Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 7(239). С. 620–632

БЕЗМАССОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $ISO(1{,}5)$

И. Л. Бухбиндер [а, б, 1], *А. П. Исаев* [в, г, 2], *М. А. Подойницын* [в, 3], *С. А. Федорук* [в, 4]

[а] Центр теоретической физики, Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

[б] Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

[в] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[г] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Изучены безмассовые неприводимые представления группы Пуанкаре в шестимерном пространстве Минковского. Получены операторы Казимира соответствующей алгебры Пуанкаре, и найдены их спектры на состояниях, отвечающих безмассовым представлениям. Показано, что представления с конечными спинами (спиральностями) определяются двумя неотрицательными (полу)целыми числами, тогда как представления бесконечного (непрерывного) спина определяются одним вещественным числом и одним неотрицательным (полу)целым числом.

Massless irreducible representations of the Poincaré group in the six-dimensional Minkowski space are studied. The Casimir operators of the corresponding Poincaré algebra are obtained and their spectra are found on states corresponding to massless representations. It is shown that representations with finite spins (helicities) are defined by two nonnegative (half-)integer numbers, while representations of infinite (continuous) spin are defined by one real number and one nonnegative (half-)integer number.

PACS: 11.10.Kk; 11.30.Cp; 11.30.-j

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к построению полевых теорий в пространствах высших размерностей связан с развитием теорий струн (см., например, [1]), в которых четырехмерное пространство-время составляет лишь часть более общего многообразия большей размерности. В настоящее время несомненный успех AdS/CFT-соответствия и бурное развитие теорий полей с высшими спинами подтверждают значимость использования дополнительных измерений. Структура полевых теорий в конкретном пространстве

[1] E-mail: joseph@tspu.edu.ru

[2] E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

[3] E-mail: mpod@theor.jinr.ru

[4] E-mail: fedoruk@theor.jinr.ru

во многом определяется набором допустимых полей, которые соответствуют унитарным неприводимым представлениям группы симметрий этого пространства. Следовательно, первым важным этапом построения теории в высших измерениях является анализ свойств данной группы симметрии, в частности, классификация ее унитарных неприводимых представлений.

Естественным обобщением плоского четырехмерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ является пространство-время $\mathbb{R}^{1,D-1}$, группа симметрий которого есть группа Пуанкаре $ISO(1,D-1)$. Теория унитарных неприводимых представлений $ISO(1,3)$ разработана в [2–4]. Классификация унитарных неприводимых представлений многомерных групп Пуанкаре обсуждалась в работах [5–9] (см. также лекции [10] и статью [11]). Метод индуцированных представлений (см., например, [12, 13]), по-видимому, предоставляет общую схему построения представлений групп Пуанкаре в многомерных пространствах Минковского, но некоторые моменты, характерные для определенных размерностей, заслуживают самостоятельного детального изучения.

Предметом данной работы является изучение безмассовых представлений группы Пуанкаре $ISO(1,5)$. Отметим, что ряд исследований в этом направлении проделан в работах [14, 15]. Кроме того, в недавней работе [16] рассматриваются унитарные неприводимые представления пятимерной группы Пуанкаре, и на основании этого кратко обсуждаются случаи произвольной размерности. Однако многие вопросы, касающиеся, например, представлений с непрерывным спином, не были рассмотрены, и, следовательно, полный анализ таких представлений нельзя считать завершенным.

В нашей недавней работе [17] рассматривались неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре в шестимерном пространстве Минковского. Нами изучались как обычные представления конечного спина (спиральные состояния), так и представления бесконечного (непрерывного) спина, включающие бесконечное число безмассовых состояний. Но некоторые детали вычислений были опущены. В данной работе мы представим основные моменты в построении неприводимых 6D-безмассовых представлений, в частности, изучение операторов Казимира в системе отсчета светового конуса, которые не были рассмотрены в [17].

Статья организована следующим образом. В разд. 1 мы приводим явные выражения для операторов Казимира алгебры Пуанкаре $\mathfrak{iso}(1,5)$. В разд. 2 исследуются свойства операторов Казимира в системе отсчета стандартного безмассового тестового импульса. Здесь мы также описали последовательность шагов, необходимых при вычислении операторов Казимира четвертого и шестого порядков в системе отсчета светового конуса. Разд. 3 посвящен описанию безмассовых представлений с конечным спином (спиральностью), тогда как в разд. 4 мы обсуждаем безмассовые представления бесконечного (непрерывного) спина.

1. АЛГЕБРА $\mathfrak{iso}(1,5)$ И ЕЕ ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА

Алгебра Ли $\mathfrak{iso}(1,D-1)$ группы Пуанкаре $ISO(1,D-1)$ имеет $D(D+1)/2$ образующих P_m и $M_{mn}=-M_{nm}$, для которых выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$[P_n,P_k]=0, \quad [M_{mn},P_k]=i\left(\eta_{mk}P_n-\eta_{nk}P_m\right), \tag{1.1}$$

$$[M_{mn}, M_{kl}] = i\left(\eta_{mk}M_{nl} + \eta_{nl}M_{mk} - \eta_{ml}M_{nk} - \eta_{nk}M_{ml}\right); \quad m,n,k,l = 0,1,\ldots,D-1. \tag{1.2}$$

Здесь $\eta_{mn} = \mathrm{diag}\,(+1, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{D-1})$.

Ниже мы рассматриваем случай шестимерного $D=6$ пространства Минковского. Представим в обертывающей алгебре $\mathfrak{U}\big(\mathfrak{iso}(1,5)\big)$ два элемента: тензор третьего ранга [5]

$$W_{mnk} = \varepsilon_{mnklpr}P^l M^{pr} \tag{1.3}$$

и вектор

$$\Upsilon_m = \varepsilon_{mnklpr}P^n M^{kl} M^{pr}, \tag{1.4}$$

где полностью антисимметричный тензор ε_{mnklpr} нормирован условием $\varepsilon_{012345} = 1$. Операторы W_{mnk} и Υ_m коммутируют с операторами трансляций P_m. Следовательно, лоренц-инвариантные свертки операторов P_m, W_{mnk} и Υ_m коммутируют со всеми генераторами группы Пуанкаре — P_m и M_{mn}. Таким образом, три оператора

$$C_2 := P^m P_m, \tag{1.5}$$

$$C_4 := \frac{1}{24}\,W^{mnk}W_{mnk}, \tag{1.6}$$

$$C_6 := \frac{1}{64}\,\Upsilon^m\Upsilon_m \tag{1.7}$$

являются операторами Казимира для алгебры $\mathfrak{iso}(1,5)$ и имеют соответственно второй, четвертый и шестой порядки по генераторам P_n, M_{nm}. Известно, что других операторов Казимира у алгебры $\mathfrak{iso}(1,5)$ нет (см. комментарий по этому поводу в приложении работы [17]).

Явные выражения для операторов C_2, C_4, C_6 в терминах генераторов алгебры $\mathfrak{iso}(1,5)$ имеют вид

$$C_2 = P^m P_m, \tag{1.8}$$

$$C_4 = \Pi^m\Pi_m - \frac{1}{2}\,M^{mn}M_{mn}\,C_2, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} C_6 = {} & -\Pi^k M_{km}\,\Pi_l M^{lm} + \frac{1}{2}\Big(M^{mn}M_{mn} - 8\Big)C_4 + \\ & + \frac{1}{8}\Big[M^{kl}M_{kl}\Big(M^{mn}M_{mn} - 8\Big) + 2M^{mn}M_{nk}M^{kl}M_{lm}\Big]\,C_2, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где мы использовали обозначение

$$\Pi_m := P^k\,M_{km} = M_{km}\,P^k - 5i\,P_m. \tag{1.11}$$

2. СИСТЕМА ОТСЧЕТА СТАНДАРТНОГО БЕЗМАССОВОГО ТЕСТОВОГО ИМПУЛЬСА

В данной работе мы рассматриваем пространство состояний $\mathcal{H}$, в котором реализованы безмассовые представления алгебры $\mathfrak{iso}(1,5)$, следовательно, квадратичный оператор Казимира (1.8) равен

$$C_2 \equiv P^2 = P^m P_m = 0. \tag{2.1}$$

Пространство $\mathcal{H}$ натянуто на базисные векторы $|k,\sigma\rangle$, для которых выполняется условие

$$P_m|k,\sigma\rangle = k_m|k,\sigma\rangle, \tag{2.2}$$

где σ — набор собственных значений всех операторов, коммутирующих с операторами трансляций P_m. Выбор системы отсчета стандартного безмассового тестового импульса означает, что мы рассматриваем только те состояния $|k,\sigma\rangle$, для которых собственные значения k_m оператора P_m имеют вид

$$k^m := (k^0, k^a, k^5) = (k, 0, 0, 0, 0, k). \tag{2.3}$$

На таких состояниях компоненты оператора импульса равны

$$P^0 = P^5 = k, \quad P^a = 0, \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{2.4}$$

Отметим, что все операторные формулы в этом разделе понимаются как результат их действия на состояния, натянутые на векторы $|k,\sigma\rangle$, для которых выполняются (2.2) и (2.4). Обозначим подпространство таких состояний как $\mathcal{H}_0$.

Найдем выражения для операторов C_4 и C_6, ограниченных на подпространство $\mathcal{H}_0$. Для этого удобно перейти в базис светового конуса, в котором новые координаты $X^m = (X^+, X^-, X^a)$ для 6D-вектора выражаются через старые $X^m = (X^0, X^a, X^5)$ следующим образом:

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 \pm X^5\right). \tag{2.5}$$

При этом мы имеем

$$X^{\pm} = X_{\mp}, \quad X^a = -X_a.$$

Компоненты оператора импульса P в системе отсчета стандартного импульса (2.4) (на подпространстве $\mathcal{H}_0$) записываются как

$$P^+ = P_- = \sqrt{2}k, \quad P^- = P_+ = 0, \quad P^a = 0, \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{2.6}$$

Учитывая условия (2.1) и (2.6) в формуле (1.9), для оператора Казимира C_4, ограниченного на $\mathcal{H}_0$, мы получаем выражение

$$\hat{C}_4 = -\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a, \tag{2.7}$$

где введены эрмитовы операторы:

$$\hat{\Pi}_a := \sqrt{2}kM_{+a}. \tag{2.8}$$

Выражение для оператора Казимира (1.10) в координатах светового конуса (на состояниях (2.2), (2.4)) имеет вид

$$\hat{C}_6 = \hat{\Pi}_b M_{ba}\,\hat{\Pi}_c M_{ca} \; - \; \frac{1}{2}\,M_{bc}M_{bc}\,\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a. \tag{2.9}$$

В приложении приведен детальный вывод формулы (2.9).

Из (1.2) следует, что операторы $\hat{\Pi}_a$ и M_{ab}, присутствующие в выражениях (2.7) и (2.9), образуют алгебру Ли группы $ISO(4)$:

$$[\hat{\Pi}_a, \hat{\Pi}_b] = 0, \quad [\hat{\Pi}_a, M_{bc}] = i\left(\delta_{ab}\hat{\Pi}_c - \delta_{ac}\hat{\Pi}_b\right), \tag{2.10}$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i\,(\delta_{bc}M_{ad} - \delta_{bd}M_{ac} + \delta_{ac}M_{db} - \delta_{ad}M_{cb}). \tag{2.11}$$

Кроме того, операторы Казимира $\hat{C}_4$, $\hat{C}_6$, действие которых ограничено на $\mathcal{H}_0$, даются выражениями (2.7), (2.9) и, таким образом, являются операторами Казимира алгебры $\mathfrak{iso}(4)$.

Поэтому в безмассовом случае (2.1) унитарные неприводимые представления определяются собственными значениями операторов Казимира (2.7) и (2.9) алгебры $\mathfrak{iso}(4)$. В случае этой некомпактной симметрии существует два различных типа унитарных неприводимых представлений, определяемых оператором Казимира (2.7):

а) представления *конечного спина (спиральные представления)* соответствуют условию нулевой нормы для $SO(4)$ вектора $\hat{\Pi}_a$:

$$\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a = 0; \tag{2.12}$$

б) представления *бесконечного (непрерывного) спина* соответствуют условию ненулевой нормы для $SO(4)$ вектора $\hat{\Pi}_a$:

$$\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a = \mu^2 \neq 0. \tag{2.13}$$

В следующих разделах мы приведем эти унитарные безмассовые представления.

3. БЕЗМАССОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОГО СПИНА

Этот случай характеризуется условием (2.12), из которого следует, что все компоненты $\hat{\Pi}_a$ будут нулевыми на данных состояниях:

$$\hat{\Pi}_a = 0, \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{3.1}$$

Следовательно, операторы Казимира (2.7) и (2.9) алгебры $\mathfrak{iso}(4)$ в этом случае равны нулю. Это свойство сохраняется и при переходе к произвольной системе отсчета. Следовательно, все операторы Казимира (1.8)–(1.10) алгебры $\mathfrak{iso}(1,5)$ принимают нулевые значения (см. также [14]) на безмассовых состояниях конечного спина:

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_6 = 0. \tag{3.2}$$

Из уравнения (3.1) следует, что на данных представлениях евклидовы трансляции реализуются тривиально. Как результат, такие унитарные неприводимые представления группы $ISO(4)$ конечномерны и индуцированы неприводимыми представлениями группы $SO(4)$. При этом операторы Казимира алгебры $\mathfrak{so}(4)$ определяют 6D-операторы спиральности.

3.1. Операторы Казимира алгебры $\mathfrak{so}(4)$ как 6D-операторы спиральности. В случае представлений конечного спина операторы, коммутирующие со всеми генераторами алгебры $\mathfrak{so}(1,5)$, определяются с помощью 6D векторного оператора Υ_m, определенного в (1.4), и 6D векторного оператора S_m, определенного выражением[1] (подобная конструкция рассматривалась в [16])

$$S_m \;:=\; 3M^{nk}P_{[m}M_{nk]} \;=\; M^{nk}M_{nk}P_m - 2M^{kn}M_{mn}P_k. \tag{3.3}$$

В системе отсчета стандартного импульса (2.6) векторы Υ_m и S_m имеют следующие компоненты:

$$\Upsilon^+ = \Lambda_1 P^+, \quad \Upsilon^- = \Upsilon_a = 0, \tag{3.4}$$

$$S^+ = \Lambda_2 P^+, \quad S^- = S_a = 0, \tag{3.5}$$

где мы ввели обозначения

$$\Lambda_1 \;:=\; \epsilon_{abcd}M_{ab}M_{cd}\,, \quad \Lambda_2 \;:=\; M_{ab}M_{ab}. \tag{3.6}$$

При выводе (3.4), (3.5) мы воспользовались свойствами полностью антисимметричного тензора ε_{mnklpr} в базисе светового конуса: $\varepsilon_{-+abcd} = -\varepsilon_{+-abcd} = \varepsilon^{+-abcd} = -\varepsilon^{-+abcd} = \varepsilon_{abcd}$. Подчеркнем, что Λ_1 и Λ_2 являются операторами Казимира для алгебры $\mathfrak{so}(4)$.

Условия (3.4) и (3.5) показывают, что векторы Υ_m и S_m коллинеарны вектору P_m (2.6) в системе отсчета стандартного безмассового тестового импульса. Это свойство сохраняется в любой системе отсчета. А именно, можно показать, что в случае безмассовых представлений конечного спина, определяемых условиями (3.2), компоненты векторов Υ_m и S_m удовлетворяют тождествам

$$P^m P_m = 0, \quad P^m \Upsilon_m = 0, \quad [\Upsilon_m, P_l] = 0, \tag{3.7}$$

$$S^m S_m = 0, \quad P^m S_m = 0, \quad [S_m, P_n] = 0. \tag{3.8}$$

Следовательно, на состояниях конечного спина векторы Υ и S являются светоподобными, поперечными вектору P и коммутирующими с ним. Поэтому векторы Υ и S пропорциональны вектору P (см. также [14, 16]):

$$\Upsilon_m = \Lambda_1 P_m, \quad S_m = \Lambda_2 P_m. \tag{3.9}$$

Операторы Λ_1 и Λ_2 из (3.6) могут быть определены также посредством соотношений

$$\Lambda_1 := \frac{\Upsilon_0}{P_0}, \quad \Lambda_2 := \frac{S_0}{P_0}. \tag{3.10}$$

Формулы (3.9), (3.10) подобны формуле для 4D-оператора спиральности, если заменить Υ_m и S_m на 4D-вектор Паули–Любанского. Поэтому мы можем считать, что

---

[1] Здесь мы использовали стандартное определение антисимметризации $A_{[n_1}B_{n_2}C_{n_3]} = \frac{1}{3!}(A_{n_1}B_{n_2}C_{n_3} + A_{n_2}B_{n_3}C_{n_1} + A_{n_3}B_{n_1}C_{n_2} - A_{n_2}B_{n_1}C_{n_3} - A_{n_1}B_{n_3}C_{n_2} - A_{n_3}B_{n_2}C_{n_1})$.

операторы Λ_1 и Λ_2 являются 6D-операторами спиральности, совпадающими в системе отсчета стандартного безмассового тестового импульса с операторами Казимира алгебры $\mathfrak{so}(4)$. Таким образом, безмассовые представления конечного спина характеризуются парой чисел (λ_1, λ_2), где λ_1 и λ_2 являются собственными значениями представленных в (3.10) операторов Казимира Λ_1 и Λ_2.

При определении спектра операторов Λ_1, Λ_2 на неприводимых представлениях удобно воспользоваться изоморфизмом алгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Следовательно, операторы (3.6) записываются в терминах генераторов $M^{(+)}_{\rm i}$ и $M^{(-)}_{\rm i'}$ $({\rm i}, {\rm i}' = 1, 2, 3)$ двух алгебр $\mathfrak{su}(2)$, а именно:

$$\Lambda_1 = 8\left(M^{(+)}_{\rm i} M^{(+)}_{\rm i} - M^{(-)}_{\rm i'} M^{(-)}_{\rm i'}\right), \quad \Lambda_2 = 4\left(M^{(+)}_{\rm i} M^{(+)}_{\rm i} + M^{(-)}_{\rm i'} M^{(-)}_{\rm i'}\right). \tag{3.11}$$

При выводе формул (3.11) использовались символы ’т Хоофта [18], которые связывают (анти)самодуальные части генераторов $\mathfrak{so}(4)$ с генераторами двух алгебр $\mathfrak{su}(2)$ (детали см. в [17]).

В случае унитарных неприводимых представлений операторы $M^{(+)}_{\rm i} M^{(+)}_{\rm i}$ и $M^{(-)}_{\rm i'} M^{(-)}_{\rm i'}$ равны $j_+(j_+ + 1)$ и $j_-(j_- + 1)$ соответственно, где $j_\pm$ — неотрицательные целые или полуцелые числа в случае унитарных неприводимых представлений. Следовательно, собственные значения операторов спиральности (3.10) имеют вид

$$\lambda_1 = 8j_+(j_+ + 1) - 8j_-(j_- + 1), \quad \lambda_2 = 4j_+(j_+ + 1) + 4j_-(j_- + 1). \tag{3.12}$$

3.2. Значения спиральностей некоторых 6D-полей. Для определения значений спиральностей конкретных 6D безмассовых полей конечного спина можно использовать следующую схему. Сначала рассматриваем неприводимое полевое представление группы $SO(4)$ с фиксированными собственными значениями операторов спиральности (3.6). Затем восстанавливаем соответствующее лоренц-ковариантное 6D-поле, которое после фиксаций калибровок и использования 6D-уравнений движения в системе отсчета стандартного импульса имеет те же независимые компоненты, что и 4D-поле, описывающее неприводимое представление группы $SO(4)$.

Приведем здесь значения спиральностей для некоторых 6D безмассовых полей конечного спина, которые были найдены в работе [17] согласно описанной выше схеме:

- векторное поле A_m:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 6; \quad j_+ = j_- = \frac{1}{2};$$

- симметричное тензорное калибровочное поле 2-го ранга $h^{mn} = h^{nm}$:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 16; \quad j_+ = j_- = 1;$$

- антисимметричное самодуальное тензорное поле 3-го ранга $B^{(+)}_{mnk} = \varepsilon_{mnklpr} B^{(+)lpr}/3!$:

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = 8; \quad j_+ = 1, \quad j_- = 0;$$

- антисимметричное антисамодуальное тензорное поле 3-го ранга $B^{(-)}_{mnk} = -\varepsilon_{mnklpr} B^{(-)lpr}/3!$:

$$\lambda_1 = -16, \quad \lambda_2 = 8; \quad j_+ = 0, \quad j_- = 1.$$

4. БЕЗМАССОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО (НЕПРЕРЫВНОГО) СПИНА

В этом случае евклидов четырехвектор $\hat{\Pi}_a$ отличен от нуля вследствие требуемого условия (2.13). Поэтому представления группы $ISO(4)$, индуцирующие 6D релятивистские безмассовые представления, являются бесконечномерными. На этих представлениях оператор Казимира (2.7) имеет ненулевые собственные значения:

$$C_4 \;=\; \hat{C}_4 \;=\; -\mu^2, \quad \mu \neq 0. \tag{4.1}$$

Более того, при выполнении (2.13) мы можем перейти в такую систему отсчета, где у четырехвектора $\hat{\Pi}$ ненулевой является только четвертая компонента:

$$\hat{\Pi}_1 = \hat{\Pi}_2 = \hat{\Pi}_3 = 0, \quad \hat{\Pi}_4 = \mu. \tag{4.2}$$

Зафиксировав компоненты $\hat{\Pi}_a$ в виде (4.2), мы, по существу, снова используем процедуру индуцированных представлений, только в этом случае уже для описания представлений группы $ISO(4)$ (см., например, [21]). Подгруппой стабильности вектора с компонентами (4.2) является компактная подгруппа $SO(3)$ группы $ISO(4)$. Поэтому в данном случае неприводимые представления группы $ISO(4)$ будут индуцироваться неприводимыми представлениями подгруппы $SO(3)$.

Продемонстрируем это утверждение более явно. Используя символы 'т Хоофта в выражении (2.9), можно показать, что оператор $\hat{C}_6$ на состояниях с условиями (4.2) (см. детали в [17]) равен

$$\hat{C}_6 \;=\; -\mu^2\, J_{\mathrm{i}} J_{\mathrm{i}}, \tag{4.3}$$

где операторы

$$J_{\mathrm{i}} \;:=\; M^{(+)}_{\mathrm{i}} + M^{(-)}_{\mathrm{i}} \;=\; -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} M_{jk}, \quad \mathrm{i} = 1,2,3, \tag{4.4}$$

являются генераторами группы $SO(3)$. В случае унитарных представлений необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$J^2 := J_{\mathrm{i}} J_{\mathrm{i}} = \; s(s+1), \tag{4.5}$$

где s — неотрицательное целое или полуцелое число. Следовательно, в случае неприводимых представлений бесконечного (непрерывного) спина оператор Казимира (1.10) принимает собственные значения:

$$C_6 \;=\; \hat{C}_6 \;=\; -\mu^2\, s(s+1). \tag{4.6}$$

Таким образом, безмассовые представления бесконечного спина характеризуются парой чисел (μ, s), где вещественный параметр μ определяет собственное значение оператора Казимира (4.1), а неотрицательное (полу)целое число s (вместе с μ^2) необходимо для задания собственного значения оператора Казимира (4.6).

Далее мы продемонстрируем полученные нами утверждения о спектре операторов Казимира для состояний бесконечного спина на примере модели, предложенной в [19]. Данная конструкция является обобщением 4D-модели Вигнера–Баргмана [2–4] для более высокой пространственно-временной размерности.

Согласно [19], система бесконечного целого спина в шестимерном пространстве-времени описывается в квантовом пространстве пространственно-временными операторами координаты и импульса:

$$x^m, p_m, \quad [x^m, p_k] = i\delta^m_k, \tag{4.7}$$

а также двумя парами дополнительных векторных бозонных операторов:

$$w^m, \xi_m, \quad [w^m, \xi_k] = i\delta^m_k; \qquad u^m, \zeta_m, \quad [u^m, \zeta_k] = i\delta^m_k. \tag{4.8}$$

Поле с бесконечным целым спином Ψ удовлетворяет обобщенным 6D-уравнениям Вигнера–Баргмана [19]

$$p^2\,\Psi = 0, \quad \xi{\cdot}p\,\Psi = 0, \quad (w{\cdot}p - \mu)\,\Psi = 0, \quad (\xi{\cdot}\xi + 1)\,\Psi = 0 \tag{4.9}$$

и дополнительным уравнениям

$$u{\cdot}p\,\Psi = 0, \quad \zeta{\cdot}p\,\Psi = 0, \quad \zeta{\cdot}\xi\,\Psi = 0, \quad \zeta{\cdot}\zeta\,\Psi = 0, \quad (u{\cdot}\zeta - s)\,\Psi = 0, \tag{4.10}$$

где использованы обозначения $xy := x^m y_m$. В базисе светового конуса (2.6), где $p^- = p_a = 0$, $p^+ = \mathrm{const} \neq 0$, и в представлении $\xi_m = -i\partial/\partial w^m$, $\zeta_m = -i\partial/\partial u^m$ решением уравнений (4.9), (4.10) является поле

$$\Psi = \delta(p^+ w^- - \mu)\,\delta(p^+ u^-)\,\Phi(w_a, u_a). \tag{4.11}$$

В пространстве полей Ψ алгебра $\mathfrak{iso}(4)$ (2.10), (2.11) реализована в виде следующих генераторов:

$$M_{ab} = i\left(w_a\frac{\partial}{\partial w_b} - w_b\frac{\partial}{\partial w_a} + u_a\frac{\partial}{\partial u_b} - u_b\frac{\partial}{\partial u_a}\right), \quad \hat{\Pi}_a = -i\mu\frac{\partial}{\partial w_a}. \tag{4.12}$$

Используя уравнения движения (4.9) и (4.10), записанные в базисе светового конуса, мы находим, что в представлении (4.12) спектр операторов Казимира (2.7), (2.9) в пространстве полей Ψ совпадает со значениями (4.1), (4.6) соответственно. Таким образом, поле бесконечного спина с двумя дополнительными векторными переменными, подчиняющееся обобщенным 6D-уравнениям Вигнера–Баргмана (4.9) и дополнительным уравнениям (4.10), описывает неприводимое представление бесконечного спина (μ, s).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы изучили операторы Казимира (1.5), (1.6), (1.7) группы Пуанкаре $ISO(1,5)$ в базисе светового конуса и провели анализ ее безмассовых унитарных неприводимых представлений.

Показано, что все такие представления индуцируются неприводимыми представлениями подгруппы стабильности безмассового тестового импульса. Согласно условиям (2.12) и (2.13), неприводимые представления $ISO(4)$ распадаются на два класса, что приводит к двум различным типам безмассовых унитарных представлений группы $ISO(1,5)$: представлениям конечного спина (спиральным представлениям), которые классифицируются с помощью двух чисел $j_+ \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $j_- \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и представлениям бесконечного (непрерывного) спина, описываемым одним вещественным числом μ и одним неотрицательным (полу)целым числом s. Оба типа представлений изучены, и приведены примеры для случаев тензорных полей 1-, 2- и 3-го ранга, а также для полей, описывающих представления бесконечного спина. Результаты исследований находятся в согласии с [5, 10], где была дана классификация безмассовых представлений групп Пуанкаре в случае произвольной размерности.

В следующих статьях мы планируем провести с помощью аналогичных методов анализ массивных представлений группы Пуанкаре $ISO(1,5)$, а также построить твисторную реализацию (см., например, [20]) безмассовых представлений бесконечного спина.

Благодарности. Работа частично поддержана проектом FEWF-2020-0003 Министерства образования РФ и грантом РФФИ (проект № 19-01-00726а).

Приложение

ОПЕРАТОР КАЗИМИРА C_6, ОГРАНИЧЕННЫЙ НА ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{H}_0$

При выполнении условия $C_2 = P^2 = 0$ выражение (1.10) для C_6 принимает вид

$$(C_6)\big|_{P^2=0} = -\,\Pi^k\, M_{km}\, \Pi_\ell\, M^{\ell m} \;+\; \frac{1}{2}\Big(M^{mn}M_{mn} - 8\Big)\,\Pi^k\Pi_k. \tag{П.1}$$

Используя коммутационные соотношения

$$[\Pi_n,\, \Pi_k] = -i\, M_{nk}\, C_2, \quad [M_{mn}, \Pi_k] = i\,(\eta_{mk}\Pi_n - \eta_{nk}\Pi_m) \tag{П.2}$$

и снова условие $C_2 = P^2 = 0$, мы получаем, что первое слагаемое в (П.1) не изменяется при переносе всех операторов Π_m вправо:

$$\begin{aligned}\Pi^k M_{km}\, \Pi_\ell M^{\ell m} &= (M_{km}\, \Pi^k - 5i\Pi_m)\Pi_\ell M^{\ell m} = M_{km}\, \Pi^k\,(M^{\ell m}\, \Pi_\ell - 5i\Pi^m) = \\ &= M_{km}\, M^{\ell m}\, \Pi^k\, \Pi_\ell - iM_{km}(\eta^{k\ell}\Pi^m - \eta^{km}\Pi^\ell)\Pi_\ell = M_{km}\, M^{\ell m}\, \Pi^k\, \Pi_\ell,\end{aligned} \tag{П.3}$$

где

$$\Pi_m\Pi_\ell M^{\ell m} = \frac{1}{2}[\Pi_m,\, \Pi_\ell]\, M^{\ell m} \overset{P^2=0}{=} 0, \quad M_{km}\, \Pi^k\, \Pi^m = M_{km}\, \frac{1}{2}[\Pi^k,\, \Pi^m] \overset{P^2=0}{=} 0.$$

Подставим определение (1.11) для операторов Π_n в последнее выражение в (П.3) и перенесем с помощью коммутационных соотношений (1.1) все компоненты P_n вправо. В результате этого получаем

$$\begin{aligned}M_{km}\, M^{\ell m}\, \Pi^k\, \Pi_\ell &= M_{km}\, M^{\ell m}(M^{sk}\, P_s - 5i\, P^k)(M_{n\ell}P^n - 5i\, P_\ell) = \\ &= M_{km}\, M^{\ell m}(M^{sk} - 5i\,\eta^{sk})\big(M_{n\ell}P_sP^n + i(\eta_{s\ell}P_n - \eta_{sn}P_\ell)P^n - 5i\, P_sP_\ell\big) \overset{P^2=0}{=} \\ &\overset{P^2=0}{=} M_{km}\, M^{\ell m}\big(M^{sk}M_{n\ell}P_sP^n - 6iM^{sk}\, P_sP_\ell - 5iM_{n\ell}P^kP^n - 30\, P^kP_\ell\big).\end{aligned} \tag{П.4}$$

После раскрытия скобок и применения (1.2) второй и третий члены в скобке правой части (П.4) принимают вид

$$-6iM_{km}\,M^{\ell m}M^{sk}\,P_sP_\ell = -3iM_{km}[M^{\ell m},M^{sk}]P_sP_\ell \overset{P^2=0}{=} 6M_{mk}M^{\ell k}P^mP_\ell\,, \qquad (\text{П}.5)$$

$$\begin{aligned} -\,5iM_{km}\,M^{\ell m}M_{n\ell}P^kP^n &= -5iM^{\ell m}M_{km}M_{n\ell}P^kP^n - 5i[M_{km},M^{\ell m}]M_{n\ell}P^kP^n = \\ &= -\frac{5}{2}iM^{\ell m}[M_{km},\,M_{n\ell}]P^kP^n + 20M_{k\ell}M^{n\ell}P^kP_n \overset{P^2=0}{=} 25M_{mk}M^{nk}P^mP_n. \qquad (\text{П}.6)\end{aligned}$$

Итак, после подстановки (П.5) и (П.6) в (П.4) мы получаем

$$\Pi^kM_{km}\,\Pi_\ell M^{\ell m} \overset{P^2=0}{=} M_{km}\,M^{\ell m}M^{sk}M_{n\ell}P_sP^n + M_{mk}M^{\ell k}P^mP_\ell. \qquad (\text{П}.7)$$

Второй член в (П.1) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\Big(M^{mn}M_{mn}-8\Big)\,\Pi_k\Pi^k \overset{P^2=0}{=} \frac{1}{2}\,M^{mn}M_{mn}\,M_{\ell k}M^{sk}P^\ell P_s - 4M_{\ell k}M^{sk}P^\ell P_s, \qquad (\text{П}.8)$$

где использовано тождество

$$\Pi_k\Pi^k = (M_{\ell k}P^\ell - i5P_k)(M^{sk}P_s - i5P^k) \overset{P^2=0}{=} M_{\ell k}M^{sk}P^\ell P_s. \qquad (\text{П}.9)$$

Подстановка соотношений (П.7) и (П.8) в (П.1) дает нам следующее выражение для C_6:

$$(C_6)|_{P^2=0} = -M_{km}\,M^{\ell m}M^{sk}M_{n\ell}P_sP^n - 5M_{mk}M^{\ell k}P^mP_\ell + \frac{1}{2}\,M^{mn}M_{mn}M_{\ell k}M^{sk}P^\ell P_s, \qquad (\text{П}.10)$$

в котором учтено условие $P^2=0$ и все векторные компоненты оператора трансляций P_n находятся справа.

В дальнейшем будут использованы выражения для свертки двух 6D-векторов X^m и Y^m в базисе светового конуса:

$$\begin{aligned} X^mY_m &= X^+Y_+ + X^-Y_- + X^aY_a = \\ &= \eta^{-+}\,X_-Y_+ + \eta^{+-}\,X_+Y_- + \eta^{ab}\,X_bY_a \;=\; X_-Y_+ + X_+Y_- - X_aY_a, \qquad (\text{П}.11)\end{aligned}$$

где компоненты метрического тензора в базисе светового конуса равны $\eta^{\pm\mp}{=}\eta_{\pm\mp}{=}1$, $\eta^{\pm\pm}=\eta_{\pm\pm}=0$, $\eta^{ab}=\eta_{ab}=-\delta_{ab}$.

Рассмотрим три члена в правой части (П.10) и найдем отдельно их значения на состояниях со стандартным безмассовым тестовым импульсом (2.4) в базисе светового конуса (2.6).

1) Первый член в правой части (П.10) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&- M_{km}\, M^{\ell m} M^{sk} M_{n\ell} P_s P^n = -2k^2 M_{km} M^{\ell m} M^{-k} M_{+\ell} = \\
&\quad = -2k^2 (M_{am} M^{\ell m} M^{-a} + M_{+m} M^{\ell m} M^{-+}) M_{+\ell} = \\
&\quad = -2k^2 (M_{ac} M^{bc} + M_{a+} M^{b+} + M_{a-} M^{b-})\, M^{-a} M_{+b} - \\
&\quad - 2k^2 (M_{ac} M^{-c} + M_{a+} M^{-+})\, M^{-a} M_{+-} - \\
&\quad - 2k^2 (M_{+c} M^{bc} + M_{+-} M^{b-})\, M^{-+} M_{+b} - 2k^2 (M_{+c} M^{-c})\, M^{-+} M_{+-} = \\
&\quad = (M_{ac} M_{bc} - \hat{\Pi}_a \hat{K}_b - \hat{K}_a \hat{\Pi}_b)\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b - (M_{ac} \hat{\Pi}_c + \hat{\Pi}_a M_{+-})\, \hat{\Pi}_a M_{+-} - \\
&\quad - (\hat{\Pi}_c M_{bc} + M_{+-} \hat{\Pi}_b)\, M_{+-} \hat{\Pi}_b + (\hat{\Pi}_c \hat{\Pi}_c)\, M_{+-} M_{+-},
\end{aligned} \tag{П.12}$$

где $a, b, c = 1, 2, 3, 4$ и введено обозначение для оператора

$$\hat{K}_b = \frac{1}{\sqrt{2}k}\, M_{-b} = \frac{1}{\sqrt{2}k}\, M^{b+}. \tag{П.13}$$

Для дальнейшего упрощения выражения (П.12) используем соотношения

$$\begin{gathered}
[\hat{\Pi}_a,\ \hat{K}_b] = i\,(M_{ab} - \delta_{ab} M_{+-}), \qquad [\hat{\Pi}_a,\ \hat{\Pi}_b] = 0 \Rightarrow M_{ca} \hat{\Pi}_c\, \hat{\Pi}_a = 0, \\
[M_{bc},\ M_{+-}] = 0, \qquad [\hat{\Pi}_b,\ M_{+-}] = i\, \hat{\Pi}_b \Rightarrow \hat{\Pi}_b\, M_{+-} = (M_{+-} + i)\, \hat{\Pi}_b, \\
[\hat{\Pi}_a, M_{bc}] = i\left(\delta_{ab} \hat{\Pi}_c - \delta_{ac} \hat{\Pi}_b\right) \Rightarrow [\hat{\Pi}_c, M_{bc}] = -3i \hat{\Pi}_b,
\end{gathered} \tag{П.14}$$

которые следуют из (1.2). В результате выражение (П.12) принимает вид

$$\begin{aligned}
&M_{ac} M_{bc}\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b - (\hat{K}_b \hat{\Pi}_a - i\delta_{ab} M_{+-})\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b - \\
&\quad - \hat{K}_a \hat{\Pi}_a\, \hat{\Pi}_b^2 - (M_{+-} + i)(M_{+-} + 2i)\, \hat{\Pi}_a^2 - \\
&\quad - (M_{+-} + i)(M_{bc} \hat{\Pi}_c - 3i \hat{\Pi}_b) \hat{\Pi}_b - M_{+-}(M_{+-} + i) \hat{\Pi}_b^2 + (M_{+-} + 2i)^2\, \hat{\Pi}_a^2 = \\
&\quad = M_{ac} M_{bc}\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b - 2\hat{K}_a \hat{\Pi}_a\, \hat{\Pi}_b^2 - \left(M_{+-}^2 - 4i M_{+-} + 5\right) \hat{\Pi}_a^2.
\end{aligned} \tag{П.15}$$

2) Второй член в правой части (П.10) записывается в виде

$$-5\, M_{mk} M^{\ell k} P^m P_\ell = -10k^2 M_{+k} M^{-k} = -10k^2 M_{+a} M^{-a} = 5 \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a. \tag{П.16}$$

3) Третий член в правой части (П.10) преобразуется как

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\, M^{mn} M_{mn} M_{\ell k} M^{ek} P_e P^\ell = -\frac{1}{2}\, M^{mn} M_{mn} \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a = \\
&\quad = -\frac{1}{2}\, (2\, M^{+-} M_{+-} + 2\, M^{+b} M_{+b} + 2\, M^{-b} M_{-b} + M^{bc} M_{bc})\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a = \\
&\quad = (M_{+-} M_{+-} + \hat{K}_b \hat{\Pi}_b + \hat{\Pi}_b \hat{K}_b - \frac{1}{2}\, M_{bc} M_{bc})\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a.
\end{aligned} \tag{П.17}$$

Подставляя (П.15), (П.16) и (П.17) в правую часть (П.10), получаем выражение для оператора Казимира шестого порядка $\hat{C}_6 = (C_6)|_{\text{light-cone}}$ в системе отсчета безмассового стандартного импульса:

$$\hat{C}_6 = M_{ac} M_{bc}\, \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b - \frac{1}{2}\, M_{bc} M_{bc} \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a = \hat{\Pi}_a M_{ac}\, \hat{\Pi}_b M_{bc} - \frac{1}{2}\, M_{bc} M_{bc} \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a. \tag{П.18}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* Superstring Theory. Cambridge Univ. Press, 1987.
2. *Wigner E. P.* On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.
3. *Wigner E. P.* Relativistische Wellengleichungen // Z. Phys. 1947. V. 124. P. 665.
4. *Bargmann V., Wigner E. P.* Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations // Proc. Nat. Acad. Sci. US. 1948. V. 34. P. 211.
5. *Brink L., Khan A. M., Ramond P., Xiong X.-Z.* Continuous Spin Representations of the Poincare and SuperPoincare Groups // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 6279; arXiv:hep-th/0205145.
6. *Khan A. M., Ramond P.* Continuous Spin Representations from Group Contraction // J. Math. Phys. 2005. V. 46. P. 053515; arXiv:hep-th/0410107.
7. *Bekaert X., Boulanger N.* On Geometric Equations and Duality for Free Higher Spins // Phys. Lett. B. 2003. V. 561. P. 183; arXiv:hep-th/0301243.
8. *Bekaert X., Boulanger N.* Tensor Gauge Fields in Arbitrary Representations of $GL(D,R)$ // Commun. Math. Phys. 2007. V. 271. P. 723; arXiv:hep-th/0606198.
9. *Bandos I., Bekaert X., de Azcarraga J. A., Sorokin D., Tsulaia M.* Dynamics of Higher Spin Fields and Tensorial Space // JHEP. 2005. V. 0505. P. 031; hep-th/0501113.
10. *Bekaert X., Boulanger N.* The Unitary Representations of the Poincaré Group in Any Spacetime Dimension. Lectures Presented at 2nd Modave Summer School in Theor. Phys., Modave, Belgium, 6–12 Aug. 2006; arXiv:hep-th/0611263.
11. *Weinberg S.* Massless Particles in Higher Dimensions // Phys. Rev. D. 2020. V. 102. P. 095022; arXiv:2010.05823[hep-th].
12. *Barut A. O., Raczka R.* Theory of Group Representations and Applications. Polish Sci. Publ., 1977.
13. *Isaev A. P., Rubakov V. A.* Theory of Groups and Symmetries (I): Finite Groups, Lie Groups, and Lie Algebras. World Sci., 2019.
14. *Mezincescu L., Routh A. J., Townsend P. K.* Supertwistors and Massive Particles // Ann. Phys. 2014. V. 346. P. 66; arXiv:1312.2768[hep-th].
15. *Arvanitakis A. S., Mezincescu L., Townsend P. K.* Pauli–Lubanski, Supertwistors, and the Super-Spinning Particle // JHEP. 2017. V. 1706. P. 151; arXiv:1601.05294[hep-th].
16. *Kuzenko S. M., Pindur A. E.* Massless Particles in Five and Higher Dimensions // Phys. Lett. B. 2021. V. 812. P. 136020; arXiv:2010.07124[hep-th].
17. *Buchbinder I. L., Fedoruk S. A., Isaev A. P., Podoinitsyn M. A.* Massless Finite and Infinite Spin Representations of Poincaré Group in Six Dimensions // Phys. Lett. B. 2021. V. 813. P. 136064; arXiv:2011.14725[hep-th].
18. *'t Hooft G.* Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 3432.
19. *Bekaert X., Mourad J.* The Continuous Spin Limit of Higher Spin Field Equations // JHEP. 2006. V. 0601. P. 115; arXiv:hep-th/0509092.
20. *Buchbinder I. L., Fedoruk S., Isaev A. P.* Twistorial and Space-Time Descriptions of Massless Infinite Spin (Super)Particles and Fields // Nucl. Phys. B. 2019. V. 945. P. 114660; arXiv:1903.07947[hep-th].
21. *Bekaert X., Skvortsov E. D.* Elementary Particles with Continuous Spin // Intern. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32. P. 1730019; arXiv:1708.01030 [hep-th].

Получено 15 июля 2021 г.