Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 2(234). С. 190–200

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

О ПОПРАВКАХ К ДВИЖЕНИЮ ПЛАНЕТЫ

А. И. Никишов [1]

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Существенное улучшение наблюдательных данных о движении пробных тел в гравитационном поле позволит ответить на два главных вопроса: 1) верно ли основное предположение о том, что поле определяется дифференциальными уравнениями, а не пропагаторами по известным источникам, 2) верно ли дается общей относительностью самый низкий нелинейный источник, т. е. 3-гравитонная вершина. В статье рассматриваются поправки, с которыми надо сравнивать наблюдательные данные соответствующей точности. Найдены поправки к движению планеты в стандартной и гармонической системах координат. Получены уточненные выражения для минимального и максимального радиусов орбиты, а также для полупериодов в терминах мирового и собственного времени. Для незамкнутой орбиты полупериод — это время движения планеты от минимального расстояния от Солнца до максимального. Используемый метод позволяет вычислить не только первую поправку, но и поправку к поправке. Для привилегированной системы координат, подсказанной теорией источников, метрика известна только в G^2-приближении, и поэтому найдены только поправки в этом приближении.

Significant improvement in observational data on the motion of test bodies in the gravitational field will answer two main questions. First, is the basic assumption that the field is determined by differential equations, and not by the propagators from the known sources, valid? Second, does the general relativity correctly describe the simplest nonlinear source, i.e., a 3-graviton vertex? The paper discusses the corrections with which it is necessary to compare observational data of appropriate accuracy. Corrections to a planet movement are obtained in standard and harmonic coordinate systems. These include corrections to minimal and maximal radii and to half-periods in terms of the world and proper times. The method used permits the calculations not only of the first correction but also of “correction to correction”.

PACS: 04.20.-q

ВВЕДЕНИЕ

Как отмечал В. Фок, теория должна давать однозначный ответ. В частности, это относится к метрике Шварцшильда (см. введение и § 93 в [1]). Для этого общей относительности не хватает уравнений. В качестве таковых Фок считает координатные условия Де Дондера, которые приводят к гармонической системе координат. Фок считает ее привилегированной. Однако теория источников [2] наводит на мысль о другой привилегированной системе. В этом подходе метрика находится не из решения уравнений Эйнштейна, а с помощью пропагатора по источникам, которые предполагаются

[1] E-mail: nikishov@td.lpi.ru

известными. Можно думать, что в этой системе часы и масштабы длины просто принесены «из бесконечности». В частности, в качестве источников можно взять источники нелинейности общей относительности (ср. с гл. 6 § 7 в книге Вайнберга [3]) или использовать феноменологическую 3-гравитонную вершину, подсказываемую теорией поля [4]. В обоих случаях в G^2-членах во внешней метрике появляются члены, зависящие от радиуса источника, чего не должно быть в общей относительности. Было бы очень интересно иметь точность наблюдений, позволяющую видеть G^2-члены в пространственной части метрики. Такая точность позволила бы проверить, согласуется ли 3-гравитонная вершина общей относительности с наблюдениями. Пока что, насколько мне известно, в пользу этого говорит только прецессия перигелия планеты. Однако к такой же прецессии приводят и другие метрики, в которых $g_{00} = -(1 + 2\phi + 2\phi^2)$, а в качестве $g_{\alpha\beta}$ используется линейное приближение, такое же как в гармонической системе координат (см., например, [5]). Рассмотрение движения планеты в стандартной системе координат существенно проще, чем в других системах. Использование этой системы здесь я рассматриваю как упражнения, которые покажут, как надо действовать в более сложном случае.

1. СТАНДАРТНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Итак, начнем с рассмотрения стандартной системы координат. Траекторию планеты (см. уравнение (101.5) в [6]) запишем в виде

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \mu \int\limits_{r_-}^{r} \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{f(u)}}. \tag{1.1}$$

Здесь

$$\begin{gathered} u = \frac{1}{r}, \quad \epsilon^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{m^2} = 1 + \xi, \quad f(u) = \xi + r_g u + \mu^2(-u^2 + r_g u^3), \\ r_g = 2MG, \quad \mu = \frac{\mathcal{M}}{m}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Скорость света $c = 1$, μ — угловой момент на единицу массы, r_- — минимальный, r_+ — максимальный радиусы траектории, $u_- = 1/r_+$, $u_+ = 1/r_-$.

Записав $f(u)$ в виде

$$\begin{aligned} f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 = (u - u_-)(u_+ - u)\left(1 - \frac{u}{u_3}\right) u_3 a_3 = \\ = [-u_- u_+ u_3 + (u_- u_+ + u_- u_3 + u_+ u_3)u - (u_- + u_+ + u_3)u^2 - u^3] a_3, \end{aligned} \tag{1.3}$$

из сопоставления с (1.2) имеем

$$\begin{gathered} a_0 = -u_- u_+ u_3 a_3 = \xi, \quad a_1 = [u_- u_+ + (u_- + u_+)u_3] a_3 = r_g, \\ a_2 = -(u_- + u_+ + u_3) a_3 = -\mu^2, \quad a_3 = \mu^2 r_g. \end{gathered} \tag{1.4}$$

По определению считаем, что $u_- + u_+ = 2/p$, где p — фокусный параметр (ср. с нерелятивистской теорией в § 15 в [7]). Приведем некоторые формулы из этой теории, из которых виден порядок приводимых величин. Там

$$\mu^2 \approx GMp, \quad \mathcal{E}_0 - m \approx \frac{mv^2}{2} + m\phi, \quad \phi = -\frac{GM}{r},$$
$$\xi = \frac{(\mathcal{E}_0 - m)(\mathcal{E}_0 + m)}{m^2} \approx -\frac{2|E|}{m}. \tag{1.5}$$

Возвращаясь к функции $f(u)$ в (1.2), найдем приближенные значения корней $f(u)$, опустив малый член $\mu^2 r_g u^3$. Эти корни определяются из уравнения

$$\xi + r_g \overset{0}{u} - \mu^2 \overset{0}{u}{}^2 = 0. \tag{1.6}$$

Отсюда находим корни

$$\overset{0}{u}_{\mp} = \frac{r_g}{2\mu^2} \mp \left[\left(\frac{r_g}{2\mu^2}\right)^2 + \frac{\xi}{\mu^2}\right]^{1/2} = \frac{r_g}{2\mu^2}(1 \mp e), \quad e = \left[1 + \frac{4\xi\mu^2}{r_g^2}\right]^{1/2}, \quad \frac{r_g}{2\mu^2} \approx \frac{1}{p}. \tag{1.7}$$

В низшем приближении p не зависит от G. Это сильно затрудняет наблюдение G^2-членов на фоне членов, не зависящих от G.

Поправки находим, подставляя $u_{\mp} = \overset{0}{u}_{\mp} + \overset{1}{u}_{\mp} + \overset{2}{u}_{\mp} + \ldots$ в (1.2) и собирая члены с одинаковой степенью MG. Тогда получим

$$\overset{1}{u}_{\mp} = \frac{\mu^2 \overset{0}{u}{}_{\mp}^3}{\mp e}, \quad \overset{2}{u}_{\mp} = \frac{3\mu^2 \overset{0}{u}{}_{\mp}^2 \overset{1}{u}_{\mp}}{\mp e}. \tag{1.8}$$

Эти выражения справедливы при $r_g/p \ll e$. Это можно увидеть, используя метод Ньютона приближенного нахождения корней. Из соотношения для a_2 в (1.4) и определения p (см. текст ниже формулы (1.4)) имеем

$$\left(\frac{2}{p} + u_3\right) a_3 = \mu^2, \tag{1.9}$$

откуда с учетом a_3, см. (1.4),

$$u_3 = \frac{1}{r_g}\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right), \quad u_3 a_3 = \mu^2 \left(\frac{1 - 2r_g}{p}\right). \tag{1.10}$$

Соотношение для a_1 в (1.4) можно записать в виде

$$u_- u_+ + \frac{2}{p} u_3 = \frac{1}{\mu^2}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, для μ имеется выражение (1.16), см. ниже.

Из выражения для a_0 в (1.4) имеем

$$u_- u_+ = -\frac{\xi}{a_3 u_3} = -\frac{\xi}{\mu^2(1 - 2r_g/p)}. \tag{1.12}$$

В стандартной системе координат имеем

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - r_g u - \frac{\dot{r}^2}{1 - r_g u} - r^2\dot{\varphi}^2, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.13}$$

Следовательно, функция Лагранжа равна

$$L = \left[1 - r_g u - \frac{\dot{r}^2}{1 - r_g u} - r^2\dot{\varphi}^2\right]^{1/2}. \tag{1.14}$$

Так как она не зависит от t и φ, есть два интеграла движения ϵ и μ. В первом случае из (1.14) имеем

$$\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = -(1 - r_g u)\frac{1}{L} = -|g_{00}|\frac{dt}{d\tau} = -\epsilon. \tag{1.15}$$

Последнее соотношение согласуется с тем, что в постоянном гравитационном поле величина ϵ в (1.15) сохраняется (см. первое ненумерованное уравнение после (88.8) в [6]). (Это, конечно, верно только в пренебрежении излучением.)

Из независимости L от φ следует сохранение μ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{r^2}{L}\frac{d\varphi}{dt} = -r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = -\mu. \tag{1.16}$$

Учитывая, что, согласно (1.2), $\epsilon = \sqrt{1+\xi}$, имеем из последнего соотношения в (1.15)

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{|g_{00}|}{\epsilon} \approx \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right). \tag{1.17}$$

Отсюда для кругового движения с учетом того, что $\xi = -GM/r$, получим

$$\tau = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{GM}{r}\right)t. \tag{1.18}$$

Здесь учтено, что по теореме вириала (см. § 34 в [6]) $\xi = -Gm/r$.

Заметим, что Вайнберг [3] в качестве уравнения движения использует геодезическую. Сравнение его уравнения, приведенного ниже формулы (8.4.30), с нашими уравнениями (1.1), (1.2) показывает, что его константы движения E и J связаны с нашими ϵ и μ соотношениями

$$\frac{J^2}{E} = \mu^2, \quad E = \frac{1}{\epsilon^2}. \tag{1.19}$$

Возвращаясь к уравнению (1.1), запишем его в виде

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = -\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right)^{-1/2}\int\limits_{u_+}^{u}\frac{du}{\left[(u-u_-)(u_+-u)\left(1 - \dfrac{u}{u_3}\right)\right]^{1/2}}. \tag{1.20}$$

Здесь учтено, что $f(u)$ дана во втором равенстве (1.3), а величина $a_3 u_3$ — в (1.10). Из выражения для u_3 в (1.10) видим, что $u/u_3 \ll 1$ и можно разлагать по этой малой величине: $(1-u/u_3)^{-1/2} = 1 + (1/2)(u/u_3) + \ldots$ Если ограничиться только этими двумя членами разложения и использовать формулы (2.264.1), (2.264.2) в [8], то получим результаты, приведенные в гл. 8, § 6 в [3].

Зависимость t от r получается аналогичным образом. Уравнение (101.4) в [6] в наших обозначениях принимает вид

$$t(r) - t(r_-) = -\epsilon \int\limits_{u_+}^{u} \frac{du}{u^2} \frac{1}{(1-r_g u)\sqrt{f(u)}}, \quad u = \frac{1}{r}. \tag{1.21}$$

Отсюда

$$dt - -\epsilon \frac{du}{u^2} \frac{1}{(1-r_g u)\sqrt{f(u)}}. \tag{1.22}$$

Здесь $f(u)$ та же, что и во втором равенстве (1.3), величина $a_3 u_3$ дана в (1.10). В первом приближении получим

$$t(r) - t(r_-) = -\frac{\epsilon}{\mu}\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right)^{-1/2} \int\limits_{u_+}^{u} \frac{du}{u^2} \frac{1 + (3/2)r_g u}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}}. \tag{1.23}$$

Интегралы берутся с помощью формул (2.269.1), (2.269.2) в [8]. Полупериод, т. е. время движения от r_- до r_+, дается выражением (1.23), где надо положить $r = r_+$, $u = u_-$:

$$\frac{1}{2}T = \frac{\epsilon}{\mu}\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right)^{-1/2} \int\limits_{u_-}^{u_+} \frac{du}{u^2} \frac{1 + (3/2)r_g u}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} \approx$$
$$\approx \frac{\epsilon}{\mu}\frac{\pi}{p}\frac{1}{(u_- u_+)^{3/2}}\left[1 + r_g\left(\frac{1}{p} + \frac{3}{2}p u_- u_+\right)\right]. \tag{1.24}$$

Часы на планете показывают собственное время. Мы считаем, что гравитационным полем самой планеты можно пренебречь. Согласно последнему равенству в (1.15) имеем $dt = (\epsilon/|g_{00}|)d\tau$. Здесь $|g_{00}| = 1 - r_g u$. Подставляя это в (1.22), получим

$$d\tau = -\frac{du}{u^2}\frac{1}{\sqrt{f(u)}}. \tag{1.25}$$

Отсюда с учетом (1.3) и (1.19)

$$\tau(r) - \tau(r_-) = -\frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right)^{-1/2} \int\limits_{u_+}^{u} \frac{du}{u^2} \frac{1 + (1/2)r_g u}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}}. \tag{1.26}$$

Следовательно, полупериод

$$\frac{1}{2}\mathcal{T} = \tau(r_+) - \tau(r_-) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right)^{-1/2} \int\limits_{u_-}^{u_+} \frac{du}{u^2} \frac{1 + (1/2)r_g u}{\sqrt{(u - u_-)(u_+ - u)}} =$$

$$= \frac{\pi}{\mu}\left(1 - \frac{2r_g}{p}\right)^{-1/2} \left(\frac{u_- + u_+}{2(u_- u_+)^{3/2}} + \frac{r_g}{\sqrt{u_- u_+}}\right). \quad (1.27)$$

2. ГАРМОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Движение планеты в этой системе координат рассматривалось Фоком [1]. В этом разделе мы обозначаем координату r той же буквой, что и в предыдущем, хотя они, конечно, связаны соотношением $r^{\mathrm{st}} = r^{\mathrm{harm}} + (1/2)r_g$. Это не должно вызывать недоумений, так как мы в этом разделе нигде не возвращаемся к стандартной системе координат. Ссылаясь на формулы предыдущего раздела, мы понимаем теперь, что координаты в них — это гармонические координаты. Формула (1.1) сохраняет свой вид, если под $f(u)$ понимать $F = (1 + \alpha u)f(u)$, где теперь $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = \xi + r_g u - \mu^2 u^2 + 3\xi\alpha u + (\alpha u)^2(4 + 3\xi) + (\alpha u)^3(2 + \xi) + \mu^2\alpha u^3, \quad \alpha = \frac{1}{2}r_g. \quad (2.1)$$

В формуле (1.2) выражение для $f(u)$ меняется на (2.1). Формула (1.3) и соотношение для a_0 в (1.4) сохраняют свой вид. Остальные соотношения в (1.4) меняются:

$$\begin{aligned} a_1 &= [u_- u_+ + (u_- + u_+)u_3]a_3 = r_g + 3\alpha\xi, \\ a_2 &= -(u_- + u_+ + u_3)a_3 = -\mu^2 + \alpha^2(4 + 3\xi), \\ a_3 &= \mu^2\alpha + \alpha^3(2 + \xi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как и раньше, считаем, что по определению $u_- + u_+ = 2/p$. Тогда из соотношения для a_2 в (2.2) имеем

$$-\left(\frac{2}{p} + u_3\right) = \frac{-\mu^2 + \alpha^2(4 + 3\xi)}{a_3}. \quad (2.3)$$

Отсюда с учетом последнего соотношения для a_3 в (2.2) получим

$$u_3 = -\frac{2}{p} - \frac{\mu^2 - \alpha^2(4 + 3\xi)}{\mu^2\alpha + \alpha^3(2 + \xi)} \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{p} - \frac{4\alpha}{\mu^2}. \quad (2.3а)$$

Для углового момента, как и следовало ожидать из связи r в гармонической и стандартной системах, вместо последнего равенства в (1.16) имеем

$$\mu = \left(r^2 + r r_g + \frac{1}{4}r_g^2\right)\frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.4)$$

(см. уравнение (58.27) в книге Фока [1]).

Далее ради простоты используем приближенное выражение для $f(u)$, опустив в (2.1) члены, пропорциональные $(MG)^3$:

$$f(u) = \xi + r_g u - \mu^2 u^2 + 3\xi\alpha u + (r_g u)^2 + \mu^2 \alpha u^3. \tag{2.5}$$

Тогда для первой поправки к корню этого уравнения $\overset{0}{u}_-$ (см. (1.7)) по методу Ньютона получим

$$\overset{1}{u}_- = -\frac{f(\overset{0}{u}_-)}{f'(\overset{0}{u}_-)} = \frac{3\xi \overset{0}{u}_- + 2r_g \overset{0}{u}{}^2_- + \mu^2 \overset{0}{u}{}^3_-}{-2e}. \tag{2.6}$$

Аналогично для $\overset{1}{u}_+$

$$\overset{1}{u}_+ = -\frac{f(\overset{0}{u}_+)}{f'(\overset{0}{u}_+)} = \frac{3\xi \overset{0}{u}_+ + 2r_g \overset{0}{u}{}^2_+ + \mu^2 \overset{0}{u}{}^3_+}{2e}. \tag{2.7}$$

Если бы мы искали $\overset{1}{u}_-$ непосредственно из $F(u)$, определенной перед формулой (2.1), то в первом соотношении (2.6) надо было бы заменить f и f' соответственно на F и F'. Судя по зависимости $f(\overset{0}{u})$ и $f'(\overset{0}{u})$ от α, следует ожидать, что в $F(u)$ можно опустить члены, пропорциональные $(GM)^3$. Тогда

$$F(u) = \xi + r_g u - \mu^2 u^2 + 4\alpha\xi u + 6(\alpha u)^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} r_g. \tag{2.8}$$

С рассматриваемой точностью $F'(\overset{0}{u}_-) = f'(\overset{0}{u}_-)$, и надо показать, что и $F(\overset{0}{u}_-) = f(\overset{0}{u}_-)$. Положив в (2.8) $u = \overset{0}{u}$, получим

$$F(\overset{0}{u}_-) = 4\alpha\xi \overset{0}{u} + 6(\alpha \overset{0}{u})^2 \equiv 4\alpha\xi \overset{0}{u} + 6(\alpha \overset{0}{u})^2 - \mu^2 \alpha u^3 + \mu^2 \alpha u^3. \tag{2.9}$$

Теперь заметим, что согласно (1.6)

$$\xi + r_g \overset{0}{u} - \mu^2 \overset{0}{u}{}^2 = 0. \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$0 = \frac{1}{2} r_g \overset{0}{u} [\xi + r_g \overset{0}{u}_- - \mu^2 \overset{0}{u}{}^2_+]. \tag{2.11}$$

Вычитая это выражение из (2.9), получим искомое соотношение $F(\overset{0}{u}_-) = f(\overset{0}{u}_-)$. Тогда поправку $\overset{1}{u}_\mp$ в (2.6), (2.7) можно записать в виде

$$\overset{1}{u}_- = \frac{2\xi \overset{0}{u}_- + (3/2) r_g \overset{0}{u}{}^2_-}{-e}, \quad \overset{1}{u}_+ = \frac{2\xi \overset{0}{u}_+ + (3/2) r_g \overset{0}{u}{}^2_+}{e}.$$

Как и в предыдущем разделе (ниже уравнения (1.8)), мы предполагаем, что $r_g/p \ll e$. Если это условие не выполнено, нужно искать корни непосредственно из (2.8).

Теперь получим зависимость собственного времени от радиуса. Формулу (58.30) у Фока можно переписать в виде

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 \frac{1}{u^4} = \frac{1}{(1+\alpha u)^3} f(u) \quad \text{или} \quad d\tau = \mp \frac{du}{u^2} \frac{(1+\alpha u)^{3/2}}{\sqrt{f(u)}}. \tag{2.12}$$

Отсюда с приближенным значением $f(u)$ в (2.5) получим с принятой точностью

$$\tau(r) - \tau(r_-) = \frac{1}{\sqrt{a_3 u_3}} \int\limits_u^{u_+} \frac{du}{u^2} \frac{1 + r_g u}{\sqrt{(u-u_-)(u_+ - u)}}. \tag{2.13}$$

Из последнего соотношения для a_3 в (2.2) и соотношения для u_3 в (2.4) имеем

$$a_3 u_3 = \mu^2 \left(1 - \frac{r_g}{p} - \frac{r_g^2}{\mu^2}\right). \tag{2.14}$$

Из (2.13) найдем

$$\frac{1}{2}\mathcal{T} = \tau(r_+) - \tau(r_-) = \frac{\pi}{\sqrt{a_3 u_3}} \left(\frac{u_- + u_+}{2(u_- u_+)^{3/2}} + \frac{r_g}{\sqrt{u_- u_+}}\right). \tag{2.15}$$

Далее, как и в предыдущем разделе, найдем

$$t(r) - t(r_-) = \frac{\epsilon}{\sqrt{a_3 u_3}} \int\limits_u^{u_+} \frac{du}{u^2} \frac{1 + 2 r_g u}{\sqrt{(u-u_-)(u_+ - u)}}, \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{2}T = \frac{\pi\epsilon}{\sqrt{a_3 u_3}} \left(\frac{u_- + u_+}{2(u_- u_+)^{3/2}} + \frac{2 r_g}{\sqrt{u_- u_+}}\right). \tag{2.17}$$

3. ПРИВИЛЕГИРОВАННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

В этом случае мы знаем метрику только в G^2-приближении:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi + 2\phi^2)dt^2 + \left[1 - 2\phi + \phi^2\left(a - 7 + \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right)\right] dr^2 + \\ + \left[1 - 2\phi + \phi^2\left(a - \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right) r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \quad \phi = -\frac{GM}{r}. \tag{3.1}$$

Здесь b — радиус шара материи, $a = 5$ для общей относительности, $a = 9$ для феноменологической 3-гравитонной вершины, подсказанной теорией поля [4].

Действуя, как и раньше, методом Гамильтона–Якоби, получим

$$\frac{1}{m}\frac{dS_r}{dr} = \mp\sqrt{f(u)}, \\ f(u) = \xi + r_g u - \mu^2 u^2 + 2\xi r_g u + \frac{3}{2} r_g^2 u^2 + \xi\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 \left(a - 1 + \frac{128}{35} b u\right). \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что если удержать последнее слагаемое, пропорциональное $\xi(r_g/2)^2$, то появится зависимость и от радиуса b шара материи, и от типа 3-гравитонной вершины a, $a=4$ или $a=9$. Опуская этот член, пропорциональный G^3, имеем

$$f(u)=\xi+r_g u-\mu^2u^2+2\xi r_g u+\frac{3}{2}r_g^2u^2. \tag{3.3}$$

Это совпадает с нашей формулой (2.8) и приближенной формулой (58.36) у Фока [1]. Следовательно, приближенная форма траектории в гармонической системе координат такая же, как в привилегированной системе координат.

Запишем (3.3) в виде

$$f(u)=(u-u_-)(u_+-u)a_2=[-u_-u_++(u_-+u_+)u-u^2]a_2. \tag{3.4}$$

Сопоставляя с (3.3), получим

$$a_2=\mu^2-\frac{3}{2}r_g^2=\frac{r_g(1+2\xi)}{u_-+u_+}=-\frac{\xi}{u_-u_+}. \tag{3.5}$$

В нулевом приближении корни уравнения (3.3) определяются из (1.6) и приведены в (1.7), а первая поправка равна

$$\overset{1}{u}_{\mp}=\frac{2\xi\,\overset{0}{u}_{\mp}+(3/2)r_g\,\overset{0}{u}{}^2_{\mp}}{\mp e}. \tag{3.6}$$

Вспоминая, как, согласно (1.2), ξ и μ зависят от $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{M}$, так же как в разд. 1, получим

$$\varphi(r)-\varphi(r_-)=\left(1+\frac{3r_g^2}{4\mu^2}\right)\int\limits_u^{u_+}du\frac{1}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}}, \tag{3.7}$$

$$t(r)-t(r_-)=\frac{\epsilon}{\mu}\left(1+\frac{3r_g^2}{4\mu^2}\right)\int\limits_u^{u_+}\frac{du}{u^2}\frac{1+2r_gu}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}}, \tag{3.8}$$

$$\tau(r)-\tau(r_-)=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{3r_g^2}{4\mu^2}\right)\int\limits_u^{u_+}\frac{du}{u^2}\frac{1+r_gu}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}}. \tag{3.9}$$

Полагая в (3.8) $r=r_+$, $u=u_-$, найдем

$$\frac{1}{2}T=t(r_+)-t(r_-)=\frac{\epsilon}{\mu}\left(1+\frac{3r_g^2}{4\mu^2}\right)\int\limits_{u_-}^{u_+}\frac{du}{u^2}\frac{1+2r_gu}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}}=$$

$$=\frac{\pi\epsilon}{\mu}\left(\frac{u_-+u_+}{2(u_-u_+)^{3/2}}+\frac{2r_g}{\sqrt{u_-u_+}}\right). \tag{3.10}$$

Аналогично из (2.9)

$$\frac{1}{2}\mathcal{T} = \tau(r_+) - \tau(r_-) = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{3r_g^2}{4\mu^2}\right)\int\limits_{u_-}^{u_+}\frac{du}{u^2}\frac{1 + r_g u}{\sqrt{(u - u_-)(u_+ - u)}} =$$

$$= \frac{\pi}{\mu}\left(1 + \frac{3r_g^2}{4\mu^2}\right)\left(\frac{u_- + u_+}{2(u_- u_+)^{3/2}} + \frac{r_g}{\sqrt{u_- u_+}}\right). \quad (3.11)$$

Функция Лагранжа определяется как корень квадратный из выражения

$$L^2 = \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 + 2\phi + 2\phi^2 - \left[1 - 2\phi + \phi^2\left(a - 7 + \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\dot{r}^2 -$$

$$- \left[r^2 + r r_g + M^2 G^2\left(a - \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\dot{\phi}^2. \quad (3.12)$$

Точка означает дифференцирование по t. Из независимости L от ϕ следует сохранение углового момента μ:

$$-\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \left[r^2 + r r_g + M^2 G^2\left(a - \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\frac{d\phi}{L\,dt} = \mu, \quad L\,dt = d\tau. \quad (3.13)$$

Обратим внимание на то, что в членах, пропорциональных ϕ^2 (пропорциональных G^2), есть зависимость и от типа 3-гравитонной вершины (от a), и от радиуса шара материи (от b). Из независимости L от времени следует сохранение энергии (см. последнее соотношение в (1.15), где теперь $|g_{00}| = 1 + 2\phi + 2\phi^2$).

В лагранжевом формализме, так же как и в работе Фока в § 58 [1], получим

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \xi + r_g u - \mu^2 - \frac{1}{2}r_g^2 u^2 + 2r_g\mu^2 u^3 \equiv f_3(u). \quad (3.14)$$

С другой стороны, из уравнения (3.9) следует

$$d\tau = -\frac{du}{u^2}\frac{(1 + r_g u)}{\sqrt{f(u)}}, \quad dr = -\frac{du}{u^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{f(u)}{1 + 2r_g u}. \quad (3.15)$$

Здесь $f(u)$ определена в (3.4). Покажем, что (3.14) отличается от (3.15) на члены, которыми мы в этом разделе пренебрегаем:

$$f_3(u)\frac{1 + 2r_g u}{1 + 2r_g u} = \frac{f(u)}{1 + 2r_g u}. \quad (3.16)$$

Слева стоит $f_3(u)$. Перемножая факторы, стоящие в числителе с левой стороны (3.16), получим с точностью до членов, которыми мы всюду пренебрегаем в этом разделе, функцию $f(u)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выражения для траектории планеты и ее параметров различны в различных системах координат. Поэтому прецизионные измерения этих величин (вообще говоря, с учетом возмущений от других планет и учетом движения света в гравитационном поле от планеты к движущемуся наблюдателю) дают информацию о свойствах рассматриваемых координатных систем.

Полученные соотношения, связывающие ϵ, μ, r_g с u_-, u_+, полезны при анализе наблюдательных данных и проверке их самосогласованности. Конечно, полупериоды не должны зависеть от того, в какой системе координат они вычисляются. Было бы интересно проверить наблюдениями, что в выражениях (2.4) и (3.13) действительно присутствует линейный член rr_g, тогда как в (1.16) его нет. Наблюдать же член, пропорциональный G^2, в обозримом будущем представляется невозможным.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для удобства читателя приведем здесь несколько выражений для интегралов во встречающихся в статье формулах

$$\int\limits_{u_-}^{u_+} \frac{du}{u^2}\frac{1}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} = \pi\frac{u_-+u_+}{2(u_-u_+)^{3/2}},$$

$$\int\limits_{u_-}^{u_+} \frac{du}{u}\frac{1}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} = \pi\frac{1}{\sqrt{u_-u_+}},$$

$$\int\limits_{u_-}^{u_+} du\frac{1}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} = \pi,$$

$$\int\limits_{u_-}^{u_+} duu\frac{1}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} = \frac{\pi}{2}(u_-+u_+).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.
2. *Никишов А. И.* // Краткие сообщ. по физике ФИАН. 2017. Т. 10. С. 17.
3. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. Wiley and Sons, 1972.
4. *Никишов А. И.* // ЭЧАЯ. 2006. Т. 37, вып. 5. С. 1466.
5. *Dehnen H., Hönl H., Westpfahl K.* // Ann. Phys. 1960. 7 Folge, Bd. 6. S. 370–404.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Физматгиз, 1958.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Получено 5 марта 2020 г.