

## КРИТЕРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФРАКТАЛОВ И ПОДАВЛЕНИЯ ФОНОВЫХ СОБЫТИЙ SePaC-МЕТОДОМ

*Т. Г. Дедович<sup>а,б</sup>, М. В. Токарев<sup>а,б</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

В работе анализируются SePaC-методом фракталы и различные фоновые события (перемешанные, случайные, распределенные по закону Гаусса, а также по степенному и экспоненциальному законам) с целью поиска и реконструкции фрактальных структур. Показано, что часть фоновых событий восстанавливается как фракталы. Рассмотрены распределения различных событий по фрактальной размерности. Установлено, что распределения для фракталов и фоновых событий различаются. Введены величины, описывающие особенности фрактальных структур, и проведено их сравнение для фракталов и фоновых событий. Предложены критерии для подавления фона, и представлены результаты их применения. Установлено, что при использовании этих критериев по отдельности происходит изменение распределений фоновых событий по размерности, а при комбинации критериев заметно подавляется фон.

Fractals and different background states (mixed, random, distributed by Gauss, power and exponent laws) are analyzed by SePaC method aimed at search for and reconstruction of fractal structures. It is shown that part of background events is reconstructed as fractals. Distributions of different events by the fractal dimension are studied. It is found that these distributions for fractals and background events are different. Some characteristics describing features of fractal structures are presented and their comparison for fractals and background events is performed. Criteria for background suppression are suggested and analysis results are presented. It is shown that application of the criteria separately changes the background event distribution by the fractal dimension and their combination results in noticeable background suppression.

PACS: 89.75.Da; 89.75.Fb

### ВВЕДЕНИЕ

Во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий происходят различные процессы, приводящие к множественному рождению частиц. К ним относятся жесткое рассеяние кварков и глюонов, партонные ливни в начальном и конечном состояниях, многочастичные взаимодействия, адронизация, распад нестабильных адронов. Теоретическое описание этих процессов лежит в основе монте-карло-генераторов взаимодействий частиц. Так, в программе RUTHIA [1] партонный каскад является самоподобным процессом с упорядоченным угловым распределением, а фрагментация струны описывается ветвями, развивающимися по одному сценарию: струна переходит в

адрон и остаточную струну и т. д. В каждом подпроцессе энергия и импульс распределяются между продуктами деления по вероятностным законам. Предполагается, что такие самоподобные процессы могут привести к фрактальному распределению частиц в фазовом пространстве. Отличительными свойствами фракталов являются неравенство фрактальной  $D_F$  и топологической размерностей (см. прил. А), масштабная инвариантность, а также степенная зависимость количества структурных элементов от их размера. Для природного фрактала самоподобие и степенные зависимости выполняются в пределах характерных масштабов.

Отметим, что спектры рождения частиц во взаимодействиях адронов и ядер часто описываются комбинацией степенной и экспоненциальной зависимостей [2]. В области малых поперечных импульсов выполняется экспоненциальный закон, а в области больших — степенной. Первый отражает термодинамические свойства системы, а второй — обменный характер взаимодействия отдельных конstituентов. В последнее время для аппроксимации спектров используется распределение Цаллиса [3–6]. Эта параметризация позволяет одновременно описать как степенной, так и экспоненциальный режимы. Форма распределения определяется тремя параметрами — «химическим потенциалом», «температурой» и параметром  $q$ , связанным с относительной дисперсией температуры. Введение  $q$  имеет кардинальное значение в описании систем, для которых статистика Больцмана неприменима. Этот параметр часто называют энтропийным индексом. Он контролирует неэкстенсивность (неаддитивность) энтропии Цаллиса. «Температура» является средним значением всех температур Больцмана и также связана с энтропией Цаллиса и внутренней энергией системы. При значениях  $q \approx 1$  параметризация Цаллиса соответствует распределению Максвелла–Больцмана. В этом случае «температура» и «химический потенциал» совпадают с соответствующими величинами в термодинамике Больцмана. В области больших поперечных импульсов экспериментальные спектры имеют степенное поведение, которое хорошо описывается распределением Цаллиса при «химическом потенциале», равном нулю. Основной мотивацией для введения энтропии Цаллиса [7, 8] являлась применимость обобщенной статистики, полученной на ее основе, к фракталам и мультифрактальным системам. Отметим, что различные характеристики сложных явлений демонстрируют степенное поведение, отражающее иерархическую или фрактальную структуру объектов и процессов [9–14].

В столкновениях протонов и ядер больших энергий имеются события с большой множественностью, а спектры частиц могут описываться различными функциями. Это позволяет провести пособытийный анализ и исследовать вопрос: имеют или нет события с такими спектрами фрактальные структуры? В случае обнаружения фрактальных событий можно исследовать их распределение по размерности  $D_F$ . Предполагается, что изменение  $D_F$  может быть связано с фазовыми переходами. В работе [15] указывается, что проявление фрактальности (перемежаемости) возможно за счет фазового перехода кварков в адроны. Такая точка зрения отражена в исследованиях двумерной решетки спинов (модель Изинга), в которой перемежаемое (фрактальное) поведение системы возникает при температуре фазового перехода, а показатели перемежаемости (размерность) связаны с критическими индексами изучаемой системы [16].

Во фрактальном анализе событий важное значение приобретает метод определения размерности  $D_F$ . В работах [17, 18] предложены PaC- и SePaC-методы анали-

за. Они использовались для восстановления характеристик различных типов фракталов [19–22]. Кроме размерности эти методы позволяют определить количество уровней  $N_{lev}$ , основание образования  $P_F$  и структуру фракталов. Количество уровней связано с количеством различных масштабов, на которых проявляется масштабная инвариантность. Двухступенчатая процедура анализа, развитая в работе [23], позволила увеличить эффективность восстановления  $D_F$ ,  $N_{lev}$  и  $P_F$  в наборах данных, содержащих различные виды фракталов. Показано преимущество двухступенчатой процедуры SePaC-метода по сравнению с PaC и широко используемым методом подсчета клеток (BC-методом) [24, 25].

В настоящей работе предложены и исследуются критерии разделения фрактальных и фоновых событий (перемешанных, случайных, распределенных по закону Гаусса, а также по степенному и экспоненциальному законам). В разд. 1 описаны наборы данных, используемые в работе. В разд. 2 и 3 представлено краткое описание SePaC-метода и обоснован выбор параметров соответственно. В разд. 4 рассматриваются распределения событий, восстановленных как фракталы, по размерности  $D_F$ . В разд. 5 исследуются характеристики, описывающие процесс образования фракталов, и на их основе вводятся критерии для подавления различных фоновых событий. В разд. 6 представлены результаты применения введенных критериев для различных наборов данных. Основные выводы сформулированы в заключении.

## 1. ОПИСАНИЕ НАБОРОВ ДАННЫХ

В данной работе проводится численный эксперимент. Сгенерированные наборы данных (фракталы и различные фоновые события) анализируются SePaC-методом с целью поиска и реконструкции фрактальных структур. Все наборы содержат по 1823 события. Каждое событие  $Event = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  включает в себя  $n$  точек с координатами  $x_i$ , где  $x$  — исследуемая величина.

Набор фракталов содержит фракталы с независимым [19], зависимым [20] и комбинированным делением [21]. Они различаются количеством точек (от 8 до 1024), основанием образования  $P_F$  (от 3 до 8) и структурами  $S$  (см. прил. Б).

В качестве фоновых событий используются перемешанные, случайные и динамические события.

Перемешанные события не содержат повторяющихся структур. Они получены из фракталов с учетом следующих условий:

- распределение по количеству точек совпадает с исходным;
- используются все точки исходного набора и только они;
- каждое событие содержит точки из различных исходных событий;
- каждое событие формируется из исходных событий, имеющих такую же или меньшую множественность.

В динамических событиях распределения по исследуемой величине  $x$  описываются экспоненциальной  $\text{Exp}(kx)$  и степенной  $\text{Pow}(x, k)$  зависимостями, а также распределением Гаусса  $\text{Gaus}(\sigma)$ , где  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение. Для фракталов, динамических и случайных событий распределение по количеству точек совпадает.

## 2. SePaC-МЕТОД ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В этом разделе приводится краткое описание метода систем уравнений степенных покрытий (SePaC). SePaC-метод основан на определении размерности Хаусдорфа–Безиковича (см. прил. А), согласно которому для вычисления размерности рассматриваются различные наборы покрытий. В качестве покрытия используется распределение события по исследуемой величине  $x$ . Границы распределений можно выбирать разными способами (минимум/максимум в событии, минимум/максимум в блоке данных или фиксированные значения). Количество бинов  $\{M_i\}$  в распределениях каждого набора меняется по степенному закону  $M_i = (P_{cov})^i$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, lev$ . Значение  $lev$  определяется из условия насыщения количества ненулевых бинов в распределениях. Наборы покрытий различаются величиной основания, принимающего значения  $P_{cov} = 3, \dots, P_{max}$ , где  $P_{max}$  — параметр метода. Для каждого покрытия проверяются различные гипотезы формирования фракталов. Для этого строится система уравнений

$$\sum_{j=1}^{K_i} (l_{ji})^{D_i} = 1, \quad (1)$$

где  $K_i$  — количество элементов фрактала на  $i$ -м уровне, а  $l_{ji}$  — длина  $j$  элемента на  $i$ -м уровне. Для каждого уравнения вычисляется размерность  $D_i$ . Элементом фрактала считается либо ненулевой бин (гипотеза независимого деления), либо отрезок, состоящий из ненулевых бинов (гипотеза зависимого деления). Согласно расположению ненулевых бинов определяется структура  $S_k$  каждого  $k$ -го элемента фрактала. Для каждого уровня проверяется условие

$$\frac{|D_i - \langle D \rangle|}{\langle D \rangle} < Dev, \quad (2)$$

где  $Dev$  — параметр метода, а  $\langle D \rangle$  — среднее значение размерностей  $D_i$ . Все уровни, для которых выполнено это условие, называются доверительными и используются для определения фрактальной размерности. Уровни, не удовлетворяющие условию (2), содержат большое количество неделящихся элементов. Набор точек считается фракталом, если существует хотя бы три доверительных уровня. В этом случае определяется основание образования  $P_F = P_{cov}$ , количество общих  $N_{lev} = lev$  и доверительных  $N_{con}$  уровней, а также структуры  $S_k$  и размерность  $D_F = \langle D \rangle$  фрактала.

Более подробное описание, особенности и результаты применения SePaC-метода для различных видов фракталов представлены в работах [18–23]. Отметим, что двухступенчатая процедура анализа [23] позволяет восстанавливать фракталы точно и приближенно. На первом этапе используется ограничение

$$N_i = (N_1)^i, \quad (3)$$

где  $N_1$  и  $N_i$  — количество элементов фрактала на 1-м и  $i$ -м уровне соответственно. В этом случае фракталы с независимым и зависимым делением реконструируются точно. На втором этапе (без ограничения) восстановление происходит приближенно.

### 3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ SePaC-МЕТОДА

SePaC-метод имеет два параметра: основание максимального степенного покрытия  $P_{\max}$  и предельное относительное отклонение Dev фрактальных размерностей различных уровней от их среднего. С уменьшением значения Dev точность восстановления фрактала увеличивается. Значение  $P_{\max}$  зависит от блока данных. Если в данных присутствуют фракталы с основанием образования  $P_F \leq k$ , то значение  $P_{\max} \geq k$ . С увеличением параметра  $P_{\max}$  доля случайных событий, восстанавливаемых как фракталы, возрастает [26]. Поэтому если в наборе данных присутствуют фоновые события и фракталы с большим значением основания образования, то выбор значения  $P_{\max}$  для разделения различных типов данных является нетривиальной задачей.

**3.1. Анализ фракталов.** В данной работе рассматривается приближенное восстановление фракталов, поэтому набор данных анализируется SePaC-методом без ограничения (3). Границы распределений выбираются как минимум/максимум в событии.

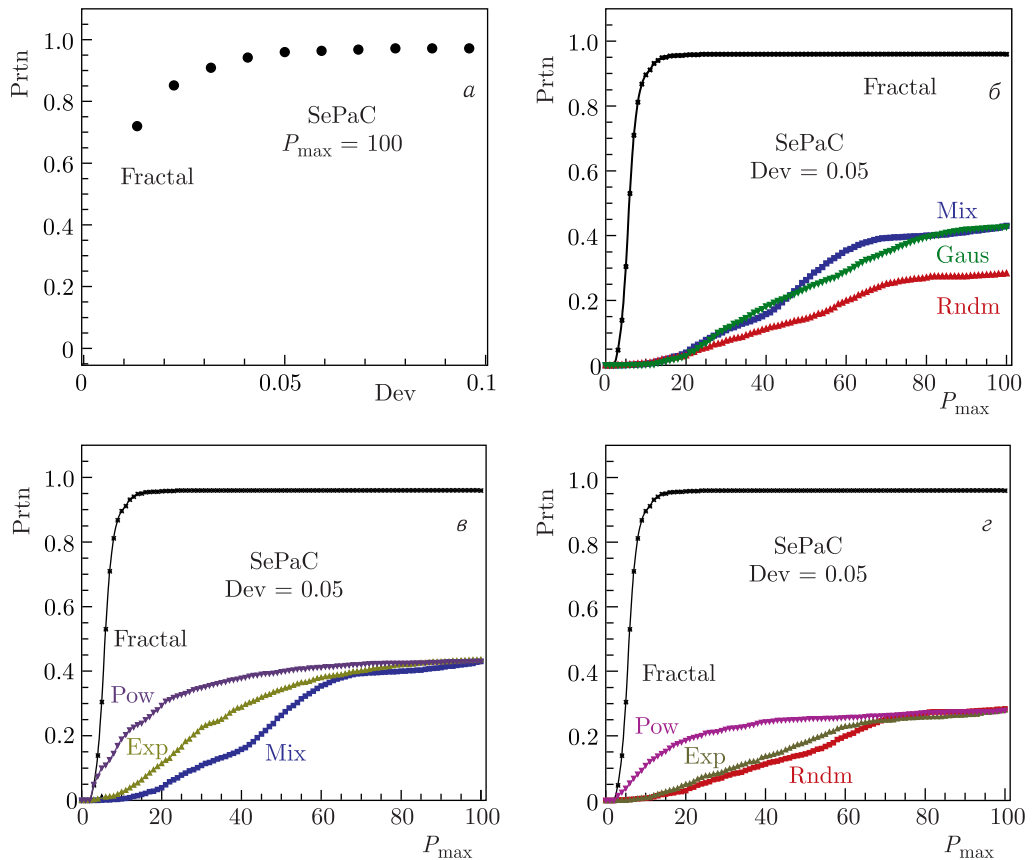


Рис. 1 (цветной в электронной версии). Зависимость доли событий  $Prtn$ , восстановленных как фракталы, от Dev при  $P_{\max} = 100$  для фракталов (а), от  $P_{\max}$  при Dev = 0,05 для различных типов событий (б–з)

На рис. 1, *а* показана зависимость доли  $\text{Prtn}$  восстановленных фракталов от параметра  $\text{Dev}$ . Рассматривается широкий набор покрытий (значение основания  $P_{\text{cov}}$  меняется от 3 до  $P_{\text{max}} = 100$ ), что позволяет исключить влияние параметра  $P_{\text{max}}$  на исследуемую зависимость. Из этого рисунка видно, что с увеличением значения  $\text{Dev}$  доля  $\text{Prtn}$  возрастает и выходит на плато  $\text{Prtn} = 0,96$  при  $\text{Dev} = 0,05$ . Значение  $\text{Dev} = 0,05$  выбирается для дальнейшего анализа.

На рис. 1, *б* показана зависимость доли  $\text{Prtn}$  восстановленных фракталов (черная линия) от параметра  $P_{\text{max}}$  при  $\text{Dev} = 0,05$ . Из этого рисунка видно, что с увеличением значения  $P_{\text{max}}$  доля  $\text{Prtn}$  возрастает и выходит на плато  $\text{Prtn} = 0,96$ . Минимальное значение  $P_{\text{max}}$  на плато, равное 15, позволяет максимально восстановить фракталы.

**3.2. Анализ различных фоновых событий.** Рассмотрим зависимость (рис. 1, *б-г*) доли событий  $\text{Prtn}$ , восстановленных как фракталы, от параметра  $P_{\text{max}}$  при  $\text{Dev} = 0,05$  для различных данных. Каждый тип данных изображен линией определенного цвета, который при описании рисунков указан в скобках.

На рис. 1, *б* показана зависимость  $\text{Prtn}(P_{\text{max}})$  для перемешанных (синяя линия) и случайных (красная) данных, а также событий, распределенных по Гауссу с  $\sigma = 0,3$  (зеленая). Отметим, что поведение  $\text{Prtn}(P_{\text{max}})$  для фракталов и представленных фоновых событий существенно различается. Зависимости для фоновых событий похожи. При  $P_{\text{max}} = 15$  реконструируется наибольшее количество фракталов (96%) и менее 2% фоновых событий восстанавливаются как фракталы. С увеличением параметра доля фоновых событий возрастает и при значении  $P_{\text{max}} = 100$  достигает максимума. Для перемешанных данных и событий, распределенных по Гауссу, максимальное значение  $\text{Prtn}$  равно 0,43. Установлено, что зависимость  $\text{Prtn}(P_{\text{max}})$  слабо чувствительна к выбору  $\sigma$  для событий, распределенных по Гауссу. При изменении  $\sigma$  от 0,03 до 0,3 максимальные значения  $\text{Prtn}$  различаются не более чем на 3%. Для случайных событий максимальная доля равна 0,28.

Таким образом, выбор параметров  $\text{Dev} = 0,05$  и  $P_{\text{max}} = 15$  позволяет восстановить фракталы и подавить события, распределенные по Гауссу, а также смешанные и случайные данные.

В работе рассматриваются наборы событий, в которых исследуемая величина  $x$  распределена по экспоненциальному и степенному законам. При разных значениях параметров экспоненты и степени, доли событий, восстанавливаемых как фракталы, различны. Для анализа выбраны события, описываемые распределениями  $\text{Exp}(-1,2x)$ ,  $\text{Exp}(-0,35x)$  и  $\text{Pow}(x, -2,04)$ ,  $\text{Pow}(x, -0,984)$ .

На рис. 1, *в* показана зависимость  $\text{Prtn}(P_{\text{max}})$  для распределений  $\text{Exp}(-1,2x)$  (оливковая линия),  $\text{Pow}(x, -2,04)$  (фиолетовая), а также перемешанных (синяя) событий. Для всех наборов максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,43$ . При  $P_{\text{max}} = 15$  восстанавливается 25% степенных и 7% экспоненциальных событий.

На рис. 1, *г* представлена зависимость  $\text{Prtn}(P_{\text{max}})$  для распределений  $\text{Exp}(-0,35x)$  (оливковая линия),  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (фиолетовая) и случайных (красная) событий. Для всех наборов максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,28$ . При  $P_{\text{max}} = 15$  восстанавливаются 15% степенных и 2% экспоненциальных событий.

Из рис. 1, *в* и *г* видно, что при  $P_{\text{max}} \leq 70$  значение  $\text{Prtn}$  наибольшее для степенных распределений. При  $P_{\text{max}} > 70$  значения  $\text{Prtn}$  приблизительно одинаковы для всех данных.

Показано, что часть фоновых событий восстанавливается как фракталы. Установлено, что подавление степенных и экспоненциальных событий меньше, чем смешанных и случайных данных, а также событий, распределенных по Гауссу.

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБЫТИЙ ПО ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ $D_F$

Как показано выше, события, восстановленные как фракталы, могут содержать примеси. Рассмотрим распределения различных типов событий по размерности  $D_F$ , представленные на рис. 2. Каждый тип данных изображен областью определенного цвета, который при описании рисунков указан в скобках.

На рис. 2, а показаны распределения по  $D_F$  для фракталов (серая область), смешанных (синяя) и случайных (красная) данных, а также событий, распределенных по Гауссу с  $\sigma = 0,3$  (зеленая). Размерность фракталов меняется от 0,3 до 0,9. Остальные распределения существенно отличаются от фрактальных и имеют явно выраженный максимум, положение которого зависит от типа данных. Максимальное количество случайных событий имеет размерность  $D_F = 0,91$ . Отметим, что положение максимума зависит от распределения по множественности. Большинство смешанных данных и событий, распределенных по Гауссу, имеют более низкое значение размерности ( $D_F = 8,5-8,9$  и  $D_F = 0,73$  соответственно). Положения максимумов для наборов данных  $\text{Gaus}(0,3)$  и  $\text{Gaus}(0,03)$  с разными значениями  $\sigma$  практически совпадают (см. рис. 2, б).

На рис. 2, в показаны распределения по  $D_F$  для смешанных (синяя область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-1,2x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,43$ . Видно, что все распределения различны. Перемешанные данные смещены в область больших значений  $D_F$ . Степенные события характеризуются тремя максимумами при  $D_F = 0,49, 0,61, 0,79$ , а экспоненциальные — одним при  $D_F = 0,69$ .

На рис. 2, г представлены распределения по  $D_F$  для случайных (красная область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-0,35x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,28$ . Видно, что все распределения различны, а случайные данные смещены в область больших значений  $D_F$ . Степенные события характеризуются тремя максимумами при  $D_F = 0,39, 0,61, 0,79$ , а экспоненциальные — одним при  $D_F = 0,87-0,89$ .

Экспоненциальные события  $\text{Exp}(-1,2x)$ ,  $\text{Exp}(-0,35x)$  имеют разное положение максимумов в распределении по  $D_F$  (см. рис. 2, д). Степенные события  $\text{Pow}(x, -2,04)$ ,  $\text{Pow}(x, -0,984)$  различаются положением первого максимума (см. рис. 2, е), в то время как второй и третий совпадают. Большинство степенных событий имеют значение размерности в области первого максимума.

Таким образом, распределения по размерности  $D_F$  для фракталов и фоновых событий различаются. Положение максимумов для перемешанных и случайных событий зависит от распределения по множественности, для экспоненциальных — от значения параметра экспоненты, а для событий, распределенных по Гауссу, не зависит от величины  $\sigma$ . Распределения степенных событий имеют три максимума, положение первого зависит от показателя степени, а положения других не зависят от него.

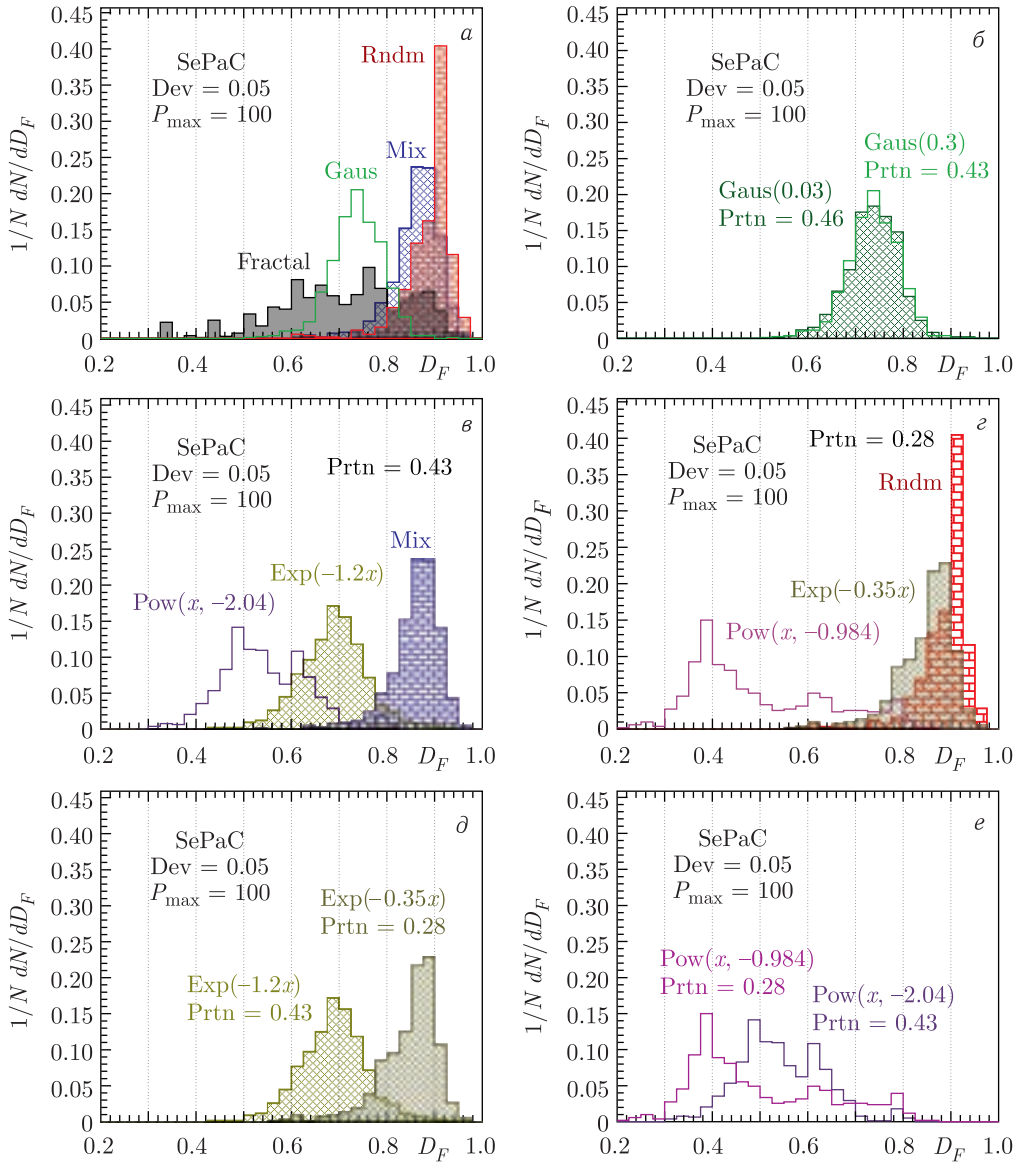


Рис. 2 (цветной в электронной версии). Распределение различных событий по фрактальной размерности  $D_F$

### 5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ФРАКТАЛОВ

В данном разделе рассматриваются величины, характеризующие особенности процесса образования фракталов. Показывается, что точность реконструкции фрактальных структур определяется значениями предложенных величин. Проводится сравнение этих характеристик для фракталов и фоновых событий, а также предлагаются критерии для подавления фона.



**5.1. Количество элементов фрактала на разных уровнях.** При анализе фракталов базовым SePaC-методом количество выделенных элементов на 1-м и  $i$ -м уровнях ( $N_1$  и  $N_i$ ) связано степенной зависимостью (3). Показатель степени равен номеру

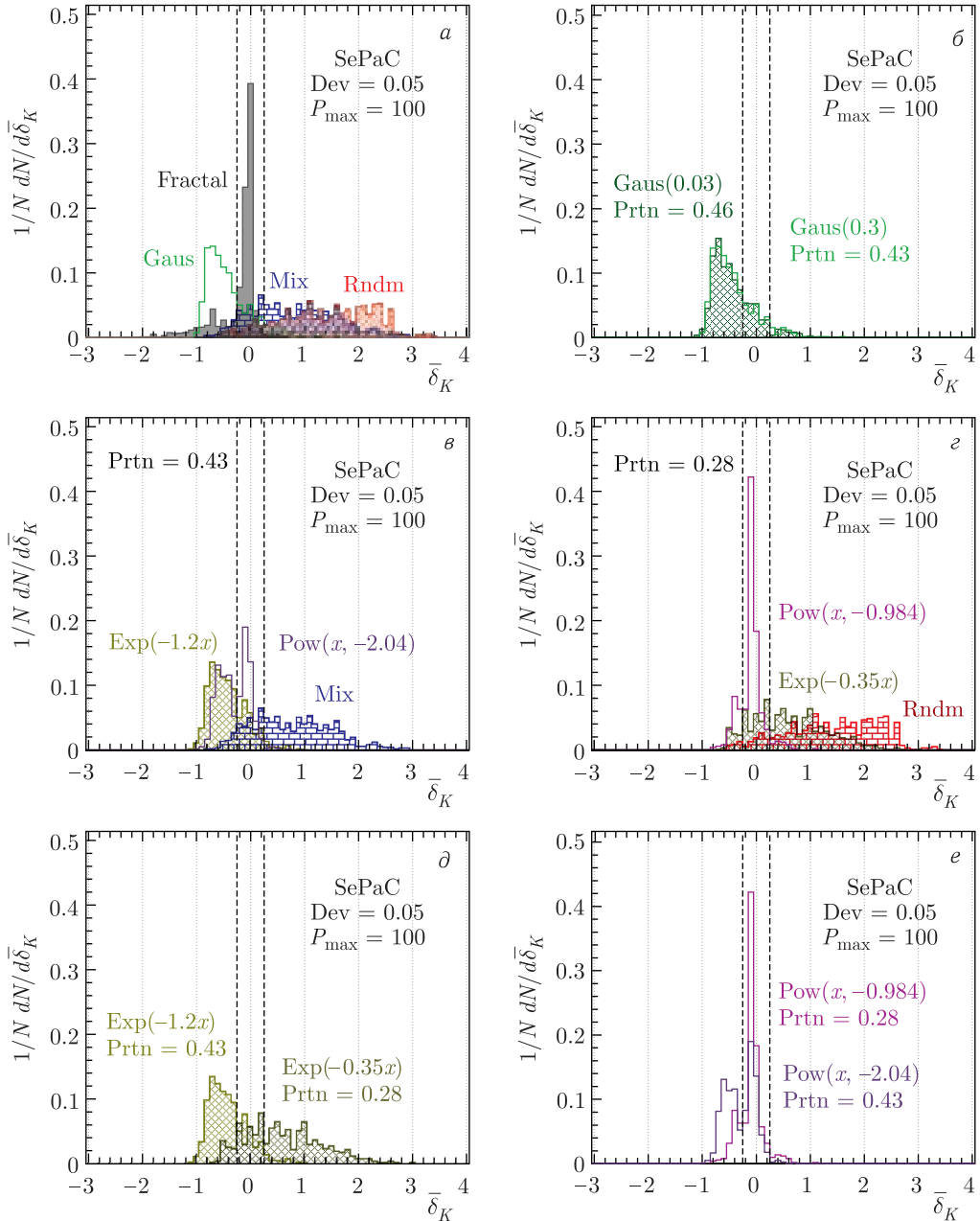


Рис. 3 (цветной в электронной версии). Распределение различных событий по величине  $\bar{\delta}_K$

уровня. В случае приближенного восстановления показатель степени принимает значение  $K$ :

$$N_i = (N_1)^K. \quad (4)$$

Определим среднее относительное отклонение показателя  $K$  в степенной зависимости (4) от номера уровня фрактала  $i$  по формуле

$$\bar{\delta}_K = \frac{1}{N_{\text{con}}} \sum_{i=2}^{N_{\text{con}}} \frac{|K - i|}{i}. \quad (5)$$

При точном восстановлении фракталов значение  $\bar{\delta}_K = 0$ .

На рис. 3 представлены распределения различных событий по величине  $\bar{\delta}_K$ .

На рис. 3, *а* фракталы изображены серым цветом, смешанные и случайные данные показаны синим и красным, а события, распределенные по Гауссу с  $\sigma = 0,3$ , — зеленым. Для большинства фракталов  $\bar{\delta}_K$  находится в диапазоне  $[-0,2, 0,2]$ , а в отрицательной области достигает значения  $\bar{\delta}_K = -1,5$ . Остальные распределения существенно отличаются от фрактальных. Для большинства смешанных и случайных событий распределения по  $\bar{\delta}_K$  находятся в области положительных значений и достигают  $\bar{\delta}_K = 3,0$ . Максимальное количество событий, распределенных по Гауссу, соответствует  $\bar{\delta}_K = -0,6$ . Положения пиков для наборов данных Gaus(0,3) и Gaus(0,03) с разными значениями  $\sigma$  совпадают (см. рис. 3, *б*).

На рис. 3, *в* показаны распределения по  $\bar{\delta}_K$  для смешанных (синяя область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-1,2x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,43$ . На рис. 3, *г* представлены распределения по  $\bar{\delta}_K$  для случайных (красная область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-0,35x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,28$ . Распределение по  $\bar{\delta}_K$  для степенных событий содержит пик в области  $[-0,2, 0,2]$ , а большинство смешанных, случайных и экспоненциальных данных находятся вне указанного диапазона.

Распределения для разных экспоненциальных  $\text{Exp}(-1,2x)$ ,  $\text{Exp}(-0,35x)$  событий смещены в область отрицательных и положительных значений  $\bar{\delta}_K$  соответственно (см. рис. 3, *д*). Распределения для степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$ ,  $\text{Pow}(x, -0,984)$  событий похожи и находятся в области  $[-1,0, 1,0]$  (см. рис. 3, *е*).

Таким образом, ограничение  $|\bar{\delta}_K| \leq 0,2$  может использоваться как критерий для разделения фрактальных и фоновых событий.

**5.2. Количество новых элементов в каждом акте деления.** Рассмотрим выделение элементов фракталов в случае их приближенного восстановления SePaC-методом.

На рис. 4 показаны элементы фрактала на разных уровнях. Все элементы имеют сквозную нумерацию, не зависящую от уровня. На рис. 4, *а* первый элемент делится на три части ( $N_{d1} = 3$ ). На следующем уровне второй элемент образует больше элементов, чем первоначальный ( $N_{d2} = 4$ ). Суммарное количество таких элементов обозначим  $N_+$ . Третий и четвертый элементы образуют меньше элементов, чем первоначальный ( $N_{d3} = 1$ ,  $N_{d4} = 2$ ). Суммарное количество таких элементов обозначим  $N_-$ .

Определим среднее относительное отклонение  $\bar{\delta}_D$  количества делений  $N_{dj}$  от первоначального  $N_{d1}$  для элементов, у которых делений больше  $\bar{\delta}_{D+}$  и меньше  $\bar{\delta}_{D-}$

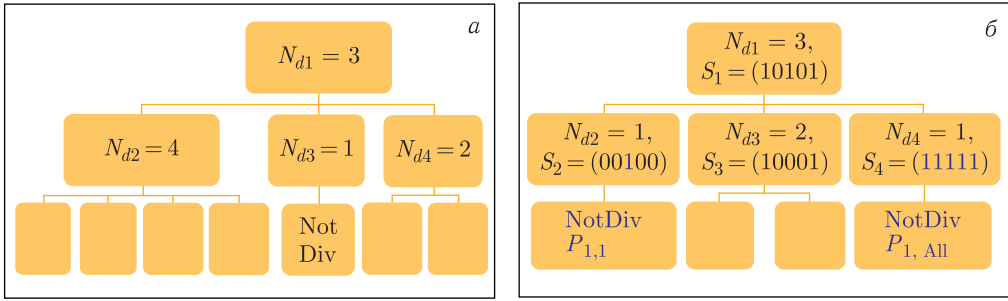


Рис. 4. Схема деления фрактала на разных уровнях в случае приближенного восстановления первоначального, следующими формулами:

$$\bar{\delta}_{D+} = \frac{1}{N_+} \sum_{i=2}^{N_+} \frac{N_{dj} - N_{d1}}{N_{d1}}, \quad \bar{\delta}_{D-} = \frac{1}{N_-} \sum_{i=2}^{N_-} \frac{N_{dj} - N_{d1}}{N_{d1}}. \quad (6)$$

При точном восстановлении фракталов значения  $\bar{\delta}_{D+}$  и  $\bar{\delta}_{D-}$  равны нулю. На рис. 5 представлены распределения различных событий по величине  $\bar{\delta}_D$ .

На рис. 5, а фракталы изображены серым цветом, смешанные и случайные данные показаны синим и красным, а события, распределенные по Гауссу с  $\sigma = 0,3$ , — зеленым. Для большинства фракталов распределение находится в диапазоне  $[-0,5, 0,5]$ . Остальные распределения существенно отличаются от фрактальных, особенно в области положительных значений. Распределения для наборов данных Gaus(0,3) и Gaus(0,03) с разными значениями  $\sigma$  практически совпадают (см. рис. 5, б).

На рис. 5, в показаны распределения по  $\bar{\delta}_D$  для смешанных (синяя область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-1,2x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,43$ . На рис. 5, г представлены распределения по  $\bar{\delta}_D$  для случайных (красная область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-0,35x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,28$ . Большинство экспоненциальных и степенных событий находятся вне области  $[-0,5, 0,5]$ .

Распределения экспоненциальных событий  $\text{Exp}(-1,2x)$  и  $\text{Exp}(-0,35x)$  (см. рис. 5, д) имеют между собой незначительные различия. Аналогичная особенность наблюдается и для степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$ ,  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (см. рис. 5, е) событий.

Таким образом, ограничение  $|\bar{\delta}_D| \leq 0,5$  может использоваться как критерий для разделения фрактальных и фоновых событий.

**5.3. Доля неделимых элементов.** Рассмотрим структуру элементов фрактала на различных уровнях в случае приближенного восстановления (см. рис. 5, б). Первый элемент делится на три части ( $N_{d1} = 3$ ) и имеет структуру  $S = (10101)$ . Второй элемент не делится ( $N_{d2} = 1$ ), так как в структуре  $S = (00100)$  содержится только одна заполненная часть. Долю таких элементов на доверительном уровне обозначим  $P_{1,1}$ . Третий элемент делится на две части ( $N_{d3} = 2$ ), что отражено в структуре  $S = (10001)$ . Все части четвертого элемента заполнены  $S = (11111)$ , и в дальней-

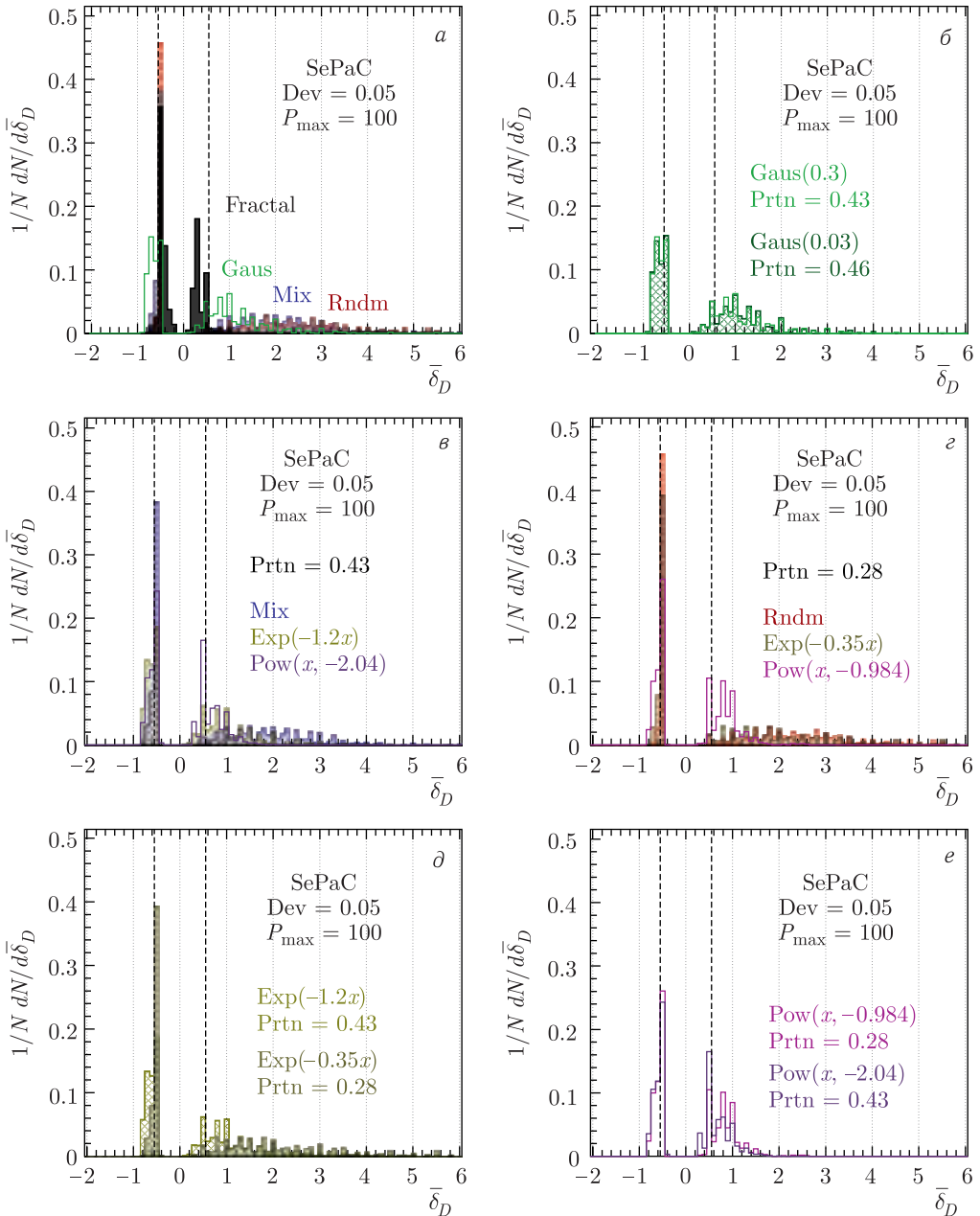


Рис. 5 (цветной в электронной версии). Распределение различных событий по величине  $\bar{\delta}_D$

шем он не делится ( $N_{d4} = 1$ ). Обозначим долю таких элементов на доверительном уровне как  $P_{1, \text{All}}$ . При точном восстановлении фракталов значения  $P_{1,1}$  и  $P_{1, \text{All}}$  равны нулю. На рис. 6 представлено распределение событий по доле  $P_{1,1}$  для различных данных.

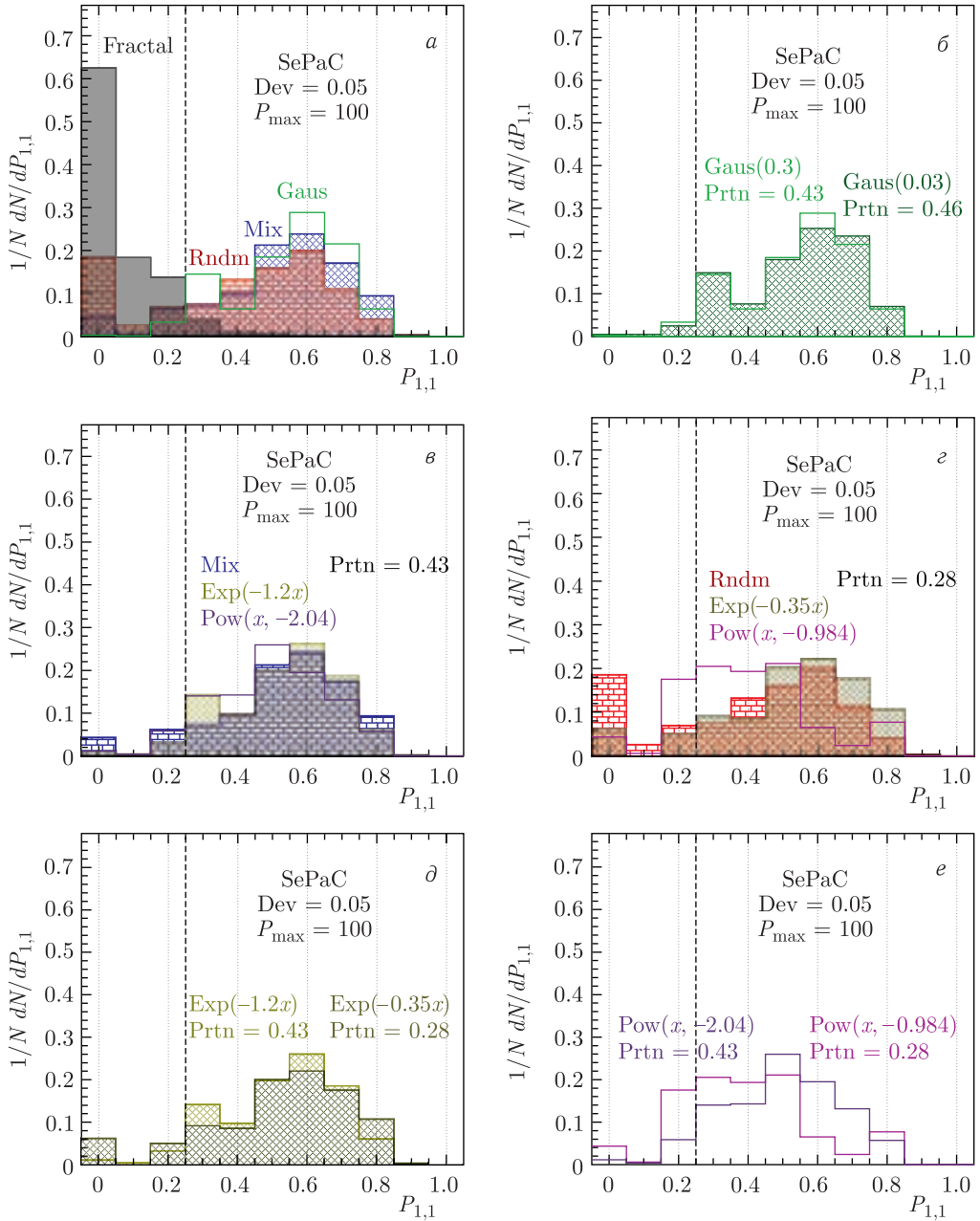


Рис. 6 (цветной в электронной версии). Распределение различных событий по доле  $P_{1,1}$

На рис. 6, *a* фракталы изображены серым цветом, смешанные и случайные данные показаны синим и красным, а события, распределенные по Гауссу с  $\sigma = 0,3$ , — зеленым. Для большинства фракталов распределение находится в диапазоне  $[0, 0, 2]$ . Остальные распределения выходят за эту область и имеют пик при  $P_{1,1} = 0,6$ . Для

наборов данных  $\text{Gaus}(0,3)$  и  $\text{Gaus}(0,03)$  с разными значениями  $\sigma$  распределения практически совпадают (см. рис. 6, б).

На рис. 6, в показаны распределения по  $P_{1,1}$  для смешанных (синяя область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-1,2x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,43$ . На рис. 6, г представлены распределения по  $P_{1,1}$  для случайных (красная область) данных, а также экспоненциальных  $\text{Exp}(-0,35x)$  (оливковая) и степенных  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (фиолетовая) событий, имеющих одинаковое максимальное значение  $\text{Prtn} = 0,28$ . Большинство экспоненциальных и степенных событий находятся за пределами области  $[0,0, 0,2]$ .

Распределения экспоненциальных событий  $\text{Exp}(-1,2x)$  и  $\text{Exp}(-0,35x)$  (см. рис. 6, д) имеют незначительные различия. Аналогичная особенность наблюдается и для степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$ ,  $\text{Pow}(x, -0,984)$  (см. рис. 6, е) событий.

Таким образом, ограничение  $P_{1,1} \leq 0,2$  может использоваться как критерий для разделения фрактальных и фоновых событий.

## 6. АНАЛИЗ ДАННЫХ С УЧЕТОМ КРИТЕРИЕВ

В данном разделе исследуется влияние критериев на количество событий, восстановленных SePaC-методом как фракталы, а также на распределения по размерности  $D_F$  для различных данных. В качестве критериев  $K$ ,  $D$ ,  $P$  выбраны следующие ограничения:

- $K$  — события с величиной  $|\bar{\delta}_K| \leq 0,2$ ;
- $D$  — события с величиной  $|\bar{\delta}_D| \leq 0,5$ ;
- $P$  — события с долей  $P_{1,1} \leq 0,2$ .

В работе рассмотрены все возможные комбинации этих критериев:  $KD$ ,  $KP$ ,  $DP$ ,  $KDP$ .

**6.1. Восстановление фракталов и подавление фоновых событий.** В данном пункте фракталы и различные фоновые события (перемешанные, случайные, распределенные по Гауссу, а также по экспоненциальному и степенному законам) анализируются SePaC-методом с применением предложенных критериев.

В таблице приведена доля событий (в процентах), восстановленных как фракталы, после применения критериев. Значение определялось по отношению к начальному количеству событий (1823) в блоках данных. Во втором столбике приведена доля событий, восстановленных без учета критериев.

Из таблицы видно, что процент событий, восстановленных как фракталы, зависит от типа примененного критерия. В случае использования одиночных критериев наибольшее подавление происходит по  $K$  (остается 71 % фракталов). Критерии являются независимыми, так как после совместного применения любых двух из них остается меньше событий, чем после применения их по отдельности. Применение комбинации  $KDP$  подавляет половину фракталов (остается 53,9 %).

Критерий  $K$  приводит к наибольшему подавлению случайных данных (остается 1,8 %) и оказывает наименьшее воздействие на степенные события (остается больше 18,4 %). При применении его к событиям, распределенным по Гауссу, а также к смешанным и экспоненциальным данным остается от 5,4 до 8,4 % событий.

**Доля событий, восстановленных как фракталы, после применения критериев**

Тип событий	% событий SePaC	% событий после применения критериев						
		<i>K</i>	<i>D</i>	<i>P</i>	<i>KD</i>	<i>KP</i>	<i>DP</i>	<i>KDP</i>
Fractals	96	71,0	82,1	83,7	62,5	59,4	72,9	53,9
Mixed	43	7,3	1,2	3,1	0,5	0,4	0,3	Менее 0,05
Random	28	1,8	1,0	6,7	0,5	0,9	0,8	0,2
Exp(-1,2)	43	8,4	4,4	0,9	1,5	0,5	0,3	0,05
Exp(-0,35)	28	5,4	1,3	2,2	0,4	0,4	0,6	0,05
Pow( <i>x</i> , -2,04)	43	18,4	12,6	0,9	8,1	0,3	0,4	0,05
Pow( <i>x</i> , -0,984)	28	20,2	5,9	1,8	4,0	0,8	0,9	0,3
Gaus(0,3)	43	5,9	3,5	0,4	0,9	0,1	0,2	0,05
Gaus(0,03)	46	7,1	3,3	0,7	0,9	0,2	0,2	Менее 0,05

Критерий *D* приводит к наибольшему подавлению случайных, смешанных и экспоненциальных событий  $\text{Exp}(-0,35, x)$  (остается меньше 1,3%) и оказывает наименьшее воздействие на степенные данные  $\text{Pow}(x, -2,04)$  (остается 12,6%). При применении его к остальным наборам остается от 3,3 до 4,4% событий.

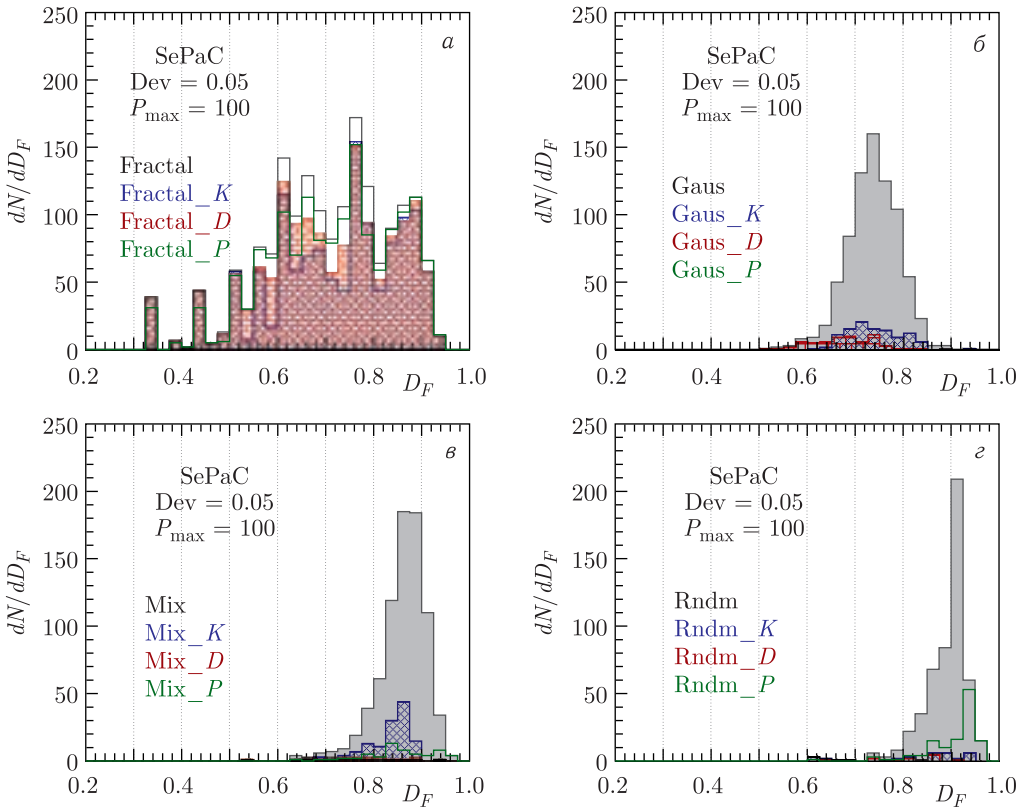


Рис. 7 (цветной в электронной версии). Распределение по  $D_F$  для фракталов (а), событий, распределенных по Гауссу (б), перемешанных (в) и случайных (г) данных

Критерий  $P$  приводит к наибольшему подавлению событий, распределенных по Гауссу, (остается меньше 0,7%) и оказывает наименьшее воздействие на случайные данные (остается 6,7%). При применении его к остальным наборам остается от 0,9 до 3,1% событий. Отметим, что критерий  $P$  воздействует наиболее сильно на фоновые события и наименьшим образом на фракталы (остается 83,7%).

Совместное применение критериев усиливает подавление фоновых событий. После применения комбинаций  $KP$  и  $DP$  остается меньше 1%, а после  $KDP$  — меньше 0,2% фоновых событий.

Таким образом, критерии, примененные к фрактальным событиям, уменьшают количество восстановленных фракталов, а применение нескольких критериев позволяет существенно подавить фоновые события.

**6.2. Распределение по фрактальной размерности  $D_F$ .** Рассмотрим изменение распределений различных событий по  $D_F$  после применения критериев. На рис. 7 и 8 исходные события изображены серым цветом, а после применения критериев  $K$ ,  $D$  и  $P$  — синим, красным и зеленым соответственно.

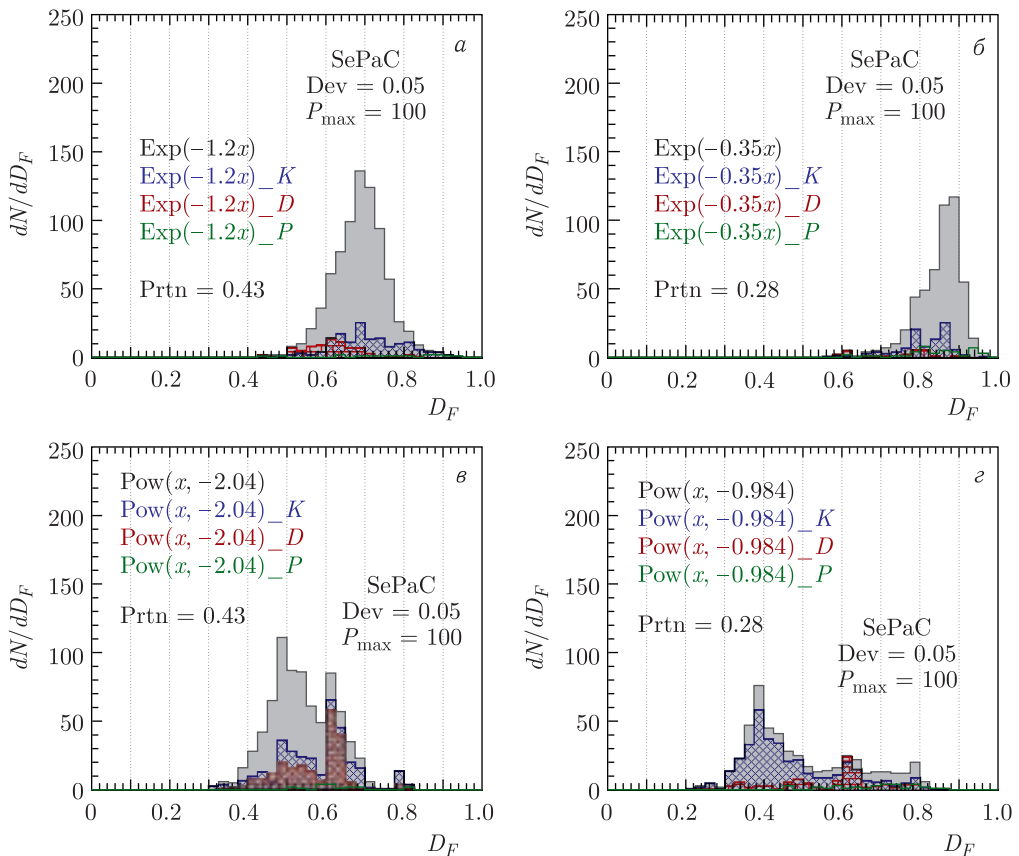


Рис. 8 (цветной в электронной версии). Распределение по  $D_F$  для экспоненциальных (а, б) и степенных (в, з) событий



На рис. 7 показано распределение по  $D_F$  для фракталов (а), событий, распределенных по Гауссу с  $\sigma = 0,3$ , (б), перемешанных (в) и случайных (г) данных. Для фракталов учет критериев незначительно меняет форму распределения. Положения максимумов остаются при тех же значениях  $D_F$ . Для событий, распределенных по Гауссу, применение критериев  $K$  и  $D$  приводит к значительному уменьшению максимума и его сдвигу в область меньших значений  $D_F$ , а использование  $P$  подавляет распределение. Для перемешанных событий учет критерия  $K$  значительно уменьшает максимум, а использование  $D$  и  $P$  подавляет распределение. Для случайных событий применение критерия  $P$  приводит к уменьшению максимума и его сдвигу в область больших значений  $D_F$ , а учет  $K$  и  $D$  подавляет распределение.

На рис. 8 показано распределение по  $D_F$  для экспоненциальных (а, б) и степенных (в, г) событий. Видно, что для экспоненциальных  $\text{Exp}(-1,2x)$  событий применение критериев  $K$  и  $D$  приводит к уменьшению максимума и его сдвигу в область меньших значений  $D_F$ . Для экспоненциальных  $\text{Exp}(-0,35x)$  событий применение критерия  $K$  приводит к образованию двух новых максимумов вместо исходного, а критерий  $D$  подавляет распределение. Критерий  $P$  для обоих типов экспоненциальных событий подавляет распределение. Видно, что для степенных  $\text{Pow}(x, -2,04)$  событий применение критериев  $K$  и  $D$  приводит к уменьшению максимумов. Для степенных  $\text{Pow}(x, -0,984)$  событий наблюдается уменьшение максимумов и подавление наибольшего максимума при учете ограничений  $K$  и  $D$  соответственно. Критерий  $P$  приводит к подавлению распределений для обоих типов степенных событий.

Таким образом, установлено, что критерии влияют на форму распределения фоновых событий по размерности  $D_F$ . Это проявляется в уменьшении и сдвиге максимумов распределений или практически полном подавлении фоновых событий. Для фракталов применение введенных критериев не влечет изменения формы распределения по  $D_F$  по сравнению с фоновыми событиями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе фракталы и различные фоновые события (перемешанные, случайные, распределенные по закону Гаусса, а также по степенному и экспоненциальному законам) анализируются SePaC-методом с целью поиска и реконструкции фрактальных структур.

Показано, что часть фоновых событий восстанавливается как фракталы. Установлено, что подавление степенных и экспоненциальных событий меньше, чем смешанных и случайных, а также событий, распределенных по Гауссу.

Рассмотрены распределения различных событий по размерности  $D_F$ . Установлено, что распределения для фракталов и фоновых событий различаются. Показано, что положение максимумов для перемешанных и случайных событий зависит от распределения по множественности, для экспоненциальных — от значения параметра экспоненты, а для событий, распределенных по Гауссу, не зависит от величины  $\sigma$ . Распределения степенных событий имеют три максимума, положение первого зависит от показателя степени, а положения других не зависят от него.

Предложены величины, учитывающие особенности фрактальных структур. Проведено сравнение этих величин для фракталов и фоновых событий. Установлено существенное различие в их поведении, и предложены критерии для подавления фона.

Представлены результаты применения критериев для различных событий. Установлено, что критерии влияют на форму распределения фоновых событий по размерности  $D_F$ . Это проявляется в уменьшении и сдвиге максимумов распределений или практически полном подавлении фоновых событий. Применение введенных критериев для фракталов не влечет изменения формы распределения по  $D_F$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Отличительным признаком фракталов является различие топологической и фрактальной размерностей. Топологические размерности точки, прямой и плоскости равны нулю, единице и двойке соответственно. Фрактальная размерность определяется динамикой образования объекта. Фракталы характеризуются различными размерностями: Хаусдорфа–Безиковича, Минковского (клеточной) и др. [24, 25].

Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_H$  называется фрактальной и определяется как значение  $d$ , при котором мера  $M_H$  имеет конечное значение:

$$M_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_C \sum_{i=1}^N l_i^d. \quad (7)$$

Здесь оператор  $\inf$  означает минимальное из всех возможных покрытий  $C$  рассматриваемого множества,  $N$  — количество пробников размером  $l_i < \epsilon$ , покрывающих объект. Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением.

Размерность Минковского (клеточная размерность)  $D_b$  определяется по формуле

$$D_b = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (8)$$

Здесь  $N(l)$  — количество пробников размером  $l$ , покрывающих объект. Для фракталов с независимым делением (прил. Б) клеточная размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича, а для фракталов с зависимым и комбинированным делением (прил. Б) они различны ( $D_b > D_H$ ). Клеточная размерность является более грубой характеристикой, так как предполагает одинаковый размер элементов фрактала на одном уровне.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Существуют различные типы фракталов (с независимым, зависимым и комбинированным делением частей), которые являются разновидностями канторовских множеств («канторовская пыль»). Фракталы с зависимым и комбинированным делением называются фракталами с неравными отношениями.

Рассмотрим фракталы с независимым делением. Наиболее известным представителем этого типа является триадное канторовское множество, процесс формирования которого показан на рис. 9, а. Исходным элементом является единичный отрезок  $[0; 1]$  вдоль оси  $X$ . Условно разобьем его на три части, что соответствует образованию фрактала с основанием  $P_F = 3$ . Вторую часть удалим, а первую и третью оставим.

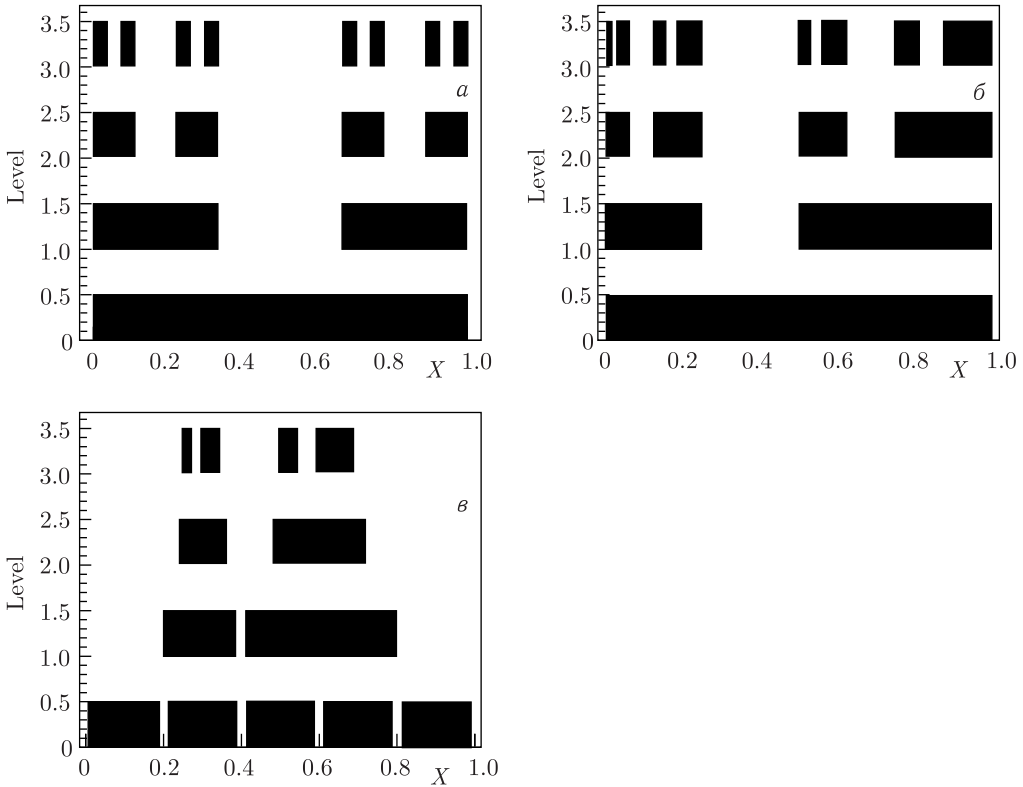


Рис. 9. Процесс формирования фракталов с независимым (*a*), зависимым (*б*) и комбинированным (*в*) делением

Назовем эту процедуру актом деления элемента фрактала в процессе его образования. Получившуюся структуру обозначим  $S = (101)$ , где «1» символизирует оставшуюся часть, а «0» — исключенную. Количество единиц в структуре определяет количество новых элементов в каждом акте деления. На следующих уровнях процесс деления повторяется. Новые элементы имеют одинаковый размер, равный  $1/P_F$  от размера родительского, и делятся независимо.

На рис. 9, *б* представлен процесс формирования фрактала с зависимым делением. Исходный элемент (отрезок  $[0; 1]$ ) условно разбивается на четыре части (основание  $P_F = 4$ ). На первом уровне остаются первая, третья и четвертая части (структура  $S = (1011)$ ). На следующих уровнях процесс деления повторяется с учетом того, что отрезок, состоящий из третьей и четвертой частей, представляет единый объект (зависимое деление). Количество новых элементов в каждом акте деления определяется количеством отрезков, а не единиц в структуре. Новые элементы различаются размерами ( $1/P_F$  и  $2/P_F$  от размера родительского).

Процесс образования фрактала с комбинированным делением показан на рис. 9, *в*. Исходный элемент условно разбивается на пять частей ( $P_F = 5$ ). На первом уровне остаются вторая, третья и четвертая части ( $S = (0111)$ ), которые образуют отрезок. На следующих уровнях происходит комбинированное деление отрезка, а имен-

но вторая часть делится независимо, а третья и четвертая как единый объект (зависимо). Получившиеся элементы различаются размерами ( $1/P_F$  и  $2/P_F$  от размера родительского). Количество новых элементов в каждом делении не соответствует ни количеству единиц в структуре, ни количеству отрезков. Для их определения требуется полный перебор различных вариантов их выделения из отрезка. Отметим, что SePaC-методом проверяются гипотезы независимого и зависимого деления, а фракталы с комбинированным делением восстанавливаются приближенно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.* PYTHIA 6.4 Physics and Manual // JHEP. 2006. V. 0605. P. 026. hep-ph/0603175.
2. *Bylinkin A., Rostootsev A.* Parameterization of the Shape of Hadron-Production Spectra in High-Energy Particle Interactions // Phys. Atom. Nucl. 2012. V. 75. P. 999.
3. *Parvan A., Teryaev O., Cleymans J.* Systematic Comparison of Tsallis Statistics for Charged Pions Produced in  $pp$  Collisions // Eur. Phys. J. A. 2017. V. 53. P. 102.
4. *Ratha R. et al.* Event Multiplicity, Transverse Momentum and Energy Dependence of Charged Particle Production, and System Thermodynamics in  $pp$  Collisions at the Large Hadron Collider // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2020. V. 47. P. 055111.
5. *Khuntia A. et al.* Radial Flow and Differential Freeze-Out in Proton-Proton Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV at the LHC // Eur. Phys. J. A. 2019. V. 55. P. 3.
6. *Bhattacharyya T. et al.* On the Precise Determination of the Tsallis Parameters in Proton-Proton Collisions at LHC // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2018. V. 45. P. 055001.
7. *Tsallis C.* Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. P. 479-487.
8. *Tsallis C.* Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Braz. J. Phys. 1999. V. 29. P. 1-35.
9. *Gell-Mann M., Tsallis C.* Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications. Oxford Univ. Press, USA, 2004.
10. *Deppman A.* Thermodynamics with Fractal Structure, Tsallis Statistics, and Hadrons // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 054001.
11. *Deppman A.* Fractal Structure of Hadrons: Experimental and Theoretical Signatures // Universe. 2017. V. 3. P. 62.
12. *Deppman A. et al.* Fractal Structure in Yang-Mills Fields and Non Extensivity. arXiv:1905.06382v1 [hep-th]. 2019.
13. *Parvan A.* Ultrarelativistic Transverse Momentum Distribution of the Tsallis Statistics // Eur. Phys. J. A. 2017. V. 53. P. 53.
14. *Parvan A., Bhattacharyya T.* Hadron Transverse Momentum Distributions of the Tsallis Normalized and Unnormalized Statistics // Eur. Phys. J. A. 2020. V. 56. P. 72.
15. *Antoniou N., Contogouris A., Papadopoulos C., Vlassopoulos S.* Criticality, Fractality and Intermittency in Strong Interactions // Phys. Lett. B. 1990. V. 245. P. 619.
16. *Satz H.* Intermittency and Critical Behavior // Nucl. Phys. B. 1989. V. 326. P. 613-618.
17. *Dedovich T., Tokarev M.*  $P$ -adic Coverage Method in Fractal Analysis of Showers // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8, No. 6. P. 521-532.
18. *Dedovich T., Tokarev M.* Method of Systems of the Equations of  $P$ -adic Coverages for Fractal Analysis of Events // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 9, No. 6. P. 552-566.

19. *Dedovich T., Tokarev M.* Comparison of Fractal Analysis Methods in the Study of Fractals with Independent Branching // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2013. V. 10, No. 6. P. 481–490.
20. *Dedovich T., Tokarev M.* Analysis of Fractals with Dependent Branching by Box Counting,  $P$ -adic Coverages and System of Equations of  $P$ -adic Coverages // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2013. V. 10, No. 6. P. 491–500.
21. *Dedovich T., Tokarev M.* Analysis of Fractals with Combined Partition // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2016. V. 13, No. 2. P. 169–177.
22. *Dedovich T., Tokarev M.* Reconstruction of the Dimension of Complete and Incomplete Fractals // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2019. V. 16. P. 240–250.
23. *Dedovich T., Tokarev M.* A Two-Step Procedure of Fractal Analysis // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2016. V. 13, No. 2. P. 178–189.
24. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
25. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
26. *Dedovich T., Tokarev M.* Fractal Reconstruction in the Presence of Background // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2017. V. 14, No. 6. P. 865–873.

Получено 12 июля 2020 г.