Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 3(215). С. 271–284

ФИЗИКА И ТЕХНИКА УСКОРИТЕЛЕЙ

ЭФФЕКТ ИСКАЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ И КОГЕРЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ В НАКОПИТЕЛЯХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. Н. Корчуганов, А. С. Смыгачева[1]*, Е. А. Фомин*

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва

Рассмотрена задача о влиянии электромагнитного взаимодействия электронных сгустков с вакуумной камерой накопителя заряженных частиц на продольное движение сгустков, а именно: рассмотрены эффект искажения потенциальной ямы и так называемые когерентные неустойчивости связанных сгустков. Представлено приближенное аналитическое решение для частот некогерентных колебаний сгустков, произвольно заполняющих орбиту ускорителя, при искажении формы потенциальной ямы. Представлен новый подход к определению частот когерентных колебаний, а также приближенное аналитическое выражение для оценки устойчивости системы сгустков в зависимости от их распределения на орбите накопителя.

The problem of the "beam–chamber" interaction and its influence on the longitudinal motion of electron bunches in the storage ring is considered, in particular the potential well distortion effect and the so-called coupled bunch instabilities. An approximate analytical solution for the potential well distortion effect of bunches arbitrarily distributed in the ring is presented. A new approach to the determination of the coherent frequencies and the approximate analytical relation for estimating the stability of the bunched beam depending on the order of bunches in the accelerator orbit are also presented.

PACS: 29.20.db; 29.20.dk; 29.27.Bd; 41.75.Ht

ВВЕДЕНИЕ

Большое количество трудов посвящено проблеме взаимодействия «пучок–камера» и ее решению. Основными на эту тему можно назвать работы [1–12]. Классификация эффектов дана в статьях [13, 14]. Ряд существующих практических решений представлен в работе [15].

Рассматривая продольную динамику частиц в накопителях, выделяют, как правило, следующий ряд явлений: искажение потенциальной ямы, внутрисгустковые и межсгустковые когерентные колебания частиц, микроволновую неустойчивость и турбулентное удлинение. Их влияние на движение электронов, форму и размеры сгустков зависит от импеданса вакуумной камеры конкретной машины, спектра тока пучка и распределения сгустков на орбите ускорителя.

[1] E-mail: sasmyga@mail.ru

При рассмотрении эффекта искажения потенциальной ямы и когерентных колебаний электронных сгустков задача сводится к нахождению искаженной формы распределения электронов в сгустках, частот некогерентных и когерентных колебаний. Поиск общего решения затруднителен, поэтому в существующих работах, как правило, представлены конкретные модели взаимодействия «пучок–камера» и для них аналитические выражения для дальнейшего численного моделирования или приближенные аналитические решения для частот продольных колебаний. Эффект искажения потенциальной ямы рассмотрен многими авторами для одного сгустка, имеющего различные формы стационарного распределения электронов. В случае когерентных колебаний приближенное аналитическое решение получено для модели точечных сгустков, симметрично расположенных в кольце ускорителя.

В нашей модели электронные сгустки имеют гауссову форму стационарного распределения частиц и равный продольный размер, произвольно расположены на орбите ускорителя и совершают продольное движение в общем потенциале. Мы не учитываем потери частиц вследствие радиационного излучения, соударений друг с другом и молекулами остаточного газа; зависимость продольного размера от электронного тока, заданную для каждого сгустка многократным внутрисгустковым рассеянием; нелинейные эффекты ЭМ-взаимодействия «пучок–камера». Для решения задачи когерентных колебаний мы задали начальное искажение формы распределения частиц в сгустках (смещение сгустков в синхротронном фазовом пространстве), что не использовалось ранее другими авторами.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ «ПУЧОК–КАМЕРА»

Рассмотрена следующая модель взаимодействия электронных сгустков и наведенных ими электромагнитных полей в вакуумной камере накопителя заряженных частиц.

Электронные сгустки расположены на орбите ускорителя произвольным образом, их максимальное число задается отношением частоты ускоряющего ВЧ-поля и частоты обращения, так называемым гармоническим числом, определяющим число ВЧ-сепаратрис кольца. Отсчет номера сгустка ведется начиная с любой заполненной электронами сепаратрисы.

В общем случае продольное стационарное распределение частиц в отдельном сгустке по амплитудам колебаний определяется квантовыми флуктуациями в совокупности с радиационным затуханием и многократным внутрисгустковым рассеянием [16]. Но для электронных накопителей высокой энергии форму стационарного распределения частиц в сгустках можно принять близкой к гауссовой:

$$\Psi_0(\hat{\tau}) = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau^2}\,\exp\left(-\frac{\hat{\tau}^2}{2\sigma_\tau^2}\right), \tag{1}$$

где σ_τ — среднеквадратичная длина сгустка.

ЭМ-взаимодействие сгустков с вакуумной камерой ускорителя приводит к искажению формы стационарного распределения и развитию когерентных колебаний частиц. Когерентные колебания добавляют к стационарному распределению электронов в сгустках соответствующие компоненты возмущенной функции распределения с собственными когерентными частотами:

$$\Psi^k(\hat{\tau}, \varphi, t) = \Psi_0^k(\hat{\tau}) + \sum_{m \neq 0} \Psi_m^k(\hat{\tau})\, \mathrm{e}^{jm\varphi}\, \mathrm{e}^{-j\omega_{sm} t}, \tag{2}$$

где $\hat{\tau}$ и φ — амплитуда и фаза колебаний частицы в полярной системе координат; m — номер когерентной моды колебаний, целое число в интервале $(-\infty, +\infty)$; k — порядковый номер сгустка; $\Psi_m^k(\hat{\tau})$ — амплитуда возмущенной функции распределения m-й моды колебаний; ω_{sm} — частота когерентных колебаний соответствующей m-й моды колебаний.

Возникшая когерентность может распасться за счет действия следовых полей, а может быть усилена ими и привести к потере устойчивости колебаний частиц. Результат ЭМ-воздействия на когерентное движение электронов пучка обусловлен структурой вакуумной камеры ускорителя. Различные неоднородности камеры представляют собой объемные резонансные структуры, описать каждую из которых можно с помощью модели импеданса, составленного из набора колебательных контуров. Если неоднородности электродинамически не связаны между собой, то их импедансы аддитивны:

$$Z(\omega) = \sum_r \frac{R_{\mathrm{sh}.r}}{1 + jQ_r\left(\dfrac{\omega}{\omega_r} - \dfrac{\omega_r}{\omega}\right)}, \tag{3}$$

где ω_r, Q_r, $R_{\mathrm{sh}.r}$ — частота, добротность и шунтовое сопротивление колебательного контура.

Коллективное движение частиц в сгустке с номером k можно рассмотреть, используя уравнение непрерывности для функции распределения частиц в фазовом пространстве (ϵ, τ) [17]:

$$\frac{d}{dt}\Psi^k(\epsilon,\tau,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Psi^k(\epsilon,\tau,t) + \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi^k(\epsilon,\tau,t) + \frac{\partial\epsilon}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Psi^k(\epsilon,\tau,t) = 0, \tag{4}$$

где ϵ — отклонение энергии частицы от равновесного значения; τ — отклонение частицы по времени от равновесного положения. Естественно полагать, что рассматриваемые времена ЭМ-взаимодействия малы по сравнению с временем радиационного затухания, а также малы амплитуды колебаний частиц по сравнению с размером сепаратрисы, заданной ускоряющим ВЧ-полем. Кроме того, естественно пренебрегать потерями частиц сгустков.

В свою очередь, продольное движение одного электрона в k-м сгустке под действием внешнего ускоряющего ВЧ-поля и ЭМ-полей, созданных в вакуумной камере накопителя всеми сгустками, без учета потерь энергии на радиационное излучение описывается парой уравнений синхротронных колебаний [18]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\epsilon}{dt} = \dfrac{e}{T_0}\,U_{\mathrm{rf}}(\tau) + \dfrac{e}{T_0}\,U_{\mathrm{ind}}(\tau,\dot{\tau},t), \\ \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{\eta}{\beta^2}\,\dfrac{\epsilon}{E}, \end{cases} \tag{5}$$

где $U_{\mathrm{rf}}(\tau)$ — напряжение ускоряющего ВЧ-поля; $U_{\mathrm{ind}}(\tau,\dot{\tau},t)$ — напряжение наведенных ЭМ-полей; T_0 — период обращения равновесной частицы в ускорителе; E — энергия равновесной частицы; $\eta = \alpha - 1/\gamma^2$, α — коэффициент уплотнения орбит, γ – релятивистский фактор; $\beta = v/c$ — относительная скорость частицы; e — заряд электрона.

Напряжение ускоряющего ВЧ-поля представимо в виде

$$U_{\mathrm{rf}}(\tau) = U_{\mathrm{rf}}(\tau)\big|_{\tau=0} + \frac{\partial}{\partial\tau} U_{\mathrm{rf}}(\tau)\big|_{\tau=0}\tau, \tag{6}$$

где $U_{\mathrm{rf}}(\tau)\big|_{\tau=0}$ — напряжение, компенсирующее постоянные потери энергии на радиационное излучение и определяющее вместе с ними значение равновесной фазы для электронов.

В силу предположения об аддитивности импеданса различных элементов вакуумной камеры напряжение следовых полей, воздействующее на частицу в k-м сгустке вдоль структуры ускорителя, можно представить как обратное преобразование Фурье произведения спектра тока пучка $S_{\mathrm{beam}}(\vartheta, \omega)$ и импеданса вакуумной камеры $Z(\omega)$:

$$U_{\mathrm{ind}}(\tau, \dot{\tau}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathrm{beam}}(\vartheta, \omega)\, Z(\omega)\, \mathrm{e}^{j\omega t} d\omega\big|_{\vartheta=\vartheta_k}, \tag{7}$$

где $\vartheta_k = \vartheta_{0k} + \omega_0\tau - \omega_0 t$ — сопровождающий азимут электрона; $\vartheta_{0k} = 2\pi(k/h)$ — начальное азимутальное положение k-го сгустка на орбите; $\omega_0 = (2\pi)/T_0$ — частота обращения сгустков. В выражении для потенциала присутствует знак «минус», так как создание следовых полей связано с потерей энергии электронами.

Ток электронного пучка, состоящего из последовательности сгустков, есть сумма токов от каждого сгустка по порядковому номеру заполненной сепаратрисы:

$$S_{\mathrm{beam}}(\vartheta, t) = \omega_0 \sum_{i=0}^{h-1} N_i e \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \hat{\tau}\Psi^i(\hat{\tau}, \varphi, t)\, \delta(\vartheta - \vartheta_{0i} - \omega_0\tau + \omega_0 t)\, d\hat{\tau}\, d\varphi, \tag{8}$$

где $\vartheta = \vartheta_{0i} + \omega_0\tau - \omega_0 t$ — уравнение движения для одного электрона, совершающего синхротронные колебания и находящегося в i-й сепаратрисе; i — порядковый номер сепаратрисы; $\vartheta_{0i} = 2\pi(i/h)$ — начальное азимутальное положение i-го сгустка на орбите; N_i — число частиц в i-м сгустке; $\delta(\vartheta)$ — дельта-функция Дирака. Подстановка бесконечного верхнего предела для интеграла по амплитудам колебаний $\hat{\tau}$ имеет место в силу ограниченности функции распределения частиц в фазовом пространстве.

Спектр тока пучка получается после разложения выражения (8) в ряд по азимутальным гармоникам, в силу периодичности движения по азимуту, и использования преобразования Фурье:

$$S_{\mathrm{beam}}(\vartheta, \omega) = (2\pi)^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} j^{-m} I_b^i F_{pm}^i\, \mathrm{e}^{jp(\vartheta - \vartheta_{0i})} \delta(\omega - p\omega_0 + \omega_{sm}),$$

$$F_{pm}^i = \int\limits_0^{+\infty} \hat{\tau}\Psi_m^i(\hat{\tau}) J_m(p\omega_0\hat{\tau})\, d\hat{\tau}, \tag{9}$$

где p — номер гармоники частоты обращения электронных сгустков, целое число в интервале $(-\infty, +\infty)$; $I_b^i = (N_i e)/T_0$ — средний ток i-го сгустка; $J_m(p\omega_0\hat{\tau})$ — функция Бесселя первого рода.

Таким образом, после подстановки выражения (9) в (7) напряжение наведенных ЭМ-полей, воздействующее на электрон в k-м сгустке, имеет вид

$$U_{\text{ind}}(\tau, \dot{\tau}, t) = -2\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} j^{-m} I_b^i F_{pm}^i Z(p\omega_0 - \omega_{sm}) \times \\ \times \mathrm{e}^{jp(\vartheta_{0k} - \vartheta_{0i})} \, \mathrm{e}^{-j\omega_{sm} t} \, \mathrm{e}^{jp\omega_0 \tau}. \quad (10)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

2.1. Эффект искажения потенциальной ямы. Искажение потенциальной ямы, созданной внешним ускоряющим ВЧ-полем, возникает за счет ЭМ-полей, наведенных в вакуумной камере ускорителя стационарным распределением частиц в сгустке [8]. В результате появляется зависимость частоты некогерентных колебаний частиц, продольного размера сгустка и равновесной фазы синхротронных колебаний от электронного тока.

Эффект искажения потенциальной ямы проявляется как для одного сгустка на орбите ускорителя, так и для системы сгустков. Количественная и качественная разница между ними объясняется разницей частотных спектров электронного тока сгустков и, следовательно, величинами эффективного импеданса камеры, который зависит от этого спектра.

Чтобы найти частоту некогерентных колебаний, достаточно рассмотреть уравнение синхротронных колебаний, которое легко получается из системы (5) подстановкой напряжения следовых полей (10) при $m = 0$:

$$\ddot{\tau} + \omega_{s0}^2 \tau = -2\pi \frac{e\eta}{\beta^2 T_0 E} \sum_{p,i} I_b^i \, Z(p\omega_0) F_{p0} \, \mathrm{e}^{jp(\vartheta_{0k} - \vartheta_{0i})} \, \mathrm{e}^{jp\omega_0 \tau}, \quad (11)$$

где $\omega_{s0} = \omega_0 \sqrt{-\dfrac{e\eta h U_{\max} \cos \varphi_s}{2\pi E \beta^2}}$ — частота невозмущенных некогерентных синхротронных колебаний; $U_{\max}$ — амплитуда напряжения ускоряющего ВЧ-поля; φ_s — равновесная фаза ускоряющего ВЧ-поля; $h = \omega_{\text{rf}}/\omega_0$ — кратность гармоники ускоряющего ВЧ-поля; $F_{p0} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \hat{\tau} \Psi_0(\hat{\tau}) J_0(p\omega_0 \hat{\tau}) \, d\hat{\tau} = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{(p\omega_0 \sigma_\tau)^2}{2}\right]$ — преобразование Ганкеля для функции распределения Гаусса.

Импеданс на частоте $p\omega_o$ можно записать следующим образом:

$$Z(p\omega_0) = -j \sum_r \frac{R_{\text{sh}.r} h_r}{Q_r (p_{1.r} - p_{2.r})} \left(\frac{p}{(p - p_{1.r})} - \frac{p}{(p - p_{2.r})} \right), \quad (12)$$

где $p_{1,2.r} = j \dfrac{h_r}{2Q_r} \pm \dfrac{h_r}{2Q_r} \sqrt{4Q_r^2 - 1}$, $h_r = \dfrac{\omega_r}{\omega_0}$ — кратность ВЧ-моды наведенного ЭМ-поля (число не целое).

В уравнении (11) множитель $\mathrm{e}^{jp\omega_0\tau}$ представим в виде ряда по функциям Бесселя первого рода:

$$\mathrm{e}^{jp\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n J_n(p\omega_0\hat{\tau})\,\mathrm{e}^{jn\varphi} = J_0(p\omega_0\hat{\tau}) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} j^n J_n(p\omega_0\hat{\tau})\,\cos n\varphi. \tag{13}$$

Подставляя выражения (12), (13) и F_{p0} в (11), перепишем уравнение синхротронных колебаний:

$$\ddot{\tau} + \omega_{s0}^2\tau = j\frac{e\eta}{\beta^2 T_0 E}\sum_{r,p,i}\frac{R_{\mathrm{sh}.r}h_r}{Q_r(p_{1.r}-p_{2.r})}I_b^i\,\exp\left[-\frac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{p}{(p-p_{1.r})}-\frac{p}{(p-p_{2.r})}\right)\mathrm{e}^{jp(\vartheta_{0k}-\vartheta_{0i})}(J_0(p\omega_0\hat{\tau}) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} j^n J_n(p\omega_0\hat{\tau})\,\cos n\varphi). \tag{14}$$

Уравнение (14) содержит ряды по бесконечному параметру p, значения сумм которых можно найти.

Ряды и их суммы для $i = k$ находятся с помощью метода, описанного Б. Зоттером в работе [19], и имеют вид

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{p\,\exp\left[-\dfrac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right]}{(p-p_{1,2.r})}J_n(p\omega_0\hat{\tau}) =$$
$$= p_{1,2.r}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l+n+1)}\left(\frac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}}{2}\right)^{2l+n}\left(R_{1,2} + \sum_{l'=0}^{L}\frac{\Gamma\left(l'+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^{2l'+1}}\right), \tag{15}$$

где $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д.; $L = s$ при $2l + n + 1 = 2s + 1$ или $L = s - 1$ при $2l + n + 1 = 2s$, $s = 0, 1, 2, 3$ и т. д.; $R_{1,2} = -\pi\exp\left[-\left(\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\operatorname{ctg}\pi p_{1,2} + j\pi\left(w\left(\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right) - \right.$ $\left.-\exp\left[-\left(\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right)$, $w(z) = \mathrm{e}^{-z^2}\left(1 + \dfrac{2j}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)$ — комплексная функция ошибок.

Суммы рядов для $i \neq k$ находятся с использованием равенств

$$\begin{cases} J_n(z) = \sum\limits_{l=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^l}{l!\Gamma(l+n+1)}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2l+n}, \\ \mathrm{e}^{-z^2} = \sum\limits_{q=0}^{+\infty}(-1)^q\dfrac{z^{2q}}{q!}, \\ \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\dfrac{p^m\cos p\theta}{p-a} = -a^m\pi\dfrac{\cos a(\pi-\theta)}{\sin a\pi}, \qquad 0 < \theta < 2\pi, \\ \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\dfrac{p^m\sin p\theta}{p-a} = a^m\pi\dfrac{\sin a(\pi-\theta)}{\sin a\pi}, \qquad 0 < \theta < 2\pi, \end{cases} \tag{16}$$

и имеют вид

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{p}{(p-p_{1,2.r})} \exp\left[-\frac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right] \mathrm{e}^{jp\vartheta_{ki}} J_n(p\omega_0\hat{\tau}) =$$

$$= -\pi p_{1,2.r} \frac{\mathrm{e}^{-jp_{1,2.r}(\pi-\vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{1,2.r}} \exp\left[-\left(\frac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] J_n(p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}), \quad (17)$$

где $n = 0, 1, 2\ldots$; $\vartheta_{ki} = \vartheta_{0k} - \vartheta_{0i} = 2\pi\dfrac{k-i}{h}$.

В случае, когда электронный пучок состоит из множества сгустков, заполняющих все или почти все сепаратрисы кольца, имеет смысл рассматривать ЭМ-взаимодействие с ВЧ-модами, которые характеризуются высокой добротностью и длинами волн, большими и много большими продольного размера сгустков. Такие поля имеют постоянную времени спада, сравнимую с периодом обращения сгустков или большую. Тогда уравнение синхротронных колебаний (14) можно записать в линейном приближении по амплитудам колебаний. Для этого в уравнении (14) от ряда по n достаточно оставить слагаемое при $n = 1$ и подставить необходимые суммы (15) и (17) при условиях $\left|\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}}{2}\right| < \sqrt{\dfrac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)}}$ и $\dfrac{\hat{\tau}}{\sqrt{2}\sigma_\tau} < \sqrt{\dfrac{\Gamma(n+2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3/2)}}$.

Линеаризованное уравнение синхротронных колебаний имеет вид

$$\ddot{\tau} + \omega_s^2\tau = \Phi, \quad (18)$$

где $\Phi = j\dfrac{e\eta}{\beta^2 T_0 E}\sum_r \dfrac{R_{\mathrm{sh}.r}h_r}{Q_r(p_{1.r}-p_{2.r})}\left[I_b^k(p_{1.r}R_1 - p_{2.r}R_2) + \pi\sum_{i\neq k} I_b^i\left(p_{2.r}\dfrac{\mathrm{e}^{-jp_{2.r}(\pi-\vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{2.r}}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times \exp\left[-\left(\dfrac{p_{2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - p_{1.r}\dfrac{\mathrm{e}^{-jp_{1.r}(\pi-\vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{1.r}} \exp\left[-\left(\dfrac{p_{1.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right)\right]$ определяет сдвиг равновесного положения частиц, а ω_s есть искомая частота возмущенных некогерентных колебаний:

$$\omega_s^2 = \omega_{s0}^2 + \frac{e\eta}{2\pi\beta^2 E}\omega_0^2 \sum_r \frac{R_{\mathrm{sh}.r}h_r}{Q_r(p_{1.r}-p_{2.r})}\left[I_b^k\left(p_{1.r}^2 R_1 - p_{2.r}^2 R_2 + \right.\right.$$

$$\left. + \sqrt{2\pi}\,\frac{(p_{1.r}-p_{2.r})}{\omega_0\sigma_\tau}\right) + \pi\sum_{i\neq k} I_b^i\left(p_{2.r}^2 \frac{\mathrm{e}^{-jp_{2.r}(\pi-\vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{2.r}} \exp\left[-\left(\frac{p_{2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left.\left. - p_{1.r}^2 \frac{\mathrm{e}^{-jp_{1.r}(\pi-\vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{1.r}} \exp\left[-\left(\frac{p_{1.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right)\right]. \quad (19)$$

Условия $\left|\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}}{2}\right| < \sqrt{\dfrac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)}}$ и $\dfrac{\hat{\tau}}{\sqrt{2}\sigma_\tau} < \sqrt{\dfrac{\Gamma(n+2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3/2)}}$ при $n = 0$ накладывают ограничение на амплитуду колебаний $\hat{\tau} < 2\sigma_\tau$ и на кратность ВЧ-моды следовых полей $|p_{1,2.r}| = h_r < \dfrac{1}{\omega_0\sigma_\tau}$. Последнее означает, что ограничено число взаимодействующих со сгустками мод наведенных ЭМ-полей, т. е. число r. Учитывая из этого числа моды с высокой добротностью, для которых выполняется условие $Q_r \gg h_r/2$, в равенстве (19) можно положить $p_{1,2.r} = \pm h_r$ и записать выражение для частот синхротронных колебаний в виде

$$\omega_s^2 = \omega_{s0}^2 + \frac{e\eta\omega_0^2}{2\pi\beta^2 E}\sum_r \frac{R_{\mathrm{sh}.r}h_r}{Q_r}\times \\ \times\left[I_b^k\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega_0\sigma_\tau}(1-(h_r\omega_0\sigma_\tau)^2) - \pi h_r\sum_{i=0}^{h-1} I_b^i\,\frac{\cos\, h_r(\pi-\vartheta_{ki})}{\sin\,\pi h_r}\right]. \quad (20)$$

Оценим первое слагаемое в квадратных скобках. Его можно сравнить со слагаемым из суммы при $i = k - \pi h_r \operatorname{ctg}(\pi h_r)$. Величина h_r равна $P \pm \Delta$, где P — ближайшая гармоника тока пучка и целое положительное число, а добавка Δ мала и имеет величину порядка $h_r/(2Q_r)$, т. е. порядка полосы пропускания ВЧ-моды, что необходимо для возбуждения ВЧ-моды соответствующей гармоникой тока пучка. Тогда можно положить $\pi h_r \operatorname{ctg}(\pi h_r) \approx h_r/\Delta \approx 2Q_r \gg 1$. Первое слагаемое в квадратных скобках будет вносить существенный вклад в определение частоты возмущенных некогерентных колебаний при условии, что длина сгустка удовлетворяет неравенству $\sigma_\tau \ll \dfrac{\Delta\sqrt{2\pi}}{h_r\omega_0} \approx \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2Q_r\omega_0}$. Эта величина при добротностях $Q_r \sim 10^4$ и частотах обращения $f_0 = \omega_0/(2\pi) \sim 10^8$–$10^9$ имеет малое значение порядка 10^{-12}–10^{-13} с. Что недостижимо в реальных условиях.

С учетом сказанного приближенное выражение (20) приобретает вид

$$\omega_s^2 = \omega_{s0}^2 - \frac{e\eta\omega_0^2}{2\beta^2 E}\sum_r \frac{R_{\mathrm{sh}.r}h_r^2}{Q_r}\sum_{i=0}^{h-1} I_b^i\,\frac{\cos\, h_r(\pi-\vartheta_{ki})}{\sin\,\pi h_r}. \quad (21)$$

Таким образом, при заданных ограничениях характер зависимости частоты некогерентных колебаний от тока пучка определяется распределением сгустков на орбите ускорителя и суммарным вкладом участвующих во взаимодействии мод наведенных ЭМ-полей. Если суммарный эффективный импеданс структуры кольца будет емкостным, то общее напряжение, создаваемое ускоряющим ВЧ-полем и наведенными ЭМ-полями, будет увеличиваться с ростом тока электронных сгустков, следовательно, будет увеличиваться и частота некогерентных колебаний. Если эффективный импеданс является индуктивным, картина будет противоположной. Характер импеданса для каждой ВЧ-моды следовых полей определяется расположением частоты гармоники тока пучка относительно соответствующей резонансной частоты импеданса. Если резонансная частота находится ниже частоты действующей гармоники тока (т. е. h_r меньше ближайшего целого числа), то эффективный импеданс ВЧ-моды емкостный, и наоборот.

Продольный размер каждого сгустка будет иметь общую зависимость от тока электронного пучка и уменьшаться при росте частоты некогерентных колебаний или увеличиваться в противном случае.

2.2. Когерентные колебания связанных сгустков. ЭМ-поля, созданные электронными сгустками в высокодобротных структурах, могут приводить к развитию межсгустковых когерентных колебаний [4, 9]. В начале процесса развития неустойчивости, когда амплитуды колебаний малы, коллективное движение, согласно теореме Лиувилля [17] о постоянстве плотности частиц вдоль фазовых траекторий консервативной системы, описывается уравнением непрерывности (4) для возмущенной функции распределения частиц в сгустке.

Для решения задачи предположим, что начальное возмущение функции распределения (1) каждого сгустка есть ее смещение как целого в синхротронном фазовом пространстве в положение $(\hat{\tau}_0, \varphi_0)$:

$$\Psi'(\hat{\tau}, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau^2} \exp\left[-\frac{\hat{\tau}^2 + \hat{\tau}_0^2 - 2\hat{\tau}\hat{\tau}_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma_\tau^2}\right]. \tag{22}$$

Это предположение вполне законно, если рассматривать быстрое (по сравнению с периодом синхротронных колебаний) заполнение кольца инжектируемыми частицами. Тогда фурье-компоненты функции распределения можно определить согласно

$$\Psi_m(\hat{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi'(\hat{\tau}, \varphi)\, \mathrm{e}^{-jm\varphi} d\varphi \tag{23}$$

как

$$\Psi_m(\hat{\tau}) = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau^2} \exp\left(-\frac{\hat{\tau}^2 + \hat{\tau}_0^2}{2\sigma_\tau^2}\right) \mathrm{e}^{-jm\varphi_0} I_m\left(\frac{\hat{\tau}\hat{\tau}_0}{\sigma_\tau^2}\right), \tag{24}$$

где m — целое число в интервале $(-\infty, +\infty)$; $I_m\left(\frac{\hat{\tau}\hat{\tau}_0}{\sigma_\tau^2}\right)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

В уравнении (4) удобно перейти от координат (ϵ, τ) фазового пространства к переменным $(\hat{\tau}, \varphi)$ полярной системы координат. Переход совершается с использованием уравнений синхротронных колебаний (5) и связи нормированного фазового пространства с полярной системой координат:

$$\begin{cases} \tau = \hat{\tau} \cos \varphi, \\ \dfrac{\dot{\tau}}{\omega_s} = -\hat{\tau} \sin \varphi, \end{cases} \tag{25}$$

где ω_s — частота возмущенных некогерентных колебаний с учетом эффекта искажения потенциальной ямы.

После преобразований уравнение непрерывности (уравнение Власова) для функции распределения частиц в сгустке имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\hat{\tau}, \varphi, t) + \left(\omega_s - F(\hat{\tau}, \varphi, t)\, \frac{\cos\varphi}{\omega_s \hat{\tau}}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi}\Psi(\hat{\tau}, \varphi, t) - \\ - \frac{e\eta}{\beta^2 T_0 E}\, U_{\mathrm{ind}}(\hat{\tau}, \varphi, t)\, \frac{\sin\varphi}{\omega_s} \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}}\Psi(\hat{\tau}, \varphi, t) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

В уравнении (26) при производной функции распределения по фазе переменными нелинейными добавками $F(\hat{\tau}, \varphi, t)\dfrac{\cos\varphi}{\omega_s \hat{\tau}}$ к частоте возмущенных некогерентных колебаний можно пренебречь, так как в среднем за период колебаний они равны нулю. Также при малом начальном смещении $(\hat{\tau}_0, \varphi_0)$ и условиях $(\hat{\tau}\hat{\tau}_0)/(2\sigma_\tau^2) < 1$, $\hat{\tau}_0 < 2\hat{\tau}$ вклад производных от функции распределения по амплитудам колебаний при $m \neq 0$ мал по сравнению с производной от функции распределения при $m = 0$. Это действительно так, поскольку каждая компонента функции распределения зависит от модифицированной функции Бесселя соответствующего порядка, значение которой уменьшается с ростом порядка. Тогда, подставляя выражение (10) для потенциала наведенных ЭМ-полей в (26) и сохраняя производную от функции распределения по амплитудам колебаний при $m = 0$, уравнение (26) можно записать следующим образом:

$$\sum_{m\neq 0} j(\omega_{sm} - m\omega_s)\Psi_m(\hat{\tau})\, \mathrm{e}^{jm\varphi}\, \mathrm{e}^{-j\omega_{sm}t} = 2\pi \frac{e\eta}{\beta^2 T_0 E} \times$$
$$\times \sum_{p,m',i} j^{-m'} I_b^i Z(p\omega_0 - \omega_{sm'}) F_{pm'}\, \mathrm{e}^{jp(\vartheta_{0k} - \vartheta_{0i})}\, \mathrm{e}^{jp\omega_0\tau}\, \mathrm{e}^{-j\omega_{sm'}t} \frac{\sin\varphi}{\omega_s} \frac{\partial \Psi_0(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}}, \quad (27)$$

где m' — целое число в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Произведение $\mathrm{e}^{jp\omega_0\tau} \sin\varphi$, где $\tau = \hat{\tau}\cos\varphi$, можно представить в виде ряда по функциям Бесселя первого рода:

$$\mathrm{e}^{jp\omega_0\tau} \sin\varphi = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{p\omega_0\hat{\tau}}\, j^n\, \mathrm{e}^{jn\varphi} J_n(p\omega_0\hat{\tau}). \quad (28)$$

Полагая отсутствие связи мод когерентных колебаний, суммы по m, n и m' в уравнении (27) можно опустить при $n = m' = m$.

Подставив в (27) компоненты функции распределения (24) и импеданс камеры на частоте $p\omega_0 - \omega_{sm}$ аналогично формуле (12), можно записать уравнение для частот когерентных колебаний:

$$(\omega_{sm} - m\omega_s) I_m\left(\frac{\hat{\tau}\hat{\tau}_0}{\sigma_\tau^2}\right) = -\frac{e\eta}{2\pi\beta^2 E} \frac{m}{\omega_s \sigma_\tau^2} \left(I_0\left(\frac{\hat{\tau}\hat{\tau}_0}{\sigma_\tau^2}\right) - \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\tau}} I_1\left(\frac{\hat{\tau}\hat{\tau}_0}{\sigma_\tau^2}\right)\right) \times$$
$$\times \sum_{r,p,i} I_b^i \frac{R_{\mathrm{sh}.r} h_r}{Q_r(p_{1.r} - p_{2.r})} \left(\frac{p - \nu_{sm}}{p(p - p_{1.r})} - \frac{p - \nu_{sm}}{p(p - p_{2.r})}\right) \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{p\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \mathrm{e}^{jp(\vartheta_{0k} - \vartheta_{0i})} J_m(p\omega_0\hat{\tau}_0)\, J_m(p\omega_0\hat{\tau}), \quad (29)$$

где $p_{1,2.r} = \nu_{sm} + j\dfrac{h_r}{2Q_r} \pm \dfrac{h_r}{2Q_r}\sqrt{4Q_r^2 - 1}$, $\nu_{sm} = \dfrac{\omega_{sm}}{\omega_0}$, при малых токах $\nu_{sm} \approx m\nu_s = (m\omega_s)/\omega_o$.

Суммы рядов по гармоникам частоты обращения p находятся также с использованием метода Б. Зоттера и равенств (16).

Ряды и их суммы для $i = k$ имеют вид

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left[-\dfrac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right]}{(p - p_{1,2.r})} J_m(p\omega_0\hat{\tau}_0) J_m(p\omega_0\hat{\tau}) =$$

$$= \sum_{l,n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{l!n!\Gamma(l+m+1)\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}}{2}\right)^{2l+m} \left(\frac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}_0}{2}\right)^{2n+m} \times$$

$$\times \left(R_{1,2} + \sum_{l'=0}^{l+n+m-1} \frac{\Gamma(l'+1/2)}{\left(\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^{2l'+1}} \right), \quad (30а)$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{p^{-1}}{(p - p_{1,2.r})} \exp\left[-\frac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right] J_m(p\omega_0\hat{\tau}_0) J_m(p\omega_0\hat{\tau}) =$$

$$= \frac{1}{p_{1,2.r}} \sum_{l,n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{l!n!\Gamma(l+m+1)\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}}{2}\right)^{2l+m} \left(\frac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}_0}{2}\right)^{2n+m} \times$$

$$\times \left(R_{1,2} + \sum_{l'=0}^{l+n+m-1} \frac{\Gamma(l'+1/2)}{\left(\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^{2l'+1}} \right). \quad (30б)$$

Ряды и их суммы для $i \neq k$ имеют вид

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(p - p_{1,2.r})} \exp\left[-\frac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right] e^{jp\vartheta_{ki}} J_m(p\omega_0\hat{\tau}_0) J_m(p\omega_0\hat{\tau}) =$$

$$= -\pi \frac{e^{-jp_{1,2.r}(\pi - \vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{1,2.r}} \exp\left[-\left(\frac{p_{1,2}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] J_m(p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}_0) J_m(p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}), \quad (31а)$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{p^{-1}}{(p - p_{1,2.r})} \exp\left[-\frac{(p\omega_0\sigma_\tau)^2}{2}\right] e^{jp\vartheta_{ki}} J_m(p\omega_0\hat{\tau}_0) J_m(p\omega_0\hat{\tau}) =$$

$$= -\frac{\pi}{p_{1,2.r}} \frac{e^{-jp_{1,2.r}(\pi - \vartheta_{ki})}}{\sin \pi p_{1,2.r}} \exp\left[-\left(\frac{p_{1,2}\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] J_m(p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}_0) J_m(p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}). \quad (31б)$$

Приближенное решение для частот когерентных колебаний получается из уравнения (29) подстановкой сумм (30а), (30б), (31а), (31б) и при выполнении ряда условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\tau}\hat{\tau}_0}{2\sigma_\tau^2} < 1, \quad \dfrac{\hat{\tau}_0}{\sqrt{2}\sigma_\tau} < 1, \\ \left|\dfrac{p_{1,2.r}\omega_0\hat{\tau}}{2}\right| < \sqrt{\dfrac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+1)}}, \quad \dfrac{\hat{\tau}}{\sqrt{2}\sigma_\tau} < \sqrt{\dfrac{\Gamma(m+2)\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1/2)}}, \\ Q_r > \dfrac{h_r}{2}, \quad \nu_{sm} \ll h_r, \quad \sigma_\tau > \dfrac{\sqrt{2}}{h_r\omega_0}\sqrt[2m-1]{\Delta\Gamma(m-1/2)}. \end{cases} \tag{32}$$

Решение имеет вид

$$(\omega_{sm} - m\omega_s) = \frac{e\eta}{\beta^2 E}\frac{m}{\omega_s}\frac{\sigma_\tau^{2m-2}\omega_0^{2m}}{2^{m+1}\Gamma(m+1)}\left(1 - \frac{\hat{\tau}_0^2}{2\sigma_\tau^2}\right)\sum_r \frac{R_{\text{sh}.r}h_r^{2m}}{Q_r}\times$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{h_r\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\left\{I_b^k \operatorname{ctg}\pi h_r + \sum_{i\neq k} I_b^i \frac{\exp\left[\dfrac{h_r}{2Q_r}(\pi - \vartheta_{ki})\right]}{\sin \pi h_r}\cos h_r(\pi - \vartheta_{ki}) + \right.$$

$$+ j\frac{\nu_{sm}}{h_r}\left(I_b^k \frac{\operatorname{ctg}\pi h_r}{2Q_r} + \sum_{i\neq k} I_b^i \frac{\exp\left[\dfrac{h_r}{2Q_r}(\pi - \vartheta_{ki})\right]}{\sin \pi h_r}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sin h_r(\pi - \vartheta_{ki}) + \frac{\cos h_r(\pi - \vartheta_{ki})}{2Q_r}\right)\right)\right\}, \tag{33}$$

где $m = 1, 2, 3$ и т. д. Решение для отрицательных m удовлетворяет равенствам $\operatorname{Re}(\omega_{s(-m)}) = -\operatorname{Re}(\omega_{sm})$, $\operatorname{Im}(\omega_{s(-m)}) = \operatorname{Im}(\omega_{sm})$.

Частоты когерентных колебаний имеют мнимую и действительную части. Мнимая часть обуславливает устойчивость системы сгустков и в общем случае зависит от схемы заполнения орбиты и характера эффективного импеданса вакуумной камеры накопителя. Например, если импеданс ВЧ-моды емкостный, то система сгустков устойчива при последовательном заполнении орбиты. Если характер импеданса индуктивный, то система неустойчива для выбранной моды.

Также, в качестве примера, в схеме с одним сгустком для дипольной моды колебаний $m = 1$ имеем

$$(\omega_{s1} - \omega_s) = \frac{e\eta}{4\beta^2 E}\frac{\omega_0^2}{\omega_s} I_b\left(1 - \frac{\hat{\tau}_0^2}{2\sigma_\tau^2}\right)\times$$

$$\times\sum_r \frac{R_{\text{sh}.r}h_r^2}{Q_r}\exp\left[-\left(\frac{h_r\omega_0\sigma_\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\operatorname{ctg}\pi h_r\left(1 + j\frac{\nu_s}{2Q_r h_r}\right). \tag{34}$$

Зависимость когерентных частот (33) и (34) от начального смещения $\hat{\tau}_0$ в заданных ограничениях слабая. Это означает, что при малых возмущениях стационарной функции распределения частиц вклад следовых полей в продольное когерентное движение электронных сгустков слабо зависит от формы начального возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применив новый подход для решения задачи о когерентных колебаниях системы электронных сгустков, мы получили приближенное аналитическое решение для частот когерентных колебаний, зависящее от схемы расположения сгустков на орбите ускорителя. Кроме того, мы рассмотрели эффект искажения потенциальной ямы для множества электронных сгустков и нашли решение для частот возмущенных некогерентных колебаний, зависящее от распределения сгустков на орбите и от характера эффективного импеданса структуры. Все результаты получены для электронных сгустков, взаимодействующих с высокодобротными структурами вакуумной камеры накопителя заряженных частиц.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-32-00335 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев А. Н.* Когерентные синхротронные колебания при наличии пространственного заряда // АЭ. 1968. Т. 25, вып. 2. С. 100.
2. *Lebedev A. N.* On the Bunch Lengthening Effect in Storage Rings. LNF-69/52. Frascati, 1969.
3. *Карлинер М. М.* Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой. 1. Когерентные движения пучка в накопителе. Препринт ИЯФ 74-105. Новосибирск, 1974.
4. *Карлинер М. М.* Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой. 2. Неустойчивости когерентных продольных (фазовых) колебаний. Препринт ИЯФ 74-106. Новосибирск, 1974.
5. *Sacherer F.* Methods for Computing Bunched-Beam Instabilities. CERN/SI-BR/72-5. Geneva, 1972.
6. *Sacherer F.* Bunch Lengthening and Microwave Instability. Part 2. CERN/PS/BR 77-6. Geneva, 1977.
7. *Zotter B.* Longitudinal Stability of Bunched Beams. Part III: Mode Coupling and the Microwave Instability. CERN SPS/81-20 (DI). Geneva, 1981.
8. *Zotter B.* Potential-Well Bunch Lengthening. CERN SPS/81-14 (DI). Geneva, 1981.
9. *Laclare J. L.* Bunched Beam Coherent Instabilities. CERN 87-03. V. 1. Geneva, 1987. 264 p.
10. *Wang J. M., Pellegrini C.* On the Condition for a Single Bunch High Frequency Fast Blow-Up // Proc. of the XI Intern. Conf. on High Energy Accelerators, Geneva, 1980. P. 554.
11. *Wang J. M.* Microwave Instability as a Coherent Light Source // Phys. Rev. E. 1998. V. 58, Iss. 1. P. 984.
12. *Chao A. Wu.* Physics of Collective Beam Instabilities in High-Energy Accelerators. John Wiley&Sons Inc., 1993.
13. *Pellegrini C.* Longitudinal Instabilities in Circular Accelerator and Storage Rings // IEEE Trans. Nucl. Sci 1981. V. NS-28, No. 3. P. 2413–2419.
14. *Hereward H. G.* Limitation on Beam Quality and Intensity // Proc. of the 8th Intern. Conf. on High Energy Accel. 1971. P. 548–553.

15. *Mosnier A.* Cures of Coupled Bunch Instabilities // Proc. of the 1999 Part. Accel. Conf., New York, 1999. P. 628.
16. *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970.
17. *Лоусон Дж.* Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980. 171 с.
18. *Sands M.* The Physics of Electron Storage Rings. An Introduction. SLAC-121. 1970. 70 p.
19. *Zotter B.* The Effective Coupling Impedance for Instabilities of Gaussian Bunches. CERN/ISR-TH/80-03. Geneva, 1980.

Получено 1 декабря 2017 г.