

ФОРМИРОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО БРИЛЛЮЭНОВСКОГО ТОРОИДА

*Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой*¹

Всероссийский электротехнический институт — филиал ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ, Москва

Рассчитаны формирующие электроды, образующие стенки канала, и силовые линии магнитного поля для тороидальной вырезки с круглым сечением из сплошного релятивистского бриллюэновского потока с одной отличной от нуля азимутальной компонентой скорости.

The beam-forming electrodes and magnetic field strength lines are calculated for toroidal cut with circular cross-section from solid relativistic Brillouin flow with single azimuthal component of velocity.

PACS: 41.85.Ct

1. Последующие соотношения приводятся в релятивистской нормировке (символы с чертой), исключаяющей из уравнений плотного пучка заряженных частиц все физические константы, связанные с используемой системой единиц:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{L_*}, & \bar{V} &= \frac{V}{c}, & \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{(c^2/\eta)}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{c^2\varepsilon_0/(\eta L_*^2)}, \\ \bar{J} &= \frac{J}{c^3\varepsilon_0/(\eta L_*^2)}, & \bar{H} &= \frac{H}{c/(\mu_0\eta L_*)}, & \bar{A} &= \frac{A}{c/(\mu_0\eta)}, & \eta &= \frac{e}{m}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_* — характерная длина; V , φ , ρ , J , H , A — скорость, потенциал электрического поля, плотность пространственного заряда, плотность тока, напряженность магнитного поля, векторный потенциал; c , ε_0 , μ_0 , η — скорость света, диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, удельный заряд частицы; после нормировки черта опускается и используется для других целей.

Результаты справедливы для частиц любого сорта при соответствующем изменении характерных величин, используемых при обезразмеривании. Для электронов потенциал нормируется на 511 кВ. В качестве единицы длины удобно выбрать радиус камеры R_a в решении сплошного бриллюэновского потока [1], описываемого следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v_\psi &= -\frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}^2}, & \varphi &= \frac{2\bar{R}^2}{1-\bar{R}^2}, & \rho &= \frac{8}{R_*^2} \frac{1+\bar{R}^2}{(1-\bar{R}^2)^3}, \\ A &= RA_\psi = 2R_* \left[\frac{1}{1-\bar{R}^2} - \frac{\bar{R}^2}{(1-\bar{R}_a^2)^2} \right], & H_{z0} &= \frac{4}{R_*} \frac{1}{(1-\bar{R}_a^2)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

¹E-mail: olga1606@rambler.ru

$$H_{zs} = \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} = \frac{4}{R_*} \left[\frac{1}{(1 - \bar{R}^2)^2} - \frac{1}{(1 - \bar{R}_a^2)^2} \right],$$

$$\bar{R} \equiv \frac{R}{R_*}, \quad R_* = R_a \left(\frac{\gamma_a + 1}{\gamma_a - 1} \right)^{1/2}, \quad \gamma = 1 + \varphi.$$

Здесь R, ψ, z — цилиндрические координаты; H_{z0}, H_{zs} — внешнее и собственное продольное магнитное поле; A_ψ, v_ψ — азимутальные компоненты векторного потенциала и скорости; φ_a — значение потенциала на внешней границе пучка $R = R_a$.

На рис. 1, а представлен сплошной бриллюэновский поток; рис. 1, б иллюстрирует выделение из него в плоскости R, z контура в виде окружности радиуса a , вращение которой вокруг оси z определяет тело тороида с центром, отстоящим на расстояние R_0 от оси.

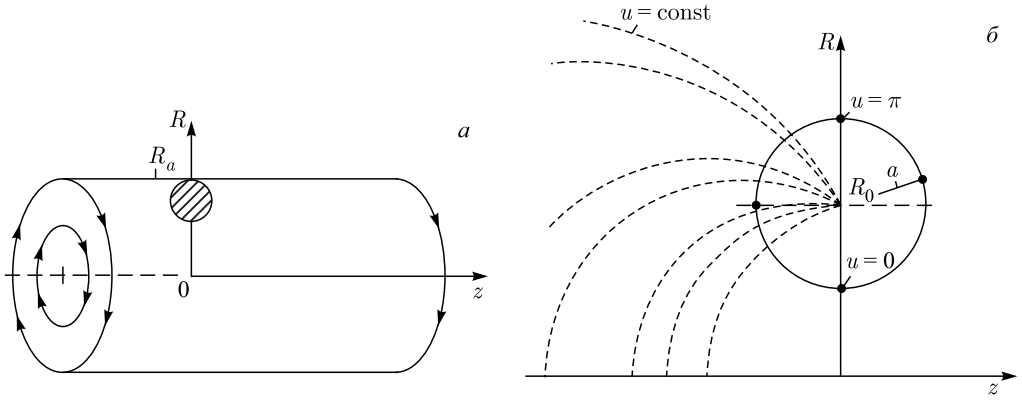


Рис. 1. Сплошной бриллюэновский поток (а) и выделение контура в виде окружности радиуса a из сплошного бриллюэновского потока в плоскости R, z (б)

2. Для реализации тороидальной вырезки из течения (2) необходимо рассчитать лапласовское поле вне пучка с условием непрерывности потенциала и его производной на торе, а также соблюсти непрерывность компонент магнитного поля на этой поверхности. Решение задачи в криволинейных координатах u, v с конформной метрикой (равные коэффициенты Ляме $h_u = h_v = h$), связанных с поверхностью пучка $v = 0$, определено формулами [2]

$$\varphi = \varphi_i - \frac{1}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \rho \sqrt{R} h^2 F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda \right) d\xi,$$

$$A = A_i + \sqrt{R} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \frac{\rho v_\psi}{\sqrt{R}} h^2 F \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \lambda \right) d\xi;$$

$$\lambda = -\frac{r^2}{4R(u, v)R(u + i\xi, \eta)}, \quad H_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R},$$

$$r^2 = [R(u + i\xi, \eta) - R(u, v)]^2 + [z(u + i\xi, \eta) - z(u, v)]^2.$$

(3)

Здесь φ_i, A_i — функции в пучке из (2), обеспечивающие упоминавшиеся требования непрерывности на границе потока, двойные интегралы дают нулевой вклад в функции и их нормальные производные на торе; F — гипергеометрическая функция Гаусса; функции v_ψ, ρ, R, h^2 двух аргументов u, v под интегралами претерпевают аналитическое продолжение по $u \rightarrow u + i\xi$ и замену $v \rightarrow \eta$. Алгоритмы вычисления действительной и мнимой частей гипергеометрических функций при различных значениях $|\lambda|$ обсуждаются в работе [3].

Система u, v связана с координатами R, z соотношениями

$$z = -d \frac{2b e^v \sin u}{1 + b^2 e^{2v} + 2b e^v \cos u}, \quad R = d \frac{1 - b^2 e^{2v}}{1 + b^2 e^{2v} + 2b e^v \cos u};$$

$$d = \frac{1 - b^2}{1 + b^2} R_0, \quad b = \frac{1}{a} \left(R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2} \right); \quad (4)$$

$$h^2 = \frac{4b^2 d^2 e^{2v}}{(1 + b^2 e^{2v} + 2b e^v \cos u)^2}.$$

Координатные линии $u = \text{const}$ показаны на рис. 1, b , линии $v = \text{const}$ ортогональны к ним. Контур пучка $v = 0$ определен параметрическими уравнениями

$$R_e = d \frac{1 - b^2}{1 + b^2 + 2b \cos u}, \quad Z_e = -d \frac{2b \sin u}{1 + b^2 + 2b \cos u}. \quad (5)$$

3. Решение (2) характеризуется весьма резкими радиальными градиентами: при $\bar{R} \rightarrow 1$ скорость стремится к скорости света, а прочие параметры — к бесконечности. Приемлемые значения степени неоднородности характеристик пучка можно подбирать за счет радиуса тороида a и близости v_ψ к скорости света. Наиболее интересным в силу сказанного является случай малых значений a . Для расчета были выбраны следующие геометрические и физические параметры тороида:

$$R_a = 1, \quad a = 0,02, \quad \gamma_a = 6, \quad R_* = \sqrt{1,4}, \quad R_0 = 0,98, \quad H_{z0} = 41,435. \quad (6)$$

О степени неоднородности характеристик пучка можно судить по данным, приведенным в таблице.

R	$-v_\psi$	φ	ρ	$-H_{zs}$
1,00	0,9860	5,000	420,07	0
0,98	0,9826	4,369	311,19	7,15
0,96	0,9786	3,853	237,51	12,48

На рис. 2, a, b представлены эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ и силовые линии магнитного поля $A = \text{const}$ в области, внешней к пучку.

Выше не обсуждались вопросы возможной реализации полученного решения. Отметим, однако, что для задачи об электронном сгустке в ловушке Пеннинга, решение которой не является менее формальным по сравнению со случаем тороидального бриллюэновского пучка, был найден способ его реализации [4].

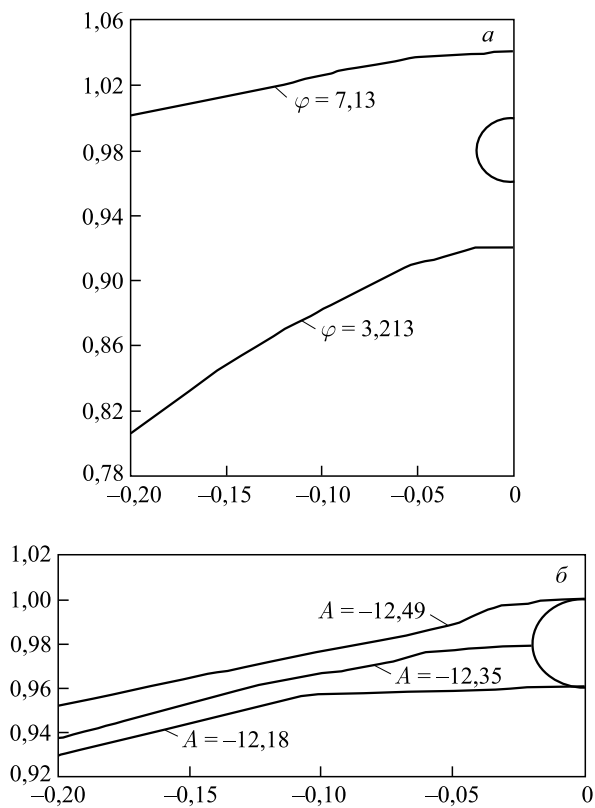


Рис. 2. Эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ (а) и силовые линии магнитного поля $A = \text{const}$ (б) в области, внешней к пучку

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Packh D. C., Ulrich P. B. // J. Electr. Contr. 1961. V. 10, No. 2. P. 139.
2. Сыровой В. А. // РЭ. 2013. Т. 58, № 2. С. 185.
3. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57, № 8. С. 893.
4. Dubin D. H., O'Neil T. M. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71, No. 1. P. 87.

Получено 19 сентября 2018 г.