma$  [5]. Значение CODATA основано на результатах спектроскопии атома электронного водорода и экспериментов по электрон-нуклонному рассеянию. Измерение частоты перехода  $2P_{3/2}^{F=1} - 2S_{1/2}^{F=0}$  для синглетного  $2S$ -состояния ( $\mu p$ ) позволило получить сверхтонкое расщепление  $2S$ -уровня энергии в мюонном водороде, а также значения радиуса Земаха  $r_Z = 1,082(37)$  фм и магнитного радиуса  $r_M = 0,87(6)$  фм. Выполненное впервые измерение трех частот перехода между уровнями энергии  $2P$  и  $2S$  для мюонного дейтерия ( $2S_{1/2}^{F=3/2} - 2P_{3/2}^{F=5/2}$ ), ( $2S_{1/2}^{F=1/2} - 2P_{3/2}^{F=3/2}$ ), ( $2S_{1/2}^{F=1/2} - 2P_{3/2}^{F=1/2}$ ) позволило получить в 2,7 раза более точное значение зарядового радиуса дейтрона, которое также меньше значения, рекомендованного CODATA [5], на  $7,5\sigma$  [4].

В результате возникла ситуация, когда имеется необъяснимое расхождение между значениями таких фундаментальных параметров, как зарядовый радиус протона и ядер, полученными из экспериментов с электронными и мюонными атомами. В процессе поиска возможных решений «загадки» зарядового радиуса протона высказывались различные гипотезы, в том числе идея неуниверсальности взаимодействия электронов и мюонов с нуклонами. Возможно, что включение в область экспериментальных исследований таких мюонных атомов, как мюонный гелий ( $\mu_2^3\text{He}^+$ ), мюонный тритий ( $\mu t$ ) с ядрами, состоящими из трех нуклонов, или других легких мюонных атомов позволит прояснить возникшую проблему. В экспериментах коллаборации CREMA ставится одна очень важная задача: получить на порядок более точные значения зарядовых радиусов простейших ядер (протона, дейтрона, гелиона, альфа-частицы...), которые входят в том или ином виде в теоретические выражения для интервалов тонкой или сверхтонкой структуры спектра. При этом используется высокая чувствительность характеристик связанного мюона к распределению плотности заряда и магнитного момента ядра. Успешная реализация этой программы возможна лишь в сочетании с прецизионными теоретическими расчетами различных энергетических интервалов, измеряемых экспериментально. Таким образом, задача более точного теоретического построения оператора взаимодействия частиц в квантовой электродинамике, расчета новых поправок в спектре энергии мюонных атомов приобретает особую актуальность.

## 1. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Для исследования тонкой и сверхтонкой структуры (СТС) спектра энергии мюонного водорода мы используем квазипотенциальный метод в квантовой электродинамике, в котором связанное состояние мюона и протона описывается в лидирующем порядке по постоянной тонкой структуры (ТС) уравнением Шредингера с кулоновским потенциалом [6–8]. Первая часть важных поправок в спектре энергии  $S$ - и  $P$ -состояний определяется гамильтонианом Брейта [6, 7, 9] (далее используется сокращение «fs» и «hfs» для обозначения вклада в ТС и СТС спектра энергии):

$$H_B = H_0 + \Delta V_B^{\text{fs}} + \Delta V_B^{\text{hfs}}, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Z\alpha}{r}, \quad (1)$$

$$\Delta V_B^{\text{fs}} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_l^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_p^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left( \frac{1}{m_l^2} + \frac{1}{m_p^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_l m_p r} \left( \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right) + \frac{Z\alpha}{2m_l^2 r^3} \left[ 1 + \frac{2m_l}{m_p} + 2a_\mu \left( 1 + \frac{m_l}{m_p} \right) \right] (\mathbf{L}\mathbf{s}_1), \quad (2)$$

$$\Delta V_B^{\text{hfs}} = \frac{8\pi\alpha\mu_p}{3m_l m_p} (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\delta(\mathbf{r}) - \frac{\alpha\mu_p(1+a_\mu)}{m_l m_p r^3} [(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_1\mathbf{n})(\mathbf{s}_2\mathbf{n})] + \frac{\alpha\mu_p}{m_l m_p r^3} \left[ 1 + \frac{m_l}{m_p} - \frac{m_l}{2m_p\mu_p} \right] (\mathbf{L}\mathbf{s}_2), \quad (3)$$

где  $m_l$ ,  $m_p$  — массы мюона и протона соответственно;  $\mu_p$  — магнитный момент протона;  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  — спины мюона и протона. Вклад взаимодействий (1)–(3) в спектр энергии разных мюонных атомов хорошо изучен [10–17]. Оператор (3) дает основной вклад порядка  $\alpha^4$  в сверхтонкую структуру спектра энергии мюонного атома (энергия Ферми). Прецизионный расчет сверхтонкой структуры спектра, который необходим для сравнения с экспериментальными данными, требует учета различных поправок.

Бесконечный ряд теории возмущений для оператора взаимодействия частиц содержит вклады разных взаимодействий. Один из таких вкладов, обусловленных обменом псевдоскалярными мезонами, исследуется в данной работе. Амплитуда этого взаимодействия представлена на рис. 1.

Эффективная вершина взаимодействия  $\pi^0$ -мезона (или других псевдоскалярных мезонов —  $\eta$ ,  $\eta'$ ) и виртуальных фотонов может быть выражена в терминах переходного формфактора  $F_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(k_1^2, k_2^2)$  в виде

$$V^{\mu\nu}(k_1, k_2) = i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \frac{\alpha}{\pi F_\pi} F_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(k_1^2, k_2^2), \quad (4)$$

где  $k_1, k_2$  — 4-импульсы виртуальных фотонов. Формфактор перехода нормирован условием  $F_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(0, 0) = 1$ . С ростом  $k_1^2, k_2^2$  функция быстро уменьшается, что обеспечивает ультрафиолетовую сходимость петлевого интеграла в амплитуде взаимодействия. Вклад псевдоскалярных мезонов в адронном рассеянии света на свете исследовался ранее при расчете аномального магнитного момента мюона и сверхтонкой структуры мюония [18–24].

Рассмотрим вначале построение сверхтонкой части потенциала взаимодействия частиц в случае  $S$ -состояний. Мы используем проекционные операторы на состояния двух частиц со спинами  $S = 0$  и  $S = 1$  [25]:

$$\hat{\Pi}_{S=0}[u(0)\bar{v}(0)]_{S=0} = \frac{1+\gamma^0}{2\sqrt{2}}\gamma_5, \quad \hat{\Pi}_{S=1}[u(0)\bar{v}(0)]_{S=1} = \frac{1+\gamma^0}{2\sqrt{2}}\hat{\varepsilon}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon^\mu$  — вектор поляризации триплетного состояния  ${}^3S_1$ . Введение (5) позволяет избежать громоздкого перемножения биспиноров Дирака и сразу перейти к вычислению

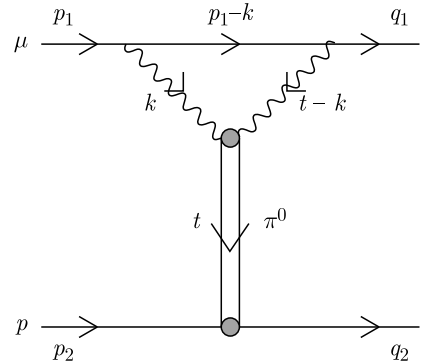


Рис. 1. Амплитуда взаимодействия  $\pi^0$ -,  $\eta$ -,  $\eta'$ -мезонов в мюонном водороде

следа от факторов, стоящих в числителе амплитуды взаимодействия:

$$\mathcal{N} = k_\alpha t_\beta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} [(\hat{q}_1 + m_l) \gamma^\nu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m_l) \gamma^\mu (\hat{p}_1 + m_l) \hat{\Pi}(\hat{p}_2 - m_p) \gamma_5 (\hat{q}_2 - m_p) \hat{\Pi}^+], \quad (6)$$

где  $p_{1,2}$  — 4-импульсы начальных состояний мюона и протона;  $q_{1,2}$  — 4-импульсы конечных состояний мюона и протона;  $t = p_1 - q_1$  — переданный импульс (импульс пиона). При расчете и упрощении (6) использовался пакет Form [26]. Вводя вместо  $p_{1,2}$ ,  $q_{1,2}$  полный и относительные импульсы частиц в начальном состоянии  $p = (0, \mathbf{p})$  и в конечном состоянии  $q = (0, \mathbf{q})$ , а также учитывая их малость для частиц в связанном состоянии ( $|\mathbf{p}| \sim \mu\alpha$ ,  $|\mathbf{q}| \sim \mu\alpha$ ), удержим в  $\mathcal{N}$  только основной вклад, пропорциональный второй степени переданного 4-импульса  $t = p - q$ :

$$\mathcal{N}^{\text{hfs}} = \frac{512}{3} m_l^2 m_p [t^2 k^2 - (tk)^2]. \quad (7)$$

Заметим, что индекс «hfs» обозначает выделение сверхтонкой части в (6) с помощью проекционных операторов (5).

В результате сверхтонкая часть потенциала однопионного взаимодействия мюона и протона в  $S$ -состоянии примет вид

$$\Delta V^{\text{hfs}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\alpha^2}{6\pi^2} \frac{g_p}{m_p F_\pi} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + m_\pi^2} \mathcal{A}(t^2), \quad (8)$$

где

$$\mathcal{A}(t^2) = \frac{2i}{\pi^2 t^2} \int d^4 k \frac{t^2 k^2 - (tk)^2}{k^2 (k-t)^2 (k^2 - 2kp_1)} F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(k^2, (k-t)^2). \quad (9)$$

Функция  $\mathcal{A}(t^2)$  характерна для изучения мнимой и действительной частей амплитуды распада псевдоскалярных мезонов в лептонную пару [27–29]. Дисперсионное соотношение с одним вычитанием для  $\mathcal{A}(t^2)$  имеет вид

$$\mathcal{A}(t^2) = \mathcal{A}(0) - \frac{t^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im} \mathcal{A}(s)}{s(s+t^2)}. \quad (10)$$

Мнимая часть  $\mathcal{A}(t^2)$ , не зависящая от конкретного вида формфактора  $F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(k^2, (k-t)^2)$ , хорошо известна (см. [28] и ссылки там):

$$\text{Im} \mathcal{A}(t^2) = \frac{\pi}{2\beta(t^2)} \ln \frac{1 - \beta(t^2)}{1 + \beta(t^2)}, \quad (11)$$

где  $\beta(t^2) = \sqrt{1 - 4m_l^2/t^2}$ .

Удобно переопределить константу  $\mathcal{A}(0)$  через моменты (производные) переходного формфактора в виде ряда по малому параметру  $\xi^2 \equiv m_l^2/\Lambda^2$ , где  $\Lambda^2$  — характерный масштаб сильных взаимодействий в переходном формфакторе [30]:

$$\mathcal{A}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi^2)^n}{n!} \frac{\Gamma_{1+2n}}{\Gamma_{1+n}\Gamma_{3+n}} \left\{ (3+2n) \int_0^\infty dx G^{(n+1)}(x) \ln x + G^{(n)}(x=0) \left[ 2 + (3+2n) \left( \ln 4\xi^2 - \gamma_E - 2\psi(n+1) + \psi(n+1/2) - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

где введена безразмерная переменная  $x = k^2/\Lambda^2$ ,  $G(x) \equiv F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(k^2, k^2)$  и  $\psi(n)$  — дигамма-функция. Как было показано в [29], для описания экспериментальных данных по переходным формфакторам достаточно пользоваться простейшей монополярной параметризацией

$$G(x) = \frac{1}{1+x}, \quad (13)$$

а использование данных CLEO [31] и асимптотик КХД [32] определяет параметр  $\Lambda^2$  в интервале значений

$$\Lambda^2 = [0,448-0,549]^2 \text{ ГэВ}^2. \quad (14)$$

С формфактором (13) лидирующие логарифмические вклады могут быть просуммированы как [30]

$$\mathcal{A}(0) = \frac{\ln \xi^2}{12\xi^4} \left[ 1 + 6\xi^2 - \sqrt{1 - 4\xi^2(1 + 8\xi^2)} \right] - \frac{5}{4} + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (15)$$

Таким образом, для электрона значение  $\mathcal{A}(0)$  будет равно [29]

$$\mathcal{A}(0) = -21,9 \pm 0,3, \quad (16)$$

а для мюона

$$\mathcal{A}(0) = -6,1 \pm 0,3. \quad (17)$$

В последнем случае для численных оценок надо удержать в (12), (15) степенные поправки до  $\xi^6$ . Следует также отметить, что эффекты внемассовости для пиона незначительны [20, 33]. Максимально точное определение численного значения  $\mathcal{A}(0)$  является очень важным для достижения высокой точности расчета.

Переходя затем в (8) в координатное представление с помощью преобразования Фурье, получаем следующий потенциал однопионного обмена:

$$\begin{aligned} \Delta V^{\text{hfs}}(r) = & \frac{\alpha^2 g_p}{6F_\pi m_p \pi^2} \left\{ \mathcal{A}(0) \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_\pi^2}{4\pi r} e^{-m_\pi r} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im} \mathcal{A}(s) \left[ \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi r(s - m_\pi^2)} \left( m_\pi^4 e^{-m_\pi r} - s^2 e^{-\sqrt{s}r} \right) \right] \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

Мы оставили в (18) вклады обеих слагаемых функции  $\mathcal{A}(t^2)$  из (10), хотя численно они могут значительно различаться.

Вычисляя матричные элементы с волновыми функциями  $1S$ - и  $2S$ -состояний, получаем соответствующие вклады в СТС спектра в виде

$$\begin{aligned} \Delta E^{\text{hfs}}(1S) = & \frac{\mu^3 \alpha^5 g_A}{6F_\pi^2 \pi^3} \left\{ \mathcal{A}(0) \frac{4W \left( 1 + \frac{W}{m_\pi} \right)}{m_\pi \left( 1 + \frac{2W}{m_\pi} \right)^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im} \mathcal{A}(s) \times \right. \\ & \left. \times \left[ 1 + \frac{1}{4W^2(s - m_\pi^2)} \left( \frac{m_\pi^4}{\left( 1 + \frac{m_\pi}{2W} \right)^2} - \frac{s^2}{\left( 1 + \frac{\sqrt{s}}{2W} \right)^2} \right) \right] \right\} = -0,0017 \text{ мэВ}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\Delta E^{\text{hfs}}(2S) = \frac{\mu^3 \alpha^5 g_A}{48 F_\pi^2 \pi^3} \left\{ \frac{\mathcal{A}(0) \left( 8 + 11 \frac{W}{m_\pi} + 8 \frac{W^2}{m_\pi^2} + 2 \frac{W^3}{m_\pi^3} \right)}{2 m_\pi \left( 1 + \frac{W}{m_\pi} \right)^4} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im } \mathcal{A}(s) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{1}{(s - m_\pi^2)} \left( \frac{m_\pi^2 \left( 2 + \frac{W^2}{m_\pi^2} \right)}{2 \left( 1 + \frac{W}{m_\pi} \right)^4} - \frac{s \left( 2 + \frac{W^2}{s} \right)}{2 \left( 1 + \frac{W}{\sqrt{s}} \right)^4} \right) \right] \right\} = -0,0002 \text{ мэВ}, \quad (20)$$

где для константы пион-нуклонного взаимодействия использовано соотношение Голдберга–Треймана:  $g_p = g_{\pi NN} = m_p g_A / F_\pi$  с  $g_A = 1,27$ ,  $F_\pi = 0,0924$  ГэВ,  $W = \mu\alpha$ . Погрешность результатов (19), (20) определяется погрешностью в нахождении  $\mathcal{A}(0)$  из (17) и составляет менее 10%. С помощью (19), (20) можно получить оценку вклада  $\eta$ -мезонов. Эти вклады, равные  $(-0,0001)$  мэВ (1S),  $(-0,00002)$  мэВ (2S), уступают значительно вкладу пиона в силу уменьшения константы взаимодействия  $g_{NN\eta}$ . Формулы (19), (20) можно использовать для оценки соответствующих вкладов в сверхтонкой структуре электронного водорода. Так, для 1S-состояния атома водорода получим  $\Delta E^{\text{hfs}}(1S) = -1,25$  Гц.

Формализм проекционных операторов можно использовать также при построении сверхтонкой части потенциала взаимодействия частиц для  $P$ -состояний, как это было предложено в [34, 35] (основной вклад в сверхтонкую структуру  $P$ -уровней дает потенциал Брейта в координатном представлении (3)). Покажем это в случае сверхтонкого расщепления  $2P_{1/2}$ -состояния, ограничившись учетом только  $\mathcal{A}(0)$  из (10). Представим волновую функцию  $2P$ -состояния в импульсном представлении в тензорной форме:

$$\psi_{2P}(\mathbf{p}) = (\varepsilon \cdot n_p) R_{21}(p), \quad (21)$$

где  $\varepsilon_\mu$  — вектор поляризации орбитального движения;  $n_p = (0, \mathbf{p}/p)$ ;  $R_{21}(p)$  — радиальная волновая функция в импульсном представлении. Используя биспинор мюона в системе покоя и вектор поляризации  $\varepsilon_\mu$ , введем проекционный оператор на состояние мюона с полным моментом  $J = 1/2$ :

$$\hat{\Pi}^\mu = \frac{i}{\sqrt{3}} \gamma_5 (\gamma^\mu - v^\mu) \psi, \quad (22)$$

где введенный биспинор Дирака  $\psi$  описывает состояние мюона с полным моментом  $J = 1/2$ ,  $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Проектируя далее мюон-протонную пару на состояния с полным моментом  $F = 1, 0$  с помощью (5), мы можем представить числитель амплитуды взаимодействия мюона и протона (см. рис. 1) в виде

$$\mathcal{N}_P = \frac{1}{3} k_\alpha t_\beta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left[ \hat{\Pi} (\gamma_\lambda - v_\lambda) \gamma_5 (\hat{q}_1 + m_l) \gamma_\nu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m_l) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m_l) \times \right. \\ \left. \times \gamma_5 (\gamma_\omega - v_\omega) \hat{\Pi} (\hat{p}_2 - m_p) \gamma_5 (\hat{q}_2 - m_p) \right] n_p^\omega n_q^\lambda. \quad (23)$$

Тогда потенциал сверхтонкого расщепления  $2P_{1/2}$ -уровня энергии можно записать в импульсном представлении следующим образом:

$$\Delta V_{2P_{1/2}}^{\text{hfs}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{\alpha^2 g_A}{24\pi^3 F_\pi^2} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{q}) \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) - 2pq}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + m_\pi^2} \mathcal{A}(0). \quad (24)$$

Как и в предыдущих формулах, мы удержали в (23) ведущий вклад по относительным импульсам  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , пропорциональный  $\mathcal{A}(0)$ . Матричный элемент, который определяет искомое сверхтонкое расщепление  $2P_{1/2}$ -уровня, имеет вид

$$\Delta E_{2P_{1/2}}^{\text{hfs}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} R_{21}(p) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} R_{21}(q) \Delta V_{2P_{1/2}}^{\text{hfs}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (25)$$

где радиальная волновая функция в импульсном представлении равна

$$R_{21}(p) = \frac{128}{\sqrt{3}\pi} \frac{W^{7/2} p}{(4p^2 + W^2)^3}. \quad (26)$$

Выражение (25) содержит два характерных интеграла, которые вычисляются аналитически:

$$I_1 = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} R_{21}(p) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} R_{21}(q) \frac{(\mathbf{p}\mathbf{q}) \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right)}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + m_\pi^2} = \frac{2}{3} \frac{(4a + 5)}{(a + 2)^4}, \quad a = \frac{2m_\pi}{W}, \quad (27)$$

$$I_2 = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} R_{21}(p) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} R_{21}(q) \frac{pq}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + m_\pi^2} = \frac{a(3a + 8) + 6}{2(a + 2)^4}. \quad (28)$$

С помощью (27), (28) получаем следующую аналитическую формулу для расщепления  $2P_{1/2}$ -уровня:

$$\Delta E_{2P_{1/2}}^{\text{hfs}} = \frac{\alpha^7 \mu^5 g_A}{288\pi^3 F_\pi^2 m_\pi^2} \mathcal{A}(0) \frac{\left( 9 + 8 \frac{W}{m_\pi} + 2 \frac{W^2}{m_\pi^2} \right)}{\left( 1 + \frac{W}{m_\pi} \right)^4} = 0,0004 \text{ мкэВ}. \quad (29)$$

Вклад  $\eta$ -мезона равен  $8 \cdot 10^{-5}$  мкэВ. Численное значение вклада в случае  $2P_{1/2}$ -уровня существенно уменьшается по сравнению с  $2S_{1/2}$ -уровнем, так как возрастает сам порядок вклада. Если для  $2S_{1/2}$ -уровня порядок вклада определяется фактором  $\alpha^6$ , то для  $2P_{1/2}$ -уровня он имеет вид  $\alpha^7$ . Для уровня  $2P_{3/2}$  дальнейшее уменьшение величины поправки в СТС определяется фактором  $10^2$ .

## 2. ПОЗИТРОНИЕВЫЙ ОБМЕН В СТС МЮОННОГО ВОДОРОДА

С одной стороны, механизм однопионного обмена, исследованный в данной работе, дает незначительную поправку в сверхтонкое расщепление уровней энергии, с помощью которой не удается объяснить «загадку радиуса протона». С другой стороны, можно сказать, имея в виду экзотический характер самого мюон-протонного взаимодействия,

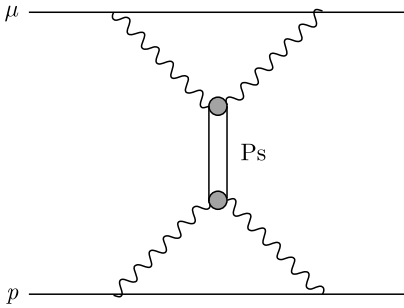


Рис. 2. Амплитуда позитрониевого взаимодействия в мюонном водороде

что эта поправка оказалась «неожиданно большой» по величине. В связи с этим было интересно оценить аналогичный вклад, который возникает в результате позитрониевого обмена между мюоном и протоном. Амплитуда такого взаимодействия представлена на рис. 2. Оценка вкладов гипотетического взаимодействия с частицами массой порядка 1 МэВ как в лэмбовский сдвиг, так и в СТС спектра энергии мюонного водорода обсуждалась некоторое время назад в [36–38] в связи с проблемой зарядового радиуса протона.

Потенциал однопозитрониевого обмена в мюонном водороде для сверхтонкого расщепления  $S$ -состояний в импульсном представлении имеет вид

$$\Delta V_{\mu p}^{\text{hfs}}(\mathbf{t}) = \frac{2\alpha^2}{3\pi^2} F_{\text{Ps}\gamma^*\gamma^*}^2(0) \mathcal{A}_\mu(0) \mathcal{A}_p(0) \frac{\mathbf{t}^2}{\mathbf{t}^2 + m_{\text{Ps}}^2} (s_1 s_2), \quad (30)$$

где для простоты мы используем приближение  $\mathcal{A}_{\mu,p}(\mathbf{t}^2) \approx \mathcal{A}_{\mu,p}(0)$  для эффективных констант  $\mathcal{A}_{\mu,p}(0)$  взаимодействия мюона и протона с позитронием. Оценивая параметр  $F_{\text{Ps}\gamma^*\gamma^*}(0)$  с помощью ширины распада позитрония на два фотона по формуле

$$F_{\text{Ps}\gamma^*\gamma^*}(0) = \sqrt{\frac{64\pi\Gamma(\text{Ps} \rightarrow \gamma\gamma)}{(4\pi\alpha)^2 m_{\text{Ps}}^3}}, \quad (31)$$

где  $\Gamma(\text{Ps} \rightarrow \gamma\gamma)$  — ширина распада позитрония на пару фотонов, находим вклад данного взаимодействия в сверхтонкую структуру в виде

$$\Delta E_{\text{Ps}}^{\text{hfs}}(1S) = \frac{\mu^3 \alpha^8}{6\pi^4 m_e^2} \mathcal{A}_\mu(0) \mathcal{A}_p(0) \frac{\left(1 + \frac{m_{\text{Ps}}}{W}\right)}{\left(1 + \frac{m_{\text{Ps}}}{2W}\right)^2}. \quad (32)$$

Используя далее для  $\mathcal{A}_{\mu,p}(0)$  выражение в модели векторной доминантности (введен безразмерный петлевой импульс с помощью параметра  $\Lambda$ ) и вычисляя интеграл с помощью пакета Feynpar [39]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mu,p}(0) &= \int \frac{6i d^4 k}{(4\pi^2)} \frac{1}{(k^2)^2 (k^2 - 1)^2 (k^2 - 2k\tilde{p}_{1,2})} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\ln \left[ \left( 1 - 2\frac{m_{1,2}^2}{\Lambda^2} + \sqrt{1 - \frac{4m_{1,2}^2}{\Lambda^2}} \right) / 2\frac{m_{1,2}^2}{\Lambda^2} \right]}{\sqrt{1 - \frac{4m_{1,2}^2}{\Lambda^2}}}, \quad (33) \end{aligned}$$

получаем численные значения вкладов в сверхтонкую структуру. Удобно представить результат расчета  $\Delta E_{\text{Ps}}^{\text{hfs}}(1S)$  на графике в виде функции параметра обрезания  $\Lambda$  (рис. 3).



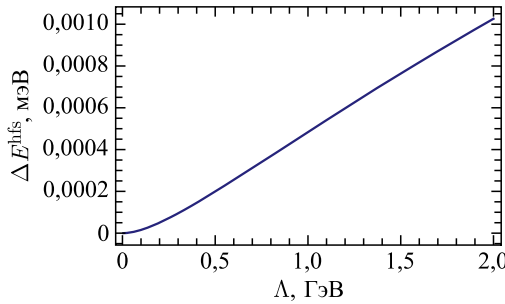


Рис. 3. Изменение величины сверхтонкого расщепления 1S-уровня в зависимости от функции параметра  $\Lambda$  в формфакторе перехода  $Ps \rightarrow \gamma^* \gamma^*$

Суммирование по различным возбужденным состояниям позитрония дает дополнительный фактор  $\sum_0^\infty 1/n^3 = 1,202$ . В пертурбативной петлевой теоретической модели формфактор перехода двух фотонов в позитроний определяется следующим тензорным интегралом:

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp} [\gamma_5(\hat{q} + \hat{k} + m)\gamma^\mu(\hat{q} + m)\gamma^\nu(\hat{q} - \hat{t} + \hat{k} + m)]}{(q^2 - m^2)[(q+k)^2 - m^2][(q-t+k)^2 - m^2]}. \quad (34)$$

Используя фейнмановскую параметризацию при вычислении петлевого интеграла и полагая  $t = 0$  в (34), получаем для формфактора перехода следующее выражение:

$$F_{Ps\gamma^*\gamma^*}(k^2, k^2) = \frac{\alpha^{3/2}}{m_e\sqrt{\pi}} \frac{1}{k^2} \left[ -\text{Li}_2\left(\frac{2k}{\sqrt{k^2 - 4} - k}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{2k}{\sqrt{k^2 - 4} + k}\right) + \right. \\ \left. + \text{Li}_2\left(\frac{2k}{k - \sqrt{k^2 + 4}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{2k}{\sqrt{k^2 + 4} + k}\right) \right], \quad (35)$$

где выполнено обезмеривание импульса с помощью массы электрона. Если сравнивать (35) и формфактор перехода в модели векторной доминантности, можно отметить, что

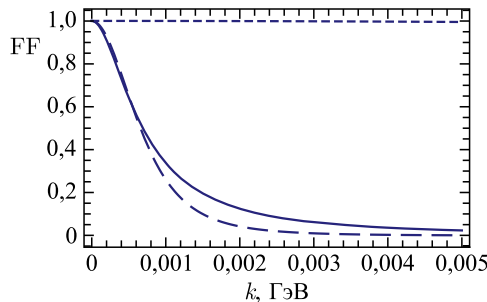


Рис. 4. Формфактор перехода  $Ps \rightarrow \gamma^* \gamma^*$  как функция импульса  $k$ . Сплошная кривая обозначает пертурбативный формфактор (35). Штриховая кривая обозначает формфактор в модели векторной доминантности с параметром обрезания, равным массе позитрония. Пунктирная кривая обозначает формфактор в модели векторной доминантности с параметром обрезания, равным массе мюона

масса позитрония выступает как естественный параметр обрезания. Такой формфактор быстро спадает с ростом виртуальности  $k^2$  (рис. 4), и величина поправки  $\Delta E_{\text{Ps}}^{\text{hfs}}(1S)$  пренебрежимо мала. С ростом параметра обрезания величина вклада растет логарифмически и начиная с  $\Lambda \sim 1$  ГэВ уже может иметь такое значение, которое нужно учитывать при более точном определении суммарной величины сверхтонкого расщепления. Увеличение параметра обрезания в формфакторе перехода говорит о том, что вероятность рождения позитрониев при больших виртуальностях фотонов  $k^2$  и  $(t - k)^2$  остается значительной.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ближайшее время планируются новые высокоточные эксперименты по сверхтонкому расщеплению мюонного водорода [40–44].

В данной работе выполнено исследование вклада псевдоскалярного мезона в потенциал сверхтонкого взаимодействия мюона и протона и в сверхтонкую структуру спектра энергии. В рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике с использованием техники проекционных операторов на состояния двух частиц с определенным спином мы построили операторы взаимодействия частиц (18), (24) и получили аналитические выражения для сверхтонких расщеплений  $S$ - и  $P$ -уровней энергии (19), (20), (29). На их основе были сделаны численные оценки вкладов (19), (20), (29), связанных с обменом псевдоскалярными мезонами. Важнейшую роль для численного расчета изучаемых вкладов играет функция  $\mathcal{A}(t^2)$  (10), связанная с формфактором перехода двух фотонов в псевдоскалярный мезон (4). Для более точного определения константы  $\mathcal{A}(0)$  в (10) использовались результаты работ [20–22], в которых  $\mathcal{A}(0)$  определена в терминах моментов переходного формфактора. В работе получены также численные оценки вклада (32) в сверхтонкую структуру спектра, обусловленного позитрониевым обменом.

Полученные аналитические результаты согласуются с ранее проведенными вычислениями этого эффекта в рамках киральной теории возмущений [45–47]. Численный результат для сверхтонкого расщепления  $2S$ -состояния  $(-0,09 \pm 0,06)$  мкэВ из [47] сопоставим с нашим значением  $-0,0002$  мэВ с учетом теоретической ошибки, а наш результат для СТС  $2P_{1/2}$ -уровня практически совпадает со значением  $3,7 \cdot 10^{-4}$  мкэВ из [47]. Отличие от результата [47] для  $2S$ -уровня обусловлено учетом в [47] зависимости вершинной функции пион-нуклонного взаимодействия от переданного импульса. С помощью полученных аналитических результатов для сверхтонкого взаимодействия мюона и протона за счет однопионного обмена можно сделать оценку такого же вклада в случае других легких мюонных атомов, например мюонного дейтерия. Простейшее приближение при описании пион-дейтронного взаимодействия состоит в том, что дейтрон рассматривается как состояние двух почти свободных нуклонов, причем спины нейтрона и протона в сумме дают полный спин  $S = 1$  дейтрона. Следовательно, можно сделать вывод о том, что вклад пион-нейтронного взаимодействия в сверхтонкую структуру мюонного дейтерия такой же, как и пион-протонного, а полный вклад в сверхтонкое расщепление, например,  $2S$ -уровня вдвое больше, т. е. имеет значение  $-0,0004$  мэВ.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № РНФ 15-12-10009) (А. Е. Д.), Китайской академии наук для ведущих ученых (грант № 2013T2J0011) (Н. И. К.), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-02-00554) (А. П. М., Ф. А. М.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pohl R. et al. (CREMA Collab.). The Size of the Proton // Nature. 2010. V. 466. P. 213.
2. Antognini A. et al. (CREMA Collab.). Proton Structure from the Measurement of  $2S-2P$  Transition Frequencies of Muonic Hydrogen // Science. 2013. V. 339. P. 417.
3. Antognini A. et al. Theory of the  $2S-2P$  Lamb Shift and  $2S$  Hyperfine Splitting in Muonic Hydrogen // Ann. Phys. N.Y. 2013. V. 331. P. 127.
4. Pohl R. et al. (CREMA Collab.). Laser Spectroscopy of Muonic Deuterium // Science. 2016. V. 353. P. 669.
5. Mohr P. J., Taylor B. N., Newell D. B. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010 // Rev. Mod. Phys. 2012. V. 84. P. 1527.
6. Martynenko A. P., Faustov R. N. Hyperfine Ground-State Structure of Muonic Hydrogen // J. Exp. Theor. Phys. 2004. V. 98. P. 39.
7. Martynenko A. P., Faustov R. N. Corrections of Order  $(Z\alpha)^6 m_e^2 / (m_\mu)$  in the Muonium Fine Structure // J. Exp. Theor. Phys. 1999. V. 88. P. 672.
8. Krutov A. A. et al. Lamb Shift in Muonic Ions of Lithium, Beryllium and Boron // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 062505.
9. Berestetskii V. B., Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. Quantum Electrodynamics. M.: Nauka, 1980.
10. Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of Light Hydrogenic Bound States // Springer Tracts in Modern Physics. V. 222. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2007.
11. Borie E. Lamb Shift in Light Muonic Atoms: Revisited // Ann. Phys. 2012. V. 327. P. 733.
12. Pachucki K. Theory of the Lamb Shift in Muonic Hydrogen // Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 2092.
13. Jentschura U. D. Lamb Shift in Muonic Hydrogen. I. Verification and Update of Theoretical Predictions // Ann. Phys. 2011. V. 326. P. 500.
14. Karshenboim S. G. et al. Non-Relativistic Contributions in Order  $\alpha^5 m_\mu c^2$  to the Lamb Shift in Muonic Hydrogen, Deuterium and Helium Ion // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. P. 060501.
15. Martynenko A. P. Theory of Muonic Hydrogen: Muonic Deuterium Isotope Shift // J. Exp. Theor. Phys. 2005. V. 101. P. 1021.
16. Martynenko A. P. Hyperfine Structure of  $S$ -States in Muonic Helium Ion // J. Exp. Theor. Phys. 2008. V. 106. P. 691.
17. Krutov A. A., Martynenko A. P. Lamb Shift in Muonic Deuterium Atom // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. P. 052514.
18. Knecht M., Nyffeler A. Resonance Estimates of  $O(p^6)$  Low-Energy Constants and QCD Short Distance Constraints // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 21. P. 659.
19. Dorokhov A. E., Broniowski W. Pion Pole Light-by-Light Contribution to  $g-2$  of the Muon in a Nonlocal Chiral Quark Model // Phys. Rev. D. 2008. V. 78. P. 073011.
20. Dorokhov A. E., Radzhabov A. E., Zhelvakov A. S. The Pseudoscalar Hadronic Channel Contribution of the Light-by-Light Process to the Muon  $(g-2)_\mu$  within the Nonlocal Chiral Quark Model // Eur. Phys. J. C. 2011. V. 71. P. 1702.
21. Dorokhov A. E., Radzhabov A. E., Zhelvakov A. S. The Light-by-Light Contribution to the Muon  $(g-2)$  from Lightest Pseudoscalar and Scalar Mesons within Nonlocal Chiral Quark Model // Eur. Phys. J. C. 2012. V. 72. P. 2227.
22. Dorokhov A. E., Ivanov M. A., Kovalenko S. G. Complete Structure Dependent Analysis of the Decay  $P \rightarrow l^+ l^-$  // Phys. Lett. B. 2009. V. 677. P. 145.
23. Faustov R. N., Martynenko A. P. Pseudoscalar Pole Terms Contributions to Hadronic Light by Light Corrections to the Muonium Hyperfine Splitting // Phys. Lett. B. 2002. V. 541. P. 135.

24. *Karshenboim S. G., Shelyuto V. A., Vainshtein A. I.* Hadronic Light-by-Light Scattering in the Muonic Hyperfine Splitting // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 065036.
25. *Faustov R. N. et al.* Radiative Nonrecoil Nuclear Finite Size Corrections of Order  $\alpha(Z\alpha)^5$  to the Hyperfine Splitting of *S*-States in Muonic Hydrogen // *Phys. Lett. B.* 2014. V. 733. P. 354.
26. *Vermaseren J. A. M.* FORM. arXiv:math-ph/0010025.
27. *Bergstrom L.* Rare Decay of a Pseudoscalar Meson into a Lepton Pair: A Way to Detect New Interactions? // *Z. Phys. C.* 1982. V. 14. P. 129.
28. *Bergstrom L. et al.*  $Q^2$  Duality and Rare Pion Decays // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 126. P. 117.
29. *Dorokhov A. E., Ivanov M. A.* Rare Decay  $\pi_0 \rightarrow e^+e^-$ : Theory Confronts KTeV Data // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 114007.
30. *Dorokhov A. E., Ivanov M. A.* On Mass Corrections to the Decays  $P \rightarrow l^+l^-$  // *JETP Lett.* 2008. V. 87. P. 531.
31. *Gronberg J. et al. (CLEO Collab.).* Measurements of the Meson–Photon Transition Form-Factors of Light Pseudoscalar Mesons at Large Momentum Transfer // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 33.
32. *Lepage G. P., Brodsky S. J.* Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics // *Phys. Rev. D.* 1980. V. 22. P. 2157.
33. *Masjuan P., Sanchez-Puertas P.*  $\eta$  and  $\eta'$  Decays into Lepton Pairs // *JHEP.* 2016. V. 1608. P. 108.
34. *Faustov R. N. et al.* Hyperfine Structure of *P*-States in Muonic Deuterium // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 92. P. 052512.
35. *Martynenko A. P., Sorokin V. V.* Vacuum Polarization and Quadrupole Corrections to the Hyperfine Splitting of *P*-States in Muonic Deuterium // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 2017. V. 50. P. 045001.
36. *Barger V. et al.* Proton Size Anomaly // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. P. 153001.
37. *Tucker-Smith D., Yavin I.* Muonic Hydrogen and MeV Forces // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 101702.
38. *Karshenboim S. G.* Constraints on a Long-Range Spin-Dependent Interaction from Precision Atomic Physics // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 82. P. 113013.
39. *West T.* Feynman Parameter and Trace: Programs for Expressing Feynman Amplitudes as Integrals over Feynman Parameters // *Comp. Phys. Commun.* 1993. V. 77. P. 286.
40. *Tomalak O.* Forward Two-Photon Exchange in Elastic Lepton–Proton Scattering and Hyperfine Splitting Correction. arXiv:1701.05514 [hep-ph].
41. *Pohl R. et al. (CREMA Collab.).* Laser Spectroscopy of Muonic Hydrogen and the Puzzling Proton // *J. Phys. Soc. Japan.* 2016. V. 85. P. 091003.
42. *Ma Y. et al.* New Precision Measurement for Proton Zemach Radius with Laser Spectroscopy // *Intern. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* 2016. V. 40. P. 1660046.
43. *Adamczak A. et al. (FAMU Collab.).* Steps towards the Hyperfine Splitting Measurement of the Muonic Hydrogen Ground State: Pulsed Muon Beam and Detection System Characterization // *JINST.* 2016. V. 11, No. 05. P. P05007.
44. *Peset C., Pineda A.* Model-Independent Determination of the Two-Photon Exchange Contribution to Hyperfine Splitting in Muonic Hydrogen // *JHEP.* 2017. V. 1704. P. 060.
45. *Hagelstein F., Pascalutsa V.* Proton Structure in the Hyperfine Splitting of Muonic Hydrogen // *PoS.* 2016. V. CD15. P. 077.
46. *Zhou H. Q., Pang H. R.* One-Pion-Exchange Effect in the Energy Spectrum of Muonic Hydrogen // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 92. P. 032512.
47. *Huong N. T., Kou E., Moussallam B.* Single Pion Contribution to the Hyperfine Splitting in Muonic Hydrogen // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 93. P. 114005.