Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 7(239). С. 611–619

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ФОКА–ГОРДОНА И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ НА ОРИСФЕРЕ ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Ю. А. Курочкин[а,1], *Ю. А. Кульчицкий*[а,б], *С. Н. Гаркуша*[а], *Н. А. Русакович*[б]

[а] Институт физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Белоруссии, Минск

[б] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Найдены решения уравнения Клейна–Фока–Гордона в квазидекартовых переменных трехмерного релятивистского импульсного пространства Лобачевского, связанных с орисферами данного пространства. На орисферах реализуется геометрия евклидовой плоскости. Данное представление решений уравнения Клейна–Фока–Гордона тесно связано с инвариантными геометрическими образами (орисферой, пучком параллельных, осью пучка параллельных) трехмерного пространства Лобачевского, в нем естественным образом возникает часть, связанная с выделенным направлением — осью пучка параллельных, ортогональных орисфере. Такое представление адекватно кинематике падающей частицы в лабораторной системе в процессах столкновений частиц. Установлена связь полученных решений с обычными когерентными состояниями на орисфере импульсного пространства Лобачевского.

The solutions that satisfy the Klein–Fock–Gordon equation in quasi-Cartesian coordinates of the three-dimensional relativistic momentum Lobachevsky space associated with the horospheres of this space are found. The Euclidean plane geometry is realized on these horospheres. This representation of solutions to the Klein–Fock–Gordon equation is closely related to invariant geometric images (horosphere, parallel bundle, parallel bundle axis) of the three-dimensional Lobachevsky space, in which a part naturally arises associated with the selected direction — the parallel bundle axis orthogonal to horospheres. Such a representation is adequate to the kinematics of an incident particle in a laboratory system in the processes of particle collisions. The connection of the obtained solutions with the usual coherent states on the horosphere of the Lobachevsky momentum space is established.

PACS: 14.20.Dh; 12.38.-t; 13.85.Hd

ВВЕДЕНИЕ

В процессах столкновения лептонов и адронов, а также в адрон-адронных процессах важно выбирать кинематику, учитывающую неточечность адронов, а также выделенность направления, связанного с направлением импульсов сталкивающихся

[1] E-mail: y.kurochkin@dragon.bas-net.by

частиц. Данное обстоятельство особенно важно при очень высоких энергиях, как это имеет место, например, в pp-столкновениях на Большом адронном коллайдере. Для описания процессов с участием адронов вводятся адекватные переменные — например, Бьеркена.

Как известно, релятивистская кинематика допускает формулировку в терминах трехмерной геометрии Лобачевского [1–3]. В пространстве Лобачевского существуют геометрические (инвариантные) образы и соответствующие им координаты, в которых естественным образом выделено направление — ось пучка параллельных, а на ортогональной пучку параллельных поверхности (орисфере) реализуется геометрия Евклида. Данное обстоятельство важно, потому что на упомянутой поверхности стандартным образом можно построить когерентные состояния после разделения переменных на переменные на орисфере и вдоль оси пучка параллельных, к которым ортогональна орисфера. В принципе, существует проблема введения когерентных состояний в релятивистском случае [4]. Однако наличие орисфер, поверхностей, на которых реализуется геометрия двухмерного пространства Евклида, позволяет ввести обычные когерентные состояния на орисферах [5–7]. Задачей работы является построение решений в переменных, связанных с орисферой трехмерного пространства Лобачевского, для простейшего релятивистского уравнения — уравнения Клейна–Фока–Гордона.

КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССА СТОЛКНОВЕНИЯ

Рассмотрим столкновение двух адронов при высоких энергиях. Пусть, например, это будут протоны в процессах на Большом адронном коллайдере. Пусть сталкивающиеся протоны обладают 4-импульсами:

$$\begin{gathered} p_1 = (\mathbf{p}_1 i p_{01}), \quad p_2 = (\mathbf{p}_2 i p_{02}), \\ p_1^2 = \mathbf{p}_1{}^2 - p_{01}^2 = \mathbf{p}_2{}^2 - p_{02}^2 = -m_p^2, \end{gathered} \tag{1}$$

здесь m_p — масса протона. Мы используем систему единиц, в которой $h = c = 1$. Столкновение осуществляется при фиксированном значении энергии $\sqrt{S}$ в системе центра инерции. Здесь

$$\begin{aligned} S &= -(p_1 + p_2)^2 = -P^2 = -P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 + P_0^2 = \\ &= -(p_{x1} + p_{x2})^2 - (p_{y1} + p_{y2})^2 - (p_{z1} + p_{z2})^2 + (p_{01} + p_{02})^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$P = (\mathbf{P}, iP_0) = [p_{x1} + p_{x2}, p_{y1} + p_{y2}, p_{z1} + p_{z2}, +i(p_{01} + p_{02})].$$

Отметим, что в лабораторной системе отсчета (системе покоя, например, второго протона)

$$P = (\mathbf{P}, iP_0) = [p_x, p_y, p_z, i(p_0 + m_p)], \tag{3}$$

где $p = (p_x, p_y, p_z, i(p_0)) = (\mathbf{p}, ip_0)$ — 4-импульс налетающего протона в системе отсчета, где второй протон покоится.

В дальнейшем потребуется следующая параметризация 4-импульса, соответствующая введению квазидекартовых координат на орисфере импульсного пространства

Лобачевского, реализуемого на верхней поле гиперболоида (2) (см. [8]):

$$P_z = \frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{2q_z}{\sqrt{S}}\right) + \left(\frac{q_x^2+q_y^2}{S} - 1\right)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right],$$
$$P_x = q_x \exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right), \quad P_y = q_y \exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right), \tag{4}$$
$$P_0 = \frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{2q_z}{\sqrt{S}}\right) + \left(\frac{q_x^2+q_y^2}{S} + 1\right)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right].$$

Формулы, обратные формулам (4), такие:

$$q_x = \frac{P_x\sqrt{S}}{P_0 - P_z}, \quad q_y = \frac{P_y\sqrt{S}}{P_0 - P_z}, \quad q_z = \sqrt{S}\ln\frac{\sqrt{S}}{P_0 - P_z}. \tag{5}$$

Метрический элемент в координатах (4) имеет вид

$$dS^2 = \exp\left(\frac{-2q_z}{\sqrt{S}}\right)(dq_x^2 + dq_y^2) + dq_z^2,$$

а элемент объема

$$dV_m = \sqrt{g}\,dq_x\,dq_y\,dq_z = \exp\left(\frac{-2q_z}{\sqrt{S}}\right)dq_x\,dq_y\,dq_z. \tag{6}$$

Важной его особенностью является разделение переменных q_x, q_y и q_z, чего не допускают координаты четырехмерного объемлющего пространства. Это дает возможность предположить, что можно рассматривать физику в плоскости переменных q_x, q_y независимо от переменной q_z:

$$\Psi_1(x,y)\Psi_2(z) \leftrightarrow F\phi_1(q_x,q_y)\phi_2(q_z).$$

Ниже будет показано, какие ограничения на точные решения релятивистского уравнения, описывающего налетающий протон, обеспечивают такое разделение.

Введение квазидекартовых координат (4), (5) автоматически обеспечивает масштабную инвариантность теории по поперечным переменным q_x и q_y (координатам на орисфере), т. е. инвариантность относительно преобразований

$$P_x^{'} = \lambda P_x, \quad P_y^{'} = \lambda P_y, \quad P_z^{'} = \lambda P_z, \quad P_0^{'} = \lambda P_0,$$

которая справедлива при любых значениях $\sqrt{S}$. Последнее также находится в соответствии с евклидовостью геометрии на орисфере. Фундаментальная роль масштабной инвариантности в процессах множественного рождения частиц была указана в работах В. А. Матвеева, Р. М. Мурадяна и А. Н. Тавхелидзе (см. [9, 10]).

Поскольку орисфера трехмерного пространства Лобачевского несет на себе геометрию двумерного пространства Евклида, можем ввести сопряженные координаты в импульсном пространстве стандартным образом [7]:

$$q_x, \quad q_y, \quad x = -i\frac{\partial}{\partial q_x}, \quad y = -i\frac{\partial}{\partial q_y}. \tag{7}$$

При этом имеет место алгебра Гейзенберга–Вейля:

$$\begin{aligned} [x, q_x] &= [y, q_y] = iI, \\ [x, y] &= [q_x, q_y] = 0, \\ [x, I] &= [y, I] = [q_x, I] = [q_y, I] = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где I — единичный оператор.

Алгебра (7), (8) достаточна для построения квантово-механических когерентных состояний на орисфере. Тогда операторы рождения и уничтожения построим следующим образом (см. [7]):

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Rq_x + i\dfrac{x}{R}}{\sqrt{2}}, \quad a_x^+ = \frac{Rq_x - i\dfrac{x}{R}}{\sqrt{2}}, \\ a_y &= \frac{Rq_y + i\dfrac{y}{R}}{\sqrt{2}}, \quad a_y^+ = \frac{Rq_y - i\dfrac{y}{R}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Алгебра (8) может быть выражена так:

$$[a_k, a_l^+] = \delta_{kl} I, \quad [a_k^+, a_l^+] = [a_k, a_l] = [a_k, I] = [a_k^+, I] = 0, \tag{10}$$

где k, $l = 1{,}2$ соответствуют x или y.

Когерентные состояния, как известно, определяются как собственные состояния операторов уничтожения с комплексными собственными значениями:

$$a_x|z_1\rangle = z_1|z_1\rangle, \quad a_y|z_2\rangle = z_2|z_2\rangle. \tag{11}$$

СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА НА ГИПЕРБОЛОИДЕ ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА С КРИВИЗНОЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ЭНЕРГИЕЙ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ

Построим волновую функцию системы двух сталкивающихся частиц в лабораторной системе одной из них в предположении, что вторая описывается скалярной функцией, удовлетворяющей уравнению Клейна–Фока–Гордона с квадратом массы S. При этом учтем, что импульс системы в лабораторной системе отсчета задается выражением (3). Слагаемое массы убирается с помощью умножения волновой функции на множитель $\exp{(imx_0)}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - S\right)\Psi(x, y, z, x_0) = 0, \tag{12}$$

где x, y, z, x_0 — координаты и время налетающего протона соответственно.

Как известно, в этом случае решение уравнения можно представить в виде фурье-интеграла:

$$\begin{aligned} \Psi^{\pm}(x, y, z, x_0) = (2\pi)^{-3/2} \int \delta(P^2 + S)\Phi^{\pm}(P_x, P_y, P_z, P_0) \times \\ \times \exp{[\pm i(xP_x + yP_y + zP_z - x_0P_0)]} d^4P = \\ = \int \Phi^{\pm}(P_x, P_y, P_z, P_0) \exp{[\pm i(xP_x + yP_y + zP_z - x_0P_0)]} \frac{d^3P}{2P_0}. \end{aligned} \tag{13}$$

Интеграл (13) определен на гиперболоиде (2), о чем свидетельствует δ-функция, и инвариантен относительно преобразований группы движений данного гиперболоида, на котором реализуется геометрия трехмерного пространства Лобачевского. Группой движений является группа Лоренца. Параметризация подынтегральных выражений орисферическими переменными, как в (4), с учетом инвариантности меры (интеграла (13)) относительно преобразований группы движений пространства 4-импульсов автоматически обеспечивает, как и в случае интеграла (13), задание волновой функции, являющейся решением уравнения Клейна–Фока–Гордона на гиперболоиде, определенным уравнением (12). В этом случае интеграл (13) запишется в виде

$$\Psi^{\pm}(x,y,z,x_0) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp\left(\frac{-2q_z}{\sqrt{S}}\right) dq_z\, dq_x\, dq_y \phi^{\pm}(q_z,q_y,q_z)\times$$
$$\times \exp \pm i\left\{(xq_x+yq_y)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) - z\frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)+\left(\frac{q_x^2+q_y^2}{S}-1\right)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]-\right.$$
$$\left. - x_0\frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)+\left(\frac{q_x^2+q_y^2}{S}+1\right)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]\right\}. \quad (14)$$

Рассмотрим некоторые напрашивающиеся приближения, а именно, примем, что

$$\frac{q_x^2+q_y^2}{S} \ll 1. \quad (15)$$

Для обоснования возможности использования приближения (15) рассмотрим релятивистский инвариант S:

$$S \equiv (q_x^2+q_y^2)\exp\left(\frac{-2q_z}{\sqrt{S}}\right) + \frac{S}{4}\left[\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)+\left(\frac{q_x^2+q_y^2}{S}-1\right)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]^2 -$$
$$- \frac{S}{4}\left[\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)+\left(\frac{q_x^2+q_y^2}{S}+1\right)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]^2. \quad (16)$$

Как видно из выражения (16), в случае выполнения условия (15), т. е. когда величиной $q_x^2+q_y^2$ пренебрегаем по сравнению с S, равенство в (16) по-прежнему выполняется тождественно.

В этом случае вместо интеграла (14) рассмотрим следующее выражение:

$$\Psi^{\pm}(x,y,z,x_0) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp\left(\frac{-2q_z}{\sqrt{S}}\right) dq_z\, dq_x\, dq_y\, \phi^{\pm}(q_z,q_y,q_z)\times$$
$$\times \exp \pm i\left\{(xq_x+yq_y)\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) - z\frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)-\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]-\right.$$
$$\left. - x_0\frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)+\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]\right\}, \quad (17)$$

которое, как легко убедиться, удовлетворяет двумерному волновому уравнению. Для установления данного факта и для дальнейших преобразований выражение (17) удобно представить в переменных светового конуса (волнового фронта), т. е.

$$\Psi^{\pm}(x,y,z,x_0) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp\left(\frac{-2q_z}{\sqrt{S}}\right) dq_z\, dq_x\, dq_y\, \phi^{\pm}(q_z,q_y,q_z) \times$$
$$\times \exp \pm i \Bigg\{ (xq_z + yq_y) \exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) - (z+x_0)\frac{\sqrt{S}}{2} \exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right) +$$
$$+ (z-x_0)\frac{\sqrt{S}}{2}\left[\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]\Bigg\}. \quad (18)$$

Тогда упомянутое уравнение запишется в виде

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial w \partial \overline{w}} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_0^2} = S\Psi, \quad (19)$$

где введены переменные светового конуса

$$w = (z+x_0), \quad \overline{w} = (z-x_0), \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x_0}\right) \quad (20)$$

и опущены вторые производные по x и y в силу условия (15).

Из того факта, что функция удовлетворяет уравнению (19), следует:

$$\exp \pm i \left[(z-x_0)\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) - (z+x_0)\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)\right] =$$
$$= \exp \pm i \left[\overline{w}\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) - w\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)\right] \quad (21)$$

образуют полный набор, когда вместо фиксированного S в (21) берется непрерывный положительный спектральный параметр. Выражение (18) можно рассматривать как интеграл:

$$f(\overline{w},w)^{\pm} = \pi^{1/2} \int dq_z\, \chi^{\pm}(q_z) \exp \pm i \left[\overline{w}\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) - w\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)\right],$$

где функция $\chi^{\pm}(q_z)$ определяется выражением

$$\chi^{\pm}(q_z) = \pi^{-1} \int dq_x\, dq_y\, \phi^{\pm}(q_x,q_y,q_z) \exp \pm i \left[xq_x \exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right) + yq_y \exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right)\right]. \quad (22)$$

Теперь исследуем подынтегральную функцию — волну, которая получилась в результате принятых приближений (15). Исследуем волну безотносительно принятых приближений. Она имеет вид

$$\Psi(x',y',w,\overline{w}) = \phi^{\pm}(q_x,q_y,qz) \times$$
$$\times \exp \pm i \left[x'q_x + y'q_y - w\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right) + \overline{w}\frac{\sqrt{S}}{2}\exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right)\right], \quad (23)$$

где
$$x' = x\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right), \quad y' = y\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right).$$

Переменные x' и y' являются канонически сопряженными к q_x и q_y по отношению к перестановочным соотношениям (8).

Выражение (23) удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial w \partial \overline{w}} = \left(S - q_x^2 - q_y^2\right)\Psi, \tag{24}$$

где
$$S - q_x^2 - q_y^2 \tag{25}$$

— собственные значения оператора Даламбера.

Таким образом, волна (23) удовлетворяет двумерному волновому уравнению, а также уравнению (24), если ее рассматривать независимо от предположения (15) и допускать малые по сравнению с S возбуждения в плоскости (x, y). В ней разделены переменные q_x, q_y и q_z. Волна (23) может рассматриваться как высокоэнергетический предел подынтегрального выражения (14).

ВОЛНА (21) КАК КОГЕРЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ

Введем операторы рождения и уничтожения $a_1^{\pm}$ и $a_2^{\pm}$ стандартным образом, предположив существование константы R размерности длины. Тогда
$$a_1^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mp x_1\right), \quad a_2^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \mp x_2\right), \tag{26}$$

где $x_1 = x'/R$, $x_2 = y'/R$, а $R = 1/\sqrt{S}$ — комптоновская длина волны частицы, описываемая уравнением Клейна–Фока–Гордона. Отметим, что в теории свободной релятивистской квантово-механической массивной частицы всегда есть постоянная размерности длины.

Волна (23) является когерентным состоянием в традиционном понимании по переменным x' и y'. Действительно, действуя операторами a_1^- и a_2^- на (23), получаем
$$a_1^-\Psi(x', y', w, \overline{w}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\right)\Psi(x', y', w, \overline{w}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(iRq_x + \frac{x'}{R}\right)\Psi(x', y', w, \overline{w}), \tag{27}$$

$$a_2^-\Psi(x', y', w, \overline{w}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\right)\Psi(x', y', w, \overline{w}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(iRq_y + \frac{y'}{R}\right)\Psi(x', y', w, \overline{w}), \tag{28}$$

где $\Psi(x', y', w, \overline{w})$ — собственная функция (23) операторов уничтожения (26). Особенностью введенных когерентных состояний является то, что q_x и q_y являются величинами фиксированными. Таким образом, в отличие от когерентных состояний (11) собственные значения операторов уничтожения заданы не во всей комплексной плоскости, а на прямой, отстоящей от мнимой оси на iRq_x или iRq_y.

Исходная падающая частица может быть суперпозицией нескольких когерентных состояний (23), (27), (28) или даже их континуумом в отношении переменных q_x и q_y. В частности, если проинтегрировать выражения (27), (28), будем иметь

$$\begin{aligned}\Psi(x', y', w, \overline{w}) = \exp \pm \left\{ -i \left[w\frac{\sqrt{S}}{2} \exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right) - \overline{w}\frac{\sqrt{S}}{2} \exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) \right] \right\} \times \\ \times \int dq_x\, dq_y\, a^-_{1(2)} \phi^{\pm}(q_x, q_y, q_z) \exp \pm i(x'q_x + y'q_y) = \\ = \exp \pm \left\{ -i \left[w\frac{\sqrt{S}}{2} \exp\left(\frac{q_z}{\sqrt{S}}\right) - \overline{w}\frac{\sqrt{S}}{2} \exp\left(\frac{-q_z}{\sqrt{S}}\right) \right] \right\} \times \\ \times \int dq_x\, dq_y \left(iRq_{x'(y')} + \frac{x'(y')}{R} \right) \phi^{\pm}(q_x, q_y, q_z) \exp \pm i(x'q_x + y'q_y), \quad (29)\end{aligned}$$

где очевидно, что функция $\Psi(x, y, w, \overline{w})$ по-прежнему удовлетворяет двумерному уравнению (19).

Поскольку выражения (27), (28) являются отдельными модами в разложениях (29), то их можно рассматривать как демонстрацию перехода от квантованного поля (левая часть в (27), (28)) к классическому (правая часть в (27), (28)). Известно, что именно когерентные состояния наиболее близки к классическим и их использование для описания переходов от квантово-полевой системы к классической закономерно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в работе решения уравнения Клейна–Фока–Гордона, заданные на верхней поле гиперболоида релятивистского импульсного пространства, на котором для фиксированной инвариантной энергии падающей частицы реализуется геометрия трехмерного пространства Лобачевского, параметризованы квазидекартовыми координатами. В этом случае принадлежность решений гиперболоиду выполняется тождественно. Параметризация решений квазидекартовыми координатами обеспечивает геометрическую интерпретацию решений, связанную с орисферами импульсного пространства, на которых реализуется геометрия евклидовой плоскости.

Рассмотрено приближенное решение уравнения Клейна–Фока–Гордона при малой составляющей кинетической энергии на орисфере по сравнению с энергией падающей частицы. В этом случае решение удовлетворяет четырехмерному уравнению Клейна–Фока–Гордона и, из-за возможности разделения переменных, двумерному уравнению Клейна–Фока–Гордона.

Рассмотренное в работе представление решения уравнения Клейна–Фока–Гордона адекватно кинематике падающей частицы в лабораторной системе в процессах столкновений двух частиц. Установлена связь полученных решений с обычными когерентными состояниями на орисфере импульсного пространства Лобачевского.

Авторы благодарят В. М. Редькова и М. И. Левчука за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черников Н. А.* Геометрии Лобачевского и релятивистская кинематика // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4, вып. 3. С. 773–810.
2. *Смородинский Я. А.* Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна // Эйнштейновский сб. М.: Наука, 1972. С. 272–301.
3. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск, 1989. 202 с.
4. *Богров В. Г., Гитман Д. М., Тернов И. М. и др.* Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982. 146 с.
5. *Курочкин Ю. А., Рыбак И. Ю., Шелковый Д. В.* Когерентные состояния на орисфере пространства Лобачевского // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 5. С. 44–48.
6. *Kurochkin Yu., Rybak I., Shoukavy Dz.* Coherent States on Horospheric Three-Dimensional Lobachevsky Space // J. Math. Phys. 2016. V. 57, No. 8. P. 082111.
7. *Kurochkin Y., Kulchitsky Y., Harkusha S., Russakovich N.* Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13, No. 3. P. 285–288.
8. *Олевский М. Н.* Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ допускает полное разделение переменных // Матем. сб. 1950. Т. 27(69), № 3. С. 379–426.
9. *Матвеев В. А.* Глубоконеупругие лептон-адронные процессы при высоких энергиях // Междунар. шк. молодых ученых по физике высоких энергий: Сб. тр., Гомель, 25 авг. – 5 сент. 1973 г. Дубна, 1973. С. 81–172.
10. *Мурадян Р. М.* Автомодельность в инклюзивных реакциях. Препринт ОИЯИ Р2-6762. Дубна, 1972.

Получено 11 марта 2021 г.