Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 7(239). С. 585–598

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ПЕРЕМЕННЫЕ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

М. В. Останина [1], *П. А. Томази-Вшивцева* [2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой были изложены основные идеи квантования нелинейных систем в окрестности нетривиальных классических решений уравнений движения. Квантование производится с помощью переменных Боголюбова, что позволяет совместить точный учет законов сохранения и теорию возмущений и избежать проблемы нулевых мод. В этой статье с помощью предложенного метода производится квантование взаимодействующих гравитационного и скалярного полей.

The study is a continuation of the article [1], which contained the basic ideas of quantization of nonlinear systems in neighborhood of nontrivial classical solutions of the equations of motion. Quantization is performed using the Bogoliubov variables, which allows one to combine an accurate account of conservation laws and perturbation theory, and avoid the problem of zero modes. In this paper, quantization of interacting gravitational and scalar fields is made by means of this method.

PACS: 03.70.+k; 03.65.Fd; 04.60.-m

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] была предложена схема квантования нелинейных полей на классическом фоне. Метод групповых переменных впервые был обоснован Н. Н. Боголюбовым в [2] и в дальнейшем развит в многочисленных работах разных авторов (список приведен в [1]).

Квантование в терминах переменных Боголюбова позволяет точно учесть законы сохранения и избежать проблемы нулевых мод в том случае, когда классическая компонента выделяется явно. Выделение классического бозонного поля является главным эффектом при квантовании, например, гравитационного поля.

В данной статье мы рассматриваем квантование взаимодействующих гравитационного и скалярного полей. Система описывается следующим образом:

$$S = \int\limits_{\Sigma} d^4x \left(\sqrt{-g} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\phi_{;\mu}\phi^{;\mu} - m^2\phi^2\right)\right).$$

[1] E-mail: kite_qwerty@yahoo.com

[2] E-mail: polina@physics.msu.ru

1. ФОРМАЛИЗМ ОПИСАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Для описания гравитационного поля воспользуемся (3+1)-мерным формализмом (ADM)([3, 8]).

Метрический тензор представляет собой матрицу

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^t b_t & b^t \\ b_t & \gamma_{st} \end{pmatrix},$$

где γ_{st} — метрика трехмерного пространства, вложенного в четырехмерное многообразие. Канонически сопряженный импульс π^{st} определяется как обычно:

$$\pi_{st} = \sqrt{\gamma}\left(\gamma_{st} K - K_{st}\right).$$

В этой формуле

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\det \|\gamma_{st}\|}; \quad K_{tp} = -a\Gamma^0_{tp};$$

$$\Gamma^s_{tp} = \frac{1}{2}\gamma^{sp}\Gamma_{tlp}; \quad \Gamma_{tlp} = \gamma_{pl,t} + \gamma_{pt,l} - \gamma_{tl,p}.$$

Пусть 4D-многообразие с заданной метрикой допускает выбор пространственноподобной гиперповерхности Σ, и на этой гиперповерхности можно задать поле нормалей. Эти нормали касательны геодезическим линиям и определяют временную координату. Тогда геометрия 4D-многообразия может быть описана в гауссовых координатах:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^t b_t & 0 \\ 0 & \gamma_{st} \end{pmatrix}.$$

Гиперповерхность Σ может быть выбрана следующим образом. Пусть в точке X, принадлежащей гиперповерхности Σ, задан вектор нормали $\vec{n}$. Выберем произвольную замкнутую кривую $K \subset \Sigma$, принадлежащую гиперповерхности и проходящую через точку X. После перенесения нормали $\vec{n}$ вдоль этой кривой направление должно совпадать с ее первоначальным — это критерий выбора гиперповерхности Σ. Этот критерий удовлетворяется, если наложить уравнения связи на гамильтониан:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st}\pi^{st} - \frac{1}{2}\pi^2\right) + \sqrt{\gamma}R = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\pi^2_{\mathrm{scal}} - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\left(\gamma^{st}\phi_s\phi_t - m^2\phi^2\right)$$

и импульс:

$$\pi^{sl}_{;l} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2a}\gamma^{st}\phi_0\phi_t.$$

Общие принципы канонического формализма для систем со связями приводят к следующему утверждению: если на описанной выше гиперповерхности выполнены уравнения эволюции

$$\gamma_{st,0} = \frac{2a}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st} - \frac{1}{2}\gamma_{st}\pi\right) + b_{s;t} + b_{t;s},$$

$$\pi^{st}_{,o} = -a\sqrt{\gamma}\left(R^{st} - \frac{1}{2}\gamma^{st}R\right) + \frac{a}{2\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st}\pi^{st} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\gamma^{st} -$$
$$- \frac{a}{2\sqrt{\gamma}}\left(\pi^s_l\pi^{lt} - \frac{1}{2}\pi^{st}\pi\right) + \sqrt{\gamma}\left(\gamma^{sl}c^t_{;l} - \gamma^{st}c^l_{;l}\right) -$$
$$- \frac{a\sqrt{\gamma}}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\phi_0^2 + \gamma^{st}\phi_s\phi_t - m^2\phi\right) + \phi^s\phi^t\right),$$
$$c^l = \gamma^{ls}a_{;s},$$

то в 4D-многообразии верно уравнение Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{c^2}T_{\mu\nu}.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Группа симметрии системы произвольная при условии, что известно представление группы и штрихованные переменные x' связаны с нештрихованными x групповым преобразованием:

$$x' = f(x, a), \quad x'' = f(f(x, a), b) = f(x, c), \quad c = \varphi(a, b).$$

При вариации групповых параметров a вариации координат имеют вид

$$(\delta x')^i = \xi^i_s(x')B^s_p(a)\delta a^p.$$

Пространство-время предполагается искривленным, и вопрос, есть ли у этой системы интегралы движения, сводится к вопросу существования векторов Киллинга. Переменные Боголюбова позволяют восстановить инвариантность системы по отношению к групповым преобразованиям, нарушенную явным выделением классической части. Это значит, что процедура квантования, проведенная на некоторой гиперповерхности Σ в определенный момент времени, будет верной и при перемещении поверхности Σ в соответствии с групповыми законами.

Рассмотрим пары функций $\gamma_{st}(x)$, $\gamma^{st}_n(x)$, $s, t = 1, 2, 3$, и $\phi(x)$, $\phi_n(x)$ и определим преобразование Боголюбова следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{st}(x) &= v_{st}(x') + u_{st}(x'), \quad \gamma^{st}_n(x) = v^{st}_n(x') + u^{st}_n(x'), \\ \phi(x) &= \chi(x') + \zeta(x'), \qquad \phi_n(x) = \chi_n(x') + \zeta_n(x'). \end{aligned} \tag{1}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_{ij}(x) &= \gamma_{ij}(x), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad f_{4j}(x) = f_{i4}(x) = 0, \quad f_{44}(x) = \phi(x), \\ d_{ij}(x') &= v_{ij}(x'), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad d_{4j}(x') = d_{i4}(x') = 0, \quad d_{44}(x') = \chi(x'), \\ h_{ij}(x') &= u_{ij}(x'), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad h_{4j}(x') = u_{i4}(x') = 0, \quad h_{44}(x') = \zeta(x'), \end{aligned}$$

после чего можно утверждать, что выражения

$$f_{ij}(x) = d_{ij}(x') + h_{ij}(x'), \qquad f^{ij}_n(x) = d^{ij}_n(x') + h^{ij}_n(x')$$

при $i, j = 1, 2, 3$ описывают преобразование Боголюбова для гравитации, а при $i = j = 4$ — для скалярного поля.

В этих формулах $h_{ij}(x)$ считаются малыми поправками, групповые параметры a^p рассматриваются как независимые новые переменные, следовательно, замена γ_{st}, $\phi \to u_{st}$, ζ, a^p увеличивает число независимых переменных на r, и поэтому возникает проблема формулировки инвариантных условий, которым следует подчинить функции $u_{st}(x')$, $\zeta(x')$, чтобы сохранить число независимых переменных. Это делается следующим образом: пусть на некоторой пространственноподобной поверхности Σ заданы некоторые функции $N^{ij}(x')$ и $N(x')$ и их нормальные производные. Введем обозначения

$$Z^{ij}(x') = N^{ij}(x'), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

и

$$Z^{i4}(x') = N^{4j}(x') = 0, \quad Z^{44}(x') = N(x').$$

Тогда необходимые дополнительные условия можно записать в виде

$$\omega(h_n^{ij}, Z_{ij}) = \int\limits_{\Sigma} \left(h_n^{ij}(x') Z_{ij}^p(x') - h_{ij}(x') Z_n^{ijp}(x') \right) d\sigma = 0. \tag{2}$$

Функции $Z_{ij}^p(x')$ будут выбраны позже ($p = 1, \ldots, r$, их число равно числу параметров группы). Уравнение (2) позволяет получить выражения для групповых переменных как функционалов $f_{ij}(x)$ и $f_n^{ij}(x)$ на Σ заменой $h_{ij}(x')$ в дополнительных условиях в соответствии с (1).

Обозначим обратную к $B_q^s(a)$ матрицу символом $A_s^p(a)$:

$$B_q^s(a) A_s^p(a) = \delta_q^p$$

и определим величины

$$D_{ij}^l(x') = Z_{ij}^k(x') T_k^l.$$

Матрицы T_s^l — решения уравнения

$$T_s^l = \delta_s^l - T_s^r R_r^l.$$

В этом случае уравнения для групповых переменных можно представить в виде

$$\frac{\delta a^p}{\delta f_{ij}(x)} = A_l^p(a) D_n^{stl}(x'), \quad \frac{\delta a^p}{\delta f_n^{ij}(x)} = -A_l^p(a) D_{st}^l(x').$$

Следствием (2) является линейная зависимость между производными по $h_{ij}(x')$ и $h_n^{ij}(x')$:

$$\int\limits_{\Sigma} d\sigma \left(M_{ijr}(x') \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x')} + M_{nr}^{ij}(x') \frac{\delta}{\delta h_n^{ij}(x')} \right) = 0,$$

где

$$M_{ijr}(x') = \xi_r^l(x') d_{ijl}(x'), \quad M_{nr}^{ij}(x') = \xi_r^l(x') v_{nl}^{ij}(x').$$

Эти соотношения верны при условии соблюдения требований, аналогичных (2):

$$\omega(M_{ija}, N_{ij}^k) = \delta_a^k.$$

Непосредственные вычисления позволяют выразить производные по $f_{ij}(x)$ и $f_n^{ij}(x)$ в терминах новых переменных:

$$\frac{\delta}{\delta f_{ij}(x)} = \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x')} + B_q^p(a)\frac{\delta a^q}{\delta f_{ij}(x)}\left(S_p + A_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}\right). \tag{3}$$

Оператор S_p в полученной формуле определяется соотношением

$$\frac{\delta}{\delta f_n^{ij}(x)} = \frac{\delta}{\delta h_n^{ij}(x')} + B_q^p(a)\frac{\delta a^q}{\delta f_n^{ij}(x)}\left(S_p + A_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}\right),$$

где

$$S_p = -\int\limits_{\Sigma} d\sigma\, \xi_p^l(x')\left(h_{ijl}(x')\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x')} + h_{nl}^{ij}(x')\frac{\delta}{\delta h_n^{ij}(x')}\right).$$

Явные выражения новых переменных и производных по ним в терминах исходных переменных позволяют осуществить квантование системы в терминах новых переменных.

3. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Введем операторы $\hat{q}_{ij}(x)$ и $\hat{p}^{ij}(x')$, где $i,j = 1,2,3$:

$$\begin{aligned}
&\hat{q}_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{ij}(x) + i\frac{\delta}{\delta\gamma_n^{ij}(x)}\right), && \hat{p}^{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_n^{ij}(x) - i\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}(x)}\right),\\
&\hat{q}_{4j}(x) = \hat{q}_{i4}(x) = 0, && \hat{p}^{4j}(x) = \hat{p}^{j4}(x) = 0,\\
&\hat{q}_{44}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(x) + i\frac{\delta}{\delta\phi_n(x)}\right), && \hat{p}^{44}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_n(x) - i\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\right).
\end{aligned}$$

Они определены в пространстве L функционалов F со скалярным произведением

$$\langle F_1|F_2\rangle = \int Df_{ij}Df_n^{ij}F_{1n}[f_{ij}, f_n^{ij}]F_2[f_{ij}, f_n^{ij}].$$

В этом пространстве они самосопряжены и удовлетворяют формальному коммутационному соотношению

$$[\hat{q}_{ij}(x), \hat{p}^{ij}(x')] = i\delta(x - x').$$

Следовательно, $\hat{q}_{ij}(x)$ и $\hat{p}^{ij}(x)$ можно истолковать как операторы координаты и импульса и использовать для вторичного квантования. Но здесь возникает проблема избыточных степеней свободы поля, поскольку существуют самосопряженные операторы

$$\tilde{q}_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-f_{ij}(x) + i\frac{\delta}{\delta f_n^{ij}(x)}\right), \quad \tilde{p}^{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_n^{ij}(x) + i\frac{\delta}{\delta f_{ij}(x)}\right),$$

которые удовлетворяют тому же коммутационному соотношению и коммутируют с $\hat{q_{ij}}(x)$ и $\hat{p^{ij}}(x)$ и, следовательно, определяются в пространстве, ортогональном описанному выше. Поэтому пространство состояний системы нуждается в редукции.

Рассмотрим пространство функционалов $F[z_{ij}, z^{ij*}]$, изоморфное пространству $F[f_{ij}, f_n^{ij}]$. Если определить

$$z_{ij}(x) = f_{ij}(x) + i f_n^{ij}(x), \quad z^{ij*}(x) = f_{ij}(x) - i f_n^{ij}(x),$$

то в пространстве $F[z_{ij}, z^{ij*}]$ редукция производится выбором вектора состояния:

$$F = \left(\exp \int\limits_{\Sigma} z_{ij}(x) z^{ij*}(x)\, d\sigma\right) \Phi[z].$$

Вектор

$$F_0 = \exp\left(\int\limits_{\Sigma} z_{ij}(x) z^{ij*}(x)\, d\sigma\right)$$

является вакуумом операторов рождения-уничтожения осцилляторов поля, построенных на «лишней» паре операторов, так что реализация операторов $\hat{q}_{ij}(x)$ и $\hat{p}^{ij}(x)$ есть голоморфное представление. Ранее определенные уравнения связи (2) не позволяют непосредственно использовать голоморфное представление. Поэтому удобно сначала развить аппарат теории возмущений и лишь после этого провести редукцию.

В новых переменных операторы координаты и импульса имеют вид

$$\hat{q}_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(d_{ij}(x') + h_{ij}(x') + i\frac{\delta}{\delta h_n^{ij}(x')} + B_q^p(a)\frac{\delta a^q}{\delta f_n^{ij}(x)}\left(iS_p + iA_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}\right)\right),$$

$$\hat{p}^{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(d_n^{ij}(x') + h_n^{ij}(x') - i\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x')} - B_q^p(a)\frac{\delta a^q}{\delta f_{ij}(x)}\left(iS_p + iA_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}\right)\right).$$

Чтобы повысить порядок операторов $\partial/\partial\tau^\alpha$, совершим каноническое преобразование заменой вектора состояния ψ:

$$\psi \to \mathrm{e}^{ig^2 J}\psi. \tag{4}$$

После этого операторы $\hat{p}^{ij}(x)$ и $\hat{q}_{ij}(x)$ можно представить в виде

$$\hat{q}_{ij} = \left(\Gamma_{ij}(x') + \hat{\Theta}_{ij}(x') + \Lambda_{ij}(x')\right),$$

$$\hat{p}^{ij} = \left(\Gamma_n^{ij}(x') + \hat{\Pi}^{ij}(x') + \Lambda_n^{ij}(x')\right).$$

Явные выражения для слагаемых:

$$\Gamma_{ij}(x') = d_{ij}(x') + Z_{ij}^p(x^{'})J_p, \quad \Gamma_n^{ij}(x') = d_n^{ij}(x^{'}) + Z_n^{ijp}(x')J_p,$$

$$\hat{\Theta}_{ij}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_{ij}(x') + i\frac{\delta}{\delta h_n^{ij}(x')} - Z_{ij}^k(x')r_k\right),$$
$$\hat{\Pi}^{ij}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_n^{ij}(x') - i\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x')} - Z_n^{ijk}(x')r_k\right),$$

$$\Lambda_{ij}(x') = \frac{\delta a^p}{\delta f_n^{ij}(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right), \quad \Lambda_n^{ij}(x') = \frac{\delta a^p}{\delta f_{ij}(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right),$$

здесь

$$K_p = B_p^q(a)S_q + \frac{\partial}{\partial a^p}, \quad r_k = R_k^p J_p.$$

Итак, мы получили выражения для операторов координаты и импульса осцилляторов поля в терминах новых групповых переменных, что позволит провести квантование системы.

4. ОПЕРАТОРЫ КООРДИНАТЫ И ИМПУЛЬСА

Выражения для операторов координаты и импульса представим в явном виде как отдельные выражения для гравитационного и скалярного полей.

Для гравитационного поля мы имеем ([9, 10])

$$\hat{q}_{st} = \left(F_{st}(x') + \hat{Q}_{st}(x') + A_{st}(x')\right),$$
$$\hat{p}^{st} = \left(F_n^{st}(x') + \hat{P}^{st}(x') + A_n^{st}(x')\right),$$
$$F_{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_{st}(x') + N_{st}^k(x')J_k\right), \quad F_n^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_n^{st}(x') + N_n^{stk}(x')J_k\right), \tag{5}$$
$$\hat{Q}_{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{st}(x') + i\frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')} - N_{st}^k(x')r_k\right),$$
$$\hat{P}^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_n^{st}(x') - i\frac{\delta}{\delta u_{st}(x')} - N_n^{stk}(x')r_k\right),$$
$$A_{st}(x') = \frac{\delta a^p}{\delta \gamma_n^{st}(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right), \quad A_n^{st}(x') = \frac{\delta a^p}{\delta \gamma_{st}(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right),$$

а для скалярного

$$\Phi(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi(x') + N^k(x')J_k\right), \quad \Phi_n(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_n(x') + N_n^k(x')J_k\right),$$
$$\hat{Q}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta(x') + i\frac{\delta}{\delta \zeta_n(x')} - N^k(x')r_k\right),$$
$$\hat{P}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta_n(x') - i\frac{\delta}{\delta \zeta(x')} - N_n^k(x')r_k\right),$$
$$A(x') + \frac{\delta a^p}{\delta \phi_n(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right), \quad A_n(x') = \frac{\delta a^p}{\delta \phi(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right),$$

здесь

$$K_p = B_p^q(a) S_q + \frac{\partial}{\partial a^p}, \quad r_k = R_k^p J_p.$$

Контравариантные компоненты гравитационного поля мы определяем, исходя из условий

$$\hat{q}^{sl}(x)\hat{q}_{st}(x) = \delta_t^l, \quad \hat{q}^{sl}(x)\hat{p}_{st}(x) = \hat{p}^{sl}(x)\hat{p}_{st}(x),$$

и тогда $\hat{q}^{st}$ и $\hat{p}_{st}(x)$ имеют вид

$$\hat{q}^{st}(x) = \left(F^{st}(x') - \hat{Q}^{st}(x') + B^{st}(x')\right),$$

$$\hat{p}_{st}(x) = \left(F_{stn}(x') + \hat{S}_{st}(x') + D_{st}(x')\right),$$

здесь

$$F_n^{st} F_{sl} = F^{st} F_{n_{sl}}, \quad F^{sl} F_{nst} = \delta_t^l, \quad \hat{Q}^{st} = F^{rt} \hat{Q}_{rl} F^{sl},$$

$$B^{st} = F^{sk} \hat{Q}_{kl} F^{lt} \hat{Q}_{sm} F^{mr} - F^{st} A_{sl} F^{lr},$$

$$S_{kl} = F_n^{bt} \left(\hat{Q}_{bt} F_{kl} + \hat{Q}_{bl} F_{kt}\right) + F_{bl} \hat{P}^{st} F_{kt},$$

$$D_{pl} = A_{n_{pl}} + F_n^{st} \left(F_{tp} A_{sl} + F_{sl} A_{tp}\right) + F_n^{sm} \hat{Q}_{sl} \hat{Q}_{mp} + 2 F_{tp} \hat{P}^{st} \hat{Q}_{sl}.$$

В новых переменных гамильтониан может быть представлен в виде ряда по степеням $h_{ij}(x)$:

$$H = H_0 + H_1 + H_2. \tag{6}$$

5. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы построить теорию возмущений, и мы производим квантование заменой для гравитационного поля:

$$\gamma_{st}(x) \mapsto \hat{q}^{st}(x), \quad \gamma_n^{st}(x) \mapsto \hat{p}^{st}(x)$$

и для скалярного поля:

$$\phi(x) \mapsto \hat{q}(x), \quad \phi_n(x) \mapsto \hat{p}(x).$$

Оператор H_0 в (6) — c-числа. Рассмотрим следующий порядок (см. приложение):

$$H_1 = \int\limits_{\Sigma} A_{st}(x') \hat{P}^{st}(x') + B^{st}(x') \hat{Q}_{st}(x') + \int\limits_{\Sigma} C(x') \hat{\Pi}(x') + D(x') \hat{O}(x'),$$

где $A_{st}(x')$, $B^{st}(x')$, $C(x')$ и $D(x')$ имеют вид

$$A_{st}(x') = \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_{stn} - \frac{1}{2} F_n F_{st}\right),$$

$$B^{st} = \frac{a}{2\sqrt{F}}\left(F_{lkn}F_n^{lk} - \frac{1}{2}F_n^2\right)F^{st} - \frac{2a}{\sqrt{F}}\left(F_n^{st}F_n^{kl}F_{stn} - \frac{1}{2}F_nF_n^{st}\right) - \\ - a\sqrt{F}\left(R^{st} - \frac{1}{2}F^{st}R\right) - \sqrt{F}\left(F^{sl}c^t_{;l} - F^{st}c^l_{;l}\right) + \\ + a\frac{\sqrt{F}}{2}\left(\Phi^s\Phi^t + \frac{1}{2}\Phi_{nn}\Phi F^{st}\right) + \frac{a}{4\sqrt{F}}\Phi_n^2F^{st},$$

$$C = \frac{a}{\sqrt{F}}\Phi_n, \quad D = a\sqrt{F}\left(-F^{\lambda\mu}\Phi_{\lambda\mu} - m^2\Phi^2\right).$$

Видно, что оператор H_1 линеен по $u_{st}(x')$, $u_n^{st}(x')$, $\partial/\partial u_{st}(x')$, $\partial/\partial u_n^{st}(x')$, $\zeta(x')$, $\zeta_n(x')$, $\partial/\partial\zeta(x')$, $\partial/\partial\zeta_n(x')$. Поскольку не существует нормируемых собственных векторов такого оператора, для развития теории возмущений необходимо, чтобы он был равен нулю. Выясним, при каких условиях это возможно. Запишем гамильтониан в виде

$$H_1 = \int\limits_\Sigma A_{st}\left(u_n^{st} - i\frac{\delta}{\delta u_{st}} - N_n^{stk}r_k\right) + B^{st}\left(u_{st} + i\frac{\delta}{\delta u_n^{st}} - N_{st}^k r_k\right) + \\ + \int\limits_\Sigma C\left(\zeta_n - i\frac{\delta}{\delta\zeta} - N_n^k r_k\right) + D\left(\zeta + i\frac{\delta}{\delta\zeta_n} - N^k r_k\right),$$

т. е. его можно представить как сумму:

$$H_1 = -i\int\limits_\Sigma A_{st}\frac{\delta}{\delta u_{st}} - B^{st}\frac{\delta}{\delta u_n^{st}} + \int\limits_\Sigma A_{st}\left(u_n^{st} - N_n^{stk}r_k\right) + B^{st}\left(u_{st} - N_{st}^k r_k\right) - \\ - i\int\limits_\Sigma C\frac{\delta}{\delta\zeta} - D\frac{\delta}{\delta\zeta_n} + \int\limits_\Sigma C\left(\zeta_n - N_n^k r_k\right) + \left(\zeta - N^k r_k\right).$$

Напомним, что существует равная нулю линейная форма по $\delta/\delta u_{st}(x')$, $\delta/\delta u_n^{st}(x')$, $\delta/\delta\zeta(x')$, $\delta/\delta\zeta_n(x')$:

$$\int\limits_\Sigma d\sigma\left(M_{str}\frac{\delta}{\delta u_{st}} + M_{nr}^{st}\frac{\delta}{\delta u_n^{st}}\right) + \left(L_r\frac{\delta}{\delta\zeta} + L_{nr}\frac{\delta}{\delta\zeta_n}\right) = 0,$$

где

$$M_{str}(x') = \xi_r^i(x')v_{sti}(x'), \quad M_{nr}^{st}(x') = \xi_r^i(x')v_{ni}^{st}(x'),$$
$$L_r(x') = \xi_r^i(x')\zeta_i(x'), \quad L_{nr}(x') = \xi_r^i(x')\zeta_{ni}(x').$$

Потребуем выполнения следующих соотношений:

$$A_{st}(x') = c^aM_{sta}(x'), \quad B^{st}(x') = c^aM_{na}^{st}(x'),$$
$$C(x') = c^aL_a(x'), \quad D(x') = c^aL_{na}(x').$$

Линейная форма по $u_{st}(x')$, $u_n^{st}(x')$, $\zeta(x')$ и $\zeta_n(x')$ в H_1 имеет вид

$$H_1 = \int\limits_{\Sigma} A_{st}\left(u_n^{st} - N_n^{stk} r_k\right) + B^{st}\left(u_{st} - N_{st}^k r_k\right) + C\left(\zeta_n - N_n^k r_k\right) + D\left(\zeta - N^k r_k\right) =$$

$$= c^a \int\limits_{\Sigma} \left(M_{sta} u_n^{st} - M_{na}^{st} u_{st}\right) - r_k \int\limits_{\Sigma} \left(M_{sta} N_n^{stk} - M_{na}^{st} N_{st}^k\right) +$$

$$+ c^a \int\limits_{\Sigma} \left(L_a \zeta_n - L_{na} \zeta\right) - r_k \int\limits_{\Sigma} \left(L_a N_n^k - L_{na} N^k\right).$$

Принимая во внимание, что $\omega(M_a N^k) = \delta_a^k$ и

$$r_k = R_k^p J_p = J_p \int\limits_{\Sigma} d\sigma \xi_r^i(x') \left(\left(N_{ni}^{stp} u_{st} - N_{sti}^p u_n^{st}\right) + \left(N_{ni}^p \zeta - N_i^p \zeta_n\right)\right),$$

можно утверждать, что линейные формы по $u_{st}(x')$, $u_n^{st}(x')$, $\zeta(x')$ и $\zeta_n(x')$ будут равны нулю, если на Σ выполняются следующие условия:

$$v_{st}(x') = J_k N_{st}^k(x'), \quad F_{st}(x') = \sqrt{2} v_{st}(x'),$$
$$\chi(x') = J_k N^k(x'), \qquad \Phi(x') = \sqrt{2}\chi(x').$$

Здесь же мы получаем выражение для параметров канонического преобразования (4):

$$J_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\Sigma} \left(F_n^{st} M_{stk} - F_{st} M_{nk}^{st}\right) + \left(\Phi_n L_k - \Phi L_{nk}\right)$$

и $c^a = \sqrt{2}$.

Таким образом, можно утверждать, что линейная форма от производных по $u_{st}(x')$, $u_n^{st}(x')$, $\zeta(x')$ $\zeta_n(x')$ в операторе H_1 будет равна нулю, если на Σ выполняются следующие уравнения.

Для скалярного поля:

$$\Box\Phi - a\sqrt{F} m^2 \Phi = 0,$$

т. е.

$$\Phi_{nn} = a\sqrt{F}\left(-F^{\lambda\mu}\Phi_{\lambda\mu} + m^2\Phi\right). \tag{7}$$

Это уравнение можно трактовать как волновое уравнение для скалярного поля в искривленном пространстве-времени, кривизна которого определяется классической компонентой гравитационного поля.

Для гравитационного поля мы получаем пару уравнений:

$$F_{stn} = \frac{2a}{\sqrt{F}}\left(F_{stn} - \frac{1}{2} F_n F_{st}\right),$$

$$F_{nn}^{st} = \frac{a}{2\sqrt{F}}\left(F_{lkn}F_n^{lk} - \frac{1}{2}F_n^2\right)F^{st} - \frac{2a}{\sqrt{F}}\left(F_n^{st}F_n^{kl}F_{stn} - \frac{1}{2}F_nF_n^{st}\right) -$$
$$- a\sqrt{F}\left(R^{st} - \frac{1}{2}F^{st}R\right) - \sqrt{F}\left(F^{sl}c^t_{;l} - F^{st}c^l_{;l}\right) +$$
$$+ a\sqrt{F}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\Phi_0^2 + F^{pr}\Phi_p\Phi_r - m^2\Phi^2\right)F^{st} - \Phi^s\Phi^t + \frac{F^{st}}{F}\Phi_n\right), \quad (8)$$

которые можно трактовать как уравнения эволюции. Здесь и далее мы предполагаем, что $F_{st}(x)$ является решением уравнения (8), а $F_{st}(x')$ и $F_n^{st}(x')$ являются решением задачи Коши на Σ, так что в 4D-многообразии выполняются уравнения эволюции. Уравнения связи

$$\frac{1}{\sqrt{F}}\left(F_n^{st}F_{stn} - \frac{1}{2}F_n^2\right) - \sqrt{F}R(F) = \frac{1}{2\sqrt{F}}\Phi_n^2 - \frac{\sqrt{F}}{2}\left(F^{st}\Phi_s\phi_t - m^2\Phi^2\right),$$

$$F^{sl}_{;l} = \frac{\sqrt{F}}{2}F^{st}\Phi_n\Phi_t$$

мы накладываем как условия выбора поверхности Σ. Таким образом, можно утверждать, что в 4D-пространстве должны выполняться уравнения Эйнштейна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье нами использованы переменные Боголюбова для квантования системы гравитационного и скалярного полей. Были введены новые групповые переменные, и с их помощью проведено квантование системы. Классические части рассматриваемых полей выделены явно, и нами получено волновое уравнение для классической части скалярного поля и уравнения Эйнштейна для классической части гравитационного поля как необходимые условия применимости теории возмущений.

Задачей следующей статьи будет построение пространства состояний системы, в котором будет проведена редукция числа состояний на примере группы пространственно-временных трансляций. Получим уравнения для квантовых поправок, а также выражения для гамильтониана как генератора трансляций по времени. В качестве примера рассмотрим линейную гравитацию.

Приложение

РАЗЛОЖЕНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Разложим гамильтониан гравитационного поля в ряд:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st}\pi^{st} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - \sqrt{\gamma}R.$$

Ведущий порядок зависит только от классической части и является c-числом:

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{F}}\left(F_{n_{st}}F_n^{st} - \frac{1}{2}F_n^2\right) - \sqrt{F}R(F),$$

а следующий порядок линеен по квантовым добавкам и производным по ним:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{F}}\left(\frac{1}{2}\left(F_{n_{kl}}F_n^{kl} - \frac{1}{2}F_n^2\right)F^{st}\hat{Q}_{st} + \left(\hat{P}^{st}F_{n_{st}} + F_n^{st}S_{st}\right) - \right.$$
$$\left. - F_n\left(\hat{P}^{st}F_{n_{st}} + \hat{Q}_{st}F_n^{st}\right)\right) - \sqrt{F}\left(\frac{1}{2}F^{st}R_{st}(F)\hat{Q}_{st} - \hat{Q}^{st}R_{st}(F) + F^{st}R_{st}(F,\hat{Q})\right).$$

Рассмотрим последнее слагаемое $a\sqrt{F}F^{st}R_{st}(F,\hat{Q})$. Напомним, что $\Gamma^s_{lt} = \gamma^{sp}\Gamma_{ltp}$, следовательно, символы Кристоффеля являются рядами:

$$\Gamma_{ltp} = \Gamma_{ltp}(F) + \frac{1}{g}\Gamma_{ltp}(\hat{Q}) + \frac{1}{g^2}\Gamma_{ltp}(A),$$

тогда

$$\Gamma^s_{lt} = \Gamma^s_{lt}(F) + \frac{1}{g}\Gamma^s_{lt}(\hat{Q}),$$

где

$$\Gamma^s_{lt}(\hat{Q}) = \left(F^{sp}\Gamma_{ltp}(\hat{Q}) - \hat{Q}^{sp}\Gamma_{ltp}(F)\right).$$

Принимая во внимание, что

$$\hat{Q}_{tp;l} = \hat{Q}_{tp,l} - \Gamma^m_{lt}(F)\hat{Q}_{mp} - \Gamma^m_{lp}(F)\hat{Q}_{mt},$$

замечаем:

$$\Gamma_{ltp}(\hat{Q}) = \frac{1}{2}\left(\hat{Q}_{tp;l} + \hat{Q}_{lp;t} - \hat{Q}_{lt;p}\right) - 2\hat{Q}_{mp} + \Gamma^m_{lt}(F).$$

Можно утверждать, что

$$\Gamma^s_{lt}(\hat{Q}) = \frac{1}{2}F^{sp}\left(\hat{Q}_{tp;l} + \hat{Q}_{lp;t} - \hat{Q}_{lt;p}\right),$$

следовательно, тензор Риччи тоже является рядом:

$$R_{st} = R_{st}(F) + \frac{1}{g}R_{st}(F,\hat{Q}) + \frac{1}{g^2}R_{st}(F,\hat{Q},A),$$

где

$$R_{st}(F,\hat{Q}) = \Gamma^l_{st;l}(\hat{Q}) - \Gamma^l_{st;t}(\hat{Q}) +$$
$$+ \Gamma^l_{st}(\hat{Q})\Gamma^m_{lm}(F) + \Gamma^l_{st}(F)\Gamma^m_{lm}(\hat{Q}) - \Gamma^m_{sl}(\hat{Q})\Gamma^l_{mt}(F) - \Gamma^m_{sl}(F)\Gamma^l_{mt}(F),$$

так что

$$R_{st}(F,\hat{Q}) = \left(\Gamma^l_{st}(\hat{Q})\right)_{;l} - \left(\Gamma^l_{sl}(\hat{Q})\right)_{;t}.$$

Таким образом, рассматриваемое слагаемое равно

$$a\sqrt{F}F^{st}R_{st}(F,\hat{Q}) = \sqrt{F}\left(aF^{st}\Gamma^l_{st}(\hat{Q})\right)_{,l} - \sqrt{F}\left(aF^{st}\Gamma^l_{sl}(\hat{Q})\right)_{,t} +$$
$$+ \sqrt{F}F^{st}a_{;t}\Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) - \sqrt{F}F^{st}a_{;t}\Gamma^l_{sl}(\hat{Q}).$$

Обозначим

$$c^s = a_{;t} F^{st}.$$

Рассмотрим форму

$$\sqrt{F} F^{st} a_{;t} \Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) = \sqrt{F} c^s \frac{1}{2} F^{lp} \left(\hat{Q}_{sp;_l} + \hat{Q}_{lp;_s} - \hat{Q}_{sl;_p} \right).$$

Примем во внимание, что следующее выражение равно нулю:

$$F^{lp} \left(\hat{Q}_{sp;_l} - \hat{Q}_{sl;_p} \right) = 0,$$

поскольку содержит произведение симметричного и антисимметричного тензоров. Аналогично

$$\sqrt{F} F^{st} a_{;t} \Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{F} c^s F^{lp} \hat{Q}_{lp} \right)_{;s} - \frac{1}{2} \sqrt{F} F^{lp} \hat{Q}_{lp} c^s_{;s}$$

и

$$\sqrt{F} F^{st} a_{;l} \Gamma^l_{st}(\hat{Q}) = \mathrm{Div} + \frac{1}{2} \sqrt{F} F^{lp} \hat{Q}_{lp} c^s_{;s} - \sqrt{F} F^{sl} \hat{Q}_{lp} c^p_{;s},$$

и наконец слагаемые принимают вид

$$a \sqrt{F} F^{st} R_{st}(F, \hat{Q}) = \mathrm{Div} + \sqrt{F} \hat{Q}_{st} \left(F^{sp} c^t_{;p} - F^{st} c^p_{;p} \right).$$

Аналогично можно утверждать

$$a \sqrt{F} F^{st} R_{st}(F, \hat{Q}, A) = \mathrm{Div} + \sqrt{F} A_{st} \left(F^{sp} c^t_{;p} - F^{st} c^p_{;p} \right).$$

Рассмотрим следующий порядок этих слагаемых:

$$a \sqrt{F} F^{st} F^{st} \hat{Q}_{st} R_{st}(F, \hat{Q}) = \mathrm{Div} + \sqrt{F} F^{st} (a\hat{Q})_{;t} \Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) - \sqrt{F} F^{st} (a\hat{Q})_{;l} \Gamma^l_{st}(\hat{Q}).$$

Обозначим

$$r^s = (a\hat{Q})_{;t} F^{st}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$a \sqrt{F} F^{st} \hat{Q} R_{st}(F, \hat{Q}) = \sqrt{F} \hat{Q} \left(F^{sp} r^t_{;p} - F^{st} r^p_{;p} \right) =$$
$$= \sqrt{F} \left(F^{sp} c^t_{;p} - F^{st} c^p_{;p} \right) \hat{Q}_{st} \hat{Q}_{st} F^{st} + a \sqrt{F} F^{st} \left(F^{sp} F^{tr} - F^{st} F^{pr} \right) \hat{Q}_{st,_{pr}}.$$

Тогда эти слагаемые имеют вид

$$a \sqrt{F} \hat{Q}^{st} R_{st}(F, \hat{Q}) = \sqrt{F} \left(a\hat{Q}^{st} \right)_{;t} \Gamma^l_{sl}(\hat{Q}) - \sqrt{F} \left(a\hat{Q}^{st} \right)_{;l} \Gamma^l_{st}(\hat{Q}) =$$
$$= \sqrt{F} \left(F^{sp} a_{;tp} \hat{Q}^{st} - F^{st} a_{;tp} \hat{Q}^{pt} \right) \hat{Q}_{st} + a \sqrt{F} F^{st} \left(F^{sp} \hat{Q}^{st}_{;tp} - F^{st} \hat{Q}^{pt}_{;tp} \right) \hat{Q}_{st}.$$

Так что

$$S_1 = \hat{P}^{st}(x') F_{n_{st}}(x') + F^{st}_n(x') \hat{Q}_{n_{st}}(x') + a H_1(F, \hat{Q}) =$$
$$= \int\limits_{\Sigma} A_{st}(x') \hat{P}^{st}(x') + B^{st}(x') \hat{Q}_{st}(x'),$$

$$A_{st} = \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_{n_{st}} - \frac{1}{2} F_n F_{st} \right),$$

$$B^{st} = \frac{a}{2\sqrt{F}} \left(F_{n_{kl}} F_n^{kl} - \frac{1}{2} F_n^2 \right) F^{st} - \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_n^{st} F_n^{kl} F_{n_{st}} - \frac{1}{2} F_n F_n^{st} \right) - \\ - a\sqrt{F} \left(R^{st} - \frac{1}{2} F^{st} R \right) - \sqrt{F} \left(F^{sl} c^t_{;l} - F^{st} c^l_{;l} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Останина М. В., Томази-Вшивцева П. А.* Квантование нелинейных полей с помощью переменных Боголюбова // Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 6(238). С. 534–540.
2. *Боголюбов Н. Н.* Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // Укр. мат. журн. 1950. Т. 2, № 2. С. 3–24.
3. *Арновитт Р., Дизер С., Миснер К. В.* Динамика общей теории относительности // Эйнштейновский сб., 1966. М.: Наука, 1967. С. 233–286.
4. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Gravitational Electromagnetic Coupling and the Classical Self-Energy Problem // Phys. Rev. 1960. V. 120, No. 1. P. 863–870.
5. *Choquet-Bruhat Y., Georch R.* // Commun. Math. Phys. 1969. No. 14. P. 335.
6. *York J. W.* Gravitational Degrees of Freedom and the Initial Value Problem // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26, No. 26. P. 1656–1658.
7. *York J. W.* Mapping onto Solutions of the Gravitational Initial Value Problem // J. Math. Phys. 1972. V. 13, No. 2. P. 125–130.
8. *Fisher A. E., Marsden J. E.* The Einstein Equations of Evolution — A Geometric Approach // J. Math. Phys. 1972. V. 13, No. 4. P. 546–568.
9. *Хрусталев О. А., Чичикина М. В., Тимофеевская О. Д.* Групповые переменные в квантовой гравитации // Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2002. Т. 51, № 2. С. 224–233.
10. *Хрусталев О. А., Чичикина М. В., Тимофеевская О. Д.* Пространство состояний квантованного гравитационного поля // Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2003. № 6. С. 11–14.

Получено 28 января 2021 г.